Course Project

王子畅 2021011612

2023 年 6 月 27 日

Problem 1. 可以得到与第二篇论文中相同的结论 (1133 页图 1), 即灰色部分的矩阵的秩均为 1.

事实上, 根据定义

$$P\sigma(\tau_i^j) = \sigma(\tau_i^j) + \psi_l(\tau_i^j)\int_a^{\tau_i^j} g_l(t)\sigma(t)dt + \psi_r(\tau_i^j)\int_a^{\tau_i^j} g_r(t)\sigma(t)dt$$

可以得到: $A = I + D_{\psi_l}L + D_{\psi_r}R$, 其中 I 为单位阵, D_{ψ_l}, D_{ψ_r} 为由所有 $\psi_l(\tau_i^j), \psi_r(\tau_i^j)$ 构成的对角阵, 而 L 为分块下三角矩阵, R 为分块上三角矩阵.

结合第一篇论文算法中的式子, 更进一步的分析可以得到 L, R 的每个对角块上均为 $\frac{b_{i+1}-b_i}{2}\mathcal{C}_b^K\mathcal{I}_l^s\mathcal{C}_f^K D_{g_l}^i$ 和 $\frac{b_{i+1}-b_i}{2}\mathcal{C}_b^K\mathcal{I}_r^s\mathcal{C}_f^K D_{g_r}^i$, 而其余部分均形如 $\psi(*)W\mathcal{C}_f^K D_g^i$, 其中 $W = (2, 0, -\frac{2}{3}, \ldots)$ 为 Clenshaw-Curtis 积分的权重组成的行向量, 自然秩为 1.

另外, 当分划足够细时, 积分的结果也会足够小, 从而导致每个对角块足够接近单位阵, 进而每个对角块都满秩.

Problem 2. 同伦方法可能会有帮助: 选取一个已知解的问题, 每次向目标问题前进一点, 并将上一次的解作为下一次求解中 Newton 迭代法的起点.

Problem 3.

Problem 4.