Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

Realizado por:

Fábio Oliveira - 2022145902

Bruno Tiago Ferreira Martins – 2022147149

Carlos Emanuel Fernandes Silva - 2022127048

Índice

Índice figuras

1. Introdução

1.1 O que é um sistema de equações diferenciais: definição e propriedades

Um sistema de equações diferenciais múltiplo é um sistema constituído por duas ou mais equações que envolvem derivadas de duas ou mais variáveis dependentes relativamente a uma só variável independente, estas não precisam necessariamente de ser de primeira ordem.

1.2 Aplicabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais

Áreas como a engenharia, biologia, economia, entre outras, utilizam o ramo matemático das equações diferenciais para resoluções de problemas. Apresentamos alguns seguidamente exercícios relacionados com algumas dessas áreas e propostos pelo professor através da ajuda da nossa aplicação.

2. Métodos Numéricos para resolução de PVI de Sistemas de Equações Diferenciais

2.1 Método de NEuler

2.1.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NEulerSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
%NEULERSED Método de Euler para um Sistema de SED/PVI
%   Detailed explanation goes here
%   20/04/2022  Arménio Correia   armenioc@isec.pt

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1) = u0;
v(1) = v0;
for i = 1:n
    u(i+1) = u(i)+h*f(t(i),u(i),v(i));
    v(i+1) = v(i)+h*g(t(i),u(i),v(i));
end
end
```

Figura 1 - Método de NEuler

2.2 Método de NEuler Melhorado

2.2.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NEulerMelhoradoSED(f,g,a,b,n,u0,v0)

   h = (b-a)/n;
   t = a:h:b;
   u = zeros(1,n+1);
   v = zeros(1,n+1);
   u(1) = u0;
   v(1) = v0;


   for i=1:n

        k1u = f( t(i) , u(i) , v(i) );
        k1v = g( t(i) , u(i) , v(i) );

        k2u = f( t(i+1) , u(i) + k1u*h , v(i) + k1v*h);
        k2v = g( t(i+1) , u(i) + k1u*h , v(i) + k1v*h);

        u(i+1) = u(i) + h*( (k1u + k2u) / 2 );
        v(i+1) = v(i) + h*( (k1v +k2v ) / 2 );

   end

end
```

Figura 2 - Método de NEuler Melhorado

2.3 Método NRK2

2.3.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NRK2SED(f,g,a,b,n,u0,v0)
%NRK2SED Método de Runge-Kutta de prdem 2 para um Sistema de SED/PVI
%   Detailed explanation goes here
%   22/04/2021  Arménio Correia   armenioc@isec.pt

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1) = u0;
v(1) = v0;
for i = 1:n
    k1u = h*f(t(i),u(i),v(i));
    k1v = h*g(t(i),u(i),v(i));
    k2u = h*f(t(i+1),u(i)+k1u,v(i)+k1v);
    k2v = h*g(t(i+1),u(i)+k1u,v(i)+k1v);
    u(i+1) = u(i)+(k1u+k2u)/2;
    v(i+1) = v(i)+(k1v+k2v)/2;
end
end
```

Figura 3 - Método NRK2

2.4 Método NRK4

2.4.1 Algoritmo/Função

```
 function [t,u,v] = NRK4SED(f,g,a,b,n,u0,v0)
%   Bruno Tiago Ferreira Martins -
%   Carlos Emanuel Fernandes Silva -
%   Fábio Oliveira -

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1) = u0;
v(1) = v0;

   for i=1:n

       k1u = h*f( t(i) , u(i) , v(i) );
       k1v = h*g( t(i) , u(i) , v(i) );

       k2u = h*f( t(i+1) + h/2 , u(i) + k1u/2 , v(i) + k1v/2 );
       k2v = h*g( t(i+1) + h/2 , u(i) + k1u/2 , v(i) + k1v/2 );

       k3u = h*f( t(i+1) + h/2 , u(i) + k2u/2 , v(i) + k2v/2 );
       k3v = h*g( t(i+1) + h/2 , u(i) + k2u/2 , v(i) + k2v/2 );

       k4u = h*f( t(i+1) , u(i) + k3u , v(i) + k3v );
       k4v = h*g( t(i+1) , u(i) + k3u , v(i) + k3v );

       u(i+1) = u(i) + ( (k1u + 2*k2u + 2*k3u + k4u) / 6 );
       v(i+1) = v(i) + ( (k1v + 2*k2v + 2*k3v + k4u) / 6 );

   end

end
```

Figura 4 - Método NRK4

3. Exemplos e exercícios modelados por ED de ordem 2

3.1 Movimento não linear de um Pêndulo

Example 13-A Motion of a Nonlinear Pendulum

The motion of a pendulum of length L subject to damping can be described by the angular displacement of the pendulum from the vertical, θ, as a function of time. (See Fig. 13.1.) If we let m be the mass of the pendulum, g the gravitational constant, and c the damping coefficient (i.e., the damping force is $F = -c\theta'$), then the ODE initial-value problem describing this motion is

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

The initial conditions give the angular displacement and velocity at time zero; for example, if $\theta(0) = a$ and $\theta'(0) = 0$, the pendulum has an initial displacement, but is released with 0 initial velocity.

Analytic (closed-form) solutions rely on approximating $\sin\theta$; the exact solutions to this approximated system do not have the characteristics of the physical pendulum, namely, a decreasing amplitude and a decreasing period. (See Greenspan, 1974, for further discussion.)

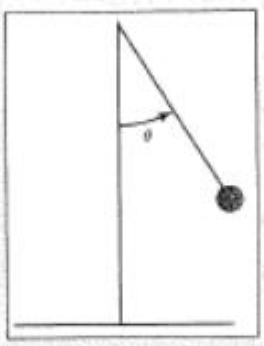


FIGURE 13.1a Simple pendulum.

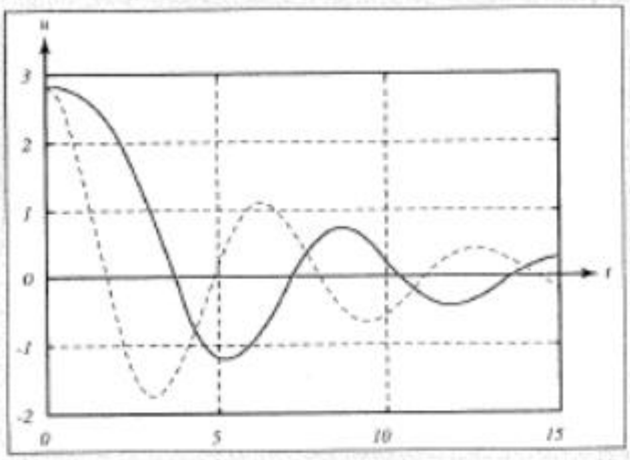


FIGURE 13.1b The motion of a pendulum given by ODE above (solid line) and linearized ODE (dashed line).

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Sendo L o comprimento do pendulo, m a massa, c o coeficiente de amortecimento, g a constante gravitacional e θ o deslocamento angular do pêndulo.

$$\theta(0) = \mathrm{a}$$

$$\theta'(0) = 0$$

Com estes dados é possível deduzir que no tempo zero o pêndulo estava na posição a e tem uma velocidade inicial de zero.

Vamos considerar os seguintes valores para as variáveis mencionadas anteriormente, pois foram valores dados na resolução de este exercício numa aula:

$$\frac{c}{mL} = 0.3$$

$$\frac{g}{L} = 1$$

$$t \in [0,15], como\ observado\ no\ grafico\ do\ exercício$$

$$\theta = y$$

$$y(0) = \frac{\pi}{2}$$

A nossa função fica então:

$$\text{y}'' + \frac{c}{mL} y' + \frac{g}{L} \sin y = 0 \ \ (=)$$

$$\text{y}'' + 0.3y' + 1 * \sin y = 0 \ \ (=)$$

$$\text{y}'' = -0.3y' - \sin y$$

No último passo isolamos a derivada de maior ordem e agora podemos mudar as variáveis.

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \ (=)$$
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = y'' \end{cases} \ (=)$$
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -0.3y' - \sin y \end{cases}$$

Agora ficamos com duas *EDO* lineares de primeira ordem que podemos resolver com a nossa aplicação.

Se pêndulo for largado na posição $\frac{\pi}{2}$, isto é, quando está paralelo à base ou perpendicular ao suporte, utilizamos as seguintes condições para y(0) e y’(0).

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -0.3v - \sin u \end{cases} \\ t \in [0{,}15] \\ \begin{cases} u(0) = \frac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Através da APP verifica-se:

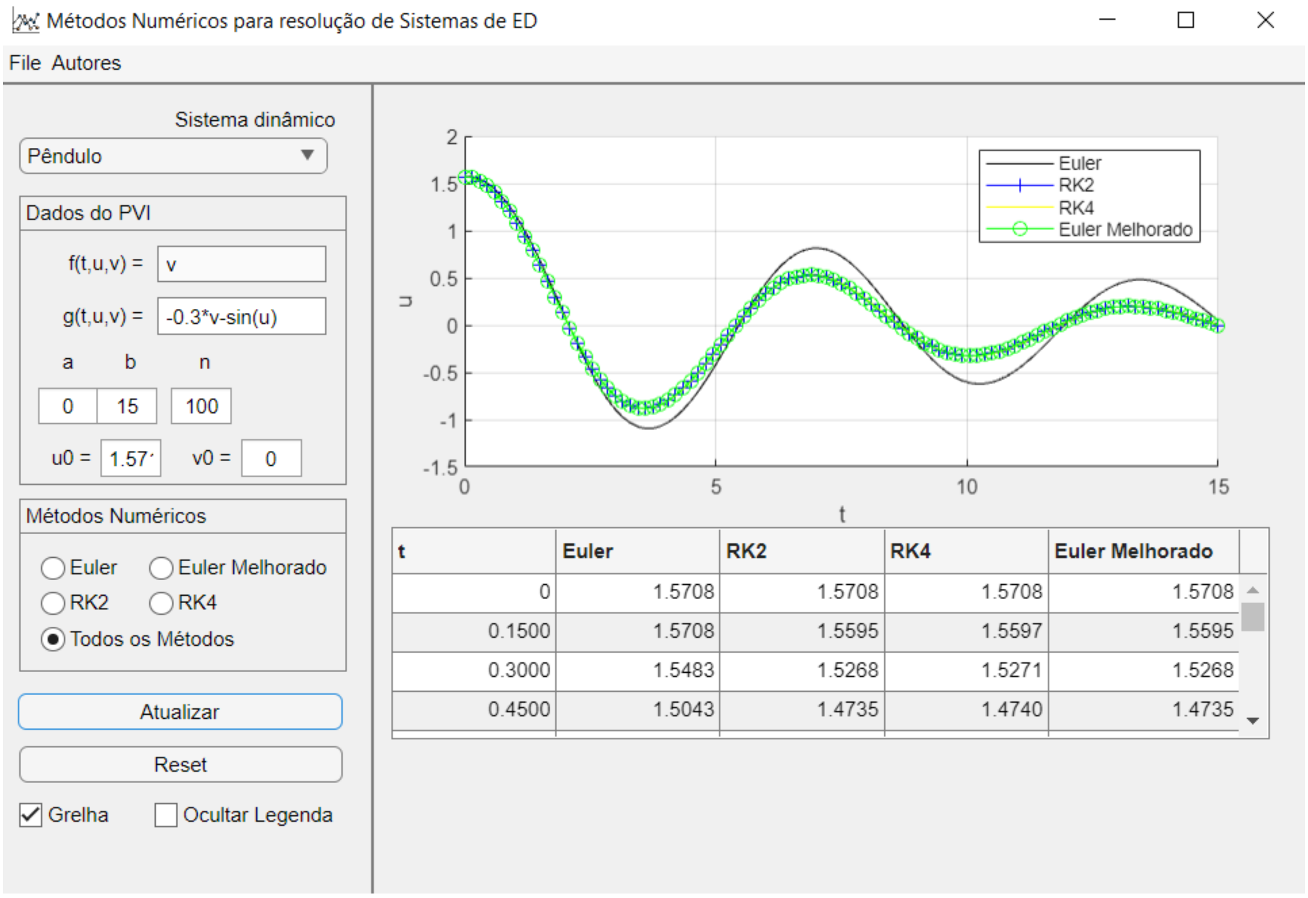


Figura 5 - Execução do exercício do Pêndulo na nossa app.

Nota: A EDO deste exercício não é linear, então não permite calcular a Exata.

3.2 Modelo Vibratório Mecânico

Modelos vibratórios mecânicos

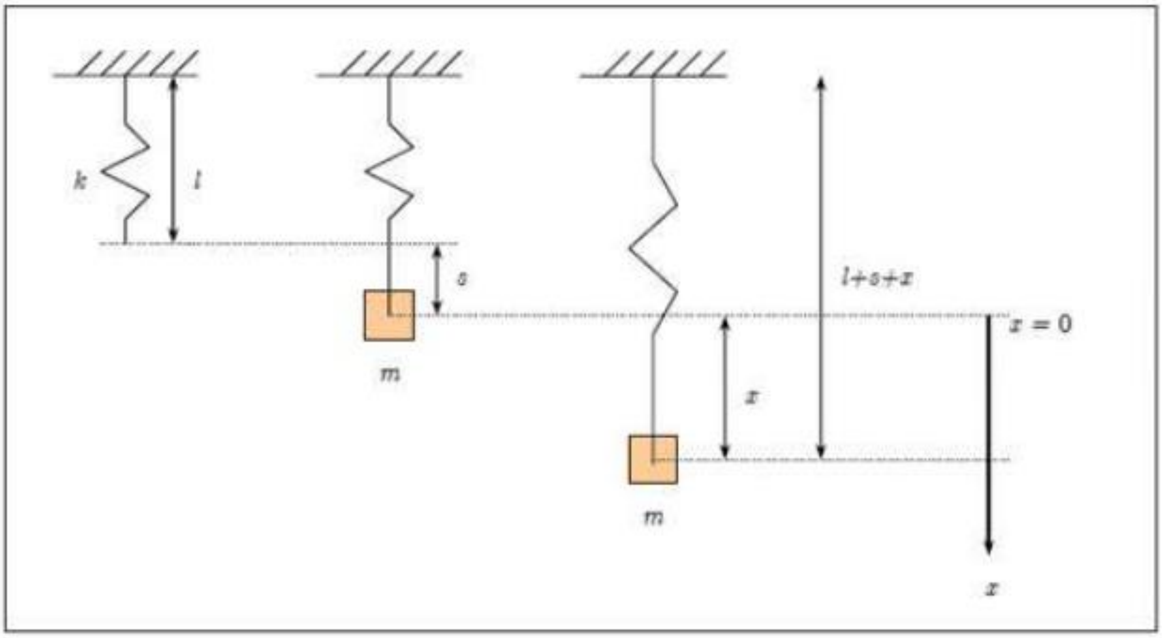
Nestes sistemas, o deslocamento x obedece à equação diferencial linear de 2ª ordem

$$mx'' + bx' + k(x) = f(t)$$

onde:

m = massa; x = deslocamento; b = factor de amortecimento;

k = constante da mola e $f(t)$ = força aplicada



a) $x'' + 2x' + 2x = 4\cos t + 2\sin t, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 3$

$\Rightarrow x(t) = e^{-t}\sin t + 2\sin t$

O enunciado pede-nos para considerarmos os seguintes dados:

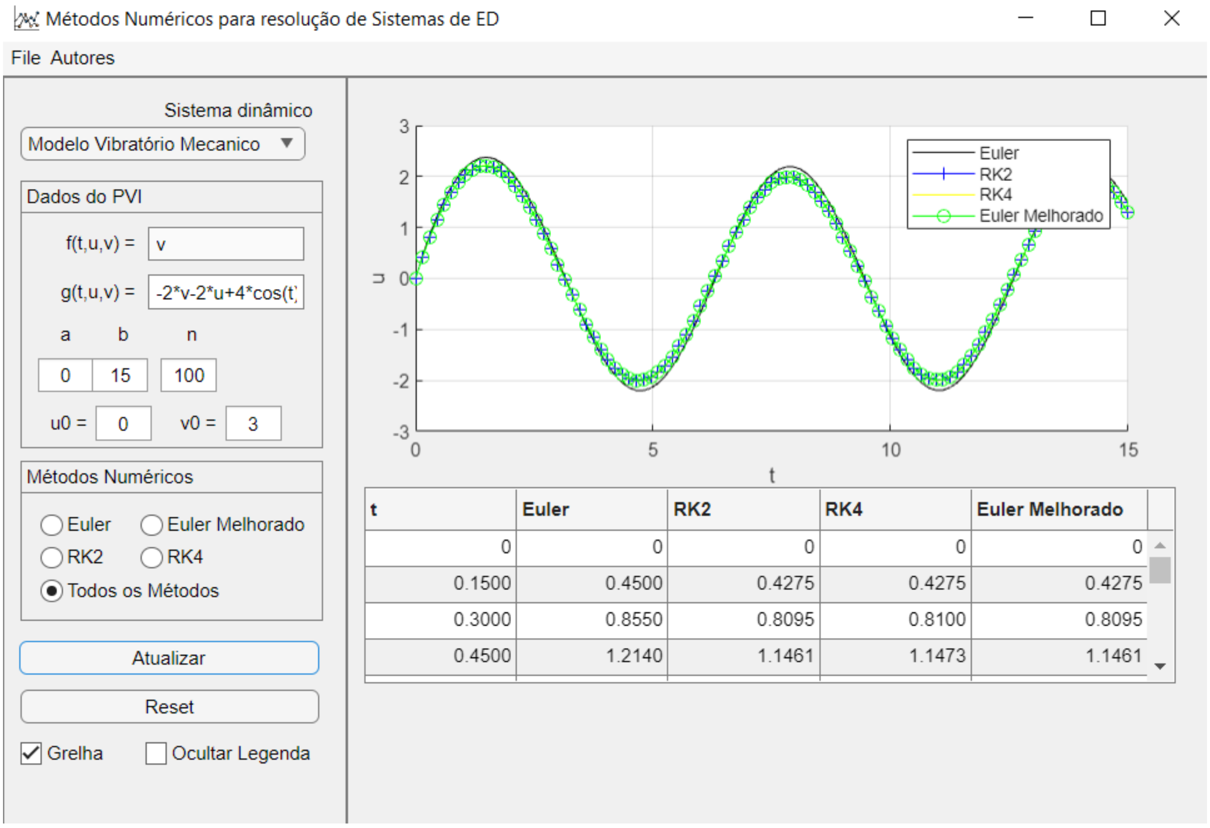
$$x'' + 2x' + 2x = 4\cos t + 2\sin t$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 3$$

Obtendo o seguinte sistema para a resolução do exercício:

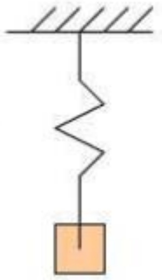
$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -2v - 2u + 4\cos t + 2\sin t \end{cases} \\ t \in [0,15] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 3 \end{cases} \end{cases}$$



Nota: Esta EDO não é homogênea, logo não permite calcular a exata.

3.3 Movimento Mola - Massa sem amortecimento

b) A equação $mx'' + kx = 0$ descreve o movimento harmónico simples, ou movimento livre não amortecido, e está sujeita às condições iniciais $x(0) = a$ e $x'(0) = b$ representando, respectivamente, a medida do deslocamento inicial e a velocidade inicial.



Use este conhecimento para dar uma interpretação física do problema de *Cauchy*

$$x'' + 16x = 0 \quad x(0) = 9 \quad x'(0) = 0$$

e resolva-o

O enunciado pede-nos para considerarmos os seguintes dados:

$$x'' + 16x = 0$$

$$x(0) = 9$$

$$x'(0) = 0$$

Obtendo o seguinte sistema para a resolução do exercício:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -16u \end{cases} \\ t \in [0,4] \\ \begin{cases} u(0) = 9 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Usando a nossa aplicação:

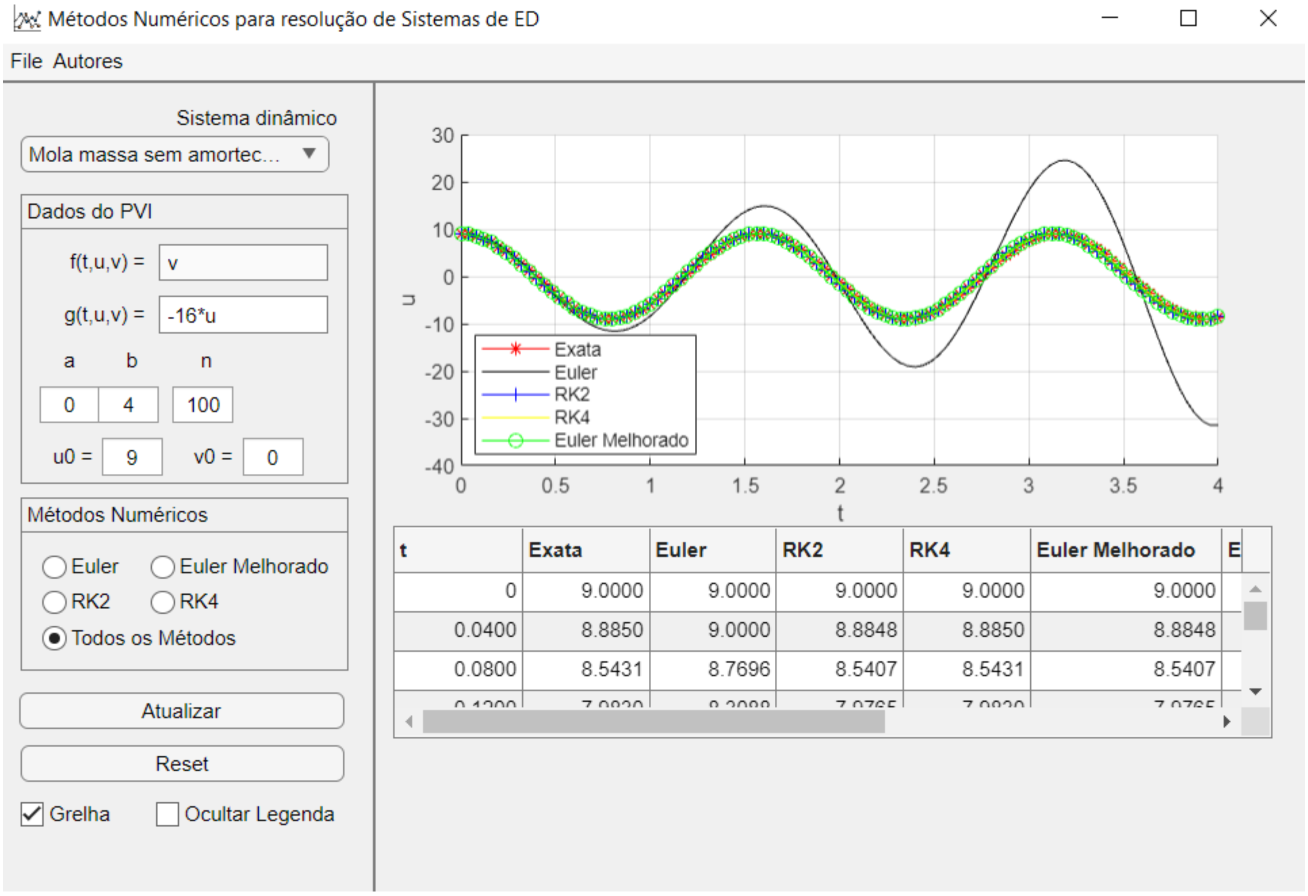


Figura 6 - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa sem Amortecimento na nossa app.

3.4 Movimento Mola-Massa com amortecimento

c) Um peso de 6.4 *lb* provoca, numa mola, um alongamento de 1.28 *ft*. O sistema está sujeito à acção duma força amortecedora, numericamente igual ao dobro da sua velocidade instantânea. Determine a equação do movimento do peso, supondo que ele parte da posição de equilíbrio com uma velocidade dirigida para cima de 4 *ft/s*.

Resolução:

Sabe-se, pela lei de *Hooke*, que $W = ks$

No caso em estudo $k = \frac{6.4}{1.28} \Leftrightarrow k = 5 \;\; lb/ft$. Como $W = mg$, tem-se $m = \frac{6.4}{32} \Leftrightarrow m = 0.2$

A equação que descreve o movimento livre amortecido é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt}$$

onde b é uma constante positiva e o sinal "-" indica que as forças amortecedoras actuam na direcção oposta ao movimento.

Então a equação diferencial de movimento de peso é $0.2x'' = -5x - 2x'$

$\Leftrightarrow x'' + 10x' + 25x = 0$ com $x(0) = 0$ e $x'(0) = -4$

Com base na última informação dada pelo enunciado da imagem vista acima devemos ter em consideração os seguintes dados:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = -4$$

Obtendo assim o sistema necessário para resolver o exercício através da nossa aplicação.

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -10v - 25u \end{cases} \\ t \in [0,2] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Usaremos então a app para resolver o exercicio:

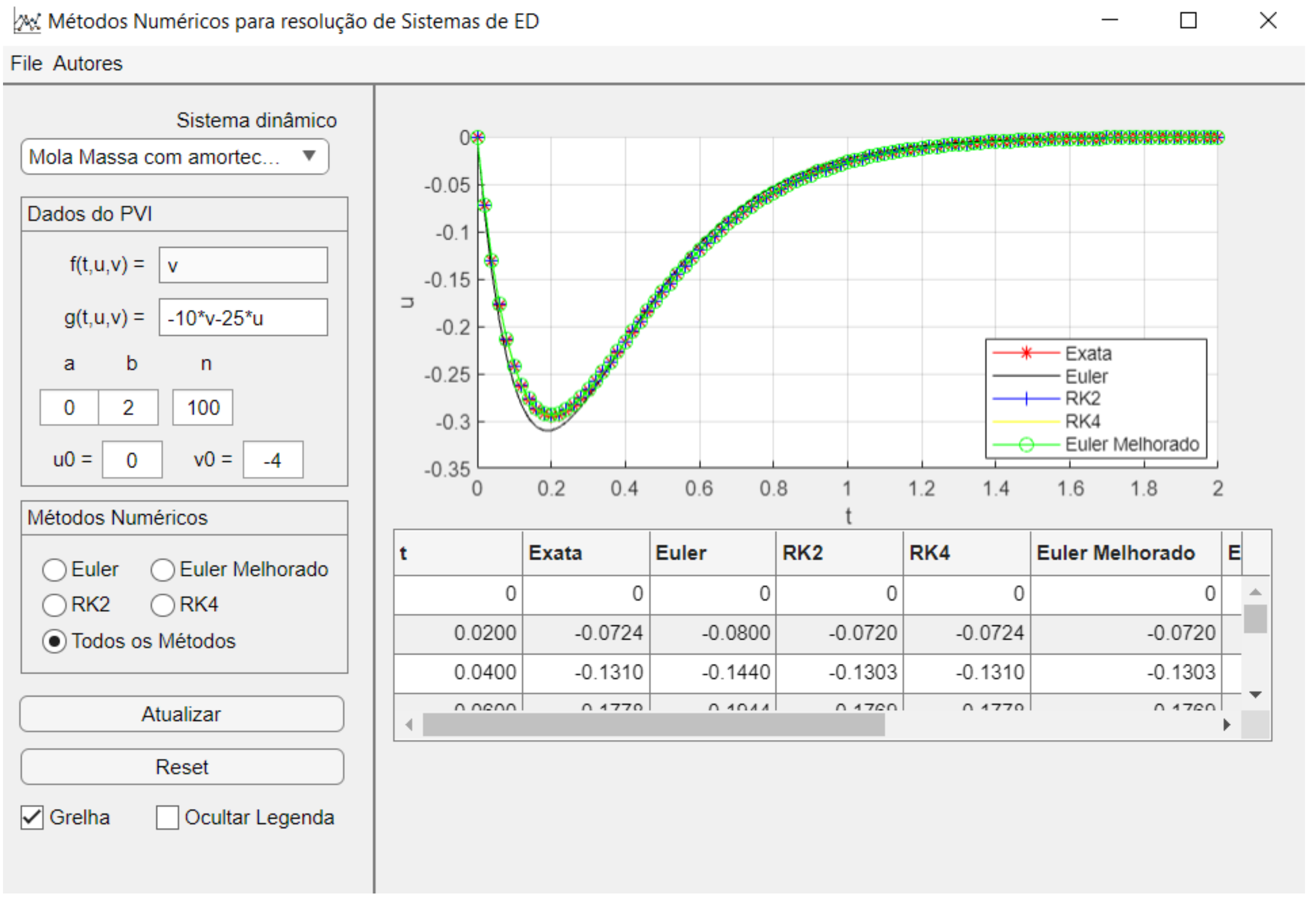


Figura 7 - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa COM Amortecimento na nossa app.

3.5 Circuitos Elétricos em Série

CIRCUITOS ELÉTRICOS

Uma circuito possui um capacitor de $0{,}5 \times 10^{-1}$ F, um resistor de $25\ \Omega$ e um indutor de 5 H, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante $t=0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $10\ e^{-t/4}$ V, e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer inste $t>0$.

- Circuito eléctrico em série

$Lq'' + rq' + \frac{1}{c}q = e(t)$ (*)

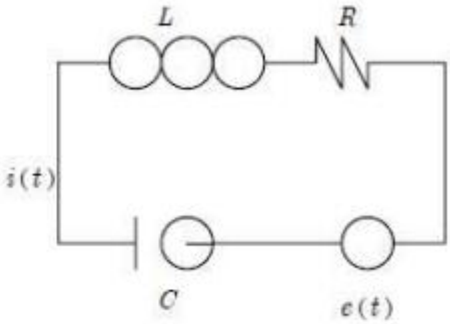
L – Indutância

q – carga

R – Resistência

C – capacidade

$e(t)$ – força electromotriz



Pelas leis de *Kirchoff*, num circuito indutivo-restritivo-capacitivo (L-R-C) série, em que a corrente varia com o tempo, a carga q acumulada no condensador é dada pela equação diferencial linear de 2ª Ordem. (*)

Após uma análise cuidada de ambos os enunciados das imagens obtemos os seguintes dados:

$$Lq'' + rq' + \frac{1}{c}q = e(t)$$

$$q = y$$

$$L = 5H$$

$$R = 25\Omega$$

$$C = 0.5 * 0.1\ F$$

$$e(t) = 10 * e^{-\frac{t}{4}}$$

Desenvolvendo a função obtemos:

$$Ly'' + ry' + \frac{1}{c}y = e(t)\ (=)$$

$$5y'' + 25y' + \frac{1}{\frac{1}{20}}y = 10 * e^{-\frac{t}{4}}\ (=)$$

$$5y'' + 25y' + 20y - 10 * e^{-\frac{t}{4}} = 0(=)$$

$$y'' + 5y' + 4y - 2 * e^{-\frac{t}{4}} = 0$$

No instante t=0 o circuito é conectado a uma bateria, ou seja, o circuito está desligado até o tempo avançar de t=0. O que significa que y(0)=0 e y'(0)=0.

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -5v - 4u + 2e^{-\frac{t}{4}} \end{cases} \\ t \in [0,10] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

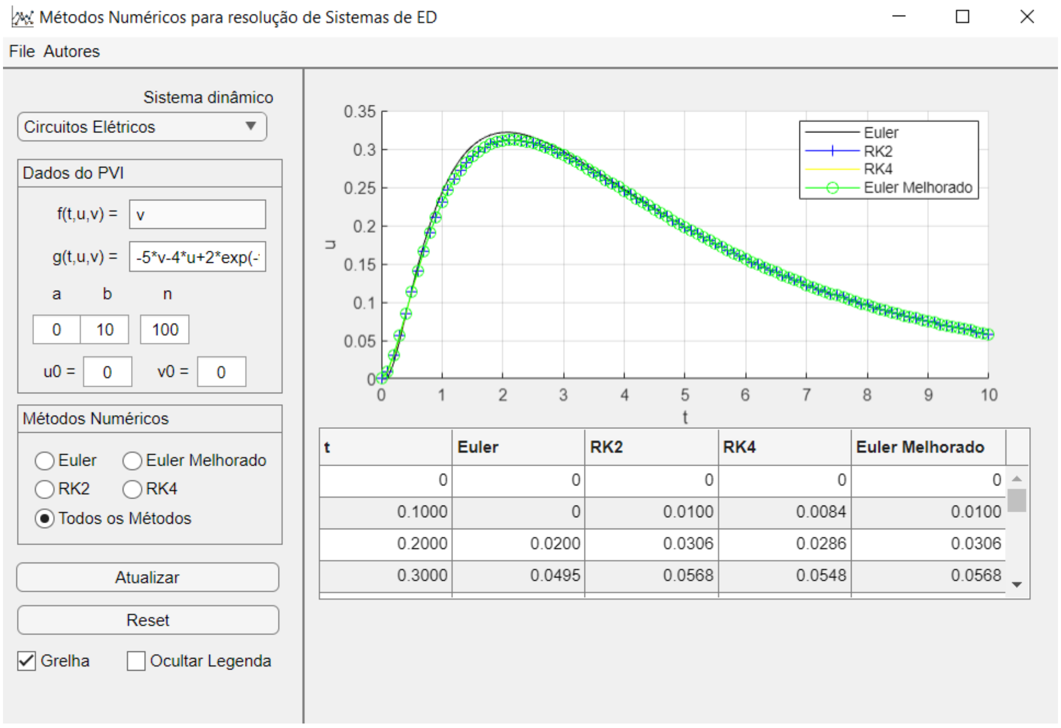


Figura 8 - Circuitos Elétricos em Série

Nota: Mais uma vez, esta EDO não é linear, logo não calculamos a Exata.

3.6 Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo

✔ Example 17.3.6: Chapter Opener: Modeling a Motorcycle Suspension System

For motocross riders, the suspension systems on their motorcycles are very important. The off-road courses on which they ride often include jumps, and losing control of the motorcycle when they land could cost them the race.

Figure 17.3.8: (credit: modification of work by nSeika, Flickr)

This suspension system can be modeled as a damped spring-mass system. We define our frame of reference with respect to the frame of the motorcycle. Assume the end of the shock absorber attached to the motorcycle frame is fixed. Then, the "mass" in our spring-mass system is the motorcycle wheel. We measure the position of the wheel with respect to the motorcycle frame. This may seem counterintuitive, since, in many cases, it is actually the motorcycle frame that moves, but this frame of reference preserves the development of the differential equation that was done earlier. As with earlier development, we define the downward direction to be positive.

When the motorcycle is lifted by its frame, the wheel hangs freely and the spring is uncompressed. This is the spring's natural position. When the motorcycle is placed on the ground and the rider mounts the motorcycle, the spring compresses and the system is in the equilibrium position (Figure 17.3.9).

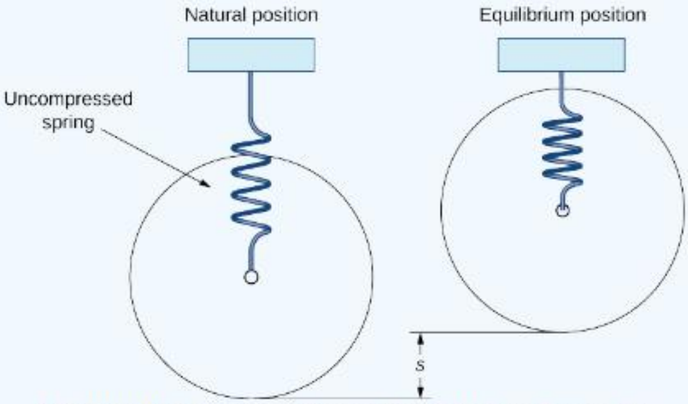


Figure 17.3.9: We can use a spring-mass system to model a motorcycle suspension.

This system can be modeled using the same differential equation we used before:

$$mx''+bx'+kx=0.$$

A motocross motorcycle weighs 204 lb, and we assume a rider weight of 180 lb. When the rider mounts the motorcycle, the suspension compresses 4 in., then comes to rest at equilibrium. The suspension system provides damping equal to 240 times the instantaneous vertical velocity of the motorcycle (and rider).

1. Set up the differential equation that models the behavior of the motorcycle suspension system.

1)

O ponto de ordem mg = ks será onde o equilíbrio está definido, ficando então:

$$mg = ks$$

$$k(\frac{1}{3}) = 384$$

$$k = 1152$$

$$W = mg$$

$$m(32) = 384$$

$$m = 12$$

Assim sendo, a ED que modela o comportamento da suspensão do motociclo é:

$$12x'' + 240x' + 1152x = 0 \ (=)$$

$$x'' + 20x' + 96x = 0 \ (=)$$

$$x'' = -20x' - 96x$$

Vamos assumir que a que motocicleta estava a 10 centímetros de altura antes de embater no solo, mas neste exercício usaremos pés, então $x(0) = \frac{1}{3}$ pois que $\frac{1}{3}$ pés são 10.16 centímetros. A sua velocidade assumiremos 10 pés por segundo que são aproximadamente 305 metros por segundo, então $x'(0) = 10$.

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -20v - 96u \end{cases} \\ t \in [0,1] \\ \begin{cases} u(0) = \dfrac{1}{3} \\ v(0) = 10 \end{cases} \end{cases}$$

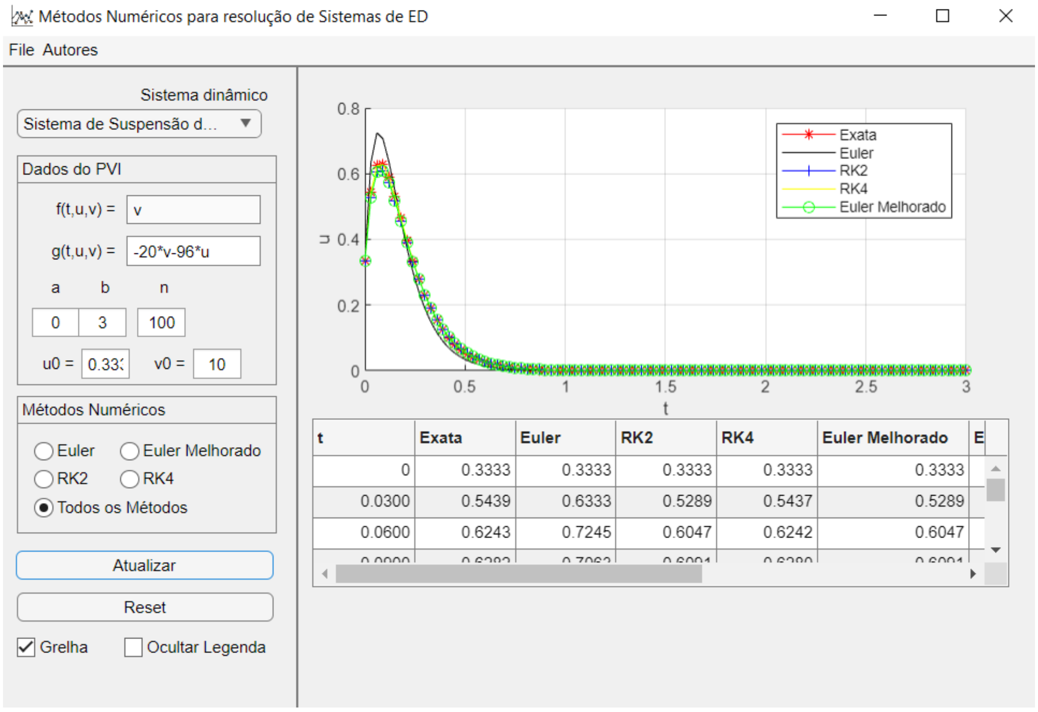


Figura 9 - Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo

3.7 Outro

Caso o utilizador pretenda começar a resolução de um SED do zero que não esteja associado a nenhum exercício já implementado e resolvido, poderá escolher a opção "Outro" para uma experiência formatada.

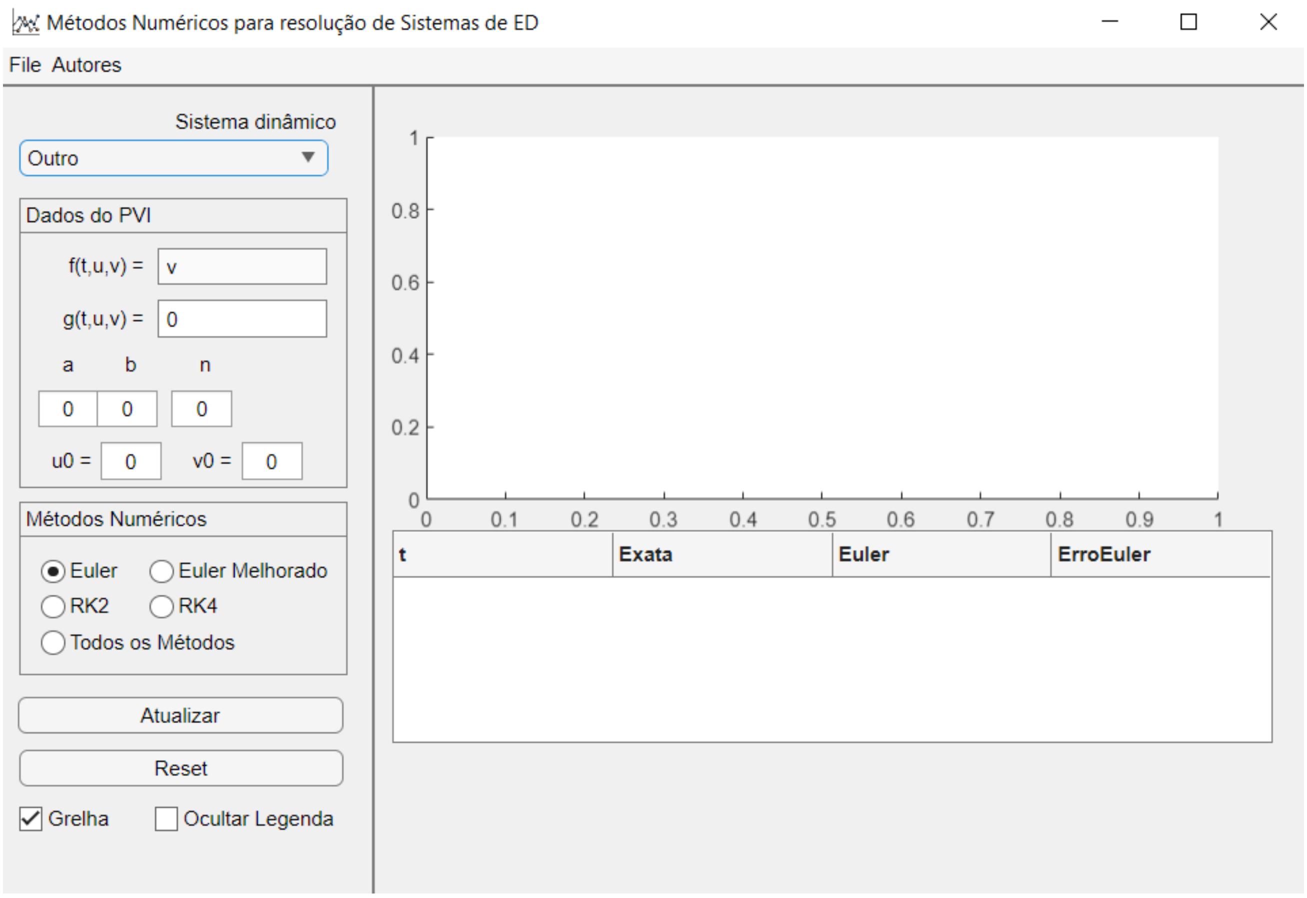


Figura 10 – Opção "outro"

4. Conclusão

Após a realização deste trabalho, podemos concluir que este nos trouxe bastante vantagem pois ajudou-nos a compreender mais um pouco os conteúdos programáticos da disciplina. Os requisitos propostos foram cumpridos com o máximo esforço e dedicação de modo que estes fossem concretizados com sucesso, fazendo assim que a nossa compreensão fosse mais acessível acerca dos sistemas de equações diferenciais e como se podem aplicar noutras áreas diversas.

Com a divisão de tarefas e entreajuda conseguimos atender às dificuldades que foram surgindo durante a realização das tarefas atribuídas a cada um dos elementos do grupo.

5. Bibliografia

Fórum Matlab: https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/view.php?id=236987

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Calculus_(OpenStax)/17%3A_Second-Order_Differential_Equations/17.03%3A_Applications_of_Second-Order_Differential_Equations