

MNuméricos para EDO/PVI



Realizado por:

Fábio Oliveira - 2022145902

Bruno Tiago Ferreira Martins – 2022147149

Carlos Emanuel Fernandes Silva - 2022127048

Índice

1. Introdução	1
1.1 Equação diferencial: definição e propriedades.....	1
1.2 Definição de PVI	3
2. Métodos Numéricos para resolução de PVI.....	4
2.1 Método de Euler.....	4
2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado	8
2.3 Método de RK2.....	10
2.4 Método de RK4.....	13
2.5 Função ODE45 do Matlab	15
.....	15
4. Conclusão	32
5. Bibliografia	33

Índice figuras

Figura 1 - Método de Euler.....	7
Figura 2 - Método Euler melhorado.....	9
Figura 3 - Método RK2.....	12
Figura 4 - Método RK4.....	14
Figura 5 - Método ODE45.....	15
Figura 6 - Exercício 3 do teste farol.....	16
Figura 7 - Execução do método de Euler da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.....	17
Figura 8 - Execução do método RK2 da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.....	17
Figura 9 - Tabela de resultados da execução de ambos os métodos anteriores.	18
Figura 10 - Gráfico do PVI modelado anteriormente para o exercício 1.	23
Figura 11 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI	23
Figura 12 - Gráfico do PVI.....	24
Figura 13 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI	24
Figura 14 - Tabela com os valores estimado de $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ e $A(5)$ pedidos pela alínea b.....	25
Figura 15 - Gráfico da função do estado permanente	30
Figura 16 - Gráfico da função do estado transitório	30
Figura 17 - Execução de P na nossa aplicação.....	31
Figura 18- Tabela obtida na execução de P na nossa aplicação.....	31

1. Introdução

1.1 Equação diferencial: definição e propriedades

Uma equação que tem derivadas de uma função que não sabemos (a função que queremos encontrar) é uma equação diferencial. Podemos classificar uma equação diferencial pela sua ordem, tipo e linearidade.

Tipo 1 - Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Se uma equação diferencial contém exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais funções que dependem de uma única variável independente, então ela é uma equação diferencial ordinária (*EDO*).

Exemplo:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 2$$

$$(y - x)dx + 4ydy = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Tipo 2 - Equação Diferencial Parcial (EDP)

Se uma equação diferencial envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais funções que dependem de duas ou mais variáveis independentes, então ela é uma equação diferencial parcial (*EDP*).

Exemplo:

$$x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

- **Ordem de uma ED:** A ordem da mais alta derivada envolvida numa **ED** é chamada de sua ordem. Exemplo de uma **EDO** de segunda ordem:

$$y'' + 2y' + 1 = 0$$

- **Linearidade de uma ED:** Uma **ED** é chamada de linear se for possível escrevê-la na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

1.2 Definição de PVI

Na matemática, um problema de valor inicial (**PVI**) ou problema de condições iniciais ou problema de *Cauchy* é uma equação diferencial que é acompanhada pelo valor da função objetivo num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial. Noutras palavras, um **PVI** é uma equação diferencial que descreve uma relação entre uma função e as suas derivadas, e que é acompanhada de um valor inicial para a função e as suas derivadas.

Um problema de valor inicial é composto por uma equação diferencial juntamente da atribuição do valor das funções desejadas num ponto que denotamos abaixo por t_0 . Formalmente um problema de valor inicial (**PVI**) é definido pelas equações

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

em que

$$y : R \rightarrow R, f : R \times R \rightarrow R \text{ e } t_0, y_0$$

Podemos assim concluir que são constantes reais.

2. Métodos Numéricos para resolução de PVI

2.1 Método de Euler

Na matemática e na ciência computacional, o método de Euler, é um procedimento numérico de primeira ordem para solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial conhecido. É o tipo mais básico de método explícito para integração numérica para equações diferenciais ordinárias.

2.1.1 Fórmulas

Supondo-se que se quer aproximar a solução de um problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Escolhendo um valor para h , para o tamanho de cada passo e atribuindo a cada passo um ponto dentro do intervalo, temos que:

$$t_n = t_0 + nh.$$

No próximo passo t_{n+1} a partir do anterior t_n fica definido como

$$t_{n+1} = t_n + h$$

então:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Com isto, para um valor menor de h iremos ter mais passos dentro de um dado intervalo, o que fará com que a exatidão seja muito superior (mais semelhante ao valor real).

O valor de y_n é uma aproximação da solução da **EDO** no ponto

$$t_n: y_n \approx y(t_n).$$

Enquanto o Método de Euler integra uma EDO de primeira ordem, qualquer EDO de ordem N pode ser representada como uma equação de primeira ordem: tendo a equação

$$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t)),$$

temos a introdução de variáveis auxiliares

$$z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \dots, z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

obtendo a seguinte equação:

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}'(t) \\ z_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \\ y^{(N)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \\ f(t, z_1(t), \dots, z_N(t)) \end{pmatrix}$$

Este é um sistema de primeira ordem na variável $z(t)$ e pode ser usada através do Método de Euler ou quaisquer outros métodos de resoluções de sistemas de primeira ordem.

2.1.2 Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NEuler(f,a,b,n,y0)
%NEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
%   y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
%   y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i)), i=0,1,2,...,n
%INPUT:
%   f - função da EDO y'=f(t,y)
%   [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
%   n - número de subintervalos ou iterações do método
%   y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
%   t - vetor da partição regular do intervalo [a,b]
%   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
%
%   22/03/2023  Arménio Correia  armenioc@isec.pt
%   28/03/2023  Arménio Correia

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;
for i =1:n
    y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
end
```

Exemplo para a **ED** $y' = y + \exp(3 * t)$ “, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

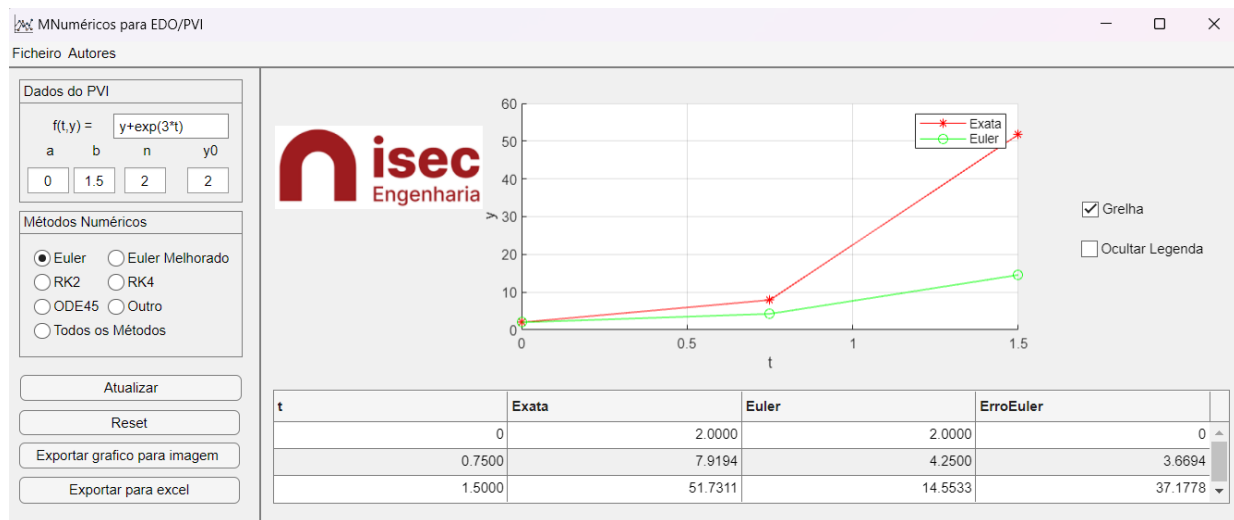


Figura 1 - Método de Euler

2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

2.2.1 Fórmulas

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t^{(k)}, u^{(k)}), \\k_2 &= f(t^{(k+1)}, u^{(k)} + k_1), \\u^{(k+1)} &= u^{(k)} + h \frac{k_1 + k_2}{2}, \\u^{(1)} &= a \quad (\text{condição inicial}).\end{aligned}$$

2.1.2 Algoritmo/Função

```
function y = N_Euler_modificado(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;

for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
    y(i+1)=y(i)+(h/2)*(f(t(i),y(i))+f(t(i+1),y(i+1))));
end
```

Exemplo para a **ED** $y' = y + \exp(3 * t)$ “, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

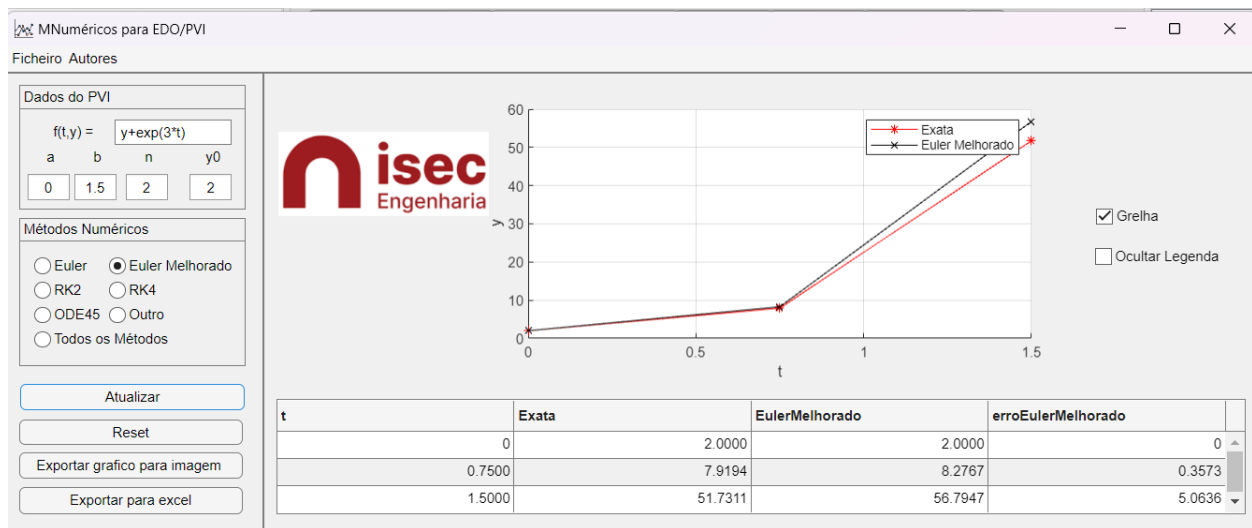


Figura 2 - Método Euler melhorado

2.3 Método de RK2

Em análise numérica, os métodos de Runge–Kutta formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias.

2.3.1 Fórmulas

Trata-se de um método por etapas que tem a seguinte expressão geral:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^e b_i k_i,$$

onde

$$k_i = F(u^n + \Delta t \sum_{j=i}^e a_{ij} k_j; t_n + c_i \Delta t) \quad i = 1, \dots, e$$

com a_{ij} , b_i , c_i constantes próprias do esquema numérico.

2.3.2 Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NRK2(f,a,b,n,y0)
%NEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
%  y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
%  y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i)), i=0,1,2,...,n
%INPUT:
%  f - função da EDO y'=f(t,y)
%  [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
%  n - número de subintervalos ou iterações do método
%  y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
%  t - vetor da partição regular do intervalo [a,b]
%  y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;
for i =1:n
    k1 = h*f(t(i),y(i));
    k2 = h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
end
end
```

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3 * t)$, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

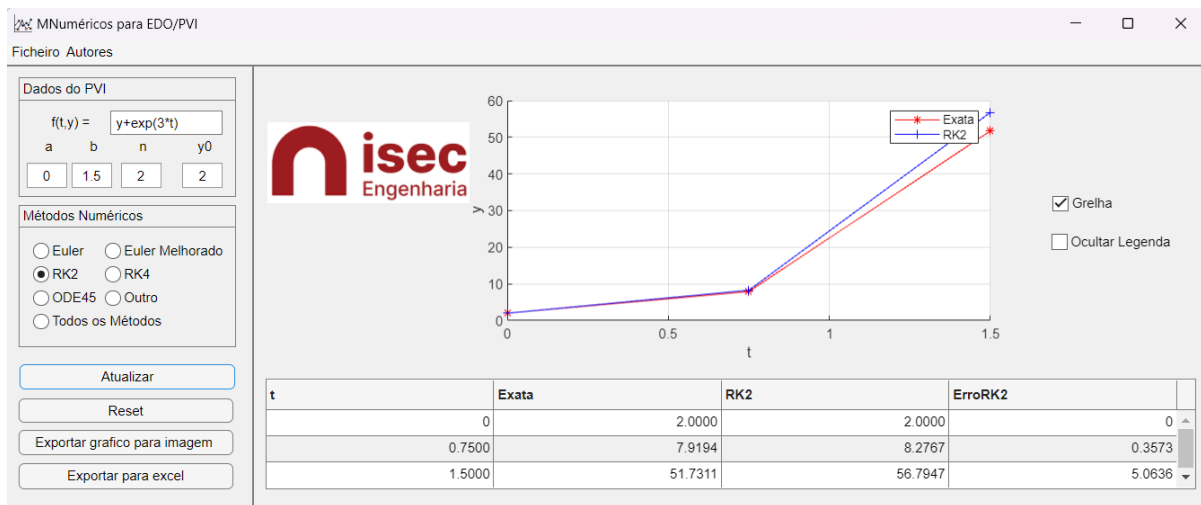


Figura 3 - Método RK2

2.4 Método de RK4

Um membro da família de métodos *Runge–Kutta* é usado com tanta frequência que costuma receber o nome de "**RK4**" ou simplesmente "*o método Runge–Kutta*".

2.4.1 Fórmulas

Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como segue:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Então o método RK4 para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

onde y_{n+1} é a aproximação por RK4 de $y(t_{n+1})$ e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Então, o próximo valor (y_{n+1}) é determinado pelo valor atual (y_n) somado com o produto do tamanho do intervalo (h) e uma inclinação estimada.

2.4.2 Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NRK4(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;
for i =1:n
    k1 = h*f(t(i),y(i));
    k2 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+k1/2);
    k3 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+k2/2);
    k4 = h*f(t(i+1),y(i)+k3);
    y(i+1) = y(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
end
```

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3*t)$, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

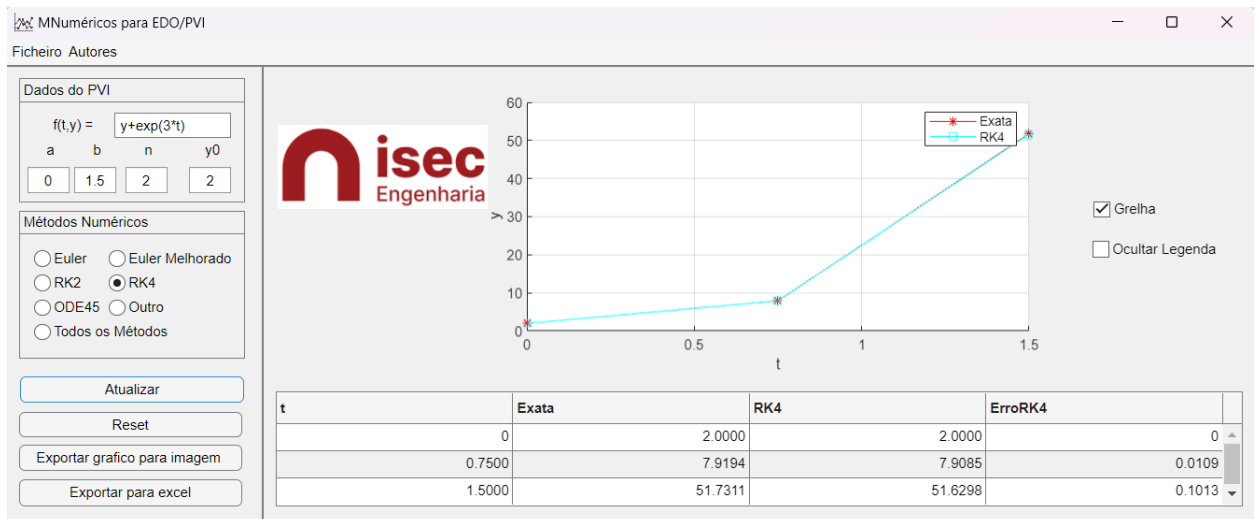


Figura 4 - Método RK4

2.5 Função ODE45 do Matlab

```
function [t,y] = ODE45 (f,a,b,n,y0)
    h = (b-a)/n;
    tsp = a:(b-a)/n:b;
    y(1) = y0;
    [t,y] = ode45(f,tsp,y0);
end
```

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3 * t)$ com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

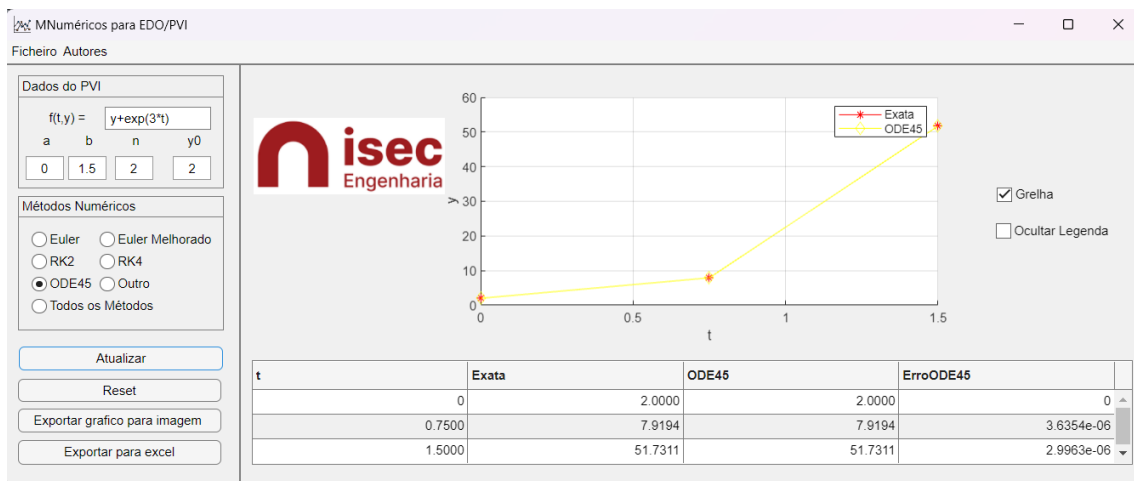


Figura 5 - Método ODE45

3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1 Exercício 3 do Teste Farol

3.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty$, $y(0) = 2$, $t \in [0, 1.5]$

(a) Verifique que $y(t) = 2\exp(-t^2)$ é a solução exata do problema.

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

i	t_i	Aproximações			Erros	
		$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$ y(t_i) - y_i $ Euler	$ y(t_i) - y_i $ RK2
0	0	2			0	0
1		1.5576		1.5000		0.0576
2	1					0.0142
3	1.5	0.2108		0.3750		

Figura 6 - Exercício 3 do teste farol

a)

Nesta alínea observa-se o seguinte **PVI**:

$$\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ t \in [0, 1.5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$y' + 2xy = 0 \quad (=\) \frac{dy}{dt} = -2ty \quad (=\) \frac{1}{y} dy = -2t dt \quad (\text{ED Separáveis})$$

$$(\Rightarrow) \int \frac{1}{y} dy = \int -2t dt \quad (\Rightarrow) \int \frac{1}{y} dy = -2 \int t dt$$

$$(\Rightarrow) \ln|y| = -2 \frac{t^2}{2} + c$$

$$(\Rightarrow) |y| = e^{-t^2+c}$$

$$(\Rightarrow) y = e^c * e^{-t^2}$$

$$(\Rightarrow) y = c_2 * e^{-t^2}$$

$$(\Rightarrow) y = c * e^{-t^2}, \quad c, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 2 (=) c * e^{-0^2} = 2 (=) c * 1 = 2 (=) c = 2$$

Então $y(t) = 2e^{-t^2}$ é a solução exata do problema.

3.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela

b) Resolvendo a alínea através da aplicação:

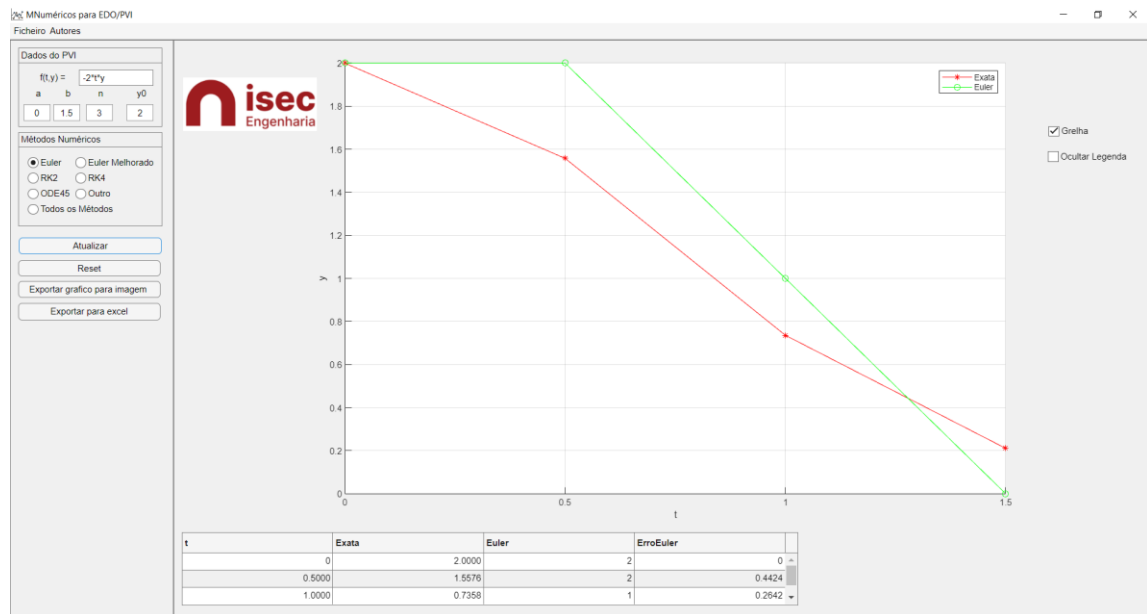


Figura 7 - Execução do método de Euler da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.

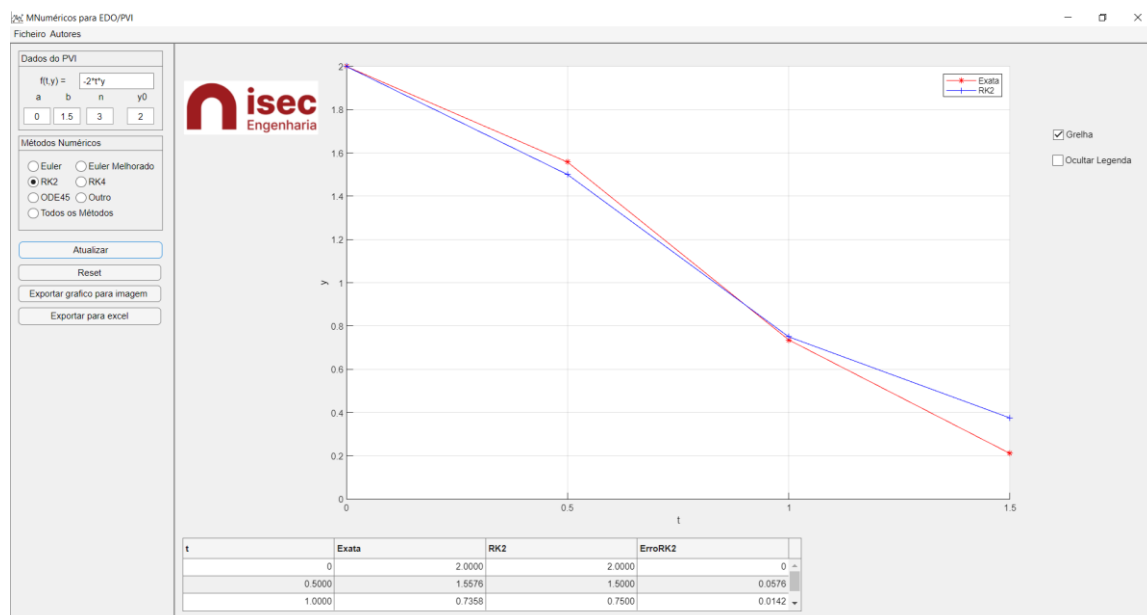


Figura 8 - Execução do método RK2 da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.

t	Exata	Euler	ErroEuler	RK2	ErroRK2
0	2.0000	2	0	2.0000	0
0.5000	1.5576	2	0.4424	1.5000	0.0576
1.0000	0.7358	1	0.2642	0.7500	0.0142
1.5000	0.2108	0	0.2108	0.3750	0.1642

Figura 9 - Tabela de resultados da execução de ambos os métodos anteriores.

i	ti	y(ti) Exata	Aproximações		Erros	
			yi Euler	yi RK2	y(ti)-yi Euler	y(ti)-yi RK2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7358	1	0.7500	0.2642	0.0142
3	1.5	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

(c) Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

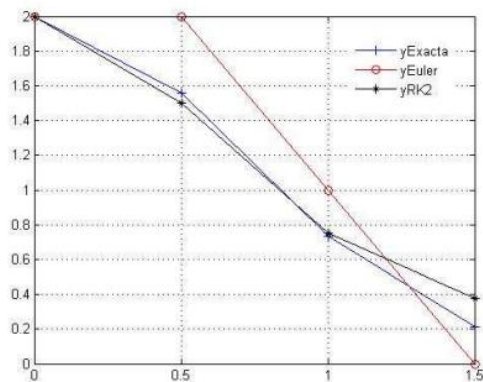


Figura 4

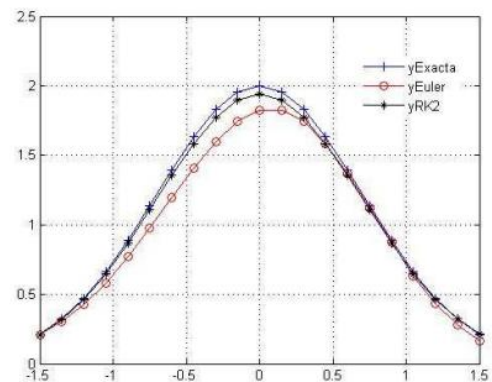


Figura 5

(d) Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincida com a figura que excluiu na alínea anterior.

c)

Depois de analisar os dois últimos gráficos apresentados é fácil concluir que a figura 4 é a que representa graficamente uma solução do PVI dado.

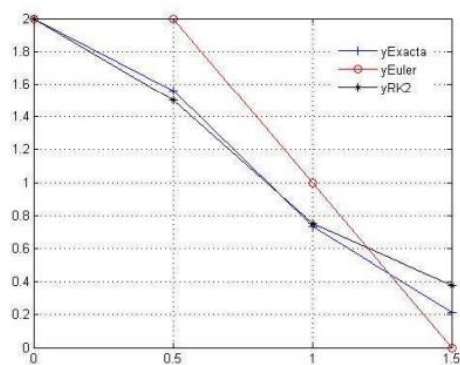
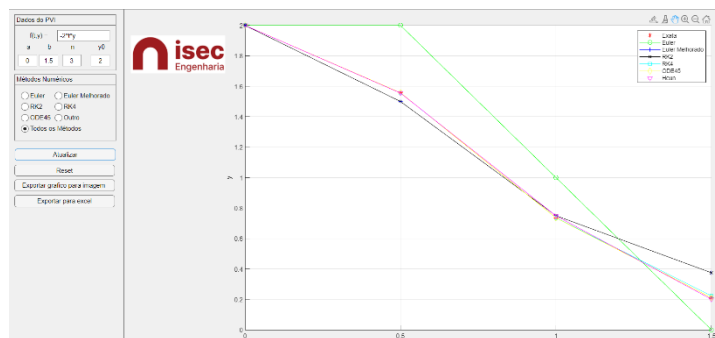


Figura 4



d)

Depois de reparar que o intervalo da figura 5 é $[-1.5, 1.5]$ e o ajustarmos a execução da nossa aplicação, é possível reparar que o gráfico da figura 5 se assemelha mais ao nosso gráfico da execução.

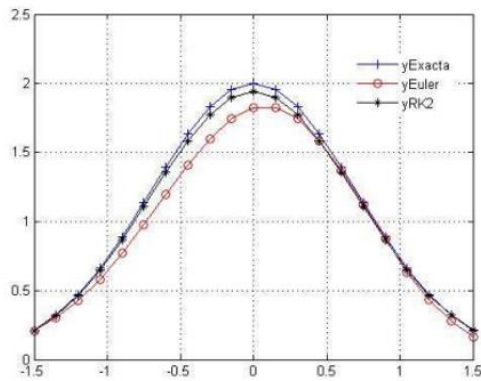


Figura 5



Se aumentarmos o número de subintervalos de 3 para 25 já conseguimos obter a figura 5 na nossa aplicação.

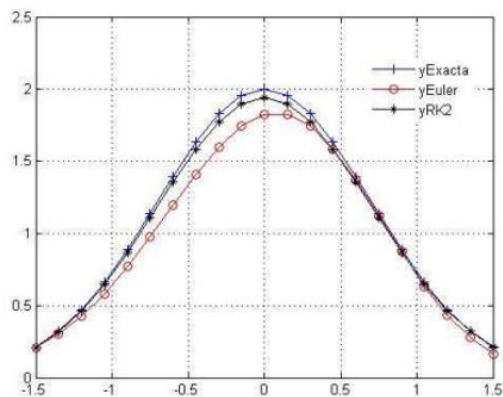
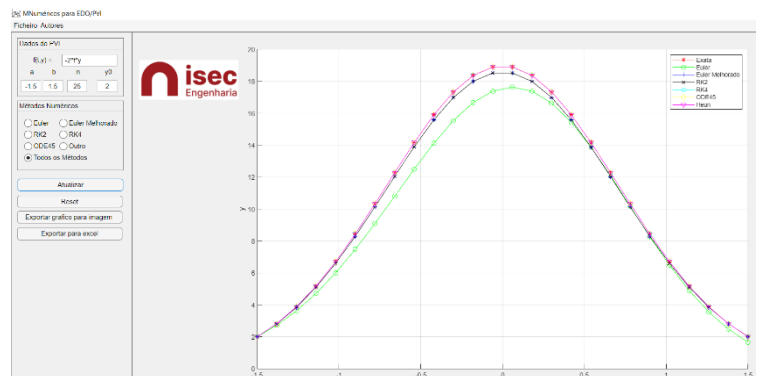


Figura 5



3.2 Problema de aplicação

3.2.1 Modelação Matemática do Problema

Exercício 1:

1. If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a height h is determined from

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

Let $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs, and $g = 32 \text{ ft/s}^2$.

- (a) Use the Runge-Kutta method with $h = 1$ to find an approximation to the velocity of the falling mass at $t = 5 \text{ s}$.
- (b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem.
- (c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and find the true value $v(5)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} mv' = mg - kv^2, \quad k > 0 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 * v' = 5 * 32 - 0.125v^2 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v' = 32 - \frac{0.125v^2}{5} \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v' = 32 - 0.025v^2 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right.$$

Exercício 2:

2. A mathematical model for the area A (in cm^2) that a colony of bacteria (*B. forbiddenkeyworddendroides*) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suppose that the initial area is 0.24 cm^2 .

- (a) Use the Runge-Kutta method with $h = 0.5$ to complete the following table.

$t(\text{days})$	1	2	3	4	5
$A(\text{observed})$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(\text{approximated})$					

- (b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem. Estimate the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$ from the graph.
- (c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and compute the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A) \\ t \in [1,5] \\ A(0) = 0.24\text{cm}^2 \\ h = 0.5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A' = A(2.128 - 0.0432A) \\ t \in [1,5] \\ A(0) = 0.24\text{cm}^2 \\ h = 0.5 \end{array} \right.$$

3.2.2 Resolução do Problema Através da Aplicação

Exercício 1:

b)

Como a alínea a) pede uma aproximação à velocidade em $t = 5s$ e a alínea c) pede o valor real de $y(5)$, introduzimos a equação na aplicação com intervalo $[0,5]$, $y_0 = 0$ e o método Runge-Kutta de ordem 4 pois é o mais preciso.

Visto que $h=1$ então, $h = \frac{b-a}{n} (=) 1 = \frac{5-0}{n} (=) n = 5$

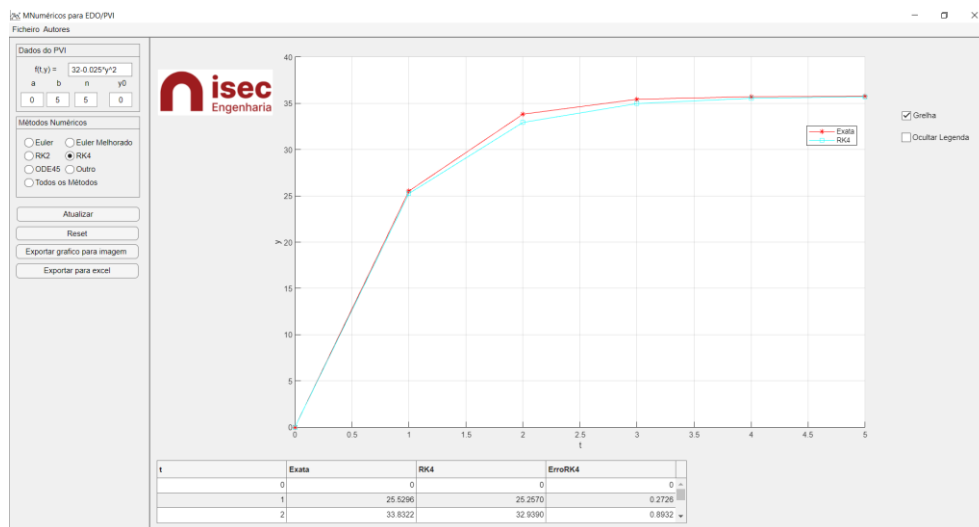


Figura 10 - Gráfico do PVI modelado anteriormente para o exercício 1.

t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0	0	0
1	25.5296	25.2570	0.2726
2	33.8322	32.9390	0.8932
3	35.4445	34.9772	0.4673
4	35.7213	35.5503	0.1709
5	35.7678	35.7128	0.0550

Figura 11 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI

a) Ao analisar o gráfico e a tabela podemos afirmar que a aproximação da velocidade da massa em queda em $t = 5s$ é 35.7128.

c) Mais uma vez após analisar o gráfico e a tabela reparamos que o valor real de $y(5)$ é 35.7678.

Exercício 2:

Observando a tabela da alínea a) reparamos que nos são pedidos dados no intervalo [0,5]. O y_0 é nos dado na questão, ou seja, $y_0 = 0.24$.

Visto que $h=0.5$ então, $h = \frac{b-a}{n} (=) 0.5 = \frac{5-0}{n} (=) n = 10$

Usando a equação modelada anteriormente para este exercício com o método Runge-Kutta de ordem 4 mais uma vez pela razão de ser mais preciso, obtemos o seguinte gráfico e tabela:

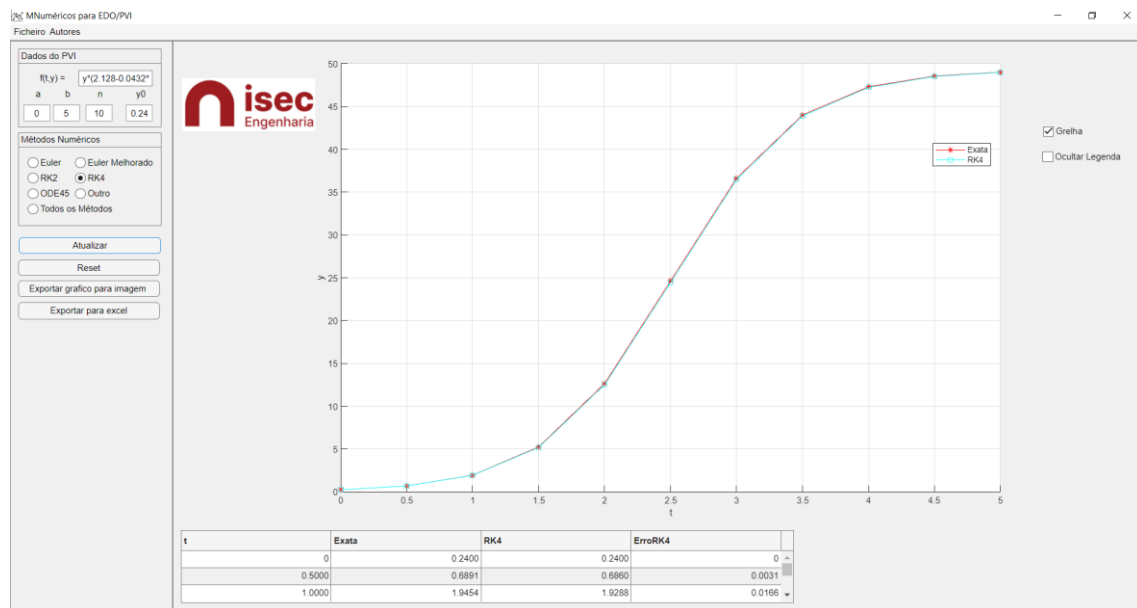


Figura 12 - Gráfico do PVI

t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0.2400	0.2400	0
0.5000	0.6891	0.6860	0.0031
1.0000	1.9454	1.9288	0.0166
1.5000	5.2446	5.1856	0.0590
2.0000	12.6436	12.5007	0.1429
2.5000	24.6379	24.4334	0.2044
3	36.6283	36.4618	0.1665
3.5000	44.0210	43.9020	0.1189
4.0000	47.3164	47.2349	0.0814
4.5000	48.5710	48.5245	0.0465
5	49.0196	48.9965	0.0231

Figura 13 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI

Completemos agora o gráfico de acordo com os valores da tabela acima representada:

a)

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$	1.93	12.5	36.46	47.23	49

b)

t	Exata	RK4	ErroRK4	
0	0,24	0,24	0	
0,5	0,689133018	0,686013999	0,003119019	
1	1,94541126	1,928773847	0,016637413	A(1)
1,5	5,244572562	5,185556402	0,05901616	
2	12,64355504	12,50067932	0,142875729	A(2)
2,5	24,6378852	24,43344779	0,204437408	
3	36,6283009	36,46180136	0,166499538	A(3)
3,5	44,02096641	43,90203505	0,118931364	
4	47,31635176	47,23494199	0,081409773	A(4)
4,5	48,57103668	48,52452007	0,046516609	
5	49,01957926	48,99649487	0,023084387	A(5)

Figura 14 - Tabela com os valores estimado de $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ e $A(5)$ pedidos pela alínea b.

3.3 Problemas de aplicação do exercício 2 do teste Farol

3.3.1 Modelação matemática do problema

Exercício 2.a)

2. Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(a) A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' + 2xy = 0$ cujo campo direcional é dado pela figura 2 e o gráfico da solução geral pela figura 1. Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

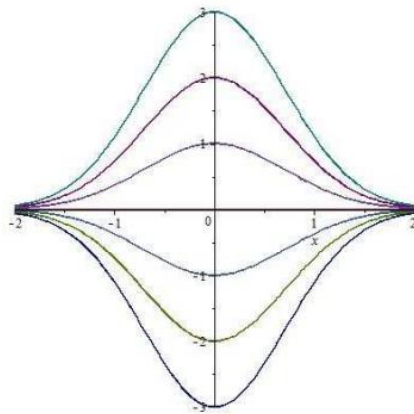


Figura 1

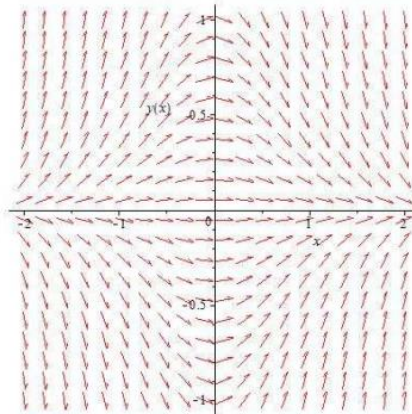


Figura 2

Passo 01 - Isolar y' na equação e verificar se a ED é de variáveis separáveis:

$$y' + 2xy = 0 \quad (=\quad) \quad y' = -2xy \quad (=\quad) \quad \frac{dy}{dx} = -2xy \quad (=\quad) \quad \frac{1}{y} dy = -2x dx$$

Nesta ultima situação observamos que é uma **ED** de variáveis separáveis.

Passo 02 - Calcular a integral geral usando a expressão anterior:

$$\frac{1}{y} dy = -2x dx$$

$$(=\quad) \quad \int \frac{1}{y} dy = \int -2x dx$$

$$(=\quad) \quad \int \frac{1}{y} dy = -2 \int x dx \quad (=\quad)$$

$$\ln|y| = -2 \frac{x^2}{2} + c$$

$$(=\quad) \quad |y| = e^{-x^2+c}$$

$$(=\quad) \quad y = e^c * e^{-x^2}$$

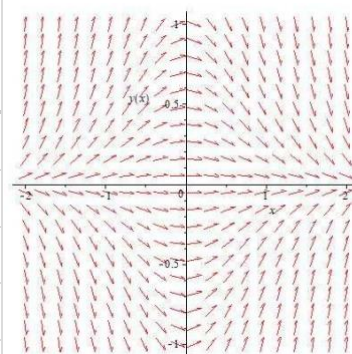
$$(=) y = c_2 * e^{-x^2}$$

$$(=) y = c * e^{-x^2}, \quad c, \quad c_2 \in R$$

Passo 03 – Provar que o campo direcional de $y' + 2xy = 0$ ($=$) $y' = -2xy$ é dado pela figura 2;

Substituindo os valores das variáveis “x” e “y” com os valores que conseguimos observar no gráfico da figura 2 e tendo em conta que y' representa o declive (m) da reta tangente em cada ponto do gráfico da equação ou seja:

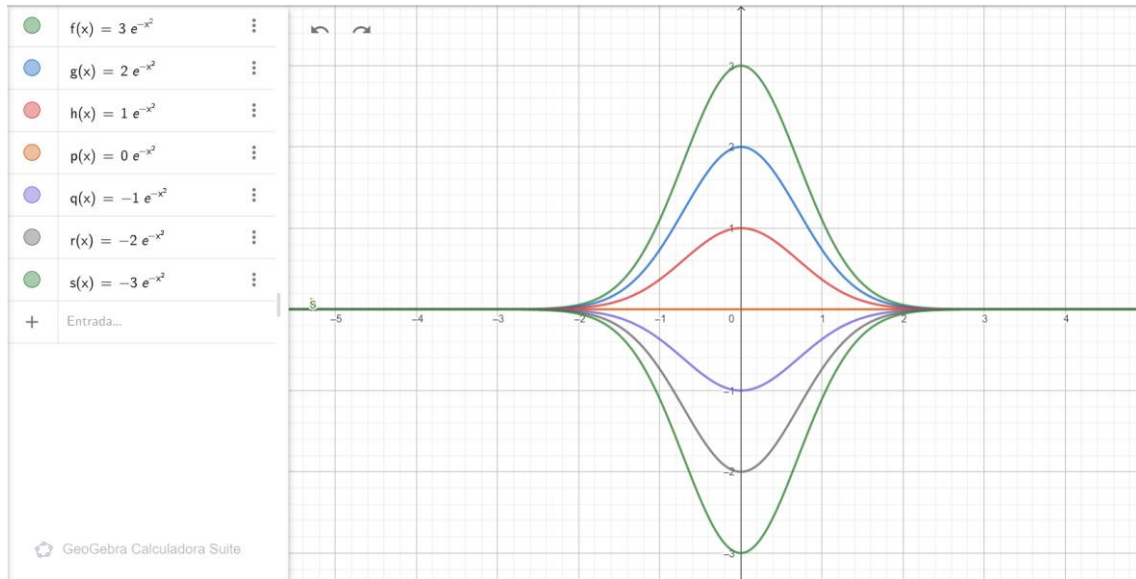
Y \ X	-2	-1	0	1	2
-1	$y' = -4$	$y' = -2$	$y' = 0$	$y' = 2$	$y' = 4$
-0.5	$y' = -2$	$y' = -1$	$y' = 0$	$y' = 1$	$y' = 2$
0	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$
0.5	$y' = 2$	$y' = 1$	$y' = 0$	$y' = -1$	$y' = -2$
1	$y' = 4$	$y' = 2$	$y' = 0$	$y' = -2$	$y' = -4$



Comparando os declives obtidos a cada respetiva coordenada na figura é possível observar que as curvas da figura 1 “encaixam” totalmente na figura 2 e o ajuste é perfeito, ou seja, a figura 1 é uma representação gráfica do campo direcional da figura 2.

Passo 04

Usando a expressão final obtida ($y = ce^{-x^2}$, $c, c_2 \in \mathbb{R}^+$) no Geogebra e dando valores à variável c , obtemos uma figura exatamente igual à figura 1.



Concluindo assim após todos estes passos que a figura 1 descreve a trajetória do campo direcional da figura 2, provando que a afirmação da alínea a) é verdadeira.

Exercício 2.b)

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i , resistência $R = 10 \Omega$ (ohms) e indutância $L = 0.5 \text{ h}$ (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L \frac{di}{dt}$. Assim, a intensidade de corrente i , no instante t , se $e = 3 \sin(2t)$ (em volts) e $i = 6$ quando $t = 0$ é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101} e^{-20t} - \frac{30}{101} \sin 2t + \frac{3}{101} \cos 2t$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do *estado transitório* e o outro é o termo do *estado permanente*.

Passo 01

$$e = Ri + L * \frac{di}{dt} \quad (=) \quad e = Ri + L * i'$$

Passo 02

$$e = 3 * \sin(2t)$$

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 0.5 \text{ henry}$$

Passo 03

$$e = Ri + L * i'$$

$$(\Rightarrow) 3 \sin(2t) = 10i + 0.5 * i'$$

$$(\Rightarrow) 6 \sin(2t) = 20i + i'$$

$$(\Rightarrow) i' = 6 \sin(2t) - 20i$$

$$P \begin{cases} i' = 6 \sin(2t) - 20i \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

Passo 04

$$i(t) = \frac{609}{101} * e^{-20t} - \frac{30}{101} * \sin(2t) + \frac{3}{101} * \cos(2t)$$

Verificar se esta é solução de P

$$i(0) = 6$$

$$(\Rightarrow) \frac{609}{101} * e^{-20*0} - \frac{30}{101} * \sin(2 * 0) + \frac{3}{101} * \cos(2 * 0) = 6$$

$$(\Rightarrow) \frac{609}{101} * e^0 - \frac{30}{101} * \sin(0) + \frac{3}{101} * \cos(0) = 6$$

$$(\Rightarrow) \frac{609}{101} * 1 - \frac{30}{101} * 0 + \frac{3}{101} * 1 = 6$$

$$(\Rightarrow) \frac{609}{101} + \frac{3}{101} = 6$$

$$(\Rightarrow) \frac{612}{101} \neq 6 \quad \text{Proposição falsa}$$

O valor lógico da afirmação colocada na questão da alínea b) é falso.

3.3.2 Resolução através da App desenvolvida

Analisando P notamos que a equação pode ser dividida em duas partes de forma a compreender melhor o exercício. Executando esta metade da equação de P, $i' = 6\sin(2t)$, com $y(0) = 0$ na app obtemos o seguinte gráfico:

Analisando este gráfico, podemos observar uma função sinusoidal e suspeitar que este é o gráfico do estado permanente.

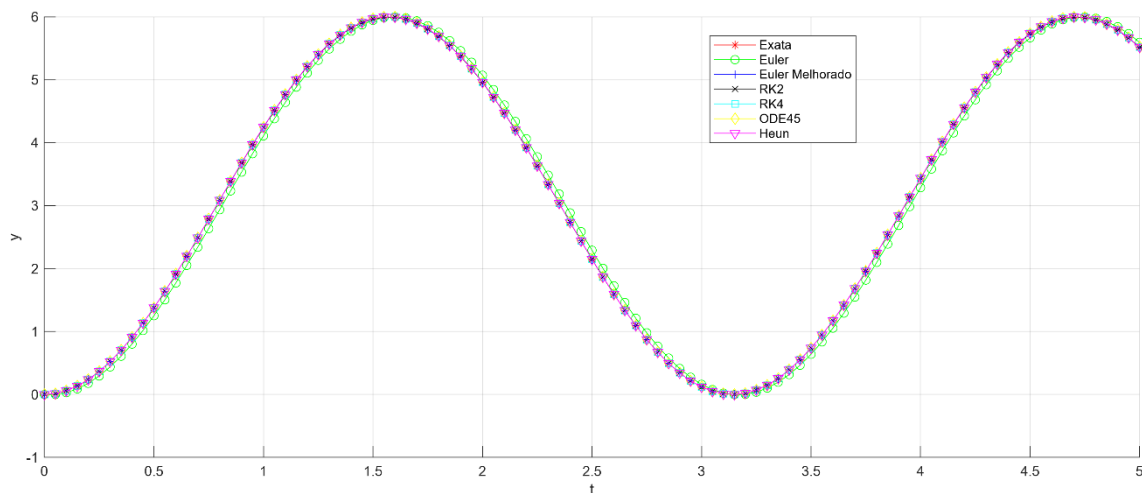


Figura 15 - Gráfico da função do estado permanente

Por fim executando a restante equação, $i' = -20i$, na app obtemos o seguinte gráfico:

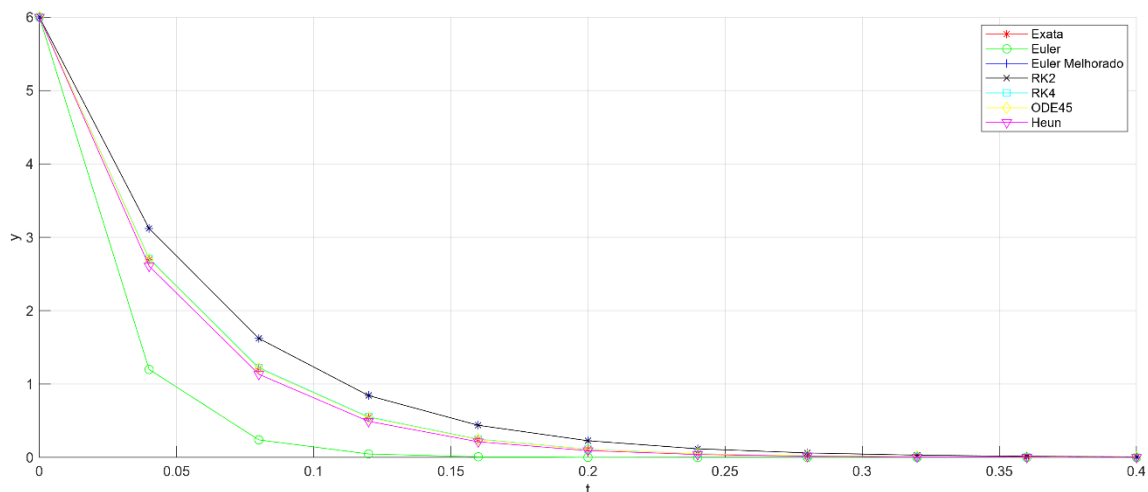


Figura 16 - Gráfico da função do estado transitório

E analisando este segundo gráfico de declive negativo, podemos suspeitar que este é o gráfico do estado transitório.

Usando agora a equação total de P, $i' = 6\sin(2t) - 20i$, na nossa app e no intervalo $[0,0.4]$ com $y(0) = 6$, conseguimos observar o seguinte resultado:

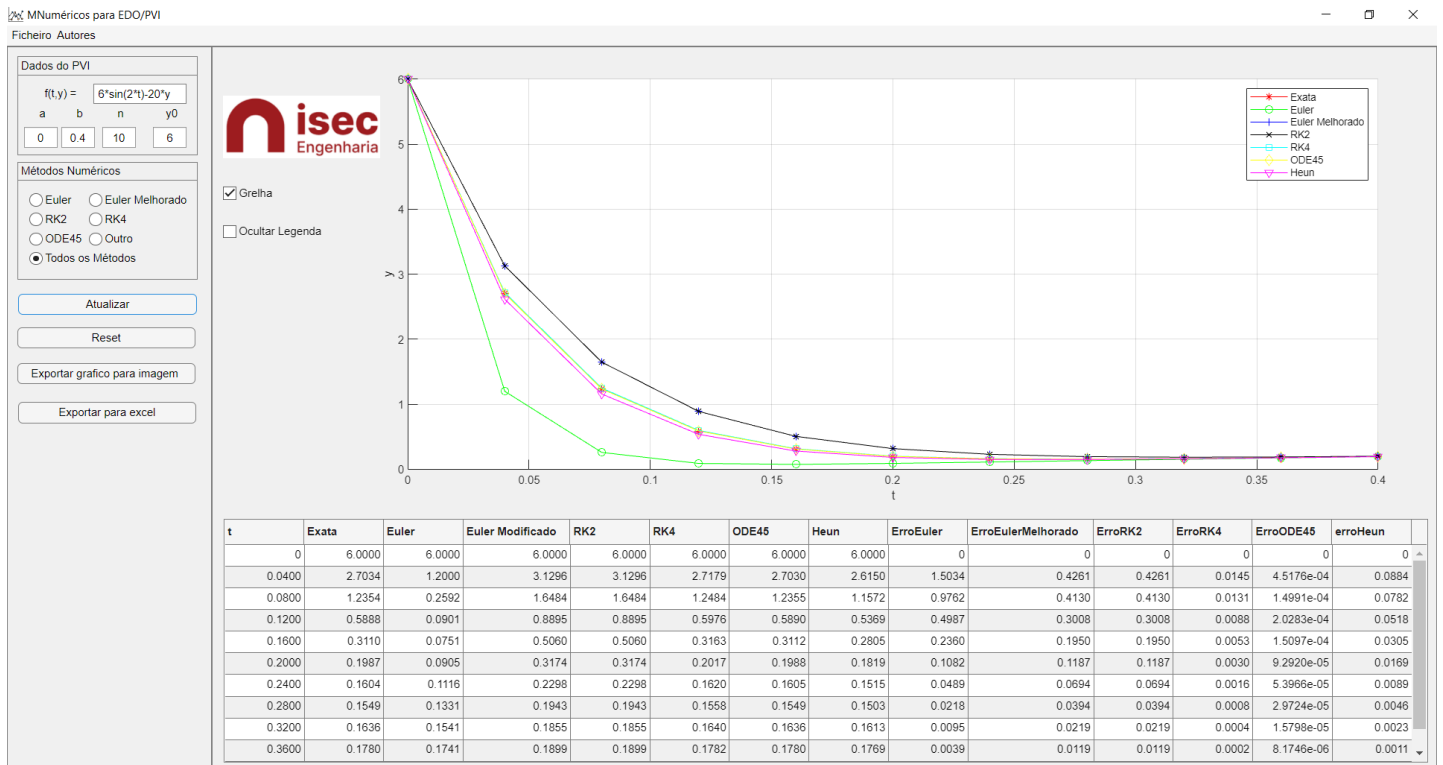


Figura 17 - Execução de P na nossa aplicação

t	Exata	Euler	Euler Modificado	RK2	RK4	ODE45	Heun	ErroEuler	ErroEulerMelhorado	ErroRK2	ErroRK4	ErroODE45	erroHeun
0	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	0	0	0	0	0	0
0.0400	2.7034	1.2000	3.1296	3.1296	2.7179	2.7030	2.6150	1.5034	0.4261	0.4261	0.0145	4.5176e-04	0.0884
0.0800	1.2354	0.2592	1.6484	1.6484	1.2484	1.2355	1.1572	0.9762	0.4130	0.4130	0.0131	1.4991e-04	0.0782
0.1200	0.5888	0.0901	0.8895	0.8895	0.5976	0.5890	0.5369	0.4987	0.3008	0.3008	0.0088	2.0283e-04	0.0518
0.1600	0.3110	0.0751	0.5060	0.5060	0.3163	0.3112	0.2805	0.2360	0.1950	0.1950	0.0053	1.5097e-04	0.0305
0.2000	0.1987	0.0905	0.3174	0.3174	0.2017	0.1988	0.1819	0.1082	0.1187	0.1187	0.0030	9.2920e-05	0.0169
0.2400	0.1604	0.1116	0.2298	0.2298	0.1620	0.1605	0.1515	0.0489	0.0694	0.0694	0.0016	5.3966e-05	0.0089
0.2800	0.1549	0.1331	0.1943	0.1943	0.1558	0.1549	0.1503	0.0218	0.0394	0.0394	0.0008	2.9724e-05	0.0046
0.3200	0.1636	0.1541	0.1855	0.1855	0.1640	0.1636	0.1613	0.0095	0.0219	0.0219	0.0004	1.5798e-05	0.0023
0.3600	0.1780	0.1741	0.1899	0.1899	0.1782	0.1780	0.1769	0.0039	0.0119	0.0119	0.0002	8.1746e-06	0.0011
0.4000	0.1944	0.1931	0.2007	0.2007	0.1945	0.1944	0.1939	0.0013	0.0063	0.0063	0.0001	4.2325e-06	0.0005

Figura 18- Tabela obtida na execução de P na nossa aplicação

Como conclusão final, após a análise do gráfico e da tabela da execução de P, observamos o instante em que ocorre a mudança entre o estado transitório para o estado permanente. Esse instante é $t = 0.28$, que podemos observar com mais clareza na tabela, e ocorre quando a função transitória perde influxo para a função sinusoidal.

4. Conclusão

Em suma, podemos analisar a nossa prestação e o nosso desempenho na realização do trabalho, e no final só temos razões para estarmos contentes e satisfeitos com o resultado. Os requisitos propostos foram cumpridos com o máximo esforço e dedicação, de modo que o trabalho ficasse concluído.

Embora tivéssemos tarefas divididas, fizemos por nos ajudar sempre uns aos outros para concluir com a máxima perfeição.

Foi, sem dúvida, um ótimo desafio para os três. Deu-nos a oportunidade de adquirir uma série de conhecimentos úteis para uma melhor compreensão nesta unidade curricular.

5. Bibliografia

<https://www.somatematica.com.br/superior/equacoesdif/eq.php>

<https://www.infoescola.com/matematica/equacoes-diferenciais/>

https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_valor_inicialhttps://www.ime.unicamp.br/~pjssilva/pdfs/notas_de_aula/ms211/Problemas_de_Valor_Inicial.pdf

https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta

Fórum Matlab: <https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/view.php?id=236987>