AM2 - Matemática Computacional

aula 07 TP1 | 22/04/2021

▷ Método Numérico para SED/PVI (continuação)

$$(P)\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} & (1)\ SED \\ t \in [a,b] & (2)\ VI \\ \begin{cases} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} & (3)\ CI \end{cases}$$

objetivo:

$u(t_i) \approx ?$

$v(t_i) \approx ?$

última aula TP → NEulerSED

hoje → NRK2SED

Atividade 02 Trabalho

Equações Diferenciais de ordem 2 e SEDiferenciais de ordem 1

» Aplicações práticas a sistemas dinâmicos

» Resolva os exercícios seguintes e obtenha a:

- A sua solução exata aplicando métodos analíticos
- Soluções aproximadas recorrendo a **métodos numéricos**, começando por transformar os PVI de ordem 2 num PVI com um **sistema de equações diferenciais de ordem 1**

1. **O problema do pêndulo** (resolvido em aula)

Example 13-A Motion of a Nonlinear Pendulum

The motion of a pendulum of length L subject to damping can be described by the angular displacement of the pendulum from the vertical, θ, as a function of time. (See Fig. 13.1.) If we let m be the mass of the pendulum, g the gravitational constant, and c the damping coefficient (i.e., the damping force is $F = -c\theta'$), then the ODE initial-value problem describing this motion is

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

The initial conditions give the angular displacement and velocity at time zero; for example, if $\theta(0) = a$ and $\theta'(0) = 0$, the pendulum has an initial displacement, but is released with 0 initial velocity.

Analytic (closed-form) solutions rely on approximating $\sin\theta$; the exact solutions to this approximated system do not have the characteristics of the physical pendulum, namely, a decreasing amplitude and a decreasing period. (See Greenspan, 1974, for further discussion.)

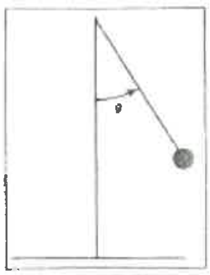


FIGURE 13.1a Simple pendulum.

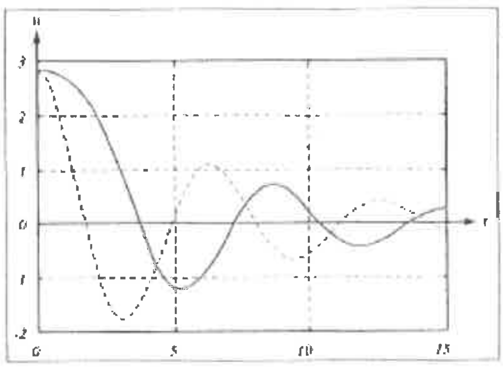
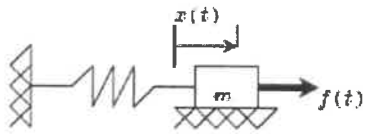


FIGURE 13.1b The motion of a pendulum given by ODE above (solid line) and linearized ODE (dashed line).

Motivação – Problemas Práticos

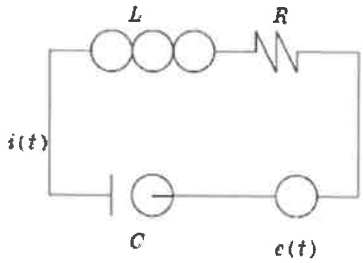
- Determinação de Soluções de Equações Diferenciais e de Sistemas de Equações Diferenciais

- Modelos Vibratórios mecânicos



$$m\frac{d^2x}{dx^2} + b\frac{dx}{dt} + Kx = f(t)$$

- Circuito eléctrico em série



$$Lq'' + rq' + \frac{1}{c}q = c(t) \quad (*)$$

L – Indutância

q – carga

R – Resistência

C – capacidade

$c(t)$ – força electromotriz

Pelas leis de *Kirchoff*, num circuito indutivo-restritivo-capacitivo (L-R-C) série, em que a corrente varia com o tempo, a carga q acumulada no condensador é dada pela equação diferencial linear de 2ª Ordem. (*)

- Considere o seguinte sistema em malha aberta: (Controlo de Sistemas)

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{3s+7}{s^2+2s-3}} \longrightarrow C(s)$$

(a) Obtenha a resposta do sistema para uma entrada em degrau unitário.

(b) Represente graficamente a resposta temporal do sistema da alínea anterior, indicando explicitamente os valores para o intervalo de tempo de 0 a 4 segundos.

Modelos vibratórios mecanicos

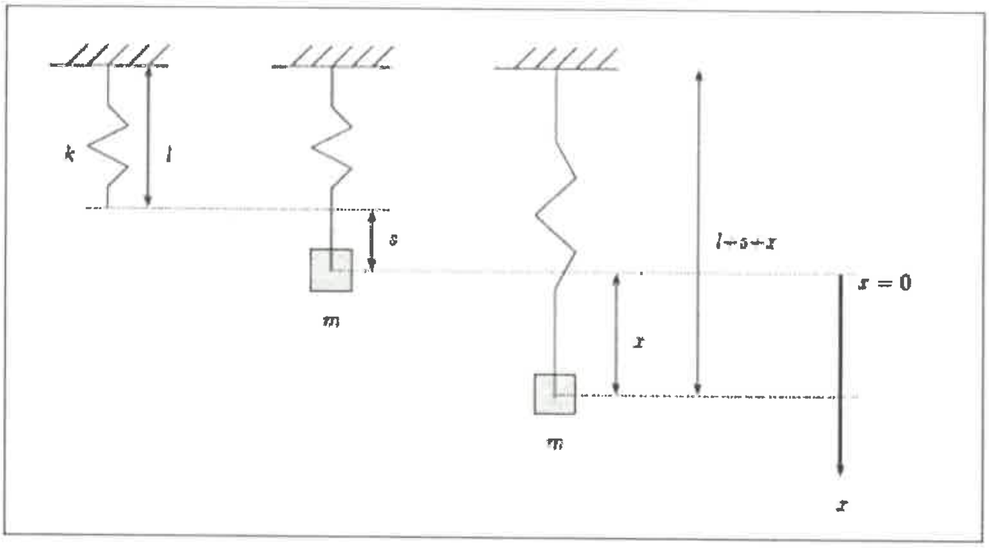
Nestes sistemas, o deslocamento x obedece à equação diferencial linear de 2ª ordem

$$mx'' + bx' + k(x) = f(t)$$

onde:

m = massa; x = deslocamento; b = factor de amortecimento;

k = constante da mola e $f(t)$ = força aplicada

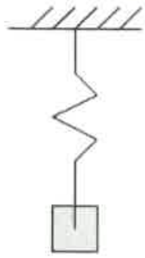


2.

a) $x'' + 2x' + 2x = 4\cos t + 2\sin t.\quad x(0) = 0\quad x'(0) = 3$

$\Rightarrow x(t) = e^{-t}\sin t + 2\sin t$

b) A equação $mx'' + kx = 0$ descreve o movimento harmónico simples, ou movimento livre não amortecido, e está sujeita às condições iniciais $x(0) = a$ e $x'(0) = b$ representando, respectivamente, a medida do deslocamento inicial e a velocidade inicial.



Use este conhecimento para dar uma interpretação física do problema de *Cauchy*

$$x'' + 16x = 0 \quad x(0) = 9 \quad x'(0) = 0$$

e resolva-o

c) Um peso de 6.4 *lb* provoca, numa mola, um alongamento de 1.28 *ft*. O sistema está sujeito à acção duma força amortecedora, numericamente igual ao dobro da sua velocidade instantânea. Determine a equação do movimento do peso, supondo que ele parte da posição de equilíbrio com uma velocidade dirigida para cima de 4 *ft/s*.

Resolução:

Sabe-se, pela lei de *Hooke*, que $W = ks$

No caso em estudo $k = \dfrac{6.4}{1.28} \Leftrightarrow k = 5\ \ lb/ft$. Como $W = mg$, tem-se $m = \dfrac{6.4}{32} \Leftrightarrow m = 0.2$

A equação que descreve o movimento livre amortecido é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt}$$

onde b é uma constante positiva e o sinal "-" indica que as forças amortecedoras actuam na direcção oposta ao movimento.

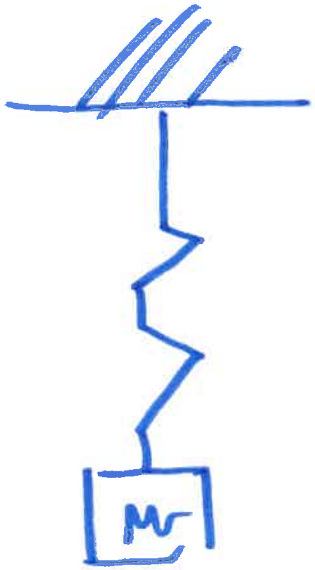
Então a equação diferencial de movimento de peso é $0.2x'' = -5x - 2x'$

$\Leftrightarrow x'' + 10x' + 25x = 0$ com $x(0) = 0$ e $x'(0) = -4$

3. Aplicações práticas de problemas ligados a circuitos elétricos

Problema de aplicação

Sistema mecânico mola - massa



como movimento harmónico simples ou movimento livre não amortecido.

$$(P)\begin{cases} m x'' + k x = 0 & (1)\ \text{EDL 2} \\ \begin{cases} x(a) = \alpha \\ x'(a) = \beta \end{cases} & (3)\ \text{CI} \\ t \in [a,b] & (2)\ \text{I} \end{cases}$$

objetivo: $\longrightarrow$ (P) $\longrightarrow$ (Q)

PVI de ordem 1

SED

1º PASSO

(1) $\longrightarrow$ SED

i) $m x'' + kx = 0 \quad (1)$

ii) Isolar a x'' no 1º membro

$$m x'' = -kx \iff x'' = -\frac{k}{m}x \quad (4)$$

iii) $$\begin{cases} u = x & (5) \\ v = x' & (6) \end{cases} \xrightarrow{\text{Derivar}} \begin{cases} u' = x' \\ v' = x'' \end{cases} \xrightarrow[(4)(5)]{(6)} \begin{cases} u' = v & (7) \\ v' = -\frac{k}{m}u & (8) \end{cases}$$

$$\text{SED} \begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{k}{m}u \end{cases} \iff \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \quad (9)$$

2º Passo Novas condições iniciais em u e v

$$\left\{\begin{array}{l} x(a) = \alpha \\ x'(a) = \beta \end{array}\right. \quad (3)\ \text{CI} \xrightarrow[(6)]{(5)} \left\{\begin{array}{l} u(a) = \alpha = u_0 \\ v(a) = \beta = v_0 \end{array}\right. \quad (10)$$

3º Passo (9) + (10)

$$(\theta) \left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} u' = v \\ v' = -\frac{k}{m} u \end{array}\right. & (11)\ \text{SED} \\ t \in [a, b] & (12)\ \text{VI} \\ \left\{\begin{array}{l} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{array}\right. & (13)\ \text{CI} \end{array}\right.$$

Caso Particular

$k = 16$; $m = 1$

$[a, b] = [0, 8]$

$u_0 = 4$

$v_0 = 0$

$\longrightarrow$ SExata = dsolve(...)

SAprox = MNSED