**Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED**



**Realizado por:**

Fábio Oliveira - 2022145902

Bruno Tiago Ferreira Martins – 2022147149

Carlos Emanuel Fernandes Silva - 2022127048

**Índice**

[1. Introdução 1](#_Toc137230171)

[1.1 O que é um sistema de equações diferenciais: definição e propriedades 1](#_Toc137230172)

[1.2 Aplicabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais 1](#_Toc137230173)

[2. Métodos Numéricos para resolução de PVI de Sistemas de Equações Diferenciais 2](#_Toc137230174)

[2.1 Método de NEuler 2](#_Toc137230175)

[2.2 Método de NEuler Melhorado 3](#_Toc137230176)

[2.3 Método NRK2 4](#_Toc137230177)

[2.4 Método NRK4 5](#_Toc137230178)

[3. Exemplos e exercícios modelados por ED de ordem 2 6](#_Toc137230179)

[3.1 Movimento não linear de um Pêndulo 6](#_Toc137230180)

[3.2 Modelo Vibratório Mecânico 10](#_Toc137230181)

[3.3 Movimento Mola - Massa sem amortecimento 12](#_Toc137230182)

[3.4 Movimento Mola-Massa com amortecimento 14](#_Toc137230183)

[3.5 Circuitos Elétricos em Série 16](#_Toc137230184)

[Nota: Mais uma vez, esta EDO não é linear, logo não calculamos a Exata. 17](#_Toc137230185)

[3.6 Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo 18](#_Toc137230186)

[3.7 Outro 21](#_Toc137230187)

[4. Conclusão 22](#_Toc137230188)

[5. Bibliografia 23](#_Toc137230189)

**Índice figuras**

[Figura 1 - Método de NEuler 2](#_Toc137230190)

[Figura 2 - Método de NEuler Melhorado 3](#_Toc137230191)

[Figura 3 - Método NRK2 4](#_Toc137230192)

[Figura 4 - Método NRK4 5](#_Toc137230193)

[Figura 5 - Execução do exercício do Pêndulo na nossa app. 9](#_Toc137230194)

[Figura 6 - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa sem Amortecimento na nossa app. 13](#_Toc137230195)

[Figura 7 - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa COM Amortecimento na nossa app. 15](#_Toc137230196)

[Figura 8 - Circuitos Elétricos em Série 17](#_Toc137230197)

[Figura 9 - Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo 20](#_Toc137230198)

[Figura 10 – Opção “outro” 21](#_Toc137230199)

# 1. Introdução

## 1.1 O que é um sistema de equações diferenciais: definição e propriedades

Um sistema de equações diferenciais múltiplo é um sistema constituído por duas ou mais equações que envolvem derivadas de duas ou mais variáveis dependentes relativamente a uma só variável independente, estas não precisam necessariamente de ser de primeira ordem.

## 1.2 Aplicabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais

Áreas como a engenharia, biologia, economia, entre outras, utilizam o ramo matemático das equações diferenciais para resoluções de problemas. Apresentamos alguns seguidamente exercícios relacionados com algumas dessas áreas e propostos pelo professor através da ajuda da nossa aplicação.

# 2. Métodos Numéricos para resolução de PVI de Sistemas de Equações Diferenciais

## 2.1 Método de NEuler

***2.1.1 Algoritmo/Função***

***Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente***

Figura - Método de NEuler

## 2.2 Método de NEuler Melhorado

***2.2.1 Algoritmo/Função***

**Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente**

Figura - Método de NEuler Melhorado

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

## 2.3 Método NRK2

***2.3.1 Algoritmo/Função***

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, software

Descrição gerada automaticamente

Figura - Método NRK2

## 2.4 Método NRK4

***2.4.1 Algoritmo/Função***

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, número

Descrição gerada automaticamente

Figura - Método NRK4

# 3. Exemplos e exercícios modelados por ED de ordem 2

## 3.1 Movimento não linear de um Pêndulo

Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, branco

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com relógio, file, esboço, preto e branco

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com file, diagrama, esboço

Descrição gerada automaticamente

Sendo L o comprimento do pendulo, m a massa, c o coeficiente de amortecimento, g a constante gravitacional e θ o deslocamento angular do pêndulo.

Com estes dados é possível deduzir que no tempo zero o pêndulo estava na posição a e tem uma velocidade inicial de zero.

Vamos considerar os seguintes valores para as variáveis mencionadas anteriormente, pois foram valores dados na resolução de este exercício numa aula:

A nossa função fica então:

No último passo isolamos a derivada de maior ordem e agora podemos mudar as variáveis.

Agora ficamos com duas *EDO* lineares de primeira ordem que podemos resolver com a nossa aplicação.

Se pêndulo for largado na posição , isto é, quando está paralelo à base ou perpendicular ao suporte, utilizamos as seguintes condições para y(0) e y’(0).

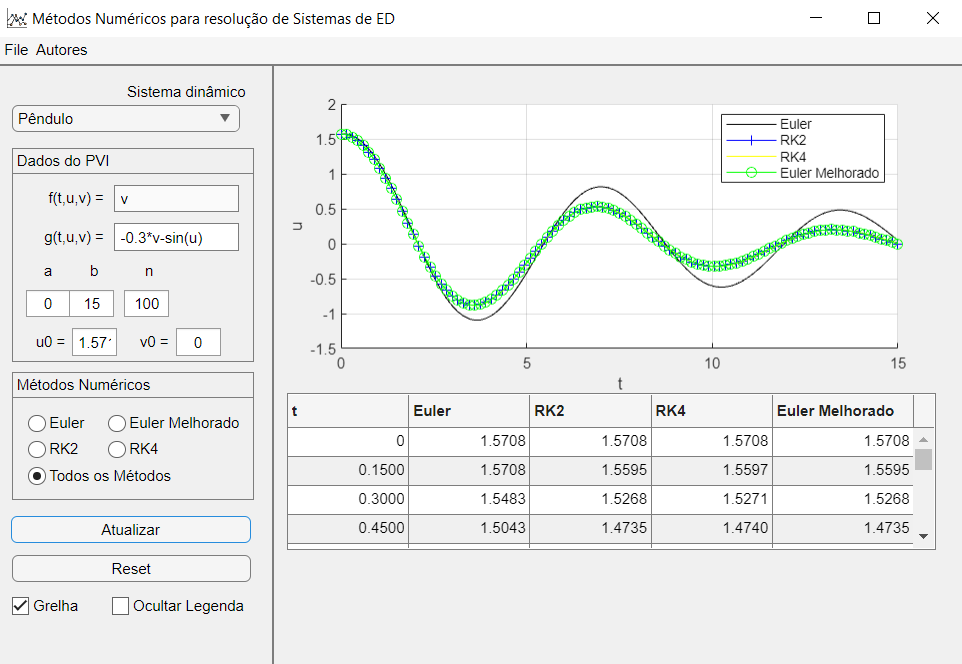
Através da APP verifica-se:

Figura - Execução do exercício do Pêndulo na nossa app.

**Nota**: A EDO deste exercício não é linear, então não permite calcular a Exata.

## 3.2 Modelo Vibratório Mecânico

Uma imagem com texto, diagrama, file, Paralelo

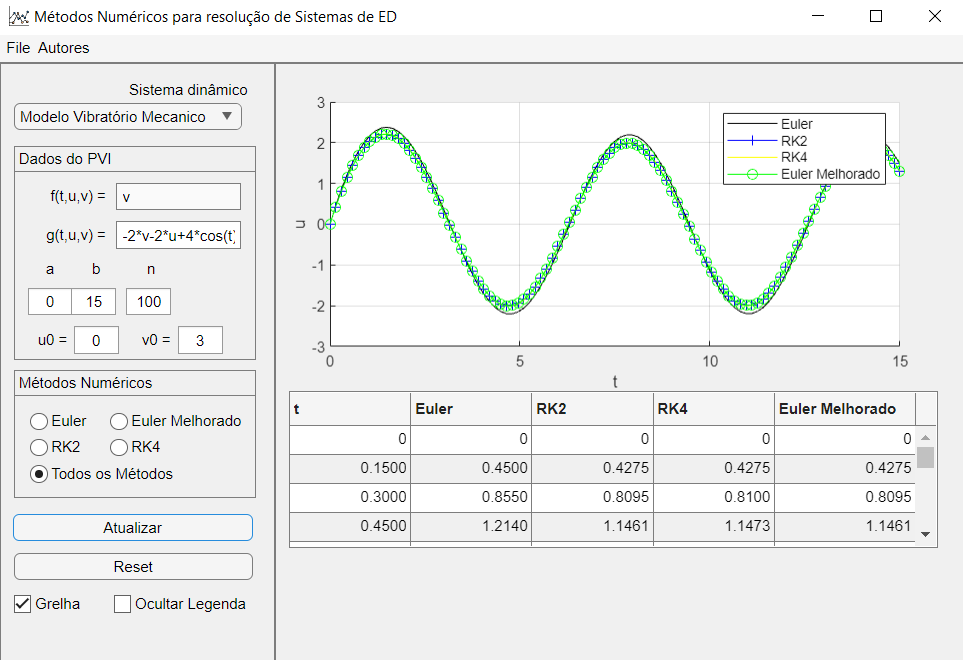
Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, Tipo de letra, branco, tipografia

Descrição gerada automaticamente

O enunciado pede-nos para considerarmos os seguintes dados:

Obtendo o seguinte sistema para a resolução do exercício:



**Nota:** Esta EDO não é homogênea, logo não permite calcular a exata.

## 3.3 Movimento Mola - Massa sem amortecimento

Uma imagem com texto, captura de ecrã, recibo, algebra

Descrição gerada automaticamente

O enunciado pede-nos para considerarmos os seguintes dados:

Obtendo o seguinte sistema para a resolução do exercício:

Usando a nossa aplicação:

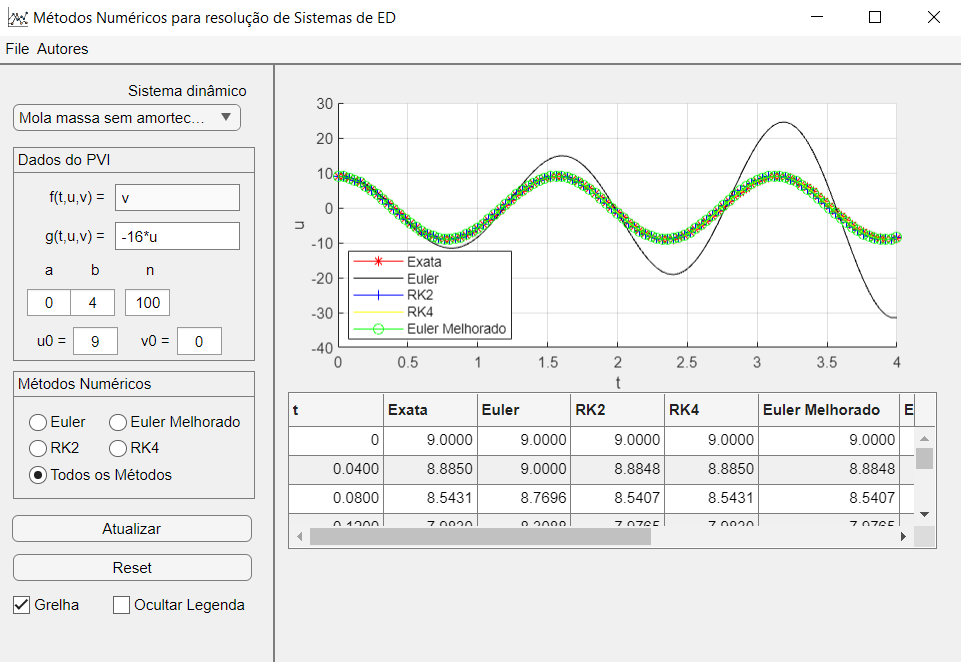


Figura - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa sem Amortecimento na nossa app.

## 3.4 Movimento Mola-Massa com amortecimento

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, documento

Descrição gerada automaticamente

Com base na última informação dada pelo enunciado da imagem vista acima devemos ter em consideração os seguintes dados:

Obtendo assim o sistema necessário para resolver o exercício através da nossa aplicação.

Usaremos então a app para resolver o exercicio:

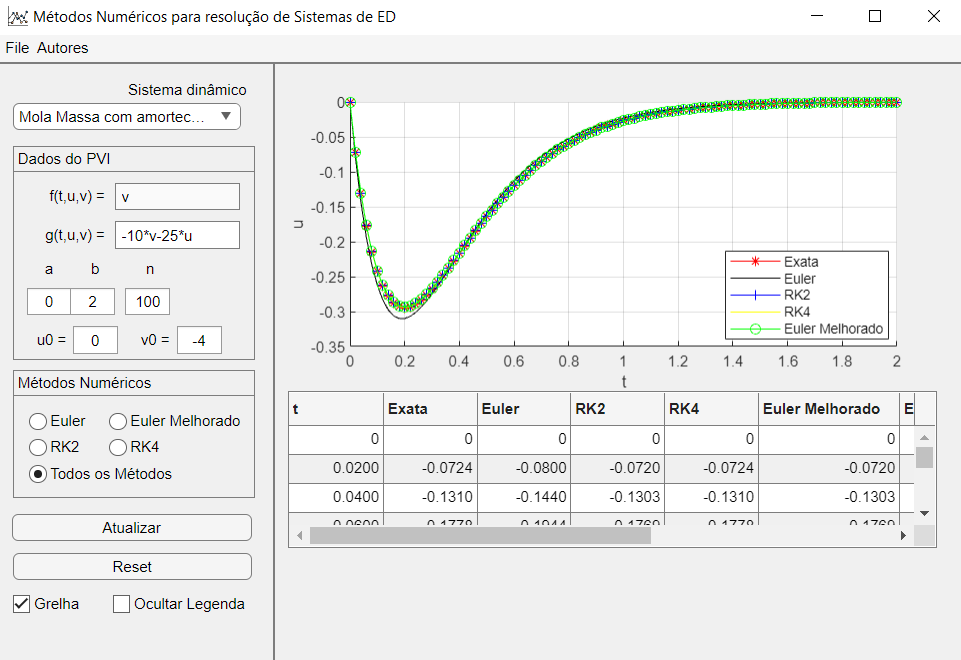


Figura - Execução do exercício do Movimento Mola-Massa COM Amortecimento na nossa app.

## 3.5 Circuitos Elétricos em Série



Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, recibo

Descrição gerada automaticamente

Após uma análise cuidada de ambos os enunciados das imagens obtemos os seguintes dados:

Desenvolvendo a função obtemos:

No instante t=0 o circuito é conectado a uma bateria, ou seja, o circuito está desligado até o tempo avançar de t=0. O que significa que y(0)=0 e y’(0)=0.

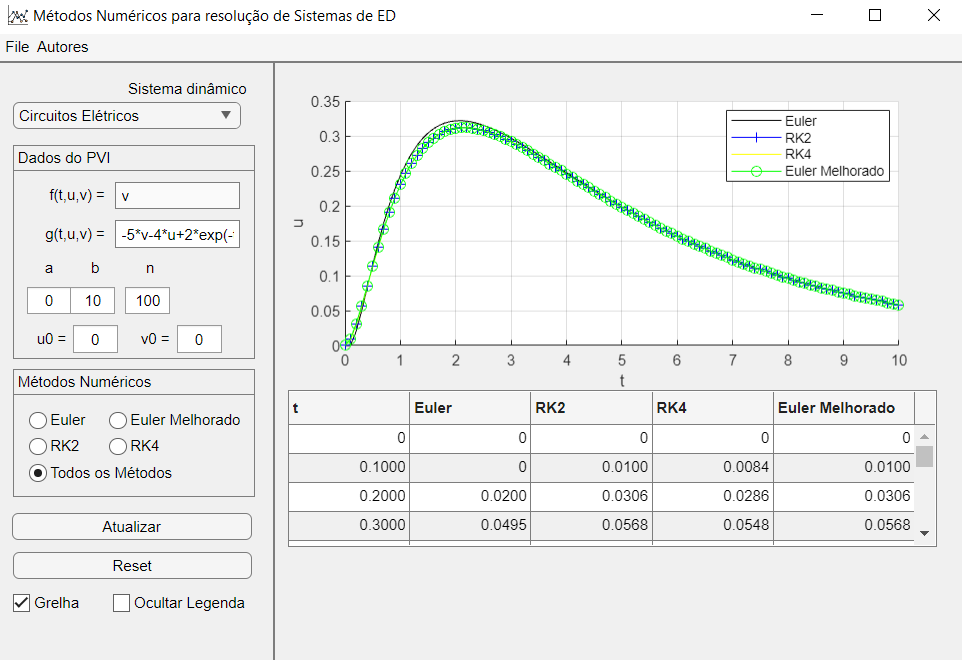


Figura - Circuitos Elétricos em Série

## Nota: Mais uma vez, esta EDO não é linear, logo não calculamos a Exata.

## 3.6 Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo

Uma imagem com texto, captura de ecrã, carta

Descrição gerada automaticamente

**1)**

O ponto de ordem mg = ks será onde o equilíbrio está definido, ficando então:

Assim sendo, a ED que modela o comportamento da suspensão do motociclo é:

Vamos assumir que a que motocicleta estava a 10 centímetros de altura antes de embater no solo, mas neste exercício usaremos pés, então pois que pés são 10.16 centímetros. A sua velocidade assumiremos 10 pés por segundo que são aproximadamente 305 metros por segundo, então .

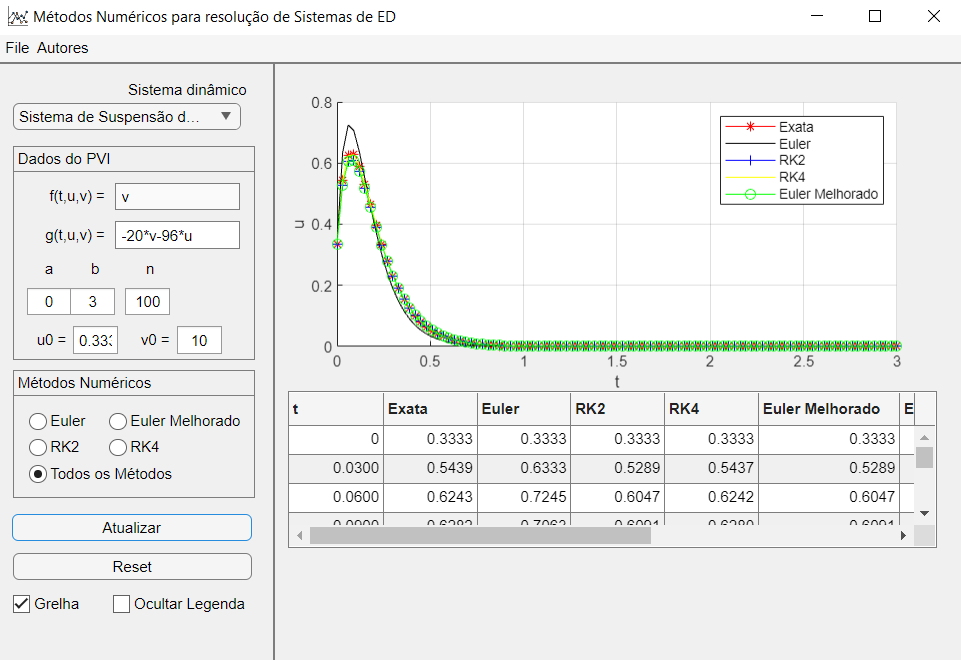


Figura - Modelagem de um sistema de suspensão de um motociclo

## 3.7 Outro

Caso o utilizador pretenda começar a resolução de um SED do zero que não esteja associado a nenhum exercício já implementado e resolvido, poderá escolher a opção "Outro" para uma experiência formatada.

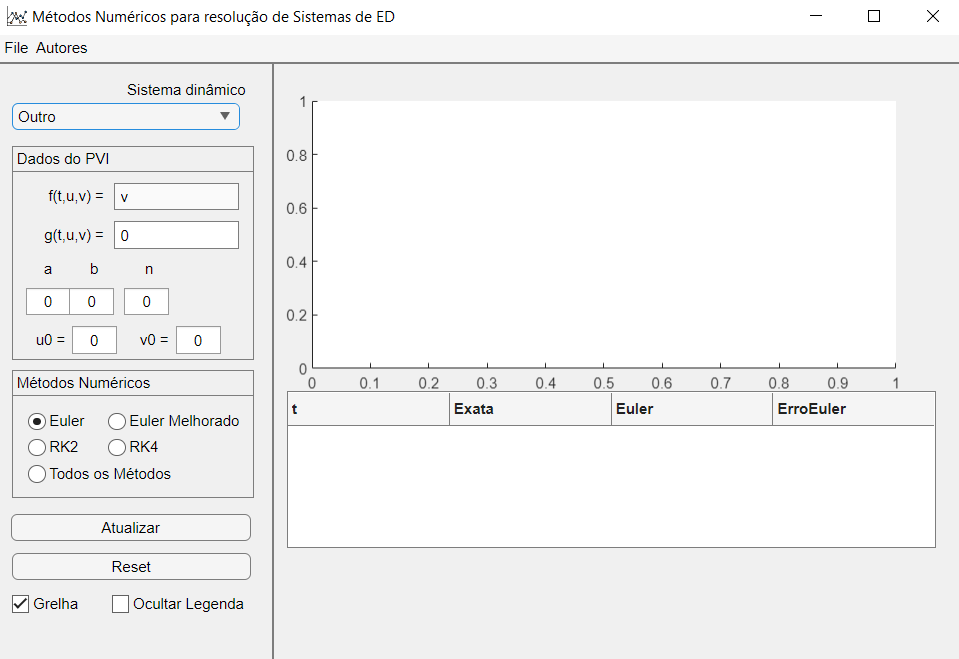


Figura – Opção “outro”

# 4. Conclusão

Após a realização deste trabalho, podemos concluir que este nos trouxe bastante vantagem pois ajudou-nos a compreender mais um pouco os conteúdos programáticos da disciplina.

Os requisitos propostos foram cumpridos com o máximo esforço e dedicação de modo que estes fossem concretizados com sucesso, fazendo assim que a nossa compreensão fosse mais acessível acerca dos sistemas de equações diferenciais e como se podem aplicar noutras áreas diversas.

Com a divisão de tarefas e entreajuda conseguimos atender às dificuldades que foram surgindo durante a realização das tarefas atribuídas a cada um dos elementos do grupo.

# 5. Bibliografia

Fórum Matlab: <https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/view.php?id=236987>

<https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Calculus_(OpenStax)/17%3A_Second-Order_Differential_Equations/17.03%3A_Applications_of_Second-Order_Differential_Equations>