Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ ЛИСТ

«16» июня 2020 г.	по дисциплине **Моделирование**
Начало 9 : 00	билет 10 группа ИУ7-61Б
окончание 10 : 15	студент Сушина А.Д
оценка ______	экзаменатор **Градов В.М.** (подпись)

БИЛЕТ №10

1. Опишите преимущества и недостатки многошагового метода Адамса в сравнении с семейством методов Рунге-Кутта.
2. Опишите алгоритм численного решения краевой задачи для ОДУ на сетке $\omega_h = \{x_n : x_n = nh, n = 0 \dots N\}$, построив разностную схему интегро-интерполяционным методом

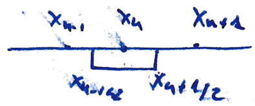
$$\frac{d}{dx}\left(k(u)\frac{du}{dx}\right) = f(u), \qquad (1)$$

$$x = 0,\ u(0) = \alpha,$$

$$x = b,\ -k\big(u(b)\big)\frac{du}{dx} = \beta,$$

$$0 \le x \le b.$$

Задача 2. Для построения разностной схемы на сетке выберем шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$.



Обозначим $F = -k(u)\dfrac{du}{dx}$ (2)

$$-\frac{dF}{dx} = f(u)$$

Интегрируем на ячейке.

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx}\,dx = \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(u)\,dx$$

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) = f_n h$$

Из (2) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}\,dx = -\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(u)}\,dx$$

$$y_{n+1} - y_n = -F_{n+1/2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(u)}$$

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2}\frac{y_n - y_{n+1}}{h};\ \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(u)}}.$$

Аналогично $F_{n-1/2}$.

Получим систему уравнений:

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = -D_n. \qquad (3)$$

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h} \quad C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h} \quad B_n = A_n + C_n \quad D_n = -f_n h$$

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Экзаменационный лист.

16 июня 2020 г
начало 9 : 00
окончание 10 : 15
оценка

по дисциплине Моделирование
билет 10 группа ИУ7-61б
студент Сучкова А.Д.
экзаменатор Градов В.М.

Задача 2. (продолжение)

Коэффициенты (3) зависят от неизвестной функции, система - система нелинейных уравнений. Используем метод простых итераций.

Обозначим текущую итерацию s, а предыдущую $(s-1)$.

Итерационный процесс организуется по схеме

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^{s} - B_n^{s-1} y_n^{s} + C_n^{s-1} y_{n-1}^{s} = -D_n^{s-1}.$$

Все коэффициенты берутся на $(s-1)$ итерации, они известны. Эту линейную схему можно решить методом прогонки. y_n^0 задается произвольно. Итерации прекращаются при условии $\max\left|\frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s}\right| \le \varepsilon$

Для решения системы методом прогонки необходимо учесть краевые условия

при $x=0$: Проинтегрируем (1) на отрезке $[0, x_{1/2}]$

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx}dx = \int_0^{x_{1/2}} f(u)dx$$

$$-(F_{1/2} - F_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0.$$

при $x = l$:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_n} \frac{dF}{dx}dx = \int_{x_{n-1/2}}^{x_n} f(u)dx \quad -(F_n - F_{n-1/2}) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0 \quad -\left(\beta - X_{n-1/2}\frac{y_{n-1} - y_n}{h}\right) = \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0).$$

$$-\frac{X_{n-1/2}}{h} y_n + \frac{X_{n-1/2}}{h} y_{n-1} = \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) + \beta.$$

Задание 1.

Рунге-Кутта 2-го порядка $y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right)\right]$

Рунге-Кутта 4-го порядка $y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$, где

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

Метод Адамса: 4-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n) + \frac{1}{2}h^2 f(x_n, x_{n-1}) + \frac{1}{6}h_n^2(2h_n + 3h_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{1}{12}h_n^2(3h_n^2 + 8h_n h_{n-1} + 4h_n h_{n-2} + 6h_{n-1}^2 + 6h_{n-1}h_{n-2}) \cdot f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}),$$

где $h_n = x_{n+1} - x_n$, $f(x_n, x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Преимущество метода Адамса в том, что при переходе из n в $n+1$ правая часть вычисляется 1 раз, в то время как в методе Рунге-Кутта того же порядка 4 раза. В то же время точность метода Адамса ниже. Коэффициент в остаточном члене в 9 или раз больше, чем в методе Рунге-Кутта.

Чтобы начать расчет методом Адамса, недостаточно знать только $y(x_0)$, надо знать решение в x_0, x_1, x_2, x_3. Эти значения вычисляются другими методами