Н.А. МИКУЛИК
Г.Н. РЕЙЗИНА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ТЕХНИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

Справочное пособие

Минск
БНТУ
2011

УДК 519.2(076.2)(035)
ББК 22.172я7
М 59

Рецензенты:
А.В. Метельский, А.П. Рябушко

Микулик, Н.А.

М 59 Решение задач с техническим содержанием по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам: справочное пособие / сост.: Н.А. Микулик, Г.Н. Рейзина. – Минск: БНТУ, 2011. – 153 с.

ISBN 978-985-525-411-0.

Справочное пособие составлено в соответствии с программой курса математики для инженерных специальностей. В нем дано краткое изложение теоретического материала рассматриваемых тем, приведены решения типовых примеров, даны задания для аудиторной и самостоятельной работы.

УДК 519.2(076.2)(035)
ББК 22.172я7

ISBN 978-985-525-411-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее справочное пособие является вторым изданием, существенно переработанным и дополненным на основании опыта работы авторов со студентами БНТУ. Изменен порядок изложения некоторых тем, а также дополнением числа задач. В пособии приведены сведения из теоретического материала, необходимые для решения задач, решения типовых примеров, задачи для аудиторных занятий и самостоятельного решения. Большинство задач в пособии с техническим содержанием.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей университетов, а также может быть полезным для студентов экономических специальностей, инженерам, бакалаврам, магистрам, преподавателям вузов и колледжей.

Авторы выражают благодарность рецензентам доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному работнику образования Республики Беларусь Рябушко А.П. и доктору физико-математических наук, профессору Метельскому А.В. за ценные замечания, способствующие улучшению качества рукописи.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРИКИ

Пусть имеем число n объектов произвольной природы, называемых элементами. Из них образованны по определенному правилу группы. Соединениями называют совокупность элементов: $a\ b\ c\ d\ e$ …..

Перестановками называются соединения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

Например: *abc, bca, cab, acb, bac, cba*.

Число перестановок из m элементов P_m равно $m!$.

Например: $P_3 = 3! = 6$.

Размещениями называются соединения, отличающиеся друг от друга самими элементами или их порядком: *ab, db, ba, bd.*

Число размещений из n элементов по m $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Сочетаниями называются соединения, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m $C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-(m-1))}{m!}$.

Например, $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2!} = 6$.

Т.е. число сочетаний получается из числа размещений путем исключения из них числа перестановок. Например,

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Пример 1. Сколькими способами можно распределить 6 одинаковых должностей между 6 людьми?

Решение. Т.к. должности одинаковые то, число способов будет равно числу перестановок $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$.

Пример 2. Сколькими способами можно распределить за столом по 2 студента из группы в 20 человек?

Решение. Поскольку 20 человек нужно распределить по 2, то порядок в парах не имеет значения. Значит число способов равно числу размещений из 20 по 2, т.е. $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Пример 3. Подрядчику нужны 4 одинаковых специалиста, а к нему обратились с предложением своих услуг 10 таких специалистов. Сколькими способами он может выбрать из них 4.

Решение. Поскольку объединения по 4 человека будут отличаться друг от друга хотя бы одним человеком, то число способов выбора будет равно числу сочетаний из 10 по 4, т.е. $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$.

1.2. СОБЫТИЯ

Событием называется всякий результат опыта. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: *A*, *B*, *C* и т.д.

Достоверным называется событие, которое непременно произойдет при определенной совокупности условий.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет при определенной совокупности условий.

Случайным называется событие, которое при определенных условиях может произойти или не произойти.

Произведение или *совмещение* событий *A* и *B* есть событие *C*=*AB*, состоящее в наступлении обоих событий *A* и *B*.

Сумма или *объединение* событий *A* и *B* есть событие *C*=*A*+*B*, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий *A* и *B*.

События *A* и *B* *несовместны*, если *AB* есть невозможное событие.

Два события A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если их сумма $A + \overline{A}$ есть достоверное событие, а произведение $\overline{A}A$ – невозможное событие.

События $A_k\,(k=1,2,...,n)$ образуют *полную группу событий*, если они попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие.

Сложение и умножение событий обладают следующими свойствами.

1. *A+B=B+A; AB=BA.*
2. *(A+B)+C=A+(B+C); (AB)C=A(BC).*
3. *A(B+C)=AB+AC.*

Пример 1. Для каких событий *A* и *B* возможно равенство *A+B=A*?

Решение. Равенство *A+B=A* возможно, если событие *A* включает в себя событие *B*.

Пример 2. Что означают события *AB* и *A+B*?

Решение. Событие *AB* означает наступление обоих событий *A* и *B*. Событие *A+B* означает наступление одного из событий *A* или *B* или обоих вместе.

Пример 3. Электрическая цепь (блок-схема) составлена из элементов по схеме, при веденной на рис. 1.1. Разрыв цепи (событие *A*) может произойти вследствие выхода из строя элементов 1,2,3 (соответственно проходят события A_1, A_2, A_3). Выразить событие А через A_1, A_2, A_3.

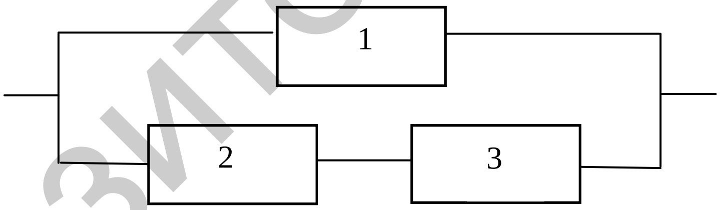


Рис. 1.1

Решение. Событие *A* может произойти в одном из трех случаев: 1) $A_1\,A_2\,A_3$– выход из строя всех элементов 1,2,3 одновременно; 2) $A_1\,A_2\,\overline{A_3}$ – выход из строя только элементов 1 и 2; 3) $A_1\,\overline{A_2}\,A_3$ – выход из строя только элементов 1 и 3. Таким образом, $A = A_1\,A_2\,A_3 + A_1\,A_2\,\overline{A_3} + A_1\,\overline{A_2}\,A_3$.

Задачи

1. Что означают события *A+A* и *AA*?

2. Когда возможно равенство *AB=A*?

3. Событие A – хотя бы одна из трех проверяемых деталей бракованная, B – все детали доброкачественные. Что означают события: а) $A+B$; б) AB?

4. Доказать, что: а) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=AB$; б) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=V$; в) $(A+\overline{B})(A+\overline{B})+A=A+\overline{B}$; г) $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=\overline{A}B+\overline{AB}$.

Примечание. В алгебре событий выполняются все обычные свойства сложения и умножения, причем роль нуля играет невозможное событие V, а роль единицы – достоверное событие U.

5. При движении автомобиля под его левые и правые колеса попадают препятствия (выступы и впадины дорожного полотна). Пусть A означает событие, заключающееся в попадании препятствия под левое колесо, B–под правое колесо. Какой смысл имеют события а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $A+B$; г) $\overline{A+B}$; д) $\overline{AB}$.

6. Событие A–хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B–бракованных изделий не менее двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

7. Упростить выражение $A=(B+C)(B+\overline{C})(\overline{B}+C)$.

8. Когда возможны равенства а) $A+\overline{B}=A$; б) $AB=\overline{A}$; в) $A+B=AB$?

9. Найти случайное событие X из равенства $\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B$.

10. Доказать, что $\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$.

Замечание. Воспользоваться равенствами: $\overline{A}=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}$.

11. Совместны ли события A и $\overline{A+B}$?

12. Доказать, что события A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу.

Замечание. Воспользоваться равенством $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

13. К механизмам управления автомобилем относятся рулевое управление и две тормозные системы. Событие A–исправно рулевое управление, событие $B_k\,(k=1,2)$ – исправна k-я тормозная система. Событие C означает работоспособность автомобиля, что будет в том случае, если исправно рулевое управление и хотя бы одна тормозная система. Выразить события C и $\overline{C}$ через A и B_k.

14. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: $A_k(k=1{,}2)$–исправен k-й блок первого типа, $B_j(j=1{,}2{,}3)$ –исправен j-й блок второго типа. Прибор исправен, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее исправность прибора, через A_k и B_j.

15. Пусть события A_1, A_2, A_3–дефекты, приводящие к опасному перегреву двигателя; A_1–большое отложение слоя накипи на стенках; A_2 – подтекание воды из радиатора; A_3–неисправности термостата; $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – безотказность работы указанных узлов двигателя. Найти выражения для событий: а) A–ни одного отказа во время работы; б) B – только один отказ; в) C – только два отказа; г) D – три отказа; д) E – хотя бы один отказ; е) F – хотя бы два отказа из трех.

Ответы

1. $A+A=A$, $AA=A$.

2. Событие A – частный случай события B.

3. а) достоверное событие. б) невозможное событие.

5. а) $\overline{A}$ – препятствие не попало под левое колесо.

б) $\overline{B}$ – препятствие не попало под правое колесо.

в) $A+B$ – препятствие попало хотя бы под одно колесо.

г) $\overline{A+B}$ – препятствие не попало под колеса.

д) $\overline{AB}$ – препятствие не попало под колеса.

6. $\overline{A}$ – все изделия доброкачественные. $\overline{B}$ – есть одно бракованное изделие или нет ни одного бракованного.

7. $A=BC$.

8. а) $A=V$, $B=U$. б) $A=U$, $B=V$. в) $A=B$.

9. $X=\overline{B}$.

11. Нет, т.к. $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$.

13. $C=A(B_1+B_2), \overline{C}=\overline{A}+\overline{B_1B_2}$.

14. $C=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_1\overline{B_2}B_3+\overline{B_1}B_2B_3)$.

15. а) $A=\overline{A_1 A_2 A_3}$,

б) $B=\overline{A_1 A_2} A_3+\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}+A_1 \overline{A_2 A_3}$,

в) $C=A_1 \overline{A_2} A_3+A_1 \overline{A_2} A_3+A_1 A_2 \overline{A_3}$,

г) $D=A_1 A_2 A_3$,

д) $E=B+C+D$,

е) $F=C+D$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A называются отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу n всех несовместных единственно возможных и равновозможных исходов, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это классическое определение вероятности события.

Относительной частотой (частостью) W события называется отношение числа M испытаний, в которых событие произошло, к общему числу N испытаний:

$$W(A)=\frac{M}{N}.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа, которое является вероятностью события. В связи с этим используют *статистическое определение вероятности*, принимая за вероятность события относительную частоту (частость) или число, близкое к ней.

Пусть имеем некоторую область Ω на плоскости или в пространстве и другую область $D \in \Omega$. Требуется найти вероятность попадания случайной точки в область *D*. В данном случае результатом опыта считается случайное положение точки в области, при этом любое положение точки в этой области считается равновозможным. В таком случае *вероятностью* называется отношение меры области $D(mesD)$ к мере области $\Omega(mes\Omega)$, т.е. $P(A)=\frac{mesD}{mes\Omega}$ (геометрическая вероятность; меры: длина, площадь, объем).

Свойства: $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 1. Куб, все грани которого обработаны, распилен на 512 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две обработанные поверхности.

Решение. Всего кубиков n=512. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 6 кубиков с двумя обработанными сторонами. Поэтому $m = 12 \cdot 6 = 72$; $P=\frac{72}{512} \approx 0{,}14.$

Пример 2. В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

Решение. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято l (это можно сделать C_k^l способами), а остальные $m–l$ изделий – небракованные, т.е. они взяты из общего числа $n–k$ (количество способов равно C_{n-k}^{m-l}). Поэтому число благоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность будет $P(A)=\frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

Пример 3. На отрезке, длинной равной l, случайно появляется точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до концов отрезка больше чем $\frac{1}{8}$.

Решение. По условию задачи, искомому событию соответствуют точки, находящиеся в интервале (a, b) (рис.1.2). длина (a, b) равна $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ и $P(A)=\frac{3/4}{1}=\frac{3}{4}$.

Рис. 1.2

Задачи

16. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длиной L равновозможно произошел обрыв. Определить вероятность того, что точка C удалено от точки A на расстояние не меньше l.

17. Образцы круглого сечения разных марок стали испытываются на удар. После чего для проверки наличия трещин наудачу берется один образец, а затем второй, оказавшийся из стали марки 40X. Определить вероятность того, что первый образец, взятый на проверку, изготовлен из стали марки 40X, если всего 3 образца изготовлены из стали этой марки, а 7 – из стали марки 20X.

18. Из партии изготовленных шестерен, среди которых 20 годных и 5 бракованных, для контроля наудачу взято 8 штук. При контроле оказалось, что первые 3 шестерни из 8 годные. Определить вероятность того, что следующая деталь будет годной.

19. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины: а) не содержит одинаковых цифр; б) имеет две одинаковые цифры; в) имеет три одинаковые цифры; г) содержит две пары одинаковых цифр; д) состоит из одинаковых цифр.

Известно, что все номера четырехзначные, начиная с 0001, не повторяющиеся и равновозможные.

20. В экспериментальном цехе 10 дифференциалов*, собранных двумя рабочими, в конце смены поданы на сборку автомобилей. Определить вероятность того, что 3 дифференциала, поставленные последовательно на машины, окажутся изготовленными первым рабочим, если известно, что первый рабочий собрал 6 дифференциалов, а второй – 4.

21. Из десяти подсобранных узлов карданной передачи* два получили высокую оценку ОТК. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти узлов: а) один высокого качества; б) два высокого качества.

22. В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6 деталей 2 окажутся нестандартными.

Ответы

16. $1-\dfrac{l}{L}$. **17**. $P(A)=\dfrac{2}{9}$. **18**. $P(A)=\dfrac{17}{22}$.

19. а) $\dfrac{560}{1111}$, б) $\dfrac{480}{1111}$, в) $\dfrac{40}{1111}$, г) $\dfrac{30}{1111}$, д) $\dfrac{1}{1111}$.

20. $P=\dfrac{1}{6}$. **21**. а) $\dfrac{5}{9}$, б) $\dfrac{2}{9}$, в) $\dfrac{7}{9}$. **22**. 0,08.

---

*Дифференциал – механизм, обеспечивающий ведущим колесам возможность вращения с различным числом оборотов.

*Карданная передача – узел, служащий для соединения механизмов автомобиля, валы которых расположены под некоторым углом один к другому, меняющимся при движении автомобиля.

1.4. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема сложения двух несовместных событий:

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.1}$$

Теорема сложения двух совместных событий:

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2}$$

Условной вероятностью $P_B(A)$ события A называется вероятность появления этого события, вычисленная в предположении, что имело место событие B.

Теорема умножения двух зависимых событий:

Вероятность произведения (совместного наступления) двух зависимых событий *P(AB)* равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, т.е.

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \tag{1.3}$$

Если события независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.4}$$

Вероятность произведения конечного числа зависимых событий равно произведению вероятности одного из них и условных вероятностей остальных событий, вычисленных при условии, что все предшествующие события произошли, т.е.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2..A_{n-1}}(A_n) \tag{1.5}$$

События $A_1A_2...A_n$ называются независимые в совокупности, если они попарно-независимы, а также независимы каждое из них и произведение остальных.

Если события независимы, то

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n) \tag{1.6}$$

Для любого события $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ противоположное событие $\overline{A} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, но $P(A + \overline{A}) = 1$ отсюда $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\sum_{i=1}^{n} \overline{A_i})$. Значит вероятность появления хотя бы одного события равна 1 минус произведение вероятностей противоположных событий.

Пример 1. На складе находятся 60 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 30 изготовлено первой бригадой, 16 – второй, 14 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку деталей, изготовленной второй или третьей бригадой.

Решение. Вероятность поступления детали, изготовленной второй бригадой, $P_2 = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$, а вероятность поступления детали, изготовленной третьей бригадой,

$P_3 = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$. Так как появление на сборке одной детали исключает появление другой в том же испытании, то события несовместны. Значит:

$$P = P_2 + P_3 = \frac{4}{15} + \frac{7}{30} = \frac{1}{2}.$$

Эту задачу можно было решить иначе. В задаче требуется найти вероятность появления на сборке детали, изготовленной первой бригадой. А вероятность появления на сборке вышеуказанной детали $P_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, тогда вероятность появления противоположного события

$$P = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. В процессе эксплуатации двигателя возможны следующие неисправности: большое отложение слоя накипи и подтекание воды из радиатора. Вероятности этих неисправностей во время эксплуатации соответственно равны P_1=0,8, P_2=0,9. Найти вероятность того, что за время одной рабочей смены обнаружатся обе неисправности.

Решение. В задаче требуется найти вероятность совмещения двух событий. Эти события независимы, поэтому

$$P = P_1 P_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Пример 3. Определить вероятность того, что партия в 100 деталей, среди которых 5 бракованных, будет принята при испытании, если условиями приема допускается не более одного бракованного изделия из 50.

Указание. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при испытании не получено ни одного бракованного изделия, а через B – событие, состоящее в том, что получено только одно бракованное изделие. Искомая вероятность $P=P(A+B)=P(A)+P(B)$. События A и B несовместны.

Решение. Из 100 изделий 50 можно выбрать C_{100}^{50} способами. Из 95 не бракованных изделий 50 можно выбрать C_{95}^{50} способами. Поэтому $P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$.

Аналогично, $P(B)=\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$, тогда $P=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$.

Пример 4. Признаками неисправности главной передачи* и дифференциала являются шумы и стуки в ведущем мосту. Шумы и стуки могут возникать при недостатке масла в картере и подшипниках, износе зубьев в шестернях. Для того чтобы поставить данный узел на ремонт, достаточно обнаружить отсутствие нужного количества масла в картере и подшипниках или поломку зубьев. При испытаниях вероятность утечки масла в одном и другом случае равна соответственно P_1 и P_2, вероятность поломки зубьев P_3.найти вероятность того, что узел окажется неисправным.

Указание. Событие A (неисправность узла) есть сумма двух совместных событий:

$$A=B+C,$$

где B – отсутствие масла; C – поломка зубьев.

Искомая вероятность: $P(A)=P(B)+P(C)-P(BC)$.

---

*Главная передача служит для передачи вращающего усилия от карданного вала к полуосям ведущих колес, а также увеличения тягового усилия на ведущих колесах.

Задачи

23. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012, 0,010, 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

24. Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему в течение времени T равна 0,88. Для повышения надежности системы установили резервный блок, надежность которого равна 0,85. Определить вероятность безотказной работы системы за время T с учетом резервного блока.

25. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется отличного качества, если известно, что 3% всей продукции составляют изделия первого сорта, а 75% изделий удовлетворяют требованиям отличного качества?

26. Изготовлено 30 подшипников, причем из них 5 соответствуют размерам III группы ГОСТа, 10 – II группы, 15 – I группы. Какова вероятность того, что первый отобранный на сборку подшипник принадлежит III группе, второй – II группе и третий – I группе?

27. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

28. Прибор, работающий в течение времени *t*, состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени *t* отказать. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла равна 0,7, второго – 0,8 и третьего – 0,9. Найти вероятность безотказной работы прибора.

29. Электрическая схема состоит из трех блоков, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что каждый из них работает, соответственно равны: $p_1 = 0{,}8;$ $p_2 = 0{,}4;$ $p_3 = 0{,}7$. Схема работает при работе двух блоков из трех. Определить вероятность того, что схема будет работать.

30. Вероятность того, что данный прибор проработает 150 ч., равна $\frac{5}{8}$, а 400ч. – $\frac{4}{7}$. Прибор проработал 150 ч. Какова вероятность, что он проработает еще 250 ч.?

Ответы

23. 0,03. **24**. 0,982. **25**. 0,73. **26**. 0,03. **27**. 0,96. **28**. 0,504. **29**. 0,712. **30**. 0,8.

1.5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Вероятность $P(A)$ появления события *A*, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий (гипотез), определяется по *формуле полной вероятности*

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A). \qquad (1.7)$$

Вероятность $P_A(H_k)$ гипотезы H_k, после того как имело место событие *A*, определяется по формуле Бейеса

$$P_A(H_k)=\frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)}, \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (1.8)$$

Пример 1. При механической обработке станок обычно работает в двух режимах: 1) рентабельном и 2) нерентабельном. Рентабельный режим наблюдается в 80% всех случаев работы, нерентабельный – 20%. Вероятность выхода станка из строя за время *t* работы в рентабельном режиме равна 0,1, в нерентабельном – 0,7. Найти вероятность *P* выхода станка из строя за время *t*.

Решение. Событие *A* – выход станка из строя за время *t* при этом возможны следующие гипотезы: H_1 – работа станка в рентабельном режиме; H_2 – работа станка в нерентабельном режиме. $P(H_1)=0{,}8$, $P(H_2)=0{,}2$, $P_{H_1}(A)=0{,}1$, $P_{H_2}(A)=0{,}7$, искомая вероятность по формуле (1.7) будет равна $P(A)=0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}22$.

Пример 2. По линии связи передаются два сигнала *A* и *B* соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех $\frac{1}{6}$ сигналов *A* искажается и принимается как сигналы *B*, а $\frac{1}{8}$ часть переданных сигналов *B* принимается как сигналы *A*. Требуется: а) найти вероятность того, что при приеме появится сигнал *A*, сигнал *B*; б) известно, что принят сигнал *A*. Какова вероятность, что он же и был передан?

Решение. Введем гипотезы: H_A – передан сигнал *A*, H_B – передан сигнал *B*. Через *A* и *B* обозначим события, означающие принятие соответственно *A*- и *B*-сигналов. По условию $P(H_A)=0{,}84$, $P(H_B)=0{,}16$. Вероятность того, что принят сигнал *A* при условии, что он же и послан,

$$P_{H_A}(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Вероятность того, что принят сигнал A при условии, что послан сигнал B, $P_{H_B}(A)=\frac{1}{8}$, отсюда по формуле (1.7)

$P(A)=P(H_A)P_{H_A}(A)+P(H_B)P_{H_B}(A)=0{,}84\cdot\frac{5}{6}+0{,}16\cdot\frac{1}{8}=72$; аналогично

$P(B)=P(H_A)P_{H_A}(B)+P(H_B)P_{H_B}(B)=0{,}84\cdot\frac{1}{6}+0{,}16\cdot\frac{7}{8}=0{,}28$.

Вероятность того, что был передан сигнал A при условии, что он же был принят, вычислим по формуле (1.8)

$$P_A(H_A)=\frac{P(H_A)P_{H_A}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}84\cdot\frac{5}{6}}{0{,}72}=\frac{35}{36}\approx 0{,}97.$$

Пример 3. Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Вероятность работы первого узла равно P_1, второго – P_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружилось, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Решение. Возможны четыре гипотезы: H_0 – оба узла исправны; H_1 – первый узел отказал, а второй исправен; H_2 – первый узел исправен, а второй отказал; H_3 – оба узла отказали.

Вероятность гипотез:

$$P(H_0)=P_1P_2;\ P(H_1)=(1-P_1)P_2;$$

$$P(H_2)=P_1(1-P_2);\ P(H_3)=(1-P_1)(1-P_2).$$

Наблюдалось событие A – прибор отказал:

$$PH_0=0, P_{H_1}(A)=P_{H_2}(A)=P_{H_3}(A)=1.$$

По формуле Бейеса (1.8)

$$PA(H_1)=\frac{(1-P_1)P_2}{(1-P_1)P_2+P_1(1-P_2)+(1-P_1)(1-P_2)}=\frac{(1-P_1)P_2}{1-P_1\cdot P_2}.$$

Задачи

31. Имеются две партии изделий по 12 и по 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

32. На сборку поступают шестерни с трех автоматов. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% шестерен, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1% брака шестерен, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной шестерни (P_1) и вероятность того, что оказавшаяся бракованной шестерня изготовлена первым автоматом (P).

33. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других – все годные.

34. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции с вероятностями 0,09; 0,16; 0,2;5 0,25; 0,16 и 0,09, может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

35. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Деталь подвергается упрощенной системе контроля, которая для годных деталей дает положительный результат с вероятностью 0,98, а для деталей с отклонениями – лишь с вероятностью 0,05. Какова вероятность, что изделие, дважды выдержавшее упрощение испытание, является годным?

36. При исследовании на химический состав рудной породы есть подозрение на присутствие одного из трех элементов: a_1, a_2, a_3.вероятности их присутствия соответственно равны $P_1 = \frac{1}{2}$; $P_2 = \frac{1}{6}$; $P_3 = \frac{1}{3}$. Для уточнения химического состава породы назначается очередной анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае присутствия элемента a_1, с вероятностью 0,2, в случае присутствия a_2 и с вероятностью 0,9 в случае присутствия a_3. Анализ был произведен пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный. Требуется найти вероятность присутствия каждого элемента после анализа.

37. Определить вероятность того, что 100 гаек, взятых наудачу из 1000, окажутся годными, если известно, что число негодных гаек на 1000 штук равновозможно от 0 до5.

38. Определить вероятность того, что среди 1000 гаек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 гаек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных гаек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

39. Вероятности определения химического состава проверяемых деталей на промежуточном контроле для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном контроле тремя контролерами химический состав трех деталей оказался правильно определенным для двух деталей (что подтвердилось на окончательном контроле в лаборатории). Найти вероятность того, что недостаточный контроль провел третий контролер.

40. деталь одновременно подвергалась обработке тремя инструментами, в результате была признана негодной. Определить вероятность того, что деталь была признана негодной в результате обработки первым, вторым или третьим инструментом, если вероятности неисправностей для них соответственно равны 0,2; 0,4; 0,6.

41. Прибор содержит два блока, исправность каждого из которых необходима для функционирования прибора. Вероятности безотказной работы в течение промежутка времени T для этих блоков соответственно равны P_1 и P_2. Прибор испытывался в течение времени T и вышел из строя. Определить вероятность того, что отказал первый блок, второй блок, оба блока.

Ответы

31. $\frac{13}{132}$. **32.** $P_1 \approx 0{,}0022. P_2 = 0{,}11.$ **33.** $\frac{2}{9}$. **34.** 0,332. **35**. 0,999.

36. $P_1 = 0{,}002; P_2 = 0{,}01; P_3 = 0{,}988.$ **37.** 0,78. **38**. 0,214. **39**. $\frac{6}{13}$. **40**. 0,103; 0,277; 0,620. **41.** $\frac{(1-P_1)P_2}{1-P_1P_2}; \frac{(1-P_2)P_1}{1-P_1P_2}; \frac{(1-P_1)(1-P_2)}{1-P_1P_2}.$

1.6. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет m раз, определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.9}$$

где $q = 1 - p, C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m+1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3...m}$.

Вероятность появления события A хотя бы один раз в n испытаниях равна

$$P_n(1;n) = 1 - q^n. \tag{1.10}$$

Если число испытаний велико, а p – вероятность появления события мала (обычно $p < 0{,}1$ и $npq \le 9$), то вместо формулы Бернулли применяем формулу Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, где \lambda = np. \tag{1.11}$$

Пример 1. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажет ровно один узел; в) откажут ровно два узла; г) откажут не менее двух узлов.

Решение. а) в данном случае n=10. По формуле (1.10) $P_{10}(1) = 1 - q^{10}$, где $q = 1 - p$.

б) искомую вероятность определим по формуле (1.9):

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 pq^9 = 10pq^9.$$

в) искомая вероятность находится по формуле (1.9):

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45p^2q^8.$$

г) искомая вероятность находится:

$$R_{10}(2) = 1 - (C_{10}^0 p^0 q^{10-0} + C_{10}^1 p^1 q^{10-1}) = 1 - q^{10} - 10pq^9 = 1 - q^9(q - 19p).$$

Пример 2. Завод отправил потребителю 600 изделий. Вероятность повреждения изделия при транспортировке 0,002. Какова вероятность получения потребителем 5 поврежденных изделий?

Решение. Применяем формулу Пуассона (1.11):

$$\lambda = 600 \cdot 0{,}002 = 1{,}2$$

$$P_{600}(5) = \frac{(1{,}2)^5 e^{-1{,}2}}{5!} \approx 0{,}022.$$

Задачи

42. В цехе установлено 6 моторов. Вероятность того, что каждый мотор включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) два мотора; б) по крайней мере, один мотор.

43. В партии 10 деталей. Считая вероятность отклонения контролируемого размера от номинала и вероятность контролируемого размера в номинале равны 0,5, определить вероятность того, что в данной партии 5 деталей с отклонением от номинала.

44. Вероятность хотя бы одного раза появления события A при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

45. Вероятность появления некоторого события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события, по крайней мере, 3 раза.

46. Какова вероятность того, что хотя бы один из трех основных узлов (рама, передняя и задняя оси, подвеска) ходовой части автомобиля останется исправным после 1000-километрового пробега, если известно, что для каждого узла такая вероятность равна 0,2?

47. При стендовых испытаниях подшипников 0,4% отходят в брак. Найти вероятность того, что при случайном отборе 500 подшипников обнаружится 5 бракованных.

48. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонит 5 абонентов?

Ответы

42. 0,015; 0,999; **43**. $\frac{63}{256}$; **44**. 0,2; **45.** 0,73; **46**. 0,488; **47**. 0,037; **48**. 0,101.

1.7. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A в n испытаниях появится ровно k раз, определяется по формуле

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (1.12)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Приближенная формула (1.12) тем точнее, чем больше n и pq ближе к 0,25.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных x приведена в приложении 1. Функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в независимых испытаниях постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет от k_1 до k_2 раз, определяется по формуле

$$P_n(k_1; k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (1.13)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – *функция Лапласа*.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция Лапласа нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Аналогично формуле (1.12) формула (1.13) тем точнее, чем больше n и pq ближе к 0,25.

Таблица для положительных значений $x(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении 2. Для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$.

Пример 1. Пи массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 50 будут бракованными?

Решение. Применяя к данной задаче схему Бернулли, мы должны были бы подсчитать вероятность

$$P_{400}(50) = C_{400}^{50} p^{50} q^{350},$$

где $p=0{,}1$; $q=0{,}9$.

Непосредственный подсчет этой вероятности вызывает большие технические трудности. Используем локальную теорему Лапласа. По формуле (1.12)

$$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \varphi\left(\frac{50 - 400 \cdot 0{,}1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \frac{1}{6} \varphi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}0989.$$

Пример 2. Найти вероятность того, что событие A (переключение передач) наступит 70 раз на 243–километровой трассе, если вероятность переключения на каждом километре этой трассы равна 0,25.

Решение. По условию $n=243$, $k=70$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$. Так как $n=243$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа (1.12)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

По таблице (приложение 1) найдем $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Искомая вероятность равна

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$$

Пример 3. Вероятность появления события за время испытаний P=0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз при 100 испытаниях.

Решение: а) воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -125; \quad x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75;\, 90) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице (приложение 2) найдем

$$\Phi(5) = 0{,}499; \quad \Phi(-1{,}25) = 0{,}394.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{100}(75;\, 90) = 0{,}499 + 0{,}394 = 0{,}893;$$

б) требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, …, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять k_1=75, k_2=100. Тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5;$$

$\Phi(1{,}25)$=0,394 по таблице $\Phi(5)$=0,5.

Искомая вероятность равна

$$P_{100}(75;\, 100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}394;$$

в) события «A появилось не менее 75 раз» и A появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(0;\, 74) = 1 - P_{100}(75;\, 100) = 1 - 0{,}894 = 0{,}106.$$

Задачи

49. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме при включенном приводе в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

50. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) не менее 20 конденсаторов; б) менее 28 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

51. Вероятность изготовления размеров деталей в номинале равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей в номинале окажется 50.

52. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

53. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно провести испытаний, чтобы ожидать, что событие появится не менее 75 раз с вероятностью 0,9?

Указание. Воспользовавшись интегральной теоремой Лапласа, можно записать:

$0{,}9 = \Phi\left[\dfrac{n-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right] - \Phi\left[\dfrac{75-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right]$, откуда находим n.

54. Вероятность изготовления годной детали на токарном станке равна 0,9. Сколько нужно обработать деталей, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 деталей будут годными?

55. Рабочий на заводе за смену изготавливает 300 деталей. Вероятность изготовления детали первого сорта равна 0,8. Какова вероятность того, что деталей первого сорта будет: а) 225 штук; б) от 210 до 240 штук?

56. Испытываются на безотказность в работе 30 двигателей. Вероятности безотказности в работе каждого двигателя одинакова и равна 0,9. Определить что пройдут испытания: а) 25 двигателей; б) от 20 до 28 двигателей.

Ответы

49. 0,927; **50**. а) 0,55; б) 0,98; в) 0,91; **51**. 0,0782; **52**. 0,96; **53**. 100; **54**. 177; **55**. а) 0,006; б) 0,897; **56**. а) 0,181; б) 0,718.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное, но только одно значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина, возможные значение которой образуют конечное или бесконечное счетное множество, называется дискретной.

Возможные значения непрерывной случайной величины заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Законом распределения дискретной случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Задание закона распределения случайной величины может быть:

а) *табличным* (для дискретных величин это ряд распределения):

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

В первой строке помещены возможные значения случайной величины X в порядке их возрастания, а во второй – соответствующие им вероятности.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

б) *графическим*. В этом случае для дискретной случайной величины по оси X откладываем значение случайной величины, а по оси Y – соответствующие им вероятности; ломаная линия, соединяющая точки (x_i p_i), называется *многоугольником распределения*; для непрерывных случайных величин график имеет вид кривой, которая называется *кривой распределения*;

в) *аналитическим*, путем введения так называемой интегральной функции распределения (или функции распределения) $F(x)$ по формуле:

$$P(X < x) = F(x).$$

Пример 1. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом для проверки их качества 5 изделий. Построить ряд распределений случайной величины X числа дефектных изделий.

Решение. Так как число дефектных изделий в нашем случае может быть любым в пределах от 0 до 5 включительно, то возможные значения x_i случайной величины X равны: x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3, x_5=4, x_6=5. Вероятность $P(X=k)$ того, что среди пяти отобранных деталей окажется ровно k(k=0,1,2,3,4,5) дефектных,

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^{k} C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}.$$

В результате по данной формуле с точностью до 0,001 получим: p_1=P(X=0)=0,583; p_2=P(X=1)=0,340; p_3=P(X=2)=0,070; p_4=P(X=3)=0,007; p_5=P(X=4)=0; p_6=P(X=5)=0.

Следует заметить, что равенство P(X=4)=P(X=5)=0 не означает невозможности событий x=4 и x=5 (т.е., что случайная величина X примет свои возможные значения x=4 и x=5). Эти равенства указывают только на то, что события x=4 и x=5 являются практически невозможными, т.е. маловероятными.

Используя для проверки равенство $\sum\limits_{k=1}^{6} p_k = 1$, убеждаемся, что расчеты произведены правильно.

Пример 2. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины, выражающей число светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

Решение. Пусть случайная величина X – число светофоров, пройденных автомашиной без остановки. Она может принимать следующее значения: x_1=0,

x_2=1, x_3=2, x_4=3, x_5=4. Вероятности p_i=P(X=x_i) того, что число пройденных светофоров X будет равно данному частному значению, вычисляются по формуле

$$p_i = P(X = x_i) = \begin{cases} P(1-p)^{i-1} \text{ для } i = 1,2,3,4; \\ P(1-p)^4 \text{ для } i = 5, \end{cases}$$

где P – вероятность того, что машина будет задержана данным светофором (P=0,5).

В результате вычисления найдем p_1=0,5, p_2=0,25, p_3=0,125, p_4=0,0625, p_5=0,0625. По полученным данным построим многоугольник распределения вероятностей (рис. 2.1).

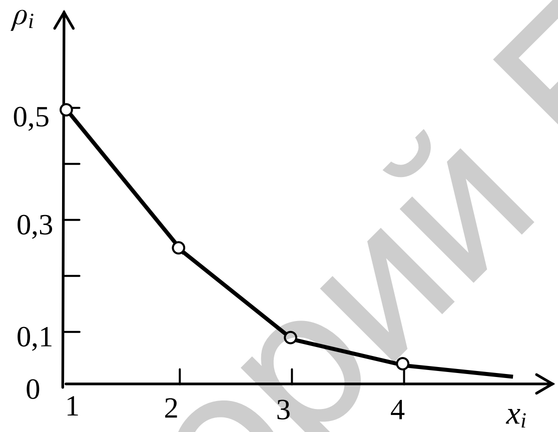


Рис. 2.1

Пример 3. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых может появиться некоторое событие A. Вероятность появления события A в каждом опыте равна p. опыты производятся до первого появления события A, после чего они прекращаются. Случайная величина X – число произведенных опытов. Построить ряд распределения этой случайной величины.

Задачи

57. Написать закон распределения вероятностей для числа переключений передач при двух заездах автомобиля, если вероятность переключения p=0,4. (Считать в одном заезде одно переключение.)

58. Контролируемая деталь подвергается измерениям в трех плоскостях, при каждом из них она оказывается годной с вероятностью 0,5. Для появления годных деталей построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения.

59. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

60. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода. Найти для случайного числа опытов m, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,5: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) наивероятнейшее число опытов.

61. Имеется n заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна p. Найти: а) ряд распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали; б) ряд распределения для случайного числа использованных заготовок.

62. Производятся испытания n изделий на надежность, причем вероятность выдержать испытания для каждого изделия равна p. Найти ряд распределения случайного числа изделий, выдержавших испытания.

63. В партии из 50 деталей имеется 10 нестандартных. Наудачу отобрано 4 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Ответы

57.

x_i	0	1	2
p_i	0,36	0,48	0,16

58.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

59.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

60. в) один.

61. а)

x_i	0	1	2		n-2	n-1
p_i	$q^{n\text{-}1}$	$pq^{n\text{-}2}$	$pq^{n\text{-}3}$		pq	p

б)

x_i	1	2	3		n-1	n
p_i	pq^0	pq	pq^2		$pq^{n\text{-}2}$	$q^{n\text{-}1}$

62.

x_i	0	1	2		n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		p^n

63.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0009	0,0208	0,1525	0,4286	0,3968

2.2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральной функцией распределения случайной $F(x)$ величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x, т.е.

$$P(X < x) = F(x).$$

С в о й с т в а. 1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Следствие 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна приращению интегральной функции, т.е.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно конкретное значение, равна нулю, т.е.

$$P(X = x_0) = 0.$$

3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a; \\ 1 \text{ при } x > b. \end{cases}$$

Следствие. Если все возможные значения случайной величины принадлежат всей числовой оси, то $\underset{x \to -\infty}{F(x)} = 0, \underset{x \to \infty}{F(x)} = 1.$

Дифференциальной функцией распределения (плотностью вероятности) называют первую производную от интегральной функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x).$$

Дифференциальная функция применяется только для непрерывных случайных величин.

С в о й с т в а. 1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

Следствие. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = 1.$$

Из формулы (2.1) следует, что

$$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \qquad (2.2)$$

3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\, dx.$

Пример 1. Плотность распределения вероятностей случайной величины равна

$$f(x) = ax^2 e^{-kx} (k > 0, 0 \leq x \leq \infty).$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения случайной величины X; в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

Решение: а) коэффициент a определяется с помощью равенства

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx}\, dx = 1.$$

откуда

$$a = \frac{1}{\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\, dx}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\, dx = \frac{2}{k^3}.$$

Следовательно, $a = \frac{k^3}{2}$ и плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx};$$

б) функция распределения $F(x)$ случайной величины X определяется так:

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx} dx = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx};$$

в) вероятность $P(0 < x < \frac{1}{k})$ попадания случайной величины в заданный промежуток

$$P\left(0 < x < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086.$$

Пример 2. Случайная величина X имеет следующую функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0; \\ \frac{x^2}{16} \text{ при } 0 \le x < 2; \\ x - \frac{7}{4} \text{ при } 2 \le x < \frac{11}{4}; \\ 1 \quad \text{при } x \ge \frac{11}{4}. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X; б) построить графики $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1;1,5].

Решение. а) для отыскания $f(x)$ воспользуемся равенством $f(x) = F'(x)$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ \dfrac{1}{8} \text{ при } 0 \le x < 2; \\ 1 \text{ при } 2 \le x < \dfrac{11}{4}; \\ 0 \text{ при } x \ge \dfrac{11}{4}; \end{cases}$$

б) графики $F(x)$ и $f(x)$ изображены на рис. 2.2;

в) $P(1 \le X \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1) = 0{,}4332 - 0{,}3413 = 0{,}0919.$

Пример 3. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = A + B\, arctg\, x (-\infty < x < \infty)$. Определить постоянные A и B и найти плотность вероятностей $f(x)$.

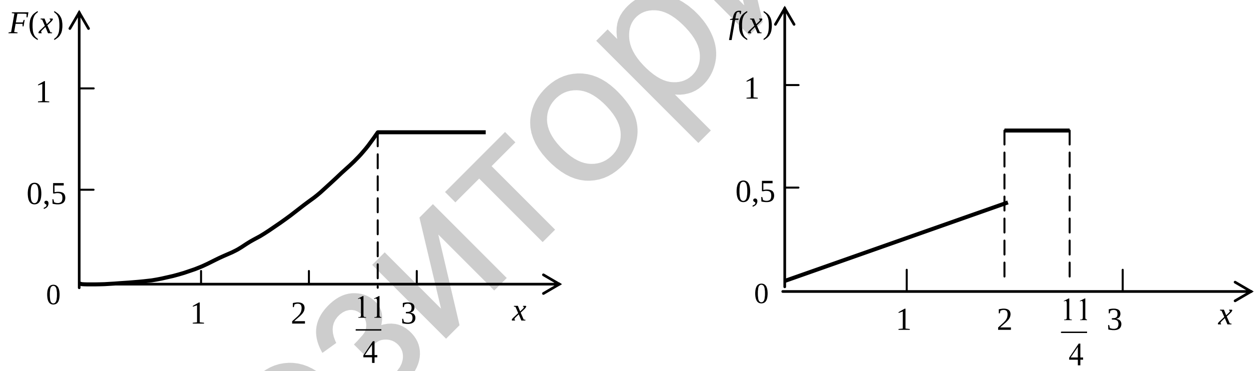


Рис. 2.2

Решение. Воспользуемся свойством функции распределения

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (A + B\, arctg\, x) = 0; \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (A + B\, arctg\, x) = 1, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} A + B\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0; \\ A + B \cdot \dfrac{\pi}{2} = 1, \end{cases}$$

где $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{\pi}$ и значит, $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arctg\, x.$

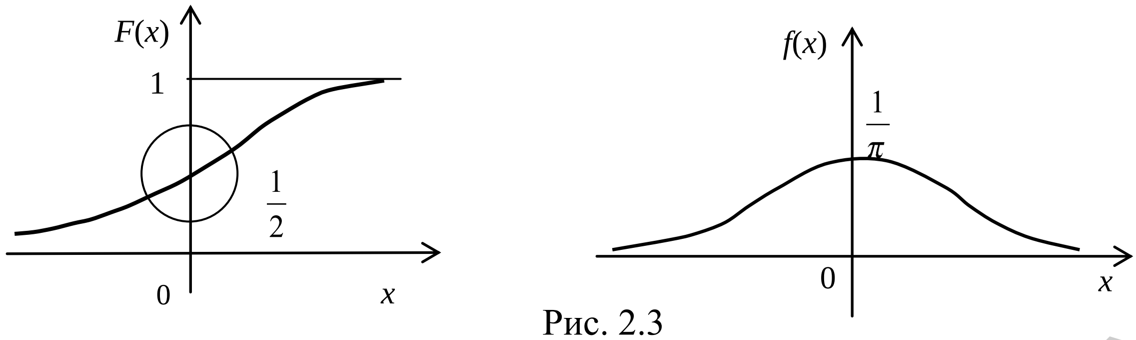


Рис. 2.3

Теперь нетрудно найти $f(x) = F'(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Графики $F(x)$ и $f(x)$ изображены на рис. 2.3.

Пример 4. Случайная величина X имеет следующую плотность вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1; \\ \dfrac{A}{x^2} \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$$

Определить: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $P(2 < x < 3)$ попадания случайной величины X на отрезке [2;3]; г) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях величина X ни разу не попадет на отрезке [2;3].

Решение: а) для нахождения коэффициента A воспользуемся следующим свойством $f(x)$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$ Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{A}{x^2}\,dx = -\lim_{a\to\infty} \left.\frac{A}{x}\right|_1^a = A,$$

то A=1.

б) находим $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 & \text{при } x < 1; \\ \int\limits_{1}^{x} \dfrac{dx}{x^2} = -\left.\dfrac{1}{x}\right|_1^x = \dfrac{x-1}{x} & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ изображены на рис. 2.4.

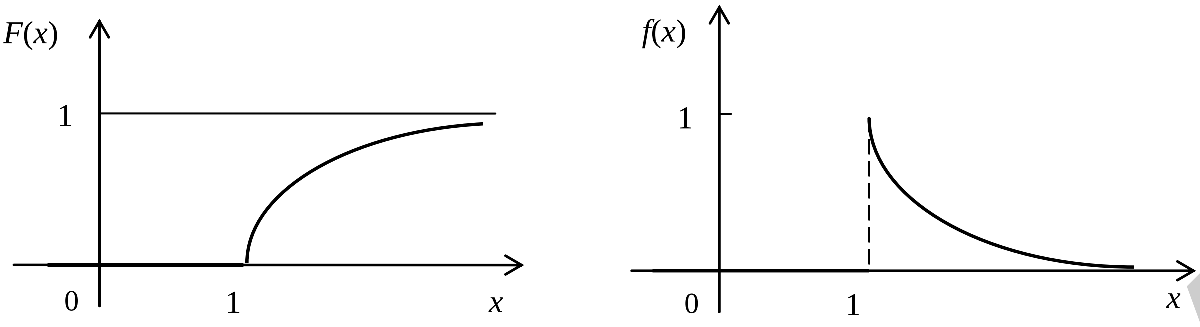


Рис. 2.4

в) $P(2 < x < 3) = F(3) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

г) вероятность того, что X не попадет в интервал [2;3] при одном испытании равна $\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$, а при четырех испытаниях $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$.

Задачи

64. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \text{ при } 0 \le x \le \pi; \\ 1 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$$

а) Определить: плотность вероятности $f(x)$ величины X;

б) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

65. Дана функция $f(x) = Ax^2 e^{-2x} (0 \le x < +\infty)$. Определить: а) при каком значении A функция $f(x)$ будет являться плотностью вероятности некоторой непрерывной случайной величины X; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания X в интервал $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

66. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Найти плотность вероятности случайной величины X.

67. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения) $F(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}(t\geq 0)$. Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T; б) плотность вероятности $f(t)$.

68. При каком значении a функция

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}, \qquad -\infty<x<\infty$$

является плотностью вероятности случайной величины?

Найти: а) функцию распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал(-1,1).

69. Взвод состоит из 3 орудий. Вероятность попадания в цель в цель первого орудия равна 0,5, второго – 0,6, третьего – 0,8. Каждое орудие делает 1 выстрел по цели. Случайная величина X – число попаданий в цель. Составить закон распределения, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

70. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов установки материала, в основании зуба, контактных напряжений к жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равно 0,1. Случайная величина X – число отказавших факторов в одном испытании. Составить закон распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

Ответы

65. а) $A=4$; б) $F(x)=1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}$; в) $P\left(0<x<\frac{1}{2}\right)=0{,}086$.

66. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. **67**. а) $P=1-\frac{1}{e}$; б) $f(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$.

68. а) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\ x$; б) $P(-1<x<1)=\frac{1}{2}$.

69. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0; \\ 0{,}04 & 0\le x<1; \\ 0{,}30 & 1\le x<2; \\ 0{,}76 & 2\le x<3; \\ 1 & 3\le x. \end{cases}$

0	1	2	3
0,04	0,26	0,46	0,24

70. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0; \\ 0{,}729 & 0\le x<1; \\ 0{,}972 & 1\le x<2; \\ 0{,}999 & 2\le x<3; \\ 1 & 3\le x. \end{cases}$

0	1	2	3
0,729	0,243	0,027	0,001

2.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m_x.$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание равно:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=m_x,$$

где $f(x)$ – *дифференциальная функция распределения*.

С в о й с т в а. 1. Математическое ожидание постоянной величины равно той же постоянной, т.е.

$$M(C)=C.$$

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой из них:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1X_2...X_n)=M(X_1)M(X_2)...M(X_n).$$

4. Математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную равно произведению этой постоянной на математическое ожидание случайной величины

$$M(CX)=CM(X).$$

5. Математическое ожидание числа появлений события в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события, если эта вероятность постоянна при всех испытаниях:

$$M(X)=np.$$

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Дисперсию вычисляют по формуле

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \qquad (2.3)$$

С в о й с т в а. 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю, т.е.

$$D(C)=0.$$

2. Дисперсия произведения постоянной величины на случайную равна произведению квадрата постоянной на дисперсию случайной величины

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y).$

Свойства 3 и 4 выполняются для независимых случайных величин.

5. Дисперсия числа появления событий в n независимых испытаниях, при которых вероятность появления события p постоянна, равна произведению числа испытаний на произведение вероятностей появления p и не появления q события, т.е.

$$D(X)=npq.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии, т.е.

$$\sigma=\sqrt{D(X)}.$$

С в о й с т в о. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений, т.е.

$$\sigma(X_1+X_2+...+X_k)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+...+\sigma^2(X_k)}.$$

Пример 1. Пусть X – случайная величина, ряд распределения которой равен

x_i	0	1
p_i	q	p

где $q = 1 - p$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Так как X принимает только два значения x_1=0 и x_2=1 соответственно с вероятностями p_1=1 – p и p_2=p, то по определению математическое ожидание

$$M[X]=x_i p_i+x_2 p_2=0(1-p)+1\cdot p=p.$$

Для отыскания дисперсии случайной величины воспользуемся формулой (2.3):

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=p-p^2=p(1-p).$$

Пример 2. При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) 1,2,3,4 или 5 проб соответственно с вероятностями 0,07; 0,21; 0,55; 0,16; 0,01. Требуется обеспечить сборщика необходимым количеством деталей для сборки 30 приборов. Сколько деталей надо отпустить сборщику?

Решение. Число проб, необходимых для достижения удовлетворительной сборки прибора, есть случайная величина X, ряд распределения которой

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Среднее число проб, необходимое для сборки одного прибора, равно $M[X]$. Следовательно, для сборки 30 приборов необходимо число деталей

$$30M[X] = 30[1\cdot 0{,}07 + 2\cdot 0{,}21 + 3\cdot 0{,}55 + 4\cdot 0{,}16 + 5\cdot 0{,}01] = 30\cdot 2{,}83 \approx 85$$

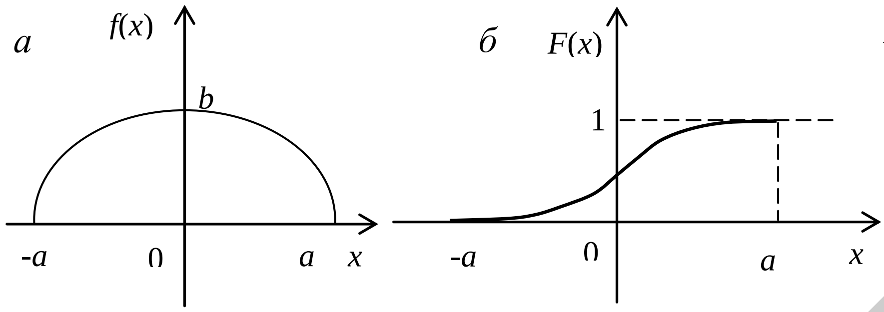


Рис. 2.5

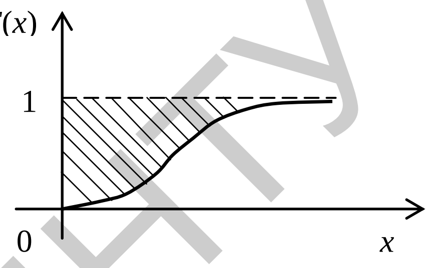


Рис. 2.6

Пример 3. Кривая распределения случайной величины представляет собой полуэллипс с полуосями *a* и *b* (рис. 2.5, *а*).

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Плотность распределения находим из уравнения эллипса

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ при } -a \le x \le a; \\ 0 \text{ при } x < -a \text{ или } x > a. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M[X] = \int\limits_{-a}^{a} x\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2 dx} = 0.$

Дисперсия $D[X] = \int\limits_{-a}^{a} x^2 f(x)dx = \dfrac{a^2}{4},$

$$F(x) = \int\limits_{-a}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -a; \\ \dfrac{1}{\pi a^2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{a^2\pi}{2}\right] \text{ при } -a \le x \le a; \\ 1 \text{ при } x > a. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.5, *б*.

Задачи

71. Автомобиль должен поехать по улице, на которой установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,5 мин, желтый – в течение 0,3 мин, красный в течение 1,2 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X числа остановок автомобиля.

72. На полигоне производится стрельба из орудия по цели, до первого попадания в цель. Вероятность попадания при одном выстреле p=0,6. Каков средний ожидаемый расход снарядов, если производится серия из 100 выстрелов, условия которых одинаковы для каждой стрельбы.

73. Известно, что размер D шарика для подшипников является случайной величиной X. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на 0,1 мм. При этом известно, что средний размер диаметра шарика равен $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$, а брак составляет 10% всего выпуска. Определить среднее квадратическое отклонение диаметра шарика σ_x.

74. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -1; \\ a + b\arcsin x \text{ при } -1 \le x \le 1; \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти $M[X]$ и $D[X]$.

75. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } -a < x < a; \\ 0 \text{ при } x \ge a. \end{cases}$$

Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

76. Плотность вероятности случайной величины X заданна в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ \dfrac{x^m}{m!} e^{-x} \text{ при } x \ge 0. \end{cases}$$

Определить $M[X]$ и $D[X]$.

77. Функция распределения $F(x)$ неотрицательной случайной величины X задана графиком (рис. 2.6). Математическое ожидание случайной величины X равно $M[X]$. Показать, что $M[X]$ геометрически может быть представлено площадью фигуры, заштрихованной на рис. 2.6 (ограниченной кривой $y=F(x)$, прямой $y=1$ и осью ординат).

Ответы

71. $M(x)=1{,}5;\quad D(x)=0{,}74;\quad \sigma(x)=0{,}86.$ 72. $M(x)=60;$ 73. $\sigma(x)=\dfrac{d_2-d_1}{2{,}5};$

74. $a=\dfrac{1}{2};\quad b=\dfrac{1}{\pi};\quad M(x)=0;\quad D(x)=0{,}5.$ 75. $D(x)=\dfrac{a^2}{2};\quad \sigma(x)=\dfrac{a}{\sqrt{2}};$

76. $M(x)=D(x)=m+1.$

2.4. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Начальным моментом k-го порядка M_k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k, т.е.

$$M_k=M(X^k). \tag{2.4}$$

Для дискретной случайной величины

$$M_k=\sum_{i=1}^{m}x_i^k p_i;$$

для непрерывной

$$M_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx,$$

где $f(x)$ – дифференциальный закон распределения. При $k=1$ из формулы (2.4) имеем $M_1=M(X)$, т.е. начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Центральным моментом k-го порядка μ_k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X-m_x)^k$, т.е.

$$\mu_k=M\left[(X-m_x)^k\right]. \tag{2.5}$$

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{m}(x_i-m_x)^k p_i;$$

для непрерывной

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx.$$

При k=1 из формулы (2.5) имеем

$$\mu_1 = M(x - m_x) = m_x - m_x = 0;$$

при k=2

$$\mu_2 = M(x - m_x)^2 = D_x.$$

Центральные моменты выражаются через начальные следующим образом:

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2;$$
$$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3;$$
$$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4.$$

Пример 1. Случайная величина X принимает значения 3 и 5 с вероятностями 0,2 и 0,8. Найти центральные моменты до третьего порядка включительно.

Решение. Найдем начальные моменты, а затем выразим через них центральные:

$$M_1 = 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}8 = 4{,}6; \quad M_2 = 9 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}8 = 21{,}8; \quad M_3 = 27 \cdot 0{,}2 + 125 \cdot 0{,}8 = 105{,}4.$$

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = M_2 - M_1^2 = 21{,}8 - 21{,}16 = 0{,}64; \quad \mu_3 = 105{,}4 - 3 \cdot 4{,}6 \cdot 21{,}8 + 2 \cdot 4{,}6^3 = -0{,}768.$$

Пример 2. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ 2x \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты до третьего порядка включительно.

Решение. Как и в предыдущем случае, вначале найдем начальные моменты, а затем выразим через них центральные.

$$M_1 = M(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$M_2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$M_3 = \int_0^1 x^3 \cdot 2x dx = \left.\frac{2x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} = D[X];$$

$$\mu_3 = \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{5} - 1 + \frac{16}{27} = -\frac{1}{135}.$$

Задачи

78. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Найти начальные моменты первого и третьего порядков.

79. Плотность распределения случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0; \\ \frac{3}{2}x^2, \text{ если } 0 \le x < 1; \\ \frac{3}{2}(2-x)^2, \text{ если } 1 \le x < 2; \\ 0, \text{ если } x \ge 2. \end{cases}$$

Определить начальные и центральные моменты первых четырех порядков.

80. К случайной величине X прибавили постоянную, неслучайную величину a. Как изменятся характеристики X: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент.

81. Случайную величину X умножим на a. Как изменятся ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

82. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	1	2

p_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты до третьего порядка включительно.

83. Найти начальные моменты до третьего порядка включительно случайной величины X с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ e^{-x} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Ответы

78. $M_1 = 3{,}9;\quad M_2 = 16{,}5;\quad M_3 = 74{,}1.$

79. $M_1 = 1;\ M_2 = 1{,}1;\ M_3 = 1{,}3;\ M_4 = 1{,}6;\ \mu_1 = 0;\ \mu_2 = 0{,}1;\ \mu_3 = 0;\ \mu_4 = \frac{1}{35}.$

80. а) прибавится слагаемое a; б) не изменится; в) не изменится; г) прибавится слагаемое $a^2 + 2aM(x)$.

81. а) умножится на a; б) умножится на $a^{2;}$ в) умножится на $|a|$; г) умножится на a^2.

82. $\mu_1 = 0;\ \mu_2 = 1{,}536;\ \mu_3 = 0{,}2544.$

83. $M_1 = 1;\ M_2 = 2;\ M_3 = 6.$

2.5. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше $\varepsilon > 0$, не меньше, чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2.6}$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие конечные математические ожидания, причем дисперсия любой из них не превосходит постоянного числа c, то для любого сколь угодно малого положительного ε вероятность $P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)$

будет стремиться к единице, если число этих величин будет сколь угодно велико, или

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{c}{n\varepsilon^2},$$

где

$$X=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}.$$

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема Ляпунова. Если $X_1,X_2,\ldots,X_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m_x и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы этих величин стремится к нормальному.

Пример 1. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что в 10000 испытаний отклонение относительной частоты события от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

Решение. Используя теорему Бернулли и неравенство Чебышева, можем записать

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

По условию задачи, имеем n=10000, p=0,3, q=1-0,3=0,7, $\varepsilon=0{,}01$, тогда

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}3\right|<0{,}01\right)=1-\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{10000\cdot 0{,}0001}=1-0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}79.$$

Пример 2. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превзойдет 0,3.

Решение. Согласно теореме Чебышева, можно записать

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{9}{2500\cdot 0{,}09}=1-\frac{1}{25}=0{,}96.$$

Здесь $n=2500,\quad c=D(x)=\sigma^2=9,\quad \varepsilon=0{,}3.$

Задачи.

84. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	0,1	0,4	0,6
p_i	0,2	0,3	0,5

Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что

$$\left|X-M[X]\right|<\sqrt{0{,}4}.$$

85. Распределение случайной величины X задается следующей таблицей:

x_i	-1	0	2	4	6
p_i	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чему равна вероятность того, что $\left|X-M(X)\right|<5$? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

86. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине в поле допуска (не меньше 49,5 и не больше 50,5 см).

87. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 1см, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,1см.

88. Сколько должно быть произведено независимых измерений диаметров колец, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по абсолютной величине меньше, чем на 0,01, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходит 1?

89. Дисперсия каждой из 800 независимых случайных величин не превышает 9. Какой должна быть верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий, чтобы вероятность такого отклонения превышала 0,997?

90. Определить число испытаний, которое нужно провести, чтобы отклонение частости появления события A от его средней вероятности в проведенных испытаниях не превышало по абсолютной величине 0,02 с вероятностью 0,99.

91. Вероятность положительного исхода в отдельном испытании равна 0,8. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаниях отклонение частости положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по своей абсолютной величине будет меньше 0,05.

Ответы

84. $P(|X-0{,}44|<\sqrt{0{,}4})\geq 0{,}909$. **85**. $0{,}95$; $P\geq 0{,}872$. **86**. $P(|X-50|<0{,}5)\geq 0{,}6$. **87**. $P\geq 0{,}9$. **88**. $n=5\cdot 10^5$. **89**. $0{,}16$. **90**. $n=62500$. **91**. $P\geq 0{,}936$.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

К законам распределения дискретных случайных величин относятся: биномиальный, Пуассона.

Биномиальным называется закон распределения дискретной случайной величины X, выражающей число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события постоянна и равна p. Вероятность возможного значения X k=0,1,2,…,n.

$$P_n(x=k)=C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3.1}$$

Пример 1. Устройство состоит из трех узлов, работающих независимо. Вероятность отказа каждого узла равна 0,1. Записать закон распределения числа отказавших узлов устройства.

Решение. Случайная дискретная величина X может принимать значения 0,1,2,3. Т.к. n=3; p=0,1; q=0,9, то по формуле (3.1) находим $P_3(0)=q^3=0{,}729$; $P_3(1)=C_3^1 pq^2=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}343$; $P_3(2)=C_3^2 p^2 q=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}027$; $P_3(3)=(0{,}1)^3=0{,}001$.

Искомый биномиальный закон распределения случайной величины X имеет вид:

x	0	1	2	3
p	0,729	0,343	0,027	0,001

Распределением Пуассона называется распределение дискретной случайной величины, если она может принимать целые неотрицательные значения 0, 1, 2, … с вероятностями $P(x=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda=np$. Т.к. для распределения Пуассона $D(X)=M(X)=\lambda$, то можно записать

$$P_n(k)=\frac{m^k e^{-m}}{k!}, \tag{3.2}$$

где m – математическое ожидание случайной величины X, n – число испытаний, p – вероятность.

Пример 2. В партии деталей имеется 1% брака. Найти вероятность того, что среди 50 отобранных деталей из этой партии будет 0,1,2,3 бракованных.

Решение. Вероятность появления бракованной детали равна 0,01, число деталей n=50 $a = np = 50 \cdot 0{,}01 = 0{,}5$. По формуле Пуассона имеем:

$$P_{50}(0) = \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \frac{(0{,}5)^0 \cdot e^{-0{,}5}}{0!} = e^{-0{,}5} = 0{,}607;$$

$$P_{50}(1) = \frac{0{,}5^1 \cdot e^{-0{,}5}}{1!} = 0{,}5 \cdot 0{,}607 = 0{,}306;$$

$$P_{50}(2) = \frac{0{,}5^2 \cdot e^{-0{,}5}}{2!} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}607}{2} = 0{,}075.$$

3.2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

К законам распределения непрерывных случайных величин относятся: равномерный, показательный, нормальный.

Равномерным называется распределение непрерывной случайной величины X на $[a,b]$, если плотность вероятности (дифференциальная функция) постоянна на $[a,b]$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b; \\ 0 & \text{при} \quad x < a,\, x > b. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Пример 1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора определяют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04. б) большая 0,05.

Решение. Ошибку округления отсчета рассматриваем как случайную величину, распределенную равномерно в интервале между делениями, в данном случае длина интервала равна 0,2, поэтому

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0,2}=5 \text{ при } 0\le x\le 0,2;\\ 0 \text{ при } x<0,\ x>0,2.\end{cases}$$

а) Очевидно, что ошибка отсчета не превысит 0,04 если она будет находится в интервалах (0;0,04) или (0,16;0,2).

Тогда искомая вероятность будет равна:

а) $P=\int\limits_0^{0,04}5dx+\int\limits_{0,16}^{0,2}5!dx=5\cdot 0,04+5(0,2-0,16)=2\cdot 5\cdot 0,04=0,4.$

б) $P=\int\limits_{0,05}^{0,15}5dx=5x\Big|_{0,05}^{0,15}=5(0,15-0,05)=5\cdot 0,1=0,5.$

Показательным (*экспоненциальным*) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, если плотность вероятности ее распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0, \text{ где } \lambda>0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Пример 2. Время *T* безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 80 часов, если известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием равно 100 часам.

Решение. Из условия задачи следует, что математическое ожидание случайной величины *T* равно 100 часов. Найдем параметр λ в формуле (3.4), для чего вычислим $M(X)=\int\limits_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\left(\dfrac{xe^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^{\infty}+\dfrac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx\right)=\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Bigg|_0^{\infty}=\dfrac{1}{\lambda}.$ Отсюда

$\dfrac{1}{\lambda}=100\quad \lambda=0,01.$ Плотность распределения

$$f(T)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0;\\ 0,01e^{-0,01t} & \text{при } t\ge 0.\end{cases}$$

Вероятность безотказной работы двигателя за время *t* будет равна

$$P(T<t)=\int\limits_0^{80}0,01e^{-0,01t}dt=-\frac{0,01}{0,01}e^{-0,01t}\Bigg|_0^{80}=e^{-0,8}+1=0,55.$$

Распределение непрерывной случайной величины X называется *нормальным*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.5)$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной нормально в заданный интервал (α, β) равно

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (3.6)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины X от своего математического ожидания меньше любого положительного ε, равна

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (3.7)$$

Вероятность отклонения относительной частоты ω от постоянной вероятности p появления некоторого события в n независимых испытаниях равна

$$P(|\omega - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad q = 1 - p. \qquad (3.8)$$

Пример 3. Из опыта известно, что значение предела текучести данной марки стали X распределено нормально с математическим ожиданием a=310Мн/м^2 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 32$Мн/м^2. Найти вероятность того, что значение предела текучести заключено между 290 и 320Мн/м^2.

Решение. Воспользуемся формулой (3.6). Найдем значение $\frac{\beta - a}{\sigma}$ и $\frac{\alpha - a}{\sigma}$. По условию задачи β=320 Мн/м^2; α=290 Мн/м^2; a=310Мн/м^2; σ=32 Мн/м^2.

$$\frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{320 - 310}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

$$\frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{290 - 310}{32} = -\frac{20}{32} = -\frac{5}{8} = -0{,}625$$

Согласно (3.6) имеем

$$P(290 < x < 320) = \Phi(0,3125) - \Phi(-0,625) = \Phi(0,3125) + \Phi(0,625) = 0,1217 + 0,2325 = 0,3542.$$

Пример 4. Среди продукции, изготовленной станком, брак составляет 2%. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,995 можно было ожидать, что относительная частота бракованных изделий среди них будет отличаться от 0,02 по абсолютной величине не больше чем на 0,005?

Решение. По формуле (3.8) имеем, при p=0,02; q=1-0,02=0,98; ε =0,005

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,02\right| < 0,005\right) = 0,995.$$

т.е. $2\Phi\left(0,005\sqrt{\frac{n}{0,02 \cdot 0,98}}\right) = 0,995$, или $\Phi\left(0,005\sqrt{\frac{n}{0,0196}}\right) = 0,4975$, т.е. $\Phi(x)$=0,4975,

отсюда $0,005\sqrt{\frac{n}{0,0196}} = 2,86;$ $\sqrt{\frac{n}{0,0196}} = 572$. Отсюда получаем n=6413 изделий.

Пример 5. Опыт показал, что диаметр втулок, изготавливаемых на заводе, является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием $a = 25 \cdot 10^{-3}$ м и средним квадратическим отклонением $\sigma = 10^{-4}$ м. Определить в каких границах будет находиться величина диаметра втулки с вероятностью 0,98?

Решение. Вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше любого $\varepsilon > 0$ определяется по формуле (3.7). В нашем случае $a = 25 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma = 10^{-4}$ м, $p = 0,98$. Значит $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10^{-4}}\right) = 0,98$ или $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10^{-4}}\right) = 0,49$. По таблице значений $\Phi(x)$ имеем $\frac{\varepsilon}{10^{-4}} = 2,33$, т.е. $\varepsilon=2,33\cdot10^{-4}$.

Интервал, в котором будет находиться величина диаметра втулки будет

$25 \cdot 10^{-3} - 2,33 \cdot 10^{-4} < d < 25 \cdot 10^{-3} + 2,33 \cdot 10^{-4}$, т.е. $(24,767 \cdot 10^{-3}, 25,233 \cdot 10^{-3})$.

Задачи

92. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 40 наугад взятых диодов 5 будет бракованными?

93. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Определить вероятность того, что из 5 наудачу взятых деталей 3 окажутся стандартными.

94. Рабочий обслуживает 4 станка. Каждый станок в течение 6 ч работы несколько раз останавливается и всего в сумме простаивает 0,5 ч, причем остановки станков в любой момент времени равновероятны. Определить вероятность того, что данный момент времени: а) будет работать 1 станок; б) будут работать 2 станка.

95. Доля брака в партии деталей составляет 0,1. Производится последовательное извлечение 10 деталей, причем каждая извлеченная деталь возвращается обратно в партию. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей будет одна бракованная.

96. На участке имеется несколько одинаковых станков, коэффициент использования каждого из которых по времени составляет 0,8. Какова вероятность того, что при нормальном ходе производства из пяти станков будут работать только два?

97. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших факторов в одном испытании.

98. Проводится 5 испытаний. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,9. Составить закон распределения появления событий при этих испытаниях.

99. На участке имеется несколько одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. Составить закон распределения работы 5 таких станков при нормальном ходе производства.

100. Производится n опытов, в каждом из которых с вероятностью p появления события A. Написать ряд распределения случайной величины x – числа появлений противоположного события $\overline{A}$ в n опытах.

101. Вероятность появления бракованной детали, изготавливаемой станком-автоматом, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей, изготовленных этим станком, будет 4 бракованных.

102. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что потребитель получил 3 негодных изделия.

103. При установившемся технологическом процессе в среднем 0,5% шариков для шарикоподшипников оказывается бракованными. Найти вероятность того, что в партии из 1000 шариков бракованными окажутся 40 шт., 50 шт.

104. В механизмах и узлах ходовой части автомобиля из-за неточности обработки деталей и от их неуравновешенности возникают динамические нагрузки, средние значения числа которых достигают 300 за 1ч езды. Какова вероятность того, что за 1 мин движения автомобиля динамические нагрузки не превысят своего среднего значения ровно в два раза?

105. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,4% отходят в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

106. Срок службы сцепления автомобиля* в основном зависит от числа включений последнего. В городских условиях на 200 км пробега иногда приходится включать сцепление в среднем 1000 раз. Какова вероятность того, что на 20 км пробега придется включить сцепление 5 раз?

*Сцепление автомобиля – механизм, служащий для отсоединения двигателя от трансмиссии и соединения их, обеспечения плавного трогания с места разгона, а также переключения передач во время движения автомобиля.

107. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра автомобиля, распределено по закону Пуассона с параметром *a*. Если неисправностей не обнаружено, техническое обслуживание машины продолжается в среднем 2 ч если обнаружена одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще ½ ч если обнаружено больше двух неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем 4 ч определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта машины и его математическое ожидание.

108. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2; 7]. Записать плотность распределения этой случайной величины.

109. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [-4; 2]. Найти функцию распределения этой случайной величины.

110. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [-2; 2]. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

111. Равномерно распределена случайная величина X на отрезке [2; 8]. Найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток (2;5).

112. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке [2; 8]. Найти математическое ожидание этой величины на отрезке [4; 7].

113. Все значения случайной величины X равномерно распределены на отрезке [-2; 6]. Найти дисперсию этой случайной величины на отрезке [0; 5].

114. Время t между двумя сбоями вычислительной машины распределено по показательному закону с параметром λ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Решение задачи требует безотказной работы в течение времени τ. Если за время τ произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время τ после начала решения. Найти закон распределения случайной величины θ (время, за которое задача будет решена).

115. Случайная величина T распределена по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-0,4t}$. Найти дисперсию этой случайной величины.

116. Найти среднее квадратическое отклонение показательного распределения, если его дифференциальная функция $f(x) = 10e^{-10x}$.

117. Время T безотказной работы технической системы распределено по показательному закону. Интенсивность системы, $\lambda = 0,02.$ Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы системы за 80 часов.

118. Среднее время обслуживания пациента в поликлинике 20 минут. Чему равна вероятность ожидания в очереди от 20 до 40 минут?

119. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=4 и дисперсией $D(x)$=2. Записать нормальный закон распределения.

120. При массовом производстве продукции и установившемся техническим процессе 4% выпускаемой продукции выходит в брак. Сколько изделий нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,99 можно было утверждать, что среди них доля брака по абсолютной величине отличается от 4% не более чем на 1?

121. Суммарное максимальное напряжение в станинах состоит из максимального изгибающего напряжения и напряжения от действия продольных сил. Прибором, имеющим среднюю квадратическую ошибку 20 кг/см^2 и систематическую +7 кг/см^2, производят два измерения указательных напряжений. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки, по абсолютной величине не превзойдут 7 кг/см^2?

122. Какой величины должно быть поле допуска зубчатого колеса, чтобы с вероятностью не более 0,003 изготовленное колесо с контролируемым размером оказалось вне поля допуска. Случайные отклонения размера от середины поля допуска подчинены закону нормального распределения с параметрами a=0, σ =5 мк.

123. Линейные вертикальные ускорения кузова автомобиля, возникающие при движении, являются случайной величиной X и подчинены закону нормального распределения. При скорости движения автомобиля 90 км/ч среднее квадратическое отклонение ускорений составляет 12 м/с^2. Определить вероятность того, что в результате движения ускорения не превысят 30 м/с^2.

124. При проектировании автомобилей определяют конструктивный динамический ход колеса f_d и устанавливают ограничители хода колес по среднему квадратическому σ_d (конструктивный динамический ход f_d выбирают в зависимости от допускаемого значения вероятности пробивания подвески при расчетном режиме, т.е. заданной скорости движения в данных дорожных условиях). Зная, что $\frac{f_d}{\sigma_f} = 2{,}5,$ определить вероятность пробивания подвески $P(f_Д \geq f_d)$, где f_d – динамический ход колеса есть случайная величина, равная разности вертикальных перемещений оси колеса и точки кузова машины, расположенной над осью колеса при движении.

125. Среднее квадратическое отклонение нормального распределения случайной величины σ_f равно 6,75 см (X_f – случайная величина динамического хода колеса). Построить кривую распределения динамических ходов колеса автомобиля.

126. Каждому ходу колеса соответствует вполне определенное напряжение в рессоре. Считая, что напряжение в рессорах или торсионах пропорционально ходу колеса, построить кривую распределения напряжений в рессорах и сравнить ее с кривой распределения динамических ходов. σ_f =6,75.

У к а з а н и е. Напряжение в рессорах пропорционально ходу колеса.

127. Распределение уклонов на дорогах есть случайная величина, которая описывается нормальным законом. Величину математического ожидания для среднепересеченной местности можно принять равной нулю, так как при движении автомобиля в одном направлении одна половина уклонов будет представлять собой подъемы, другая – спуски. Определить среднеквадратическое отклонение распределения уклонов σ, при котором вероятность $P(0{,}21 < X < 0{,}57)$ была бы наибольшей.

128. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков d_0=5 мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр – случайная величина со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением σ_x=0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

Ответы

92. $0{,}18 \cdot (0{,}9)^{35}$. **93**. 0,0729. **94**. а) 0,002. б) 0,032. **95**. 0,387. **96**. 0,051.

97.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,72	0,24	0,02	0,00

98.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$0{,}1^5$	$0{,}45\cdot10^{-3}$	0,0051	0,0729	0,327	0,5911

99.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0003	0,0054	0,0512	0,2058	0,4096	0,0,3277

100.

x_i	0	1	…	m	…	n
p_i	p^n	$C_n p^{n-1} q$	…	$C_n{}^m p^{n-m} q^m$	…	q^n

101. 0,09; **102**. 0,06; **103.** $\frac{5^{-40}e^{-5}}{40!}$; $\frac{5^{50}e^{-5}}{50!}$; **104.** 0,09; **105.** $0{,}55\cdot10^{-4}$;

106. 0,18;

107.

t_i	2	2,5	3	4
p_i	e^a	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2}e^{-a}$	$1-e^{-a}(1+a+\frac{a^2}{2})$

108. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{при} \quad 2\le x\le 7,\\ 0 & \text{при} \quad x<2, \quad x>7;\end{cases}$ **109.** $F(x)=\begin{cases}\frac{x+4}{6} & \text{при} \quad -4\le x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x<-4, \quad x>2;\end{cases}$

110. 0; **111.** $\frac{1}{2}$; **112.** 2,75; **113.** 1,5335;

114.

θ_i	τ	2τ	…	$i\,\tau$
p_i	p	pq		$pq^i - 1$

115. 1,25; **116.** 0,1; **117.** 0,1472; **118.** 0,23; **119.** $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{4}}$;

120. 3; **121.** 0,26; **122.** 15 мк; **123.** 0,72; **124.** 0,07; **126.** 6,75;

127. 0,35; **128.** 4,6%.

4. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Системой случайных величин (случайным вектором) называется совокупность случайных величин, описывающих то или иное случайное событие. Иногда вместо системы случайных величин используется название *многомерная случайная величина.* Систему случайных величин обозначают заглавными буквами греческого алфавита X,Y,Z. Геометрически система из двух случайных величин представляется случайной точкой или случайным вектором на плоскости.

Система случайных величин называется *дискретной*, если все входящие в систему случайные величины дискретны.

Система случайных величин называется *непрерывной*, если все величины, входящие в систему, непрерывны. Если в систему входят как непрерывные, так и дискретные случайные величины, то ее называют *смешанной*.

Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее зависимость между значениями системы случайных величин и вероятностями их появления.

Для системы двух дискретных случайных величин наиболее простым законом распределения является табличный (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

y_i \ x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
y_3	p_{31}	p_{32}	…	p_{3n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Всевозможные события ($X=x_i, Y=y_i$) при $i=1,2,3,\ldots,n$, $j=1,2,3,\ldots,m$ составляют полную группу несовместных событий, т.е.

$$\sum_{ij} p_{ij} = \sum_{ij} P(X = x_i, Y = y_j) = 1.$$

При этом

$$\sum_{j} p_{ij} = \sum_{j} P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i);$$

$$\sum_{i} p_{ij} = \sum_{i} P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j).$$

Пример 1. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины (для деталей, работающих на изгиб *X* и кручение *Y*), заданной законом распределения:

Таблица 4.2

y_i \ x_i	x_1	x_2	x_3
y_1	0,18	0,22	0,16
y_2	0,08	0,16	0,20

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений изгибной нагрузки *X*:

$$P(X = x_1) = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26;\ P(X = x_2) = 0{,}22 + 0{,}16 = 0{,}38;\ P(X = x_3) = 0{,}16 + 0{,}20 = 0{,}36.$$

Закон распределения составляющей запишется так

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	0,26	0,38	0,36

Контроль: 0,26+0,38+0,36=1.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений нагрузок на кручение *Y*:

$$P(Y = y_1) = 0{,}18 + 0{,}22 + 0{,}16 = 0{,}56;\ \ P(Y = y_2) = 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}20 = 0{,}44.$$

Закон распределения составляющей *Y*

y_j	y_1	y_2
p_j	0,56	0,44

Контроль: 0,56+0,44=1.

Интегральной функцией распределения $F(x,y)$ *системы двух случайных величин* (X,Y) или *функцией распределения двумерного случайного вектора* называется вероятность совместного выполнения неравенств $X<x, Y<y$, т.е.

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y),$$

С в о й с т в а. 1. Функция распределения удовлетворяет неравенству $0 \le F(x,y) \le 1$.

2. $F(x,y)$ является неубывающей, т.е. при

$$x_2 > x_1, y_2 > y_1 \ F(x_2, y_2) \ge F(x_1, y_1).$$

3. Справедливы следующие соотношения: $F(-\infty, y) = 0$;

$$F(x, -\infty) = 0; \ F(-\infty, -\infty) = 0; \ F(\infty, \infty) = 1; \ F(x, \infty) = F_1(x); \ F(\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ являются интегральными функциями для X и $У$ соответственно.

Плотностью $f(x, y)$ *распределения вероятностей системы двух непрерывных случайных величин* называется вторая смешанная частная производная от интегральной функции, т.е.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{4.1}$$

Геометрически плотность $f(x, y)$ можно истолковать как поверхность распределения.

Если $f(x,y)$ – плотность распределения вероятностей в некоторой замкнутой области D, то вероятность попадания в эту область (X,Y) можно определить по формуле

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

С в о й с т в а. 1. $f(x,y) \ge 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$

3. $\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy = F(x,y).$

Пример 2. Функция распределения системы двух случайных величин X,Y имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & \text{при } x>0,\ y>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x,y)$.

Решение. Согласно формуле (4.1), находим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{cases}e^{-x}-e^{-x-y} & \text{при } x>0,\ y>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Отсюда

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\begin{cases}e^{-x-y} & \text{при } x>0,\ y>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Условной функцией распределения $F(x/y_1,y_2)$ случайной величины X относительно определенных значений случайной величины Y называется условная вероятность неравенства $X<x$ относительно значений Y, удовлетворяющих неравенству $y_1 \le Y \le y_2$.,т.е.

$$F(x/y_1,y_2)=\frac{P(X<x_1,y_1\le Y\le y_2)}{P(y_1\le Y\le y_2)}$$

или

$$F(x/y_1,y_2)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy}{\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy}$$

Условной плотностью распределения вероятностей случайной величины X при условии, что $Y=y$, называется отношение плотности распределения системы (X,Y) к плотности распределения случайной величины Y, т.е.

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \text{ при } f_2(y)\ne 0.$$

В интегральном выражении

$$\left.\begin{aligned} f_1(x/y) &= \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}; \\ f_2(y/x) &= \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \end{aligned}\right\}$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $X<x$ и $Y<y$ являются независимыми при любых значениях x и y. Если события $X<x$ и $Y<y$ являются зависимыми при каких-либо значениях x и y, то случайные величины называются *зависимыми*.

Для независимых случайных величин X и Y справедливы соотношения

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y);$$

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y).$$

Пример 3. Случайная точка (X,Y) распределена с постоянной плотностью, равной $\frac{1}{2}$ внутри квадрата с вершинами (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1). Найти:

а) плотности распределения $f_1(x)$,$f_2(y)$ отдельных величин X,Y;

б) условные плотности распределения $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$;

в) установить, зависимы или независимы случайные величины X и Y.

Решение. а) площадь квадрата равна 2,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ при } (x,y) \text{ внутри квадрата;} \\ 0 \text{ при } (x,y) \text{ вне квадрата.} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{-(1-x)}^{1-x} dy = 1 - x \text{ при } 0 < x < 1; \\ \frac{1}{2}\int\limits_{-(1+x)}^{1+x} dy = 1 + x \text{ при } -1 < x < 0; \\ 0 \qquad \text{при } x < -1 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

или

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ при } |x| < 1; \\ 0 \quad \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Аналогично

$$f_2(y) = \begin{cases} 1-|y| \text{ при } |y| < 1; \\ 0 \quad \text{ при } |y| > 1. \end{cases}$$

б) при $|y| < 1$

$$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)} \text{ при } |x| < 1-|y|; \\ 0 \qquad \text{ при } |x| > 1-|y|. \end{cases}$$

Аналогично при $|x| < 1$

$$f_2(x/y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|x|)} \text{ при } |y| < 1-|x|; \\ 0 \qquad \text{ при } |y| > 1-|x|. \end{cases}$$

в) случайные величины X,Y зависимы, т.к. $f(x,y) \neq f_1(x) f_2(y)$.

Пример 4. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются по отклонениям их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы по значениям 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм и по овальности – на четыре группы по значениям 0,02; 0,04; 0,06; 0,08.

Распределение отклонений диаметра *X* и овальности *Y* приведены в табл. 4.3 и 4.4 соответственно.

Таблица 4.3

y_i \ x_i	0,01	0,02	0,03	0,04
0,02	0,01	0,02	0,04	0,04
0,04	0,03	0,24	0,15	0,06
0,06	0,04	0,10	0,08	0,08
0,08	0,02	0,04	0,03	0,02

Таблица 4.4

x_i	0,01	0,02	0,03	0,04
p_i	0,10	0,40	0,30	0,20

y_j	0,02	0,04	0,06	0,08
p_j	0,11	0,48	0,30	0,11

Найти условные вероятности $P(X=x_i/y=0{,}6)$ и условную функцию распределения отклонения внутреннего диаметра от номинального размера втулок, отнесенных в группу по овальности 0,06, $F(x/y=0{,}06)$.

Решение. Условные вероятности:

$$P(x=0{,}01/\,y=0{,}06)=\frac{P(x=0{,}01,\ \ y=0{,}06)}{P(y=0{,}06)}=\frac{0{,}04}{0{,}30}\approx 0{,}13;$$

$$P(x=0{,}02/\,y=0{,}06)=\frac{P(x=0{,}02,\ \ y=0{,}06)}{P(y=0{,}06)}=\frac{0{,}10}{0{,}30}\approx 0{,}33;$$

$$P(x=0{,}03/\,y=0{,}06)=\frac{P(x=0{,}03,\ \ y=0{,}06)}{P(y=0{,}06)}=\frac{0{,}08}{0{,}30}\approx 0{,}27;$$

$$P(x=0{,}04/\,y=0{,}06)=\frac{P(x=0{,}04,\ \ y=0{,}06)}{P(y=0{,}06)}=\frac{0{,}08}{0{,}30}\approx 0{,}27.$$

Контроль: 0,13+0,33+0,27+0,27=1.

Найдем условную функцию распределения $F(x/y=0{,}06)$. По определению,

$$F(x/\,y=0{,}06)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0{,}01;\\ 0{,}13 & \text{при } 0{,}01<x\le 0{,}02;\\ 0{,}46 & \text{при } 0{,}02<x\le 0{,}03;\\ 0{,}76 & \text{при } 0{,}03<x\le 0{,}04;\\ 1 & \text{при } 0{,}04<x.\end{cases}$$

Задачи

129. Число рабочих циклов двигателя X и пробег автомобиля Y взаимосвязаны. Найти законы распределения составляющих (X,Y), заданных двумерной таблицей 4.5 распределения вероятностей:

Таблица 4.5

y_i \ x_i	x_1	x_2	x_3
y_1	0,106	0,062	0,082
y_2	0,116	0,160	0,070

y_3	0,111	0,111	0,182

130. Контроль партии шариков после первой доводки производится по овальности (наибольшее отклонение диаметра от номинала) и гранности (отклонение среднего значения диаметра). При установившемся процессе производства около 6% шариков после первой доводки не удовлетворяет техническим требованиям, причем 2% брака вызвано овальностью шариков, 3% – гранностью и 1% – обоими признаками. Составить закон распределения системы двух случайных величин и законы распределения составляющих.

131. Станок–автомат изготавливает валики. Чтобы деталь была годной, она должна удовлетворять допустимым значениям по длине и по диаметру. Вероятность того, что валик будет признан годным по длине, равна 0,8, а по диаметру – 0,7. Составить закон распределения системы случайных величин и законы распределения составляющих.

132. По некоторой цели производится два выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения системы случайных величин (X,Y), считая, что X – число попаданий, а Y – число промахов.

133. Существует несколько способов фиксации величины зерна аустенита в стали. Определение величины зерна производится под микроскоп при стократном увеличении путем сравнения видимых на шлифе зерен с их эталонными изображениями. Размеры X, Y зерен распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x=a$, $x=b$ и ординатами $y=c$, $y=d$ ($b>a$, $b>c$). Найти плотность вероятности и функцию распределения системы величин X,Y.

134. Система случайных величин X, Y имеет плотность вероятности

$$f(x,\, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения $F(x, y)$.

135. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{6}, y=\frac{\pi}{3}$, если известна интегральная функция $F(x,y)=\sin x \sin y$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

136. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0, y=\frac{\pi}{2}$, дифференциальная функция системы двух случайных величин $f(x,y)=C\sin(x+y)$. Вне прямоугольника $f(x,y)=0$. Найти величину C и интегральную функцию системы.

137. Найти вероятность того, что составляющая X примет значение меньше $\frac{1}{2}$, а составляющая Y примет значение меньше $\frac{1}{3}$, если интегральная функция системы

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2y+\frac{1}{2}\right).$$

138. Два независимо работающих автомата обрабатывают детали. Случайная величина X выражает число появлений события A, соответствующего качественно обработанной детали на первом станке-автомате; Y – на втором станке-автомате. Вероятность качественного изготовления детали для первого станка p_1, для второго p_2. Построить функцию распределения $F(X, Y)$ системы случайных величин.

139. Система двух случайных величин задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\mathrm{e}^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Найти условные плотности распределения $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$

140. Система случайных величин равномерно распределена внутри круга радиуса r:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 \le r^2; \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > r^2.\end{cases}$$

Найти плотности распределения случайных величин X и Y и их условные плотности распределения, а также установить их зависимость.

141 Закон распределения системы двух случайных величин X и Y задан табл. 4.6.

Таблица 4.6

y_i \ x_i	10	20	30
20	3λ	2λ	λ
40	λ	4λ	2λ
60	0	2λ	5λ

Найти λ. Составить ряд распределения для каждой из случайных величин X и Y.

Ответы

129.

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	0,333	0,333	0,334

y_i	y_1	y_2	y_3
p_i	0,250	0,346	0,404

130.

y_i \ x_i	p	1
0	0,94	0,02
1	0,03	0,01

x_i	0	1
p_i	0,97	0,03

x_i	0	1
p_i	0,96	0,04

131.

y_i \ x_i	0	1
0	0,56	0,14
1	0,24	0,06

x_i	0	1
p_i	0,8	0,2

y_i	0	1
p_i	0,7	0,3

132.

y_i \ x_i	0	1	2
0	0	0	0,49
1	0	0,42	0

2	0,09	0	0

133. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при } a\le x\le b\ \ c\le y\le d;\\ 0 & \text{при } x<a;\ x>b;\ y<c;\ y>d.\end{cases}$

134. *а*) $A=20;\quad F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right).$

135. 0,11.

136. $c=0{,}5;\ F(x,y)=0{,}5(\sin x+\sin y-\sin(x+y)).$

137. $\dfrac{9}{16}.$

138. $F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ 1-P_1 & \text{при } 0\le x\le 1;\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}\quad F_2(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0;\\ 1-P_2 & \text{при } 0<y\le 1;\\ 1 & \text{при } y>1.\end{cases}$

139. $f_1=(x/y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+\frac{3}{2}y)^2};.\quad f_2=(y/x)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}.$

140. $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi_r^{\,2}}\sqrt{r^2-x^2} & \text{при } |x|\le r;\\ 0 & \text{при } |x|>r.\end{cases}\quad f_1(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & \text{при } |x|\le\sqrt{r^2-y^2};\\ 0 & \text{при } |x|>\sqrt{r^2-y^2}.\end{cases}$

$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi_r^{\,2}}\sqrt{r^2-y^2} & \text{при } |y|\le r;\\ 0 & \text{при } |y|>r.\end{cases}\quad f_2(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} & \text{при } |y|\le\sqrt{r^2-x^2};\\ 0 & \text{при } |y|>\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$

X и *Y* – зависимы.

141. $\lambda=\dfrac{1}{20};$

x_i	10	20	30
p_i	0,2	0,4	0,4

y_i	20	40	60
p_i	0,3	0,35	0,35

4.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

К числовым характеристикам системы случайных величин относятся: математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты.

Математическое ожидание системы двух случайных величин определяется выражением

$$M(X,Y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i y_i p_{ij} & \text{для дискретных случайных величин,}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy & \text{для непрерывных случайных величин.}\end{cases} \quad (4.2)$$

Математическое ожидание составляющих системы равно

$$\left.\begin{aligned}M(x)=m_x&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\\ M(y)=m_y&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy\end{aligned}\right\}\text{для непрерывных случайных величин} \quad (4.3)$$

$$\left.\begin{aligned}M(x)=m_x&=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\\ M(y)=m_y&=\sum_{i=1}^{m}y_i p_i\end{aligned}\right\}\text{для дискретных случайных величин} \quad (4.4)$$

Дисперсия системы двух случайных величин равна

$$D(X,Y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i-m_x)^2(y_i-m_y)^2 p_{ij} & \text{для дискретных случайных величин,}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2(y-m_y)^2 f(x,y)dxdy & \text{для непрерывных случайных величин.}\end{cases} \quad (4.5)$$

Дисперсия составляющих системы равна:

$$\left.\begin{aligned}D(x)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i\\ D(y)&=\sum_{i=1}^{m}(y_i-m_y)^2 p_i\end{aligned}\right\}\text{для дискретных случайных величин} \quad (4.6)$$

$$\left.\begin{aligned}D(x)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f_1(x)dx\\ M(y)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f_2(y)dy\end{aligned}\right\}\text{для непрерывных случайных величин .} \quad (4.7)$$

Начальным моментом порядка $k+s$ системы случайных величин (*X*, *Y*) называется математическое ожидание произведения $x^k y^s$, т.е. $M(x^k y^s)$ или

$$M_{k,s}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k y^s f(x,y)dxdy & \text{для непрерывных случайных величин,}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i^{\,k} y_j^{\,s} p_{ij} & \text{для дискретных случайных величин.}\end{cases} \quad (4.8)$$

Центральным моментом порядка $k+s$ системы случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения $(x-m_x)^k(y-m_y)^s$, т.е. $M[(x-m_x)^k(y-m_y)^s]$ или

$$M_{k,s}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k(y-m_y)^s f(x,y)dxdy & \text{для непрерывных случайных величин},\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i-m_x)^k(y_j-m_y)^s p_{ij} & \text{для дискретных случайных величин}.\end{cases} \tag{4.9}$$

Корреляционным моментом (*моментом связи*) системы случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий, т.е. $K_{xy}=M[(x-m_x)(y-m_y)]$ или

$$K_{x,y}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy & \text{для непрерывных случайных величин},\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij} & \text{для дискретных случайных величин}.\end{cases} \tag{4.10}$$

Коэффициент корреляции равен

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}. \tag{4.11}$$

Пример 1. Плотность вероятности случайных величин X и Y (координат амплитуд колебаний кузова при движении автомобиля равна

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y) & \text{при}\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 & \text{при}\quad \begin{array}{l} x<0,\ \text{или}\ x>\dfrac{\pi}{2},\ \text{или}\\ y<0,\ \text{или}\ y>\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание системы и ее составляющих; б) дисперсии $D(XY)$, $D(X)$, $D(Y)$; в) корреляционный момент.

Решение.

$$M(X,Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\sin(x+y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin(x+y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-y\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\pi}{2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=\frac{\pi}{4}(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx)=\frac{\pi}{4}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

$$D(X,Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\sin(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\sin(x+y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\right)\int_0^{\frac{\pi}{y}}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2(\sin y+\cos y)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\right)\left(\frac{\pi^2}{16}+\pi+2\right).$$

б) найдем дисперсию $D(X)$:

$$D(X)=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(\sin x+\cos x)dx=\left(\frac{\pi^2}{8}+\pi-4\right)\cdot 0{,}5=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Так как выражение для $D(Y)$ имеет такой же вид, как и для $D(X)$, то можем записать:

$$D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

в) корреляционный момент k_{xy}, согласно формуле (4.3):

$$k_{xy}=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x+y)dxdy=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[xy-\frac{\pi}{4}(x+y)+\frac{\pi^2}{16}\right]\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}.$$

Задачи

142. Двумерная случайная величина (X,Y) задана законом распределения

y_i \ x_i

	-2	3
-1	0,15	0,10
0	0,35	0,25
1	0,05	0,10

Найти: математическое ожидание $M(X,Y)$, $M(X)$, $M(Y)$ дисперсии $D(X,Y)$, $D(X)$, $D(Y)$. Корреляционный момент K_{xy}, коэффициент корреляции r_{xy}.

143. Двумерная случайная величина (X,Y) определена законом

y_i \ x_i	0	1	2
0	1/4	0	0
1	1/3	1/6	0
2	1/9	1/9	1/36

Найти: математическое ожидание $M(X,Y)$, $M(X)$, $M(Y)$ дисперсии $D(X,Y)$, $D(X)$, $D(Y)$. Корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy}.

144. Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X,Y) (координат амплитуд колебаний кузова автомобиля при движении) равна

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y) \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 \qquad\qquad \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Определить математическое ожидание составляющих $M(X)$, $M(Y)$ и корреляционный момент K_{xy}.

145. Определить математическое ожидание системы (X,Y) составляющих $M(X)$, $M(Y)$, если плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{2}{\pi(x^2+y^2+1)^3}.$$

146. При нескольких заездах автомобиля на мерном участке под его левые и правые колеса попадают короткие и длинные неровности. Вероятность того, что при одном заезде короткая неровность попадет под левые колеса, равна 0,4, под правые – 0,05; вероятность того, что длинная неровность попадет под левые колеса – 0,1, под правые – 0,45. Найти математическое ожидание и дисперсии числа коротких и числа длинных неровностей при одном заезде.

147. Определить плотность вероятности, математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$ системы случайных величин, если функция распределения системы:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Ответы

142. $M(X,Y)=0{,}20;\quad M(X)=0{,}25;\quad M(Y)=-0{,}1;\quad D(X,Y)=1{,}4401;\quad D(X)=6{,}187;$
$D(Y)=0{,}2776;\quad k_{xy}=0{,}2125;\quad r_{xy}=0{,}1621.$

143. $M(X,Y)=\dfrac{1}{2};\quad M(X)=\dfrac{1}{6};\quad M(Y)=1;\quad D(X,Y)=\dfrac{13}{72};\quad D(X)=\dfrac{11}{36};$
$D(Y)=\dfrac{1}{2};\quad k_{xy}=-\dfrac{1}{54};\quad r_{xy}=-\dfrac{2}{9\sqrt{4}}.$

144. $M(X)=\dfrac{\pi}{4};\quad M(Y)=\dfrac{\pi}{2};\quad k_{xy}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

145. $M(X)=M(Y)=0.$

146. $M(X)=0{,}45;\quad M(Y)=0{,}55;\quad D(X)=0{,}2875;\quad D(Y)=0{,}3375.$

147. $f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 \quad \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ $M(x)=\dfrac{\pi}{2}-1;\ M(y)=\dfrac{\pi}{2}-1.$

4.3. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Распределение двумерной случайной величины (X,Y) называется нормальным, если плотность распределения ее вероятностей имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}(x-m_x)(y-m_y)\right)},\qquad(4.12)$$

где σ_x,σ_y – средние квадратические отклонения составляющих;

m_x,m_y – математические ожидания составляющих;

r_{xy} – коэффициент корреляции.

Если r_{xy}=0, т.е. величины X и Y – некоррелированы, то закон двумерного распределения будет

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}{}^{-\left[\left(\frac{x-m_x}{2\sigma_x^2}\right)^2+\left(\frac{y-m_y}{2\sigma_y^2}\right)^2\right]} \tag{4.13}$$

Если в (4.13) приравнять $m_x = m_y = 0,\quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma,$ то получим

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} \quad \text{или при } x^2+y^2=z^2$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

Распределение, для которого

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & \text{при } z<0;\\ 0 & \text{при } z\le 0.\end{cases} \tag{4.14}$$

называется распределением Релея.

Функция распределения Релея:

$$F(z)=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^z z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = 1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.15}$$

Эллипсом рассеивания называется эллипс, во всех точках которого плотность распределения $f(x,y)$, двумерной случайной величины, распределенной по нормальному закону, постоянна, т.е. $f(x,y)=const$.

Полуоси эллипса рассеивания пропорциональны σ_x и σ_y, т.е. $a=k\sigma_x$; $b=k\sigma_y$. Вероятность попадания случайной точки в область D_k, ограниченную эллипсом рассеивания, равна

$$P[(x,y)\in D_k]=1-e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Пример 1. Производится штамповка детали, имеющей форму эллипса $(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$ Отклонение оси пуансона в результате износов распределено по нормальному закону с параметрами $m_x=1; m_y=1; \sigma_x=1; \sigma_y=2; r_{xy}=0.$ Найти вероятность того, что деталь из-под штампа выйдет годной.

Решение. Область *D*, штампованной детали ограничена эллипсом рассеивания с полуосями $a=\sigma_x=1, b=\sigma_y=2,$ а вероятность попадания в эту область

$$P[(x,y)\in D]=1-e^{-\frac{1}{2}}\cong 0{,}393.$$

Задачи

148. Координаты (*X*,*Y*) случайной точки *A* на плоскости подчинены нормальному закону

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка *A* окажется внутри эллипса с главными полуосями ka и kb, совпадающими с координатными осями *Ox* и *Oy*.

149. Случайная точка распределена по нормальному закону со срединным отклонением *E*=10 м. Найти вероятности попадания точки в фигуру площадью 314 м^2, если она имеет форму: а) круга; б) квадрата; в) прямоугольника с отношением сторон 10:1. Центр рассеивания совпадает с геометрическим центром фигуры.

150. Независимые случайные величины *X*, *Y* распределены по нормальным законам с параметрами m_x=2, m_y=-3, σ_x=1, σ_y=2. Вычислить вероятности следующих событий: а) $(X<m_x)\cdot(Y<m_y)$; б) $X<3$; $Y<(x-5)$; г) $|X|<1$; д) $(|X|<1)\cdot(|Y|<2)$.

151. Плотность распределения системы двух случайных величин (*X*,*Y*) задана выражением

$$f(x,y)=ae^{-\frac{(x+3)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{2}};$$

а) найти коэффициент *a*; б) установить, являются ли случайные величины *X* и *Y* зависимыми; в) определить вероятность совместного выполнения неравенства $X<-3$, $Y<4$.

152. Система двух случайных величин X,Y распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $r_{xy} = 0$. Определить вероятность следующих событий: а) $|Y| < X$; б) $Y < X$; в) $Y < |X|$.

153. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Релея

$$F(z) = 1 - e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти плотность вероятности $f(z)$.

154. Плотность вероятности случайных амплитуд A боковой качки корабля определяется законом Релея

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (a \geq 0),$$

где σ^2 – дисперсия угла крена.

Как часто встречаются амплитуды, меньшие и большие средней?

Ответы

148. $P(k) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$;

149. а) $P_{кр} = 0{,}2035$; б) $P_{кв} = 0{,}2030$; в) $P_{пр} = 0{,}1411$.

150. а) $P(x < m_x, y < m_y) = 0{,}25$; б) $P(x < 3) = 0{,}8413$; в) $P(y < x - 5) = 0{,}5$; г) $P(|x| < 1) = 0{,}1573$; д) $P((|x| < 1)(|y| < 2)) = 0{,}0476$.

151. а) $a = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}, \sigma_x = 2, \sigma_y = 1$; б) X и Y – независимы; в) $P(X < -3, Y < 4) \approx 0{,}5$.

152. а) $P(|Y| < X) = 0{,}25$; б) $P(Y < X) = 0{,}5$; в) $P(Y < |X|) = 0{,}75$.

153. $f(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$.

154. $P(a < \bar{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$; $P(a > \bar{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$; $P(a < \bar{a}) : P(a > \bar{a}) = \frac{0{,}544}{0{,}456} = 1{,}19$ ($\bar{a}$ – средняя амплитуда).

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.1. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТИ. ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД

Группа объектов, объединенных по некоторому качественному или количественному признаку, называется *статистической совокупностью*. Различают генеральную и выборочную совокупности.

Выборочной совокупностью или *выборкой* называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности называется число объектов, входящих в эту совокупность.

Выборка называется *повторной*, если отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Выборка называется *бесповторной*, если отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Выборка называется *малой*, если ее объем меньше 25 объектов. Если объем выборки больше 25 объектов, то такую выборку называют *большой*.

Статистическая совокупность, расположенная в порядке возрастания или убывания признака, называется *вариационным рядом*, а ее объекты – *вариантами*.

Числа одинаковых значений вариант x_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки *частостями*.

Вариационный ряд называется *дискретными*, если его члены являются членами числовой последовательности, т.е. принимают конкретные значения. Если члены вариационного ряда заполняют некоторый интервал, то такой ряд называют *непрерывным*.

Статистическим распределением выборки называется.1), где в одну строку записываются варианты (члены вариационного ряда), а в другую – соответствующие им частоты или частости.

Таблица 5.1

X	x_1	x_2	x_3	x_4	…	$x_к$
n	n_1	n_2	n_3	n_4	…	n_k
ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	…	ω_k

В табл. 5.1 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i;\quad \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1;\quad \omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Для непрерывного вариационного ряда таблица будет иметь вид табл. 5.2.

Таблица 5.2

X	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	…	$x_k - x_{k+1}$
n	n_1	n_2	n_3	…	$n_к$

В первой строке табл. 5.2 помещены интервалы изменения вариант, а второй – соответствующие им частоты.

Геометрически вышеуказанное распределение можно изобразить следующим образом. На оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i или частости ω_i. Ломаную линию, соединяющую полученные точки, называют *полигоном*.

Для непрерывного вариационного ряда интервал, в котором заключены все значения ряда, разбивают на несколько частичных интервалов $x_i - x_{i+1} = h$ и находят для каждого частичного интервала сумму частот n_i или частостей ω_i вариант, попавших в i-й интервал. На оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними на расстоянии $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{\omega_i}{h}$ проводят отрезки, параллельные оси абсцисс. Соединив концы отрезков и интервалов линиями, параллельными оси Oy, получают ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, которая называется *гистограммой*.

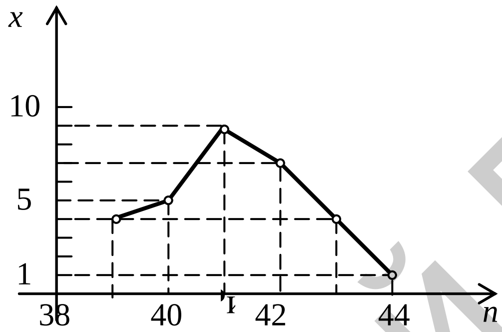
Задачами выборочного метода являются: 1) установление закона распределения случайной величины и его параметров по данным выборки; 2) статистическая проверка гипотез.

Пример 1. Составить вариационный ряд для случайной величины – длины заготовок, отобранных случайным образом, – 39, 41, 40, 40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 40, 42, 43, 41, 42, 41, 39, 42, 42, 41, 42, 40, 41, 43, 41, 39, 40 и построить полигон.

Решение. Так размеры имеют конкретные значения, то вариационный ряд будет дискретным. Расположим значения признака X (размер заготовок) в порядке возрастания в первой строке таблицы, а во второй строке – количество заготовок (частоты):

X	39	40	41	42	43	44	
n	4	5	9	7	4	1	$\sum n_i = 30$

Построим полигон. Для этого откладываем по оси Ox значения признака X, а по оси Oy – частоты n (рис. 5.1).



Пример 2. Из текущей продукции автомата, обрабатывающего ролики диаметром D = 20 мм, взята выборка объемом 100 штук. Ролики измерены по диаметру микрометром с ценой деления 0,01. По данным отклонений от номинального размера, приведенным ниже, составить непрерывный вариационный ряд и построить гистограмму.

–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,07	0,03	0,04	0,08	0,03	0,08	0,09	0,10	0,10	0,10
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,13	0,08	0,06	0,04	0,04	0,03	0,04	0,07	0,11	0,12
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,03	0,07	0,08	0,11	0,05	0,05	0,07	0,03	0,09	0,10
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,11	0,14	0,13	0,08	0,12	0,07	0,09	0,10	0,11	0,08
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,05	0,12	0,07	0,06	0,08	0,11	0,10	0,12	0,11	0,10
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,08	0,05	0,11	0,07	0,05	0,08	0,09	0,09	0,09	0,02
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,06	0,12	0,05	0,07	0,11	0,05	0,08	0,03	0,09	0,09
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,11	0,06	0,07	0,06	0,06	0,12	0,10	0,08	0,11	0,01
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

0,05	0,07	0,06	0,05	0,08	0,09	0,04	0,09	0,08	0,09
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,07	0,06	0,06	0,12	0,05	0,03	0,10	0,09	0,09	0,08

Решение. Так как наименьшее отклонение равно 0,01, а наибольшее –0,14, то разобьем весь объем на 7 интервалов длиной 0,02. Значения признака и частоты расположим таким же образом, как и в примере 1 (табл.5.3).

Таблица 5.3

X	–0,14; –0,12	–0,12; –0,10	–0,10; –0,08	–0,08; –0,06	–0,06; –0,04	–0,04; –0,02	–0,02; –0,00	
n	3	16	22	25	19	13	2	$\sum n_i = 100$

Значения вариант, принадлежащие границам, отнесем к тому интервалу, у которого эта граница является левой.

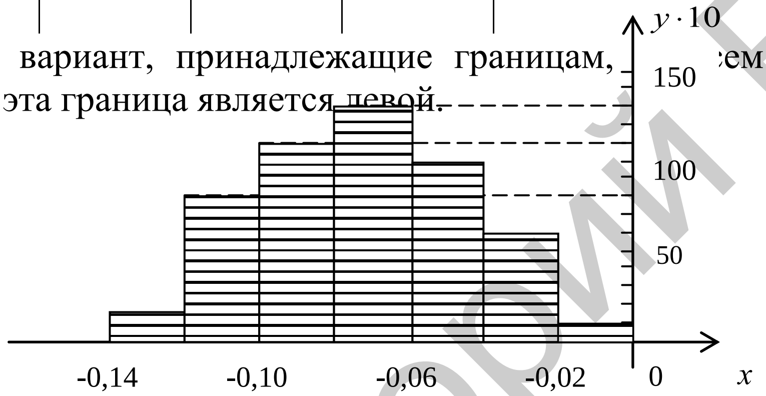


Рис. 5.2

Построим гистограмму. Для этого по оси *Ox* отложим интервалы (значения признака), а по оси *Oy* – частоты $\frac{n}{h}$ (рис. 5.2). Затем через каждую точку проводим прямые, параллельные осям координат. Полученная ступенчатая фигура является гистограммой.

Задачи

155. Отклонение от номинального размера, полученные при измерении деталей, имеют следующие значения:

0,02	0,17	0,13	0,05	0,11	0,17	0,17	0,05	0,03	0,11
0,04	0,14	0,10	0,11	0,13	0,14	0,16	0,04	0,13	0,04
0,03	0,15	0,11	0,06	0,10	0,15	0,16	0,06	0,14	0,06
0,04	0,08	0,14	0,08	0,08	0,14	0,13	0,07	0,16	0,08
0,02	0,10	0,16	0,04	0,09	0,15	0,12	0,17	0,17	0,16

0,04	0,06	0,17	0,03	0,04	0,04	0,11	0,15	0,15	0,17
0,05	0,07	0,04	0,11	0,05	0,08	0,10	0,14	0,6	0,09
0,03	0,06	0,02	0,17	0,07	0,09	0,09	0,12	0,7	0,10
0,06	0,11	0,09	0,14	0,06	0,10	0,08	0,10	0,11	0,09
0,08	0,12	0,10	0,10	0,10	0,02	0,07	0,06	0,12	0,10

Составить вариационный ряд и построить гистограмму частот.

156. Составить вариационный ряд овальности валиков (в мк) по по следующим данным:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	12	14	13	12	13	14	15	16	14
15	14	12	15	14	13	15	12	13	14
15	13	10	10	11	9	10	8	9	11
11	10	9	9	11	8	8	9	10	10
10	9	10	8	7	6	5	7	6	5
4	5	7	7	3	16	17	18	19	16
19	18	17	16	17	18	19	18	17	19
18	20	18	21	22	23	21	20	21	24
25	17	19	28	29	1	2	3	2	17

и построить полигон частот.

157. В результате опроса студентов одного потока их возраст представляется следующими данными: 17, 20, 18, 19, 18, 17, 20, 21, 24, 22, 20, 21, 20, 19, 18, 20, 21, 22, 25, 20.

Составить вариационный ряд, построить полигон частот.

158. В результате проверки партии деталей получены результаты по сортам: 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 1. Составить вариационный ряд, построить полигон.

159. Из выпускаемого заводом литья произведена случайная выборка 40 штук литых деталей, взвешивание которых дало следующие результаты (в кг):

99,2	101,5	99,5	103,2	99,7	110,1	100,2	99,2
99,3	100,4	100,3	102,4	98,9	98,8	100,4	99,7
97,6	101,2	99,4	98,2	100,1	98,3	100,7	101,2
97,2	99,7	101,3	100,6	100,7	101,6	102,7	98,6
98,7	99,9	98,2	100,7	101,2	99,6	100,3	99,8

Найти эмпирическое распределение веса литых деталей в данной выборке (вариационный ряд).

5.2. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, равная относительной частоте ω события $X<x$;

$$F^*(x) = \omega(X < x),$$

где $\omega(X < x) = \frac{n_x}{n}$; n_x – число вариантов меньших x; n – объем выборки.

С в о й с т в а. 1. $0 \le F^*(x) \le 1.$

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если значения вариант расположены в промежутке $(x_1\ x_k)$ то

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad X < x_1; \\ 1 \quad \text{при} \quad X > x_k. \end{cases}$$

Пример 1. Найти эмпирическую функцию распределения случайной величины X и начертить ее график по следующему распределению:

X	39	40	41	42	43	44
n	4	5	9	7	4	1

Решение. Находим объем выборки:

$$n = 4 + 5 + 9 + 7 + 4 + 1 = 30.$$

Наименьшая варианта равна 39, значит,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \le 39.$$

Значения X < 40, т.е. x_1 = 39, наблюдались 4 раза, следовательно, $F^*(x) = \frac{4}{30} = 0{,}13$ при $39 < x \le 40$.

Значения X < 41, а именно: x_1 = 39, x_2 = 40, наблюдались 4+5=9 раза, следовательно, $F^*(x) = \frac{9}{30} = 0{,}3$ при $40 < x \le 41$.

Значения X < 42, а именно: x_1 = 39, x_2 = 40, x_3 = 41 наблюдались 4+5+9=18 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{18}{30} = 0{,}6$ при $41 < x \le 42$.

Значения X < 43, а именно: x_1 = 39, x_2 = 40, x_3 = 41, x_2 = 42 наблюдались 4+5+9+7=25 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{25}{30} = 0{,}71$ при $42 < x \le 43$.

Аналогично находим $F^*(x)=\dfrac{29}{30}=0{,}9$ при $43<x\le 44$, так как x = 44 – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при x > 44. Запишем эмпирическую функцию

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<39; \\ 0{,}13 & \text{при} \quad 39<x\le 40; \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 40<x\le 41; \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 41<x\le 42; \\ 0{,}71 & \text{при} \quad 42<x\le 43; \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 43<x\le 44; \\ 1 & \text{при} \quad 44<x. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $F^*(x_k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}p_i=1.$

Теперь отложим по оси *Ox* значения вариант, а по оси *Oy* – значения функции и построим график $F^*(x)$ (рис. 5.3).

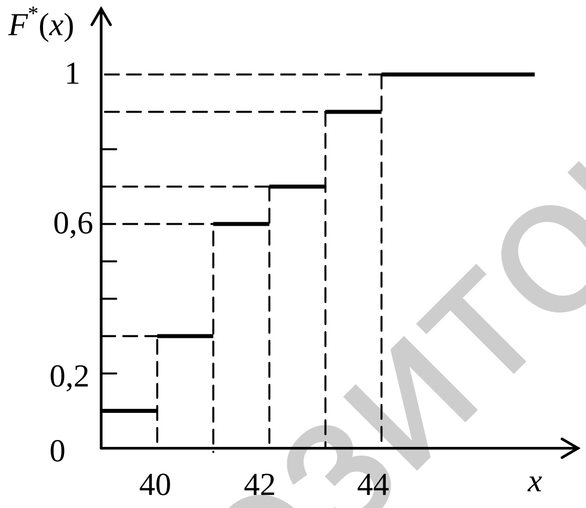


Рис. 5.3

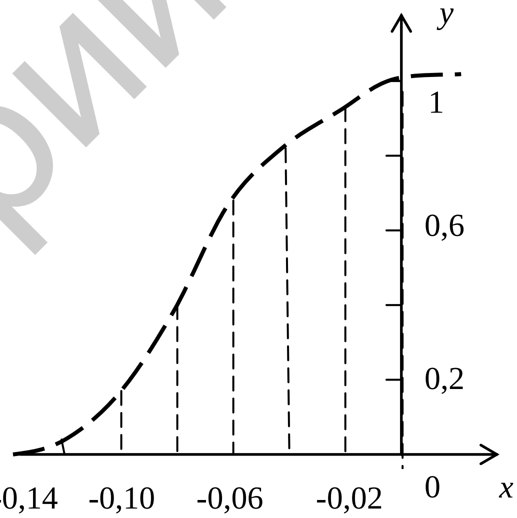


Рис. 5.4

Пример 2. Найти эмпирическую функцию распределения случайной величины X и начертить ее график по распределению, приведенному в табл. 5.4.

Таблица 5.4

X	–0,14 –0,12	–0,12 –0,10	– 0,10 – 0,08	–0,08 –0,06	–0,06 –0,04	–0,04 –0,02	– 0,02 – 0,00	
n	3	16	22	25	19	13	2	$\sum n_i=100$

Решение. В данном случае имеем непрерывный вариационный ряд. Эмпирическую функцию будем находить таким же способом, как и в предыдущем примере, значения X берем на концах интервала:

$$F^*(-0{,}14)=0;\quad F^*(-0{,}12)=F^*(-0{,}14)+\frac{3}{100}=0{,}03;$$

$$F^*(-0{,}10)=F^*(-0{,}14)+F^*(-0{,}12)+\frac{16}{100}=0+0{,}03+0{,}16=0{,}19;$$

$$F^*(-0{,}08)=0+0{,}03+0{,}16+0{,}22=0{,}19+0{,}22=0{,}41;$$

$$F^*(-0{,}06)=0{,}41+0{,}25=0{,}66;\qquad F^*(-0{,}04)=0{,}66+0{,}19=0{,}85;$$

$$F^*(-0{,}02)=0{,}85+0{,}13=0{,}98;\qquad F^*(0{,}00)=0{,}98+0{,}02=1.$$

Откладываем по оси Ox варианты, а по оси Oy – значения $F^*(x)$; полученные точки соединяем отрезками (рис. 5.4). Так как ряд непрерывный, то получим непрерывную ломаную линию.

Задачи

160. Найти эмпирическую функцию распределения случайной величины X и построить ее график для распределения рабочих механического цеха по тарифным разрядам.

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	$\sum n_i$
Количество рабочих	4	6	16	26	48	100

161. Найти эмпирическую функцию и построить ее график по следующим распределениям:

а)

X	2	5	7	8
n	1	3	2	4

б)

X	4	7	8
n	5	2	3

в)

X	1	4	5	7
n	20	10	14	6

Ответы

160. $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1;\\ 0{,}04 & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ 0{,}1 & \text{при} \quad 2<x\le 3;\\ 0{,}26 & \text{при} \quad 3<x\le 4;\\ 0{,}52 & \text{при} \quad 4<x\le 5;\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 5.\end{cases}$

161.

а) $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2;\\ 0{,}1 & \text{при} \quad 2<x<5;\\ 0{,}4 & \text{при} \quad 5<x<7;\\ 0{,}6 & \text{при} \quad 7<x<8;\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 8.\end{cases}$

б) $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<4;\\ 0{,}4 & \text{при} \quad 4\le x<7;\\ 0{,}7 & \text{при} \quad 7\le x<8;\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 8.\end{cases}$

в) $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1;\\ 0{,}4 & \text{при} \quad 1\le x<4;\\ 0{,}6 & \text{при} \quad 4\le x<5;\\ 0{,}88 & \text{при} \quad 5\le x<7;\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 7.\end{cases}$

5.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Статистической оценкой неизвестного параметра генеральной совокупности называется функция от наблюдаемых случайных величин выборки.

Статистические оценки делятся на точечные и интервальные.

Статистическая оценка, определяемая одним числом, называется *точечной*.

Точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, называется *несмещенной*.

Точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, называется *смещенной*.

Несмещенной оценкой генеральной средней $x_г$ (математического ожидания) является выборочное среднее $\overline{x_в}$:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты выборки; n_i – частоты; $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки.

Выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n}$$

является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как $M[D_в] = \frac{n-1}{n} D_г$.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в \quad \text{или} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n-1}.$$

Статистическая оценка, определяемая двумя числами, концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр, называется *интервальной*.

Доверительной вероятностью или *надежностью оценки* λ называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\lambda - l| < \varepsilon$, где l – оцениваемый параметр; ε – точность оценки, $\gamma = P(|\lambda - l| < \varepsilon)$.

Доверительным интервалом для оцениваемого параметра ℓ является интервал $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$, который покрывает этот параметр с надежностью γ.

Для оценки математического ожидания m_x нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \overline{x_в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ – точность оценки; n – объем выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $2\Phi(t) = \gamma$. Если σ неизвестно и выборка малая, то доверительный интервал имеет вид:

$$\overline{x_в} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} < m_x < \overline{x_в} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},$$

S – исправленное среднее квадратическое отклонение; t_γ находят из приложения 4 по заданным n и γ.

Доверительным интервалом для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения по исправленному выборочному служит интервал

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \;\; q = \frac{\varepsilon}{S};$$

q – находят из приложения 5 по заданным n и γ.

Пример 1. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, было произведено пять независимых измерений, результаты которых представлены ниже.

Номер измерения	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерительного прибора, если значение измеряемой величины: а) известно и равно 2800 м; б) неизвестно.

Решение. а) значение измеряемой величины равно $\bar{x}$. Поэтому смещенная оценка дисперсии определяется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{6439}{5} = 1287{,}8 \text{ м}^2$$

б) значение измеряемой величины неизвестно, поэтому ее оценка

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2809$$

и несмещенная оценка дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{6034}{4} = 1508{,}5 \text{ м}^2.$$

Пример 2. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для $M(X)$ по данным выборки: $n = 40,\ \bar{x} = 1{,}4$ с надежностью 0,95.

Решение. Так как $\gamma = 0{,}95,\quad n = 40,\quad \sigma = 2,$ имеем $0{,}95 = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{40}}{2}\varepsilon\right),$ откуда $\Phi\left(\sqrt{10}\varepsilon\right) = 0{,}475.$

Из приложения 2 находим, что $\Phi(X)$=0,475 при x=1,96. Следовательно, $\sqrt{10}\varepsilon$ =1,96, откуда точность оценки ε =0,6.

Таким образом, с надежностью 95% имеем

$$1{,}4 - 0{,}6 < m_x < 1{,}4 + 0{,}6,$$

т.е. неизвестное математическое ожидание заключено в интервале $0{,}8 < m_x < 2{,}0$.

Пример 3. Среднее значение расстояния до ориентира по четырем независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратичная ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематическая ошибка отсутствует. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

Решение. Доверительный интервал измеряемой величины X

$$P\left(|x - l| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Решая уравнение $2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}95,$ из приложения 2 находим $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = 1{,}96;$ $\varepsilon = \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\sigma = \frac{1{,}96 \cdot 40}{2} = 39{,}2.$

Отсюда искомые границы доверительного интервала будут: верхняя 2250 м + + 39,2 м =2289,2 м; нижняя 2250 м – 39,2 м =2210,8 м.

Задачи

162. При обработке наружного диаметра 15 карданных валов были получены следующие размеры (в мм): 42,22; 41,87; 42,56; 42,03; 42,48; 42,31; 40,15; 42,82; 43,83; 43,40; 41,13; 41,72; 41,35; 44,13; 42,00. Определить несмещенные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения диаметров валов, полагая, что обработанные диаметры имеют нормальное распределение.

163. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины (длины протяжки)* прибором, не имеющим систематических ошибок (в мм): 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если: а) номинальная длина протяжки $M(x)$=375 см; б) номинальная длина неизвестна.

*Протяжка – режущий инструмент для обработки внутренних поверхностей.

164. После 6 заездов автомобиля на определенной трассе были получены следующие значения его максимальной скорости (в м/с): 27, 38, 30, 37, 35, 31. Определить несмещенную оценку математического ожидания максимальной скорости автомобиля.

165. Определение скорости автомобиля с прицепом было проведено на мерном участке в 5 испытаниях, в результате которых вычислена оценка υ=52,22 км/ч. Найти доверительный интервал с надежностью 95%, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со среднеквадратичным отклонением σ=0,126 км/ч.

166. Систематические ошибки измерительного прибора практически равны нулю, а случайные распределены нормально со среднеквадратичным отклонением σ=20 м. Необходимо, чтобы абсолютное значение разности между оценкой измеряемой величины и истинным ее значением не превосходило 10 мк. Определить, с какой вероятностью будет выполнено это условие, если число наблюдений 3, 5, 10, 25.

167. Глубина дорожки подшипника измеряется оптическим глубиномером, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратичным отклонением σ=20 мк. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не боле 15 мк при доверительной вероятности 90%?

168. Случайная величина имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением σ=4. Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания $\underline{a}$, если n=25, $\overline{x_в}$=12,8, а доверительная вероятность γ=0,9.

169. Найти минимальный объем выборки, на основании которой можно было бы оценить с надежностью γ=0,95 математическое ожидание случайной величины X – контролируемого размера с ошибкой не превышающей 26 мк, предполагая, что случайная величина X распределена нормально с параметрами a и σ =50.

170. Найти минимальное число измерений, которые надо произвести, чтобы с надежностью 0,95 можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки измерения некоторого зазора не превышает 0,003, если известны результаты пяти измерений зазора: x_1=2,005, x_2=2,030, x_3=2,025, x_4=2,020, x_5=2,025.

Ответы

162. $\overline{x_в}$ =42,473 мм; S=0,884 мм.**163**. а) S^2=814,87; б) S^2=922.**164**. 33 м/с.

165. 52,05 км/ч; 52,38 км/ч.**166**. 0,61; 0,74; 0,89; 0,99.**167**. 11.

168. 11,48; 14,12.**170**. n=43

6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

6.1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Статистической называется гипотеза о предполагаемом виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Например, генеральная совокупность распределена по закону Пуассона и утверждение, что дисперсии двух совокупностей, подчиняющихся нормальному закону, равны между собой, будут статистическими гипотезами.

Нулевой называется выдвинутая гипотеза, *конкурирующей* – гипотеза, которая противоречит нулевой.

Простой называется гипотеза, содержащая только одно предположение, *сложной* – гипотеза, состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В статистической оценке гипотезы могут быть допущены ошибки. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. *Ошибка второго рада* – в том, что будет принята неправильная гипотеза. Вероятность совершить ошибку первого рода обозначается буквой α и называется уровнем значимости. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01, или, в процентах 5% и 1%.

Критерием называется случайная величина K, которая служит для проверки нулевой гипотезы H_0.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называется совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Если наблюденное значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают.

Если наблюденное значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Критическими называются точки, отделяющие критические области от областей принятия гипотезы.

Мощностью критерия называется вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза.

Мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

6.2. ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.2.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ χ^2 (ХИ–КВАДРАТ)

Пусть X_i ($i=\overline{1,n}$) – нормально распределенные независимые случайные величины, математическое ожидание которых равно нулю $M(X_i)=0$, а среднее квадратическое отклонение равно единице $\sigma(X_i)=1$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} X_i = \chi^2$, с $k = n$ степенями свободы. Если $\sum_{i=1}^{n} = n\overline{X}$, то $k=n$-1 степени свободы. Плотность распределения χ^2 имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx$, $\Gamma(n+1)=n!$

Из (6.1) следует, что плотность распределения χ^2 зависит от одного параметра k – числа степеней свободы.

6.2.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Пусть X – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с $k = n$ степенями свободы.

Пусть υ – независимая от X случайная величина, распределенная по закону χ^2 с $k = n$ степенями свободы. Тогда можно по данным выборки построить случайную величину $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\upsilon}{K}}}$, возможные значения которой t подчиняются распределению Стьюдента. Тогда $T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ имеет распределение с $k = n–1$ степенями свободы, S – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение,
a – математические ожидание.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$S(t,n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \tag{6.2}$$

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$S(t,n)$ – функция четная. Поэтому вероятность того, что $\left|\frac{\bar{x} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < \varepsilon = t_\gamma$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \gamma .$$

Доверительный интервал для, математического ожидания генеральной совокупности будет

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$$

t_γ находят по таблице по n и γ.

6.3. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

За меру расхождения между теоретическим и статистическим распределением выбирают случайную величину $\chi_q^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-m_i')^2}{m_i'}$, которая, как доказал Пирсон, при достаточно большом объеме выборки имеет закон распределения близкий к χ^2, независимо от вида функции распределения $F(x)$.

Приведем пример применения критерия согласия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности: пусть имеем эмпирическое распределение из равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

X	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k

Проверку гипотезы о нормальном распределении можно свести к следующему алгоритму:

1) вычисление теоретических частот по формуле

$$n_i'=\frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i),$$

где n – объем выборки; h – шаг, равный разности между двумя соседними вариантами; $\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение; $u_i=\frac{x-\overline{x_в}}{\sigma_в}$; $\overline{x_в}$ – среднее выборочное; $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$;

2) вычисление величины χ_q^2:

$$\chi_q^2=\sum\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'};$$

3) вычисление числа степеней свободы $k = s - 3$ (s – число различных значений x_i);

4) выбор уровня значимости;

5) определение из приложения 5 по данным k и χ_q^2 вероятности $P(\chi^2\ge\chi_q^2)$.

Если эта вероятность меньше принятого уровня значимости, то гипотезу отвергаем, если больше – принимаем.

Если вариационный ряд непрерывный, то проверка гипотезы о нормальном распределении сводится к такому алгоритму:

1) вычисление выборочной средней $\overline{x_в}$ и выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma *_в$, причем вместо вариант x_i берут среднее арифметическое концов интервала

$$x*_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2};$$

2) нормирование случайной величины X, т.е. переход к новой случайной величине $Y = \dfrac{x - x*}{\sigma *_в}$, причем наименьшее значение Y приравнивают к $-\infty$, а наибольшее – к ∞;

3) вычисление теоретических вероятностей попадания Y в интервал $(y_i; y_{i+1})$

$$P(y_i < Y < y_{i+1}) = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i),$$

где $\Phi(y)$ – функция Лапласа;

4) вычисление

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

где n – объем выборки;

5) вычисление числа степеней свободы $k = s - 3$, где s – число интервалов выборки;

6) выбор уровня значимости;

7) по значениям k, χ_q^2 в приложении 6 находят $P(X^2 \geq \chi_q^2)$.

Если $P(X^2 \geq \chi_q^2) > \alpha$, то гипотеза принимается, если $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) < \alpha$, то гипотеза отвергается.

Таким образом, обработка статистических данных выборочным методом предполагает:

1) составление вариационного ряда наблюденных значений изучаемой величины;

2) построение эмпирической кривой (полигона) распределения;

3) вычисление характеристик эмпирического распределения;

4) определение по виду графика эмпирической кривой теоретического распределения, к которому приближается эмпирическая кривая;

5) оценка близости эмпирического распределения к предполагаемому теоретическому.

Для непрерывных случайных величин обработку статистических данных можно провести и по следующей схеме

1) составление вариационного ряда;

2) определение эмпирической функции;

3) построение графика эмпирической функции;

4) получение графика теоретической функции распределения путем замены ломаной линии кривой;

5) определение уравнения кривой распределения;

6) определение дифференциального закона распределения.

Пример 1. Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 200 валиков. Получены следующие данные

x_i	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
n_i	1	5	4	18	86	62	14	6	3	1

Обработать эти данные.

Решение. Так как выборка представлена в виде вариационного ряда, то приступаем к построению эмпирической кривой (полигона частот) (рис. 6.1).

Вычисляем характеристики эмпирического распределения – среднюю выборочную и среднеквадратическое отклонение – по методу произведений:

$\bar{x}_в = M_1 h + C; \quad D_в = (M_2 - M_1^2)h^2$, где C – условный нуль, h – шаг,

$u_i = \dfrac{x_i - C}{n}$; u_i – условные варианты; $M_1^* = \dfrac{\sum n_i u_i}{n}$ – условный начальный момент первого порядка; $M_2^* = \dfrac{\sum n_i u_i^2}{n}$ условный начальный момент второго порядка. Составляем таблицу 6.1.

Таблица 6.1

i	x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i n_i^2$	$\sum n_i (u_i + 1)^2$
1	3,2	1	–4	–4	16	9

2	3,4	5	–3	–15	45	20
3	3,6	4	–2	–8	16	4
4	3,8	18	–1	–18	18	–
5	4,0	86	0	–45	–	86
6	4,2	62	1	62	62	248
7	4,4	14	2	28	56	126
8	4,6	6	3	18	54	96
9	4,8	3	4	12	48	75
10	5	1	5	5	25	36
	–	200	–	80	340	700

$$\bar{x}_{\text{в}} = M_1 h + C = \frac{80}{200}\cdot 0{,}2 + 4;$$

$$D_{\text{в}} = \left[M_2^* - M_1^{*2}\right]h^2 = \left[\frac{340}{200} - 0{,}08\right]0{,}04 = 0{,}0648; \quad \sigma = 0{,}2545.$$

По виду кривой (полигона) предполагаем, что теоретическое распределение подчиняется нормальному закону (рис. 6.1).

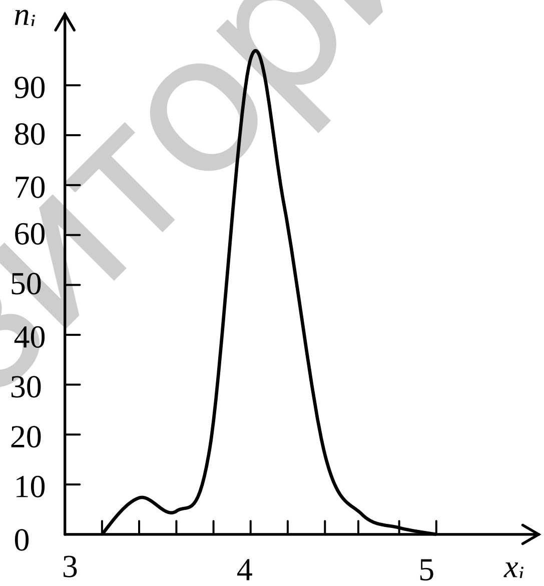


Рис. 6.1

Оценим близость эмпирического распределения к теоретическому с помощью критерия Пирсона. Составим табл.6.2.

Из табл.6.2 видно, что $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0$, т.е. меньше, чем 0,05. Значит, распределение отлично от нормального.

Пример 2. Произведен выбор 200 метчиков* из сменного задания рабочего. Проверяемый размер измерен с точностью до 1 мк. В табл.6.3 приведены отклонения x_i от номинального размера, разбитые на варианты частоты, соответствующие им, и их вероятности. Оценить с помощью χ^2 гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости 0,05.

* Метчик – инструмент для нарезки резьбы.

Решение. Определяем значения x_i середин интервалов и находим оценки математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i p_i = 4{,}30 \text{ мк}; \quad \overline{x^2} = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 p_i = 112{,}75 \text{ мк};$$

$$\bar{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 94{,}20 \text{ мк}; \quad \sigma = 9{,}71 \text{ мк}.$$

Вычисления сводим в таблицу (табл. 6.4).

Таблица 6.2

i	x_i	n_i	$u_i = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i)$	$(n_i - n'_i)$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	3,2	1	–3,464	0,0010	0,1547	0,843	0,711	4,517
2	3,4	5	–2,677	0,0113	1,778	3,222	23,261	10,3
3	3,6	4	–1,889	0,0681	10,718	–6,718	45,131	4,210
4	3,8	18	–1,102	0,2179	34,297	–16,297	265,59	7,714
5	4,0	86	–0,315	0,3790	59,654	27,654	764,74	11,144
6	4,2	62	0,472	0,3555	55,955	7,955	63,282	1,130
7	4,4	14	1,592	0,1804	28,394	–14,394	207,187	7,296

8	4,6	6	2,047	0,0488	7,681	–1,681	2,825	0,358
9	4,8	3	2,834	0,0073	1,149	1,851	3,426	2,284
10	4	1	3,622	0,0006	0,0944	0,9056	0,820	8,72
							$\sum = 57{,}648$	

Таблица 6.3

Граница интервала

i	$x_i \div x_{i+1}$		n_i	p_i
1	–20	–15	7	0,035
2	–15	–10	11	0,055
3	–10	–5	15	0,075
4	–5	0	24	0,120
5	0	5	49	0,245
6	5	10	41	0,205
7	10	15	26	0,130
8	15	20	17	0,085
9	20	25	7	0,035
10	25	30	3	0,015

Таблица 6.4

i	$\overline{x_i}$	y_i	$\Phi(y)$	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)}{np_i}$
1	–17,5	$-\infty$	–0,5000	0,0239	4,78	1,04
2	–12,5	–1,99	–0,4761	0,0469	9,38	0,28
3	–7,5	–1,47	–4292	0,0977	19,54	1,05
4	–2,5	–0,96	–3315	0,1615	32,30	2,13
5	2,5	–0,44	–0,1700	0,1979	39,58	2,24

6	7,5	0,07	0,0279	0,1945	38,90	0,11
7	12,5	0,59	0,2224	0,1419	28,38	0,20
8	17,5	1,10	0,3643	0,0831	16,62	0,01
9	22,5	1,62	0,4474	0,0526	10,52	0,03
10	27,5	2,13	0,4834	–	200	$X_q^2 = 7{,}09$
11	–	∞	0,5000	–		

Теоретические вероятности P_i попадания отклонений в интервалы (x_i, x_{i+1}) вычисляем по формуле

$$P_i = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i),$$

где y_i– левая граница i-го интервала относительно $\bar{x}$,

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}.$$

При этом наименьшее $y_i = y_1 = -2{,}5$ заменяем на $-\infty$, а наибольшее $y_i = 2{,}65$ – на ∞.

Значения функции Лапласа $\Phi(y)$ находим из приложения 2. Интервал i = 10, ввиду малости его частоты, объединяем с интервалом i = 9, следовательно, n = 9.

Находим значения χ_q^2:

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 7{,}09.$$

Число степеней свободы k = 9 – 2 – 1 = 6. Из приложения 6 по входным величинам χ_q^2 и k находим $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0{,}313.$ Гипотеза о нормальном отклонении от номинального размера не противоречит наблюдениям.

Задачи

171. С помощью критерия Пирсона при уровне значимости 0,05 установить, согласуется ли гипотеза с нормальным распределением генеральной совокупности с данными выборки:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

172. Произвести статистическую обработку данных задачи 150 и построить теоретическую кривую.

173. Отсчет по шкале измерительного прибора оценивается приблизительно в долях деления шкалы. Приведено 200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы:

Циф ра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	35	16	15	17	17	19	11	6	30	24

Установить, используя критерий χ_q^2, согласуются ли наблюдения с законом равномерного распределения, при котором при уровне значимости 0,05 вероятность появления любой цифры $p_i = 0{,}10$.

174. Приведены отклонения внутренних диаметров шестерен, обработанных на станке, от заданного размера:

Границы интервала, мк	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
Численность вариант n_i	15	75	100	50	10
Частота p_i	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

Проверить, используя критерий χ_q^2, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв уровень значимости 0,05.

Ответы

171. Распределение нормальное.

172. Распределение нормальное.

173. χ_q^2 = 24,9. K = 9. $P(\chi^2 \ge \chi_q^2)$ – отклонения значимы, гипотезу о равномерном распределении следует отклонить.

174. $\bar{x}_i$ = 11,8 мк; σ = 4,69; k = 2; χ_q^2 = 1,16; $P(\chi^2 \ge \chi_q^2)$ = 0,368. Нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении.

6.4. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ КОЛМОГОРОВА

Критерий согласия Колмогорова применяется для проверки гипотез о законах распределения только непрерывных случайных величин. Отличие от критерия согласия χ^2 состоит в том, что сравниваются эмпирическая функция $F^*(x)$ и теоретическая функция $F(x)$ при известных параметрах распределения.

В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями рассматривается максимальное значение модуля разности $D = \max|F^*(x) - F(x)|$.

А.Н.Колмогоров доказал, что какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X, при неограниченном увеличении числа независимых наблюдений n вероятность неравенства $P(D\sqrt{n} \ge \lambda)$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{n\to\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-2n^2\lambda^2}.$$

Уровень значимости α принимается чаще всего в пределах 0,10–0,20. Проверку гипотезы с помощью критерия Колмогорова проводят в следующем порядке:

1) располагают результаты наблюдений по возрастанию их значений в виде интервального вариационного ряда;

2) находят эмпирическую функцию распределения $F^*(x) = n_x / n$;

3) вычисляют, пользуясь предполагаемой функцией $F(x)$, значения теоретической функции распределения, соответствующие наблюдаемым значениям случайной величины X;

4) находят для каждого x_i модуль разности между эмпирической и теоретической функциями распределения;

5) определяют величину $\lambda = D\sqrt{n} = \max\left|F^*(x) - F(x)\right|\sqrt{n}$;

6) находят критические значения λ_α в зависимости от уровня значимости из табл. 6.5.

Таблица 6.5

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,510	1,627	1,950

Если опытное значение $\lambda \geq \lambda_\alpha$, то гипотеза о согласии теоретического закона распределения с данными выборки опровергается. Если $\lambda < \lambda_\alpha$, то гипотеза принимается.

Пример 1. Результаты измерения 1000 деталей помещены в табл. 6.6.

Таблица 6.6

i	x_i	m_i	i	x_i	m_i	i	x_i	m_i
1	98,0	21	5	100,0	181	8	101,5	97
2	98,5	47	6	100,5	201	9	102,0	41
3	99,0	87	7	101,0	142	10	102,5	25
4	99,5	158						

Пользуясь критерием согласия Колмогорова, проверить следующую гипотезу; случайная величина X подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $M(x) = a = 100{,}25$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мм при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. результаты наблюдения в порядке возрастания их значений помещены в табл. 6.7.

Таблица 6.7.

i	$x_i - a$	$\frac{1}{2}\Phi(x_i - a)$	$F(x_i)$	$F^*(x_i)$	$\lvert F^*(x_i) - F(x_i)\rvert$
1	–2,25	–0,4877	0,0123	0,0105	0,0018
2	–1,75	–0,4599	0,0401	0,0445	0,0044
3	–1,25	–0,3944	0,1056	0,1115	0,0059
4	–0,75	–0,2734	0,2266	0,2340	0,0074
5	–0,25	–0,0987	0,4013	0,4035	0,0022
6	0,25	0,0987	0,5987	0,5945	0,0042
7	0,75	0.2734	0,7734	0,7660	0,0074
8	1,25	0,3944	0,8944	0,8855	0,0089
9	1,75	0,4599	0,9599	0,9545	0,0054
10	2,25	0,4877	0,9877	0,9875	0,0002

Эмпирическую функцию $F^*(x)$ вычисляем по формуле

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i / 1000.$$

Теоретическую функцию распределения $F(x)$ определяем по формуле верно $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x),$ где Φ – функция Лапласа. Составляем для каждого значения x_i разности $F^*(x_i) - F(x_i)$. Результаты вычислений помещены в табл. 6.7.

Из табл. 6.7 выбираем наибольшую из разностей $\lvert F^*(x_i) - F(x_i)\rvert = D = 0{,}0089.$ Определяем $\lambda = D\sqrt{n} = 0{,}0089\sqrt{1000} = 0{,}281$. По значению α=0,05 находим из таблицы λ_α=1,073. Видим, что $\lambda < \lambda_\alpha$, следовательно, гипотеза о согласии наблюдений с законом нормального распределения с параметрами a=100,25 и σ=1 не опровергается.

Задачи

175. В табл. 6.8 приведены статистические данные по отклонению диаметров (мкм) валиков, обработанных на станке, от заданного размера.

Таблица 6.8

Границы интервала (x_i)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
Численность (m_i)	15	75	100	50	10
Частость (w_i)	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

Проверить гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, используя критерий Колмогорова и приняв уровень значимости α=0,05.

176. Из таблицы случайных чисел выбрано 150 натуральных чисел, меньших 100. Разбив все элементы выборки на 10 интервалов и при этом приняв значения чисел, попавших в один интервал, равными его середине, проверить гипотезу о согласии наблюдений с законом равномерного распределения при уровне значимости α=0,05. Результаты выборки помещены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

Границы интервала	Частота (m_i)	Частость (w_i)	Границы интервала	Частота (m_i)	Частость (w_i)
0–9	16	0,107	50–59	19	0,127
10–19	15	0,100	60–69	14	0,093
20–29	19	0,127	70–79	11	0,073
30–39	13	0,087	80–89	13	0,087
40–49	14	0,093	90–99	16	0,107

177. Данные по выборке 150 отклонений диаметров от номинального размера (мк) имеет вид:

Середина интервала (x_i)	26	29	32	35	38	41	47	50	53
Частота (m_i)	1	4	13	23	22	29	16	11	2

При уровне значимости α=0,10 проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности.

7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

7.1. ПОНЯТИЕ О КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТАБЛИЦА. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Две случайные величины могут быть связаны функциональной или статистической зависимостью или быть независимыми.

Функциональной называется зависимость между величинами X и Y, когда изменение одной из них вызывает соответствующее изменение другой.

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из случайных величин ведет к изменению распределения другой.

Статистическую зависимость, при которой изменение одной случайной величины вызывает изменение среднего значения другой, называют *корреляционной*.

Условным средним $\overline{Y_x}$ называется среднее арифметическое случайной величины Y при $X = x$.

Когда каждому значению x соответствует одно значение условного среднего $\overline{Y_x}$, то $\overline{Y_x}$ является функцией от x.

Корреляционной зависимостью Y от X называется функциональная зависимость условной средней $\overline{Y_x}$ от x, т.е.

$$\overline{Y_x} = f(x). \tag{7.1}$$

Уравнение (7.1) называется *уравнением регрессии* Y на X. Функция $f(x)$ называется *регрессией* Y на X, а ее график – *линией регрессии* Y на X.

При большом числе наблюдений одни и те же значения x и y могут встречаться много раз. Для удобства их группируют и записывают в виде так называемой корреляционной таблицы (табл. 7.1).

Таблица 7.1

y_i \ x_i	x_1	x_2	…	x_k
y_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1k}
y_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2k}
…	…	…	…	…
y_m	n_{m1}	n_{m2}	…	n_{mk}

Для оценки тесноты корреляционной связи между двумя случайными величинами используют коэффициент корреляции.

Близость коэффициента корреляции к единице свидетельствует о зависимости случайной величины близкой к функциональной.

Выборочный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$r_в = \frac{\sum\limits_{ij} n_{xy} x_i y_j - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}, \quad -1 \le r_в \le 1,$$

где n – объем выборки; $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние; σ_x, σ_y – выборочные средние квадратические отклонения.

Пример 1. В результате измерений отклонений от номиналов высот моделей (x_i) и отливок к ним (y_i) получены следующие данные:

x_i	0,90	1,22	1,32	0,77	1,30	1,20	1,32	0,95	0,45	1,30	1,20
y_i	–0,30	0,10	0,70	–0,28	0,25	0,02	0,37	–0,7	0,55	0,35	0,32

Составить корреляционную таблицу и вычислить коэффициент корреляции.

Решение. Разобьем весь интервал, в котором заключены значения признаков, на 5 интервалов. Возьмем для удобства x_i наименьшее значение 0,40 и наибольшее – 1,40, тогда ширина одного интервала будет равна 0,20. Для y_i наименьшим значением будет – 0,7, а наибольшим 0,7. Ширина интервала 0,28. Откладываем интервалы изменений x_i по горизонтали, а y_i – по вертикали, данные заносим в табл. 7.2.

Таблица 7.2

y_i \ x_i		0,40–0,60	0,60–0,80	0,80–1,00	1,00–1,20	1,20–1,40	n_y
–0,7	–0,42	–	–	1	–	–	1
–0,42	–0,14	–	1	1	–	1	3
–0,14	–0,14	–	–	–	–	1	1
+0,14	–0,42	–	–	–	2	2	4
0,42	–0,7	1	–	–	–	1	2
n_x		1	1	2	2	5	11

Определим коэффициент корреляции. Для этого находим средние значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$, принимая в качестве значений x_i и y_i середины соответствующих интервалов

$$\bar{x} = \frac{0{,}50\cdot 1 + 0{,}70\cdot 1 + 0{,}90\cdot 2 + 1{,}10\cdot 2 + 1{,}30\cdot 5}{11} = \frac{11{,}70}{11} = 1{,}06;$$

$$\bar{y} = \frac{-0{,}56\cdot 1 - 0{,}28\cdot 3 + 0{,}1 + 0{,}28\cdot 4 + 0{,}56\cdot 2}{11} = \frac{0б84}{11} = 0{,}08;$$

$$D_x = \frac{(1{,}30-1{,}06)^2 + 5(0{,}50-1{,}60)^2\cdot 1 + (0{,}70-1{,}06)^2\cdot 1 + (0{,}90-1{,}06)^2}{10} +$$

$$+\frac{(1{,}10-1{,}06)^2}{10} = \frac{0{,}7816}{10} = 0{,}078; \quad \sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}078} \approx 0{,}28;$$

$$D_y = \frac{(-0{,}64)^2 \cdot 1 + (-0{,}36)^2 \cdot 3 + (-0{,}08)^2 \cdot 3 + (-0{,}08)^2 \cdot 1 + (0{,}20)^2 \cdot 4 + (0{,}48)^2}{10} =$$

$$= \frac{2{,}1168}{10} = 0{,}211; \quad \sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{0{,}211} \approx 0{,}46;$$

$$r_в = \frac{0{,}58 \cdot 0{,}50 \cdot 1 - 0{,}28 \cdot 0{,}70 - 0{,}56 \cdot 0{,}90 \cdot 1 - 0{,}28 \cdot 0{,}90 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 1{,}1 \cdot 2 + 0{,}28 \cdot 1{,}3 \cdot 1}{11 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}44} +$$

$$+ \frac{0{,}3 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 1{,}3 \cdot 2 + 0{,}56 \cdot 1{,}3}{11 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}44} = \frac{1{,}046}{1{,}258} = 0{,}82.$$

Коэффициент корреляции близок к единице значит между случайными величинами X и Y существует достаточно тесная корреляционная связь.

Задачи

178. Результаты лабораторных испытаний прочности стальных канатов диаметром 13 мм представлены в табл. 7.3, где x_i – сумма разрывных усилий (в кГ) отдельных проволок, из которых свит канат, а y_i – разрывное усилие всего каната (кГ).

Таблица 7.3

x_i	y_j	x_i	y_j	x_i	y_j
14360	11350	14140	11540	14350	11450
13860	11400	14240	11450	14210	11400
13650	11400	14250	11465	14350	11500
14400	11560	14630	11640	14020	11400
13900	11500	14080	11450		

Составить корреляционную таблицу и вычислить коэффициент корреляции.

Указание. Весь интервал, в котором заключены значения признаков, разбить на 6 равных интервалов.

179. На металлургическом заводе исследовалась зависимость предела прочности (кг/мм^2) от предела текучести (кг/мм^2). Результаты замеров прочности (x_i) и текучести (y_j) 50 марок стали приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

x_i	y_j	x_i	y_j	x_i	y_j	x_i	y_j	x_i	y_j
77	81	81	54	129	100	104	94	96	84
96	77	57	40	145	95	108	84	112	94
86	76	86	61	142	206	93	73	136	162
92	86	80	68	120	118	124	107	104	98
98	53	87	88	95	109	112	94	103	77
53	47	163	145	107	107	113	107	115	88
63	36	153	136	133	120	95	99	123	94
80	40	133	129	140	114	112	100	111	76
64	49	159	126	149	113	116	104	127	84
66	60	134	96	147	123	93	88	129	73

Составить корреляционную таблицу, разбив интервал изменения *X* и *Y* на 6 интервалов, и вычислить коэффициент корреляции.

Ответы. 178. $r = 0{,}82$. 179. $r = 0{,}93$.

7.2. ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* имеет вид

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}),$$

где $\bar{y}_x$ – условная средняя; $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние признаков *X* и *Y*; σ_x, σ_y – выборочные средние квадратических отклонений признаков *X* и *Y*; $r_в$ – выборочный коэффициент корреляции.

Уравнение прямой линии регрессии *X* на *Y* имеет вид

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}).$$

Величины $r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ и $r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ называются *линейными коэффициентами регрессии* и обозначаются соответственно $\rho_{y/x}$ и $\rho_{x/y}$. Тогда

$$r_в = \rho_{y/x} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ или } r_в = \rho_{x/y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Если значения *X* и *Y* заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то с целью упрощения расчетов полезно перейти к *условным вариантам*

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}; \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2},$$

где c_1, c_2 – варианты признака (обычно за условные нули c_1 и c_2 принимают варианты с наибольшими частотами); h_1, h_2 – разности между соседними вариантами признаков *X* и *Y*.

В условных вариантах выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u \sigma_v},$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_u$ и σ_v можно вычислить по формулам:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n}; \quad \bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n};$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}; \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2};$$

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + c_1; \quad \bar{y} = \bar{v} h_2 + c_2;$$

$$\sigma_x = \sigma_u h_1; \quad \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Пример 1. Распределение 40 заводов области по количеству ремонтных слесарей *l* и числу станко-смен *m* представлено следующей корреляционной таблицей (табл. 7.5).

Таблица 7.5

$m \setminus l$	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	n_y
0–0,2	4	–	–	–	–	–	4
0,2–0,4	2	2	–	–	–	–	4
0,4–0,6	–	–	2	–	–	–	2
0,6–0,8	–	6	–	4	4	–	14
0,8–1,0	–	–	–	–	6	6	12
1,0–1,2	–	–	–	–	–	4	4
n_x	6	8	2	4	10	10	40

Составить уравнение прямой регрессии, установить тесноту связи между признаками. Для каждого интервала значений *x* вычислить фактические значения частных средних $\bar{y}_x$ и теоретические, вычисленные по уравнению регрессии.

Р е ш е н и е. За значения признаков примем середины интервалов и составим корреляционную таблицу (табл. 7.6) в условных вариантах, приняв в качестве ложных нулей $c_1 = 0{,}7$ и $c_2 = 27{,}5$. (Эти варианты имеют частоту, равную 4, и находятся в середине корреляционной таблицы.)

Таблица 7.6

$u \ \backslash \ v$	–3	–2	–1	0	1	2	n_u
–3	4	–	–	–	–	–	4
–2	2	2	–	–	–	–	4
–1	–	–	2	–	–	–	2
0	–	6	–	4	4	–	14
1	–	–	–	–	6	6	12
2	–	–	–	–	–	4	4
n_v	6	8	2	4	10	10	40

$$\bar{v} = \frac{-3\cdot 6 + (-2)\cdot 8 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 4 + 10\cdot 1 + 10\cdot 2}{40} = -\frac{6}{40} = 0{,}15;$$

$$\bar{u} = \frac{-3\cdot 4 - 2\cdot 4 - 1\cdot 2 + 0\cdot 14 + 1\cdot 12 + 2\cdot 4}{40} = -\frac{2}{40} = -0{,}05;$$

$$\bar{v}^2 = \frac{9\cdot 6 + 4\cdot 8 + 1\cdot 2 + 0\cdot 4 + 1\cdot 10 + 4\cdot 10}{40} = \frac{138}{40} = 3{,}45;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{9\cdot 4 + 4\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 14 + 1\cdot 12 + 4\cdot 4}{40} = \frac{82}{40} 2{,}05;$$

$$\sigma_v = \sqrt{3{,}45 - 0{,}0225} = 1{,}86; \quad \sigma_u = \sqrt{2{,}05 - 0{,}0025} = 1{,}43;$$

$$\sum n_{uv} uv = 4\cdot 9 + 6\cdot 2 + 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot 6 + 4\cdot 4 = 92.$$

Найдем искомый коэффициент корреляции:

$$r_n = \frac{92 - 40\cdot 0{,}15\cdot 0{,}05}{40\cdot 1\cdot 86\cdot 1\cdot 43} = \frac{91{,}7}{106} = 0{,}85\,.$$

Находим $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y$:

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + c_1 = -0{,}05\cdot 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}69;$$

$$\bar{y} = \bar{v} h_2 + c_2 = -0{,}15\cdot 5 + 27{,}5 = 26{,}75;$$

$$\sigma_x = \sigma_u h_1 = 1{,}43\cdot 0{,}2 = 0{,}286; \quad \sigma_y = \sigma_v h_2 = 1{,}86\cdot 5 = 9{,}3.$$

Подставляем полученные значения в уравнение регрессии:

$$\bar{y}_x - 26{,}75 = 0{,}85\frac{9{,}3}{0{,}286}(x - 0{,}69) \text{ или } \bar{y}_x = 27{,}64x + 7{,}03\,.$$

Вычислим для каждого интервала x фактические значения частных средних:

$$\bar{y}_{x=0,1} = 12{,}5; \quad \bar{y}_{x=0,3} = \frac{2\cdot 12{,}5 + 2\cdot 17{,}5}{4} = \frac{60}{4} = 15; \quad \bar{y}_{x=0,5} = \frac{2\cdot 22{,}5}{2} = 22{,}5;$$

$$\bar{y}_{x=0,7} = \frac{17{,}5\cdot 6 + 27{,}5\cdot 4 + 32{,}5\cdot 4}{14} = \frac{345}{14} = 24{,}64; \quad \bar{y}_{x=0,9} = \frac{32{,}5\cdot 6 + 37{,}5\cdot 6}{12} = \frac{420}{12} = 35; \quad \bar{y}_{x=1,1} = 37{,}5.$$

Вычислим для каждого интервала x теоретические значения из полученного уравнения:

$\bar{y}_{x=0,1} = 27{,}64 \cdot 0{,}1 + 7{,}03 = 9{,}79$; $\bar{y}_{x=0,3} = 27 \cdot 64 \cdot 0{,}3 + 7{,}03 = 15{,}32$; $\bar{y}_{x=0,5} = 27{,}64 \cdot 0{,}5 + 7{,}03 = 20{,}75$;
$\bar{y}_{x=0,7} = 27{,}64 \cdot 0{,}7 + 7{,}03 = 26{,}37$; $\bar{y}_{x=0,9} = 27{,}64 \cdot 0{,}9 + 7{,}03 = 31{,}9$; $\bar{y}_{x=1,1} = 27{,}64 \cdot 1 \cdot 1 + 7{,}03 = 37{,}43$.

Сравнивая полученные значения, видим, что они близки к фактическим.

Задачи

180. Найти уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y* по данным, сведенным **в** корреляционные таблицы: а) в табл. 7.7; б) в табл. 7.8.

Таблица 7.7

$y_j \ \backslash \ x_i$	1	2	3	4	n_y
1	1	–	–	–	1
2	2	1	–	–	3
3	1	2	1	–	4
4	–	1	2	1	4
5	–	–	1	2	3
n_x	4	4	4	3	15

Таблица 7.8

$y_j \ \backslash \ x_i$	65	95	125	155	185	215	n_y
30	5	–	–	–	–	–	5
40	4	12	–	–	–	–	16
50	–	8	5	4	–	–	17
60	–	1	5	7	2	–	15
70	–	–	–	–	1	1	2
n_x	9	21	10	11	3	1	55

181. Результаты измерений колебаний крутящего момента на полуоси автомобиля и угловых колебаний ведущего моста сведены в таблицу (табл. 7.9).

Найти уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* и оценить тесноту связи.

Таблица 7.9

y \ x·10^{-3}	–18,44–(–12,42)	–12,42–(–6,44)	–6,44–(–0,46)	–0,46–5,52	5,52–11,5	11,5–17,8	17,8–23,46	23,46–29,44	29,44–35,42	35,42–41,4	n_y
(–232)–(–171,6)	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	4
(–171,6)–(–11,2)	1	3	1	2	–	–	–	–	–	–	7
(11,2)–(–50,8)	2	1	–	2	–	–	–	–	–	–	5
(–50,8)–9,6	–	4	1	5	2	–	–	–	–	–	12
9,6–70	–	2	1	2	1	–	1	–	–	–	7
70–130,4	–	–	–	2	1	1	–	–	1	–	5
130,4–190,8	–	1	–	1	3	5	8	1	–	–	19
190,8–251,2	–	–	–	–	3	5	8	3	1	1	21

251,2–311,6	–	1	–	1	3	5	4	1	2	1	18
311,6–372	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2
n_x	3	16	3	15	13	16	23	5	4	2	100

182. Результаты измерений колебаний ведущего моста автомобиля *X* и угловых колебаний подрессоренной массы (галопирование) *Y* сведены в корреляционную таблицу (табл. 7.10).

Найти уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X*, установить тесноту связи между признаками. Для каждого интервала значений *X* вычислить фактические значения частных средних $\bar{y}_x$ и по уравнению регрессии – теоретические средние.

Таблица 7.10

$y \cdot 10^{-3}$ \ $x \cdot 10^{-3}$	–18,44–(–12,42)	–12,42–(–6,44)	–6,44–(–0,46)	–0,46–5,52	5,52–11,5	11,5–17,8	17,8–23,46	23,46–29,44	29,44–35,42	35,42–41,4	n_y
–17,5–(–11,9)	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2
–11,9–(–6,3)	–	–	–	–	–	–	1	1	–	–	2
6,3–(–0,7)	–	–	–	–	1	3	4	–	–	–	8
0,7–4,9	–	–	–	1	1	2	5	–	3–	–	12
4,9–10,5	–	–	–	4	2	3	7	–	–	1	17
10,5–16,1	1	3	1	3	2	3	4	2	–	–	19
16,1–21,7	1	6	1	2	5	3	2	–	–	–	20
21,7–27,3	–	2	–	2	3	–	–	–	1	–	8
27,3–32,9	–	2	1	3	1	1	–	–	–	1	9
32,9–38,5	1	1	–	–	–	1	–	–	–	–	3
n_x	3	14	3	15	15	16	25	3	4	2	100

183. Результаты опыта приведены в табл. 7.11.

Таблица 7.11

x_i	2	4	6	8	10
y_j	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

Считая, что x и y связаны зависимостью $y = ax + b$, найти a и b.

Ответы. 180. а) $\bar{y}_x = 0{,}23x + 21{,}78$; б) $\bar{x}_y = 2{,}92y - 27{,}25$. 181. $\bar{y}_x = 68 \cdot 10^{-6}x + 117{,}77$. 182. $\bar{y}_x = -0{,}428x + 0{,}019$. 183. $a = 0{,}475; b = 21{,}75$.

7.3. КРИВОЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Если в уравнении регрессии $f(x)$ является нелинейной функцией от *x*, то корреляцию называют *криволинейной*. Теснота криволинейной связи определяется корреляционным отношением

$$\eta_{y_x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$$

или

$$\eta_{x_y} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}$$

где σ_y – среднее квадратическое отклонение значений y_j от $\bar{y}$; σ_x – среднее квадратическое отклонение x_i от $\bar{x}$; $\sigma_{\bar{y}_x}$ и $\sigma_{\bar{x}_y}$ – средние квадратические отклонения значений частных средних $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$ от средних $\bar{y}$ и $\bar{x}$ соответственно, т.е.

$$\sigma^2_{\bar{y}_x} = \frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}; \quad \sigma^2_{\bar{x}_y} = \frac{\sum n_y (\bar{x}_y - \bar{x})^2}{n};$$

n – объем выборки.

Свойства корреляционного отношения.

1. Корреляционное отношение удовлетворяет неравенству $0 \le \eta < 1$.

2. Если $\eta = 0$, то признак *Y* с признаком *X* корреляционной зависимостью не связан.

3. Если $\eta = 1$, то признак *Y* связан с признаком *X* функциональной зависимостью.

4. Корреляционное отношение не меньше абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции, т.е. $\eta \ge |r_в|$.

Если $\eta = |r_в|$, то имеет место точная линейная корреляционная зависимость.

Простейшими случаями криволинейной корреляции являются:

1) параболическая корреляция второго порядка с уравнением регрессии

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c;$$

2) параболическая корреляция третьего порядка с уравнением регрессии

$$\bar{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

3) гиперболическая корреляция с уравнением регрессии

$$\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b.$$

Пример 1. Найти уравнение параболической регрессии Y на X для экспериментальных данных, помещенных в табл. 7.12.

Таблица 7.12

$y_j \setminus x_i$	1	2	3	4	5	6	n_y
1	2	1	–	–	–	–	3
2	1	2	–	–	–	–	3
3	–	3	1	–	–	–	4
4	–	1	3	1	–	–	5
5	–	–	2	2	2	1	7
6	–	–	–	1	1	1	3
n_x	3	7	6	4	3	2	25
$\bar{y}_x$	1,33	2,57	4,17	5,0	5,33	5,50	

Р е ш е н и е. Ищем уравнение регрессии в виде

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c.$$

Для определения неизвестных коэффициентов a, b, c по методу наименьших квадратов записываем систему нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a\sum n_x x^2 + b\sum n_x x + nc = \sum n_x \bar{y}_x; \\ a\sum n_x x^3 + b\sum n_x x^2 + c\sum n_x x = \sum n_x x\bar{y}_x; \\ a\sum n_x x^4 + b\sum n_x x^3 + c\sum n_x x^2 = \sum n_x x^2 \bar{y}_x \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

и составляем вспомогательную таблицу (табл. 7.13).

Таблица 7.13

n_x	x	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$\bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x x\bar{y}_x$	$n_x x^2 \bar{y}_x$
3	1	3	3	3	3	1,33	3,99	3,99	3,99
7	2	14	28	56	112	2,57	17,99	35,98	71,96
6	3	18	54	162	486	4,17	25,02	75,06	225,18
4	4	16	64	256	1024	5,0	20,00	80,00	320,0
3	5	15	75	375	1875	5,33	15,99	79,95	399,75
2	6	12	72	432	2592	5,50	11,000	66,00	396,00
$\sum n_x = 25$		78	296	1284	6092	–	93,99	340,98	1416,88

Теперь уравнения (7.2) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} 296a+78b+25c&=93{,}99;\\ 1284a+296b+78c&=340{,}98;\\ 6092a+1284b+296c&=1416{,}88.\end{aligned}\right\}$$

Для упрощения расчетов разделим каждое уравнение на коэффициент при c:

$$\left.\begin{aligned} 11{,}84a+3{,}12b+c&=3{,}76;\\ 16{,}46a+3{,}80b+c&=4{,}38;\\ 20{,}58a+4{,}34b+c&=4{,}79.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получим $a=-0{,}19,\quad b=2{,}21,\quad c=-0{,}89$.

Уравнение регрессии имеет вид

$$\bar{y}_x=-0{,}19x^2+2{,}21x-0{,}89.$$

Подставив в это уравнение вместо x его значения, получим теоретические значения средних $\bar{y}_x$:

x_i	1	2	3	4	5	6
$\bar{y}_x$	1,14	2,78	4,07	4,91	5,41	5,52

Сравнивая теоретические значения частных средних $\bar{y}_x$ с экспериментальными, видим, что они близки по значениям.

Задачи

184. В результате исследований установлено, что между овальностью колец после их обточки X и термической обработки Y существует корреляционная связь, представленная таблицей (табл. 7.14).

Таблица 7.14

$y_j \setminus x_i$	5	10	15	20	
10	2	–	–	–	2
20	5	4	1	–	10
30	3	8	6	3	20
40	–	3	6	6	15
50	–	–	2	1	3
n_x	10	15	15	10	50

Найти уравнение кривой регрессии Y на X и оценить тесноту связи признаков X и Y.

185. Приведены данные об износе резца *Y*, определяемом его толщиной (в мм) в зависимости от времени работы *t* (в ч):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	30,0	29,1	28,4	28,1	28,0	27,7	27,5	27,2	27,0	26,8	26,5	26,3	26,1	25,7	25,3	24,8	24,0

Найти уравнение параболической регрессии *Y* на *t* и установить тесноту связи.

186. Даны результаты измерений признаков *Y* и *X*

X	1,2	1,8	3,1	4,9	5,7	7,1	8,6	9,8
Y	4,5	5,9	7,0	7,8	7,2	6,8	4,5	2,7

Построить эмпирическую кривую. По виду этой кривой определить вид уравнения регрессии, найти его и установить по нему тесноту связи. Найти теоретические значения $\bar{y}_x$.

187. В результате лабораторных испытаний прочности *X* стальных проволок различных диаметров *Y*, предназначенных для свивки канатов, были получены следующие данные:

X	0,6	2	2,2	2,45	2,6
Y	50	560	690	760	900

Считая, что между диаметром проволоки *X* (в мм) и разрывным усилием *Y* (в кг) существует корреляционная зависимость параболического типа, найти уравнение регрессии.

188. Данные о количестве выпускаемых деталей *X* (тыс. штук) и полных затратах на их изготовление *Y* (сот. руб.), полученные на 15 машиностроительных заводах, помещены в таблицу (табл. 7.15).

Таблица 7.15

X / Y	3	4	5	7	8	10	12	13	14	19	20	24	26	n_x
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1	1	1	4
4	1	1	–	–	1	–	–	1	1	–	–	–	–	5
9	1	–	–	1	–	1	1	–	–	–	–	–	–	4
18	–	–	1	–	1	–	–	–	–	–	-	–	–	2
n_y	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Найти: а) для каждого значения *x* частную среднюю $\bar{y}_x$; б) построить в системе координат $(x, \bar{y}_x)$ эмпирическую кривую и по ней установить возможность представления рассматриваемой зависимости в виде уравнения регрессии $\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b$ и найти его; в) с помощью корреляционного отношения $\eta_{y/x}$ оценить тесноту связи.

Ответы. 184. $\bar{y}_x = -0{,}036x^2 + 2{,}72x + 8{,}61$. 185. $\bar{y}_t = 0{,}068t^2 - 0{,}71t + 29{,}82$. 186. $\bar{y}_x = -0{,}211x^2 + 2{,}065x + 2{,}588$; $\eta_{y/x} = 0{,}99$. 187. $\bar{y}_x = 134x^2$. 188. б) $\bar{y}_x = \frac{36{,}3}{x} + 2{,}53$; в) $\eta_{y/x} = 0{,}88$.

8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

8.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайной называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, неизвестно заранее, какой именно, или функция, значение которой при каждом значении аргумента является случайной величиной. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*. *Случайным процессом* является случайная функция $X(t)$ от независимой переменной *t*.

Двумерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется совместный закон распределения ее значений $X(t)$, $X(t')$ при двух произвольно взятых значениях *t* и t' аргумента *t*: $f_2(x, x', t, t')$, где $x = X(t)$, $x' = X(t')$. *n-мерным законом распределения* случайной функции $X(t)$ называется закон распределения совокупности значений $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ случайной функции $X(t)$ при *n* произвольно взятых значениях аргумента $t_1, t_2, \ldots, t_n$:

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Сечением случайной функции называется ее значение при некотором фиксированном значении аргумента.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется такая неслучайная функция, значение которой при каждом значении аргумента равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции:

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)\,dx = m_x(t), \qquad (8.1)$$

где $f_1(x,t)$ – одномерный закон распределения.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется такая неслучайная функция, значение которой при каждом значении аргумента равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D[X(t)] = D_x(t)$$

или в интегральном выражении

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [X(t) - m_x(t)]^2 f_1(x,t)\,dx. \qquad (8.2)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной функции равно квадратному корню из дисперсии случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D[X(t)]}.$$

Корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется такая неслучайная функция двух аргументов $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции, т.е.

$$K_x(t,t') = M[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m'_x(t'))]$$

или

$$K_x(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathring{x}(t)\,\mathring{x}(t') f_2(x,x',t,t')\,dx\,dx',$$

где $\mathring{x}(t) = X(t) - m_x(t)$; $\mathring{x}(t') = X(t') - m_x(t')$; $f_2(x,x',t,t')$ – двумерный закон распределения.

Свойства корреляционной функции. 1. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов: $K_x(t,t') = K_x(t',t)$.

2. $|K_x(t,t')| \le \sigma_x(t)\sigma_x(t')$.

3. Если к случайной функции прибавить неслучайную, то ее корреляционная функция не изменится.

4. Если случайную функцию умножить на неслучайную $\varphi(t)$, то корреляционная функция случайной функции умножается на $\varphi(t)\varphi(t')$:

$$K_x(t,t') = \varphi_x(t)\varphi(t')K_y(t,t').$$

5. $K_x(t,t) = D_x(t)$.

Взаимной корреляционной функцией или *корреляционной функцией связи* двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется такая неслучайная функция двух аргументов $K_{xy}(t,s)$, которая при каждой паре значений t и s равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайных функций, т.е.

$$K_{xy}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}\,\overset{\circ}{y}\, f(x,y,t,s)\,dx\,dy\,.$$

Функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *коррелируемыми*, если $K_{xy}(t,s) \neq 0$, и *некоррелируемыми*, если $K_{xy}(t,s) = 0$ при всех значениях t и s.

Пример 1. Плотность распределения вероятностей случайной функции $X(t)$

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a\sin t)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции, если a и σ – постоянные, причем $\sigma > 0$.

Решение. Согласно формуле (8.1),

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a\sin t)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-(x-a\sin t)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Сделаем замену переменной: $\frac{x-a\sin t}{\sigma} = z,\ x = \sigma z + a\sin t,\ dx = \sigma dz$. Тогда $m_x(t)$ будет равно

$$m_x(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}}dz + \frac{a\sin t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz\,;$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}}dz = 0,\ \text{а}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\,, \tag{8.3}$$

то $m_x(t)=a\sin t$. Находим дисперсию $D[X(t)]$. Согласно выражению (8.2),

$$D_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a\sin t)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a\sin t)^2}{2\sigma^2}}dx\,.$$

Используя замену переменной, приведенную выше, получим

$$D_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2e^{\frac{-z^2}{2\sigma}}dz\,,$$

интегрируя по частям и учитывая формулу (8.3), получим

$$D_x(t)=\sigma^2\,.$$

Пример 2. Двумерный закон распределения случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2+(x_2+\sin t_2)^2}{2}}\,.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

Решение. Находим математическое ожидание случайной функции $X(t)$. Для этого сначала запишем одномерный закон распределения:

$$f_1(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_2\,.$$

В нашем случае

$$f_1(x_1,t_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2+(x_2+\sin t_2)^2}{2}}dx_2=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x_2+\sin t_2)^2}{2}}dx_2=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_2+\sin t_2}{\sqrt{2}}=u\\ dx_2=\sqrt{2}du\end{array}\right|=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2}{2}}\,.$$

Математическое ожидание:

$$m_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x+\sin t)^2}{2}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+\sin t}{\sqrt{2}}=u;\ x=\sqrt{2}u-\sin t\\ dx=\sqrt{2}du\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}u-\sin t)e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2}du-\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=-\sin t\,.$$

Находим корреляционную функцию

$$K_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+\sin t_1)(x_2+\sin t_2)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2+(x_2+\sin t_2)^2}{2}}dx_1dx_2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+\sin t_1)e^{-\frac{(x_1+\sin t_1)^2}{2}}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}(x_2+\sin t_2)e^{-\frac{(x_2+\sin t_2)^2}{2}}dx_2=0\,.$$

Дисперсия $D_x(t)=1$.

Задачи

189. Двумерная плотность вероятности $f(x_1,x_2,t_1,t_2)$ функции $X(t)$ равна $\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

190. Одномерный закон распределения $f_1(x_1,t)$ случайной функции $X(t)$ имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^2}e^{-\frac{(x-a\cos t)^2}{2\sigma^2}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

191. Двумерная плотность вероятности $f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)$ случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=\begin{cases}x_1x_2e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}} & \text{при}\quad \begin{matrix}x\ge 0;\\ y\ge 0;\end{matrix}\\ 0 & \text{при}\quad x<0;\quad y<0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию $X(t)$.

192. Дана двумерная плотность вероятности случайной функции

$$f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_1-t_1)^2-(x_2-t_2)^2}{2}}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

Ответы. 189. $m_x(t)=0;\ D_x=\sigma^2;\ K_x(t_1,t_2)=\begin{cases}\sigma^2 & \text{при}\quad t_1=t_2;\\ 0 & \text{при}\quad t_1\ne t_2.\end{cases}$.

190. $m_x(t)=a\cos t;\ D_x(t)=\sigma^2$. 191. $m_x(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ D_x(t)=\frac{4-\pi}{2};\ K_x(t_1,t_2)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t_1\ne t_2;\\ \frac{4-\pi}{2} & \text{при}\quad t_1=t_2.\end{cases}$.

192. $m_x(t)=t;\ D_x(t)=1;\ K_x(t_1,t_2)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t_1\neq t_2;\\ 1 & \text{при} \quad t_1=t_2.\end{cases}$

8.2. ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть случайная функция $Z(t)=X(t)+Y(t)$. Тогда математическое ожидание

$$M[Z(t)]=M[X(t)]+M[Y(t)].$$

Корреляционная функция $Z(t)$

$$K_z(t,t')=K_{xy}(t,t')+K_{yx}(t,t')+K_y(t,t')+K_x(t,t').$$

Если $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелируемые, то

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+K_y(t,t').$$

Пусть $Z(t)=\varphi(t)X(t)$, где $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Тогда

$$M[Z(t)]=\varphi(t)M[X(t)];\quad K_z(t,t')=\varphi(t)\varphi(t')K_x(t,t').$$

Пусть $Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$, тогда

$$M[Y(t)]=\frac{dm_x(t)}{dt}=m_x'(t);$$

$$K_y(t,t')=\frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t\partial t'}.$$

Пусть $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$, тогда

$$M_y(t)=\int\limits_0^t m_x(\tau)d\tau;$$

$$K_y(t,t')=\int\limits_0^t\int\limits_0^{t'} K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'.$$

Пример 1. На вход интегратора поступает случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)=4t+5$ и корреляционной функцией $K_x(t_1,t_2)=\cos t_1\cos t_2$. Найти характеристики на выходе системы.

Решение. Пусть $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$, тогда

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(t')dt'=\int_0^t (4t'+5)dt'=2t^2+5t;$$

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cos t_1'\cos t_2' dt_1'dt_2'=\sin t_1\sin t_2.$$

Дисперсия $Y(t)$ будет равна $D_y(t)=\sin^2 t$.

Задачи

193. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики

$$M_x(t)=t^3+3t,\quad K_x(t_1,t_2)=e^{-t_1^2-t_2^2}.$$

Найти характеристики случайной функции $Y_1(t)=t^2\dfrac{dX}{dt}-3t^2$.

194. Характеристики случайной функции $X(t)$ заданы выражениями $m_x(t)=t+4$, $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2$. Найти характеристики случайной функции $Z(t)=5tX(t)+1$.

195. Работа динамической системы описывается оператором вида $Y(t)=\dfrac{2}{3t}\int_0^t X(\tau)d\tau+t^2$. На вход этой системы поступает случайная функция $X(t)$ с характеристиками $m_x(t)=2e^t$, $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2e^{t_1}e^{t_2}$.

Найти характеристики на выходе системы.

196. На вход динамической системы, описываемой оператором $Y_1(t)=\dfrac{dX}{dt}$, поступает случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)=A\sin t$ и корреляционной функцией $K_x(t_1,t_2)=De^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$, где $D=\text{const}$. Определить характеристики на выходе системы.

Ответы. 193. $m_{y_1}(t)=3t^4$; $K_{y_1}(t_1,t_2)=4t_1^3t_2^3e^{-t_1^2-t_2^2}$; $D_{y_1}(t)=4t^6e^{-2t^2}$.

194. $m_z(t)=5t^2+20t+1$; $K_z(t_1,t_2)=25t_1^2t_2^2$; $D_z(t)=25t^4$.

195. $m_y(t)=t^2+\dfrac{4}{3t}(e^t-1)$; $D_y(t)=\dfrac{4}{9t^2}\left[1-e^t+te^t\right]^2$; $K_y(t_1,t_2)=\dfrac{4}{9t_1t_2}\left[1-e^{t_1}+t_1e^{t_1}\right]\left[1-e^{t_2}+t_2e^{t_2}\right]$.

196. $m_y(t)=A\cos t$; $D_y(t)=2\alpha D$; $K_y(t_1,t_2)=2\alpha e^{-\alpha(t_1-t_2)^2}\left[\alpha(t_2-t_1)^2+1\right]$.

8.3. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Элементарной случайной функцией называется случайная функция вида $X(t) = X\varphi(t)$, где X – случайная величина, математическое ожидание которой равно 0, а $\varphi(t)$ – неслучайная функция.

Математическое ожидание элементарной случайной функции равно нулю.

Корреляционная функция элементарной случайной функции

$$K_x(t, t') = \varphi(t)\varphi(t')D_x .$$

Производная элементарной случайной функции

$$X'(t) = X\varphi'(t).$$

Интеграл элементарной случайной функции

$$\int_0^t X(t)dt = X\int_0^t \varphi(t)dt .$$

Каноническим разложением случайной функции $X(t)$ называется представление ее в виде суммы ее математического ожидания и взаимно некоррелируемых элементарных случайных функций:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{k} X_i\varphi_i(t), \tag{8.4}$$

где X_i – случайные величины, называемые коэффициентами канонического разложения; $\varphi_i(t)$ – неслучайные функции, которые называются *координатными функциями* канонического разложения.

Если случайная функции $X(t)$ представлена в виде (8.4), то

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{k} D_{x_i}\varphi_i(t)\varphi_i(t'), \tag{8.5}$$

где D_{x_i} – дисперсии случайных величин X_i.

Справедливо и обратное утверждение.

Пример 1. Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ задана каноническим разложением

$$K_x(t_1, t_2) = 3t_1t_2 + t_1^2t_2^2 + 5t_1^3t_2^3 .$$

Найти каноническое разложение центрированной случайной функции.

Р е ш е н и е. Из равенства (8.4) имеем

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = \sum_{i=1}^{k} X_i \varphi_i(t).$$

Согласно формулам (8.4) и (8.5), в нашем случае будем иметь

$$D(X_1) = 3; \quad D(X_2) = 1; \quad D(X_3) = 5.$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{X}(t) = X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3.$$

Задачи

197. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением. $X(t) = \sin t + X_1 + X_2 t + X_3 t \sin t$, дисперсии случайных величин X_1, X_2, X_3 равны соответственно D_1, D_2, D_3. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной функции $X(t)$.

198. Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ задана каноническим разложением $K_x(t_1, t_2) = 2t_1 t_2 + +3t_1^2 t_2^2$. Найти каноническое разложение центрированной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$.

199. На вход динамической системы, работа которой описывается оператором вида $Y_1(t) = 2t\dfrac{dX}{dt} + 3t^2$, поступает случайная функция, заданная каноническим разложением $X(t) = 1 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3$, причем $D_{x_1} = 1, D_{x_2} = D_{x_3} = 2$. Найти каноническое разложение и характеристики случайной функции $X(t)$ на выходе системы.

200. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением $X(t) = t + X_1 \cos 2t + X_2 \sin 2t$. Дисперсии $D_{x_1} = D_{x_2} = 2$. Найти каноническое разложение и характеристики случайной функции $Z = 3tX(t) + 2t^2$.

Ответы.

197. $m_x(t) = \sin t$; $K_x(t_1, t_2) = D_1 + D_2 t_1 t_2 + D_3 t_1 t_2 \sin t_1 \sin t_2$; $D_x(t) = D_1 + D_2 t^2 + D_3 t_1 t_2 \sin t_1 \sin t_2$.

198. $\overset{\circ}{X}(t) = X_1 t + X_2 t^2$; $D_{x_1} = 2$; $D_{x_2} = 3$. 199. $Y_1(t) = 3t^2 + 2X_1 t + 4X_2 t^2 + 6X_3 t^3$; $m_{y_1}(t) = 3t^2$;

$K_{y_1}(t_1,t_2)=4t_1t_2+32t_1^2t_2^2+72t_1^3t_2^3;\ D_{y_1}(t)=4t^2+32t^4+72t^6.$

200. $Z(t)=5t^2+3X_1t\cos 2t+3X_2t\sin 2t;\ m_z(t)=5t^2;\ K_z(t_1,t_2)=18t_1t_2\cos 2(t_2-t_1);\ D_x(t)=18t^2.$

8.4. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Случайная функция $X(t)$ называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов t_1 и t_2, т.е.

$$m_x(t)=\text{const};\ K_x(t_1,t_2)=K_x(\tau),\ \text{где}\ \tau=t_1-t_2;\ D[X(t)]=K_x(t_1,t_2)=K_x(0).$$

Нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$ называют отношение

$$\frac{K_x(\tau)}{D[X(t)]}=\frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}.$$

Каноническое разложение стационарной случайной функции имеет вид

$$X(t)=m_x+\sum_{k=1}^{\infty}(U_k\cos\omega_k t+V_k\sin\omega_k t), \tag{8.6}$$

где U_k, V_k – взаимно некоррелируемые случайные величины, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии D_k. Разложение (8.6) называется *спектральным*.

Спектральной плотностью называется

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{D_k}{\Delta\omega}=S_x(\omega). \tag{8.7}$$

Из формулы (8.7) можно выразить дисперсию

$$D_k=\int_0^{\infty}S_x(\omega)d\omega.$$

Корреляционная функция и спектральная плотность выражаются друг через друга следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}K_x(\tau)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega=\int_0^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega;\\ S_x(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Если перейти к *нормированной спектральной плотности*

$$\rho_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}$$

и *нормированной корреляционной функции*

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x},$$

то эти функции будут выражаться друг через друга следующим образом:

$$\rho_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} r_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau;$$

$$r_x(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \rho_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$$

Пример 1. Спектральная плотность случайной функции $X(t)$ имеет вид:

$$S(\omega) = \begin{cases} a & \text{при} \quad -b \le \omega \le b; \\ 0 & \text{при} \quad |\omega| > b. \end{cases}$$

Найти корреляционную функцию $K_x(\tau)$.

Решение. Согласно (8.8),

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} a\cos\omega\tau d\omega = \frac{a\sin b\tau}{\tau}.$$

Пример 2. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если корреляционная функция

$$K(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1-|\tau|) & \text{при} \quad |\tau| \le 1; \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > 1. \end{cases}$$

Решение. По формуле (8.8)

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sigma^2(1-|\tau|)\cos\omega\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\sigma^2\int_{-1}^{1}\sigma^2(1-|\tau|)\cos\omega\tau d\tau = \frac{2\sigma^2}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)\cos\omega\tau d\tau =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\pi}\left[\int_0^1 \cos\omega\tau d\tau - \int_0^1 \tau\cos\omega\tau d\tau\right] = \frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\bigg|_0^1 - \frac{\tau\sin\omega\tau}{\omega}\bigg|_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega\tau d\tau\right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\Big|_0^1\right) = \frac{2\sigma^2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega) = \frac{4\sigma^2}{\pi\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\sigma^2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2.$$

Задачи

201. Нормированная корреляционная функция разбитой грунтовой дороги имеет вид:

$$r_x(l)=0{,}624e^{-11|l|}+0{,}356e^{-0{,}15|l|}\cos 0{,}36l\,,$$

где l –длина. Найти нормированную спектральную плотность $\rho_x(\omega)$.

202. Нормированная корреляционная функция микропрофиля булыжной мостовой с удовлетворительным состоянием покрытия имеет вид

$$r_x(l)=e^{-0{,}11|l|}\cos 0{,}238l\,.$$

Найти нормированную спектральную плотность $\rho_x(\omega)$.

203. Колебания автомобиля при движении по булыжному покрытию характеризуются нормированной спектральной плотностью

$$\rho_x(\omega)=\frac{0{,}4v_a}{\omega^2+0{,}015v_a^2},$$

где v_a – поступательная скорость автомобиля. Найти нормированную корреляционную функцию.

204. Случайная функция $X(t)=1+X_1\cos\omega_1 t+X_2\sin\omega_1 t+X_3\cos\omega_2 t+X_4\sin\omega_2 t$, дисперсии коэффициентов разложения $D_{x_1}=D_{x_2}=1;\ D_{x_3}=D_{x_4}=2$. Установить, является ли эта функция стационарной.

205. Работа динамической системы описывается дифференциальным уравнением $2Y'(t)+Y(t)=X'(t)+3X(t)$. На вход системы поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=1$ и корреляционной функцией $K_x(\tau)=2e^{-2|\tau|}$. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной функции на выходе системы.

Ответы. 201. $\frac{2}{\pi}\left[\frac{6{,}864}{\omega^2+121}+0{,}178\left(\frac{0{,}15}{0{,}15^2+(\omega+0{,}36)^2}+\frac{0{,}15}{(\omega-0{,}36)^2+0{,}15^2}\right)\right]$.

202. $\frac{1}{\pi}\left[\frac{0{,}1}{(\omega-0{,}238)^2+0{,}01}+\frac{0{,}1}{(\omega+0{,}238)^2+0{,}01}\right]$. 203. $\frac{0{,}2\pi}{\sqrt{0{,}0154}}e^{-\sqrt{0{,}0154}v_a|\tau|}$.

204. $m_x(t)=1$; $K_x(t_1,t_2)=\cos\omega_1(t_2-t_1)+2\cos(t_2-t_1)$; $X(t)$ – стационарная случайная функция. 205. $m_y(t)=3$; $D_y(t)=4$.

8.5. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ

Под *потоком событий* будем понимать последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток включений приборов в электросеть и т.д.) Под потоком *однородных событий* будем понимать события, отличающиеся лишь моментами появления. Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

Простейшим (*пуассоновским*) *потоком* называется поток событий, обладающий следующими свойствами:

1) *стационарностью*, т.е. вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где расположен этот участок;

2) *независимостью* (отсутствием последействия), т.е. число событий, попадающих на один из не перекрывающихся участков времени, не зависит от числа событий, попадающих на другие;

3) *ординарностью*, т.е. вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Отметим, что при выполнении условий (1-3) число событий, попадающих на интервал времени $]0;t[$, будет распределено по закону Пуассона

$$P_t(k)=(\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!,$$

где λ – *интенсивность потока*, равная среднему числу событий, появляющихся в единицу времени.

Пример 1. Среднее число автомобилей, прибывающих на станцию обслуживания для ремонта в течение 1 ч., равно 2. Найти вероятность того, что за 4 ч. прибудет: 1) 3 автомобиля; 2) менее 3 автомобилей; 3) не менее 3 автомобилей.

Решение. Предположим, что процесс поступления автомобилей на станцию обслуживания в течение *t* часов является пуассоновским. Тогда возможные значения переменной *k* будут 0, 1, 2. Вероятности этих значений определяем по приведенным ниже формулам:

1) $P_4(k=3)=\dfrac{8^3e^{-8}}{3!}=\dfrac{512\cdot 0{,}000335}{6}=0{,}028$.

2) $P_4(k<3)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)=e^{-8}+\dfrac{8e^{-8}}{1}+\dfrac{8^2e^{-8}}{2}\approx 0{,}01$.

3) В связи с тем, что события «поступило менее 3 автомобилей» и «поступило не менее 3 автомобилей» вместе образуют достоверное событие, то $P_4(k<3)+P_4(k\geq 3)=1$. Отсюда

$$P_4(k\geq 3)=1-P_4(k<3)=1-0{,}01=0{,}99.$$

Задачи

206. Число электронов, вылетающих из нагретого катода электронной лампы в течение времени *t*, подчиняется закону Пуассона со средним числом выпускаемых в единицу времени электронов, равным λ. Найти вероятности того, что: 1) число электронов за время t_1 будет меньше *m*; 2) за время t_2 вылетит четное число электронов.

207. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности того, что: 1) за 2 с на АТС не поступит ни одного вызова; 2) за 3 с на АТС поступит не менее 6 вызовов.

208. Среднее число автомобилей, прибывающих на автозаправочную станцию за 1 ч, равно 4. Найти вероятность того, что за 3 ч прибудет: 1) 6 автомобилей; 2) менее 6 автомобилей; 3) не менее 6 автомобилей.

209. Найти вероятность того, что за 2 ч на предприятие бытового обслуживания поступит 4 заявки, если число заявок в среднем за 1 ч равно 3.

Ответы. 206. 1) $P(X<m)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$; 2) $P(2k)=\frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}$.

207. 1) $P(X=0)=0{,}018$; 2) $P(X<6)=0{,}092$.

208. 1) $P(X=6)=0{,}017$; 2) $P(X<6)=0{,}0184$; 3) $P(X>6)=0{,}9816$. 209. $P(X=4)=0{,}1339$.

8.6. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Марковским процессом, протекающим в физической системе, называется такой случайный процесс $x(t)$, при котором для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Марковский процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если имеется лишь конечное или счетное число различных фазовых состояний системы.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени: $t_1, t_2, \ldots$, то марковский процесс $x(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если же переходы системы из состояния в состояние возможны в любые случайные моменты времени *t*, то марковский процесс называется *процессом с непрерывным временем*.

Пусть имеется физическая система *A*, которая может находиться в различных фазовых состояниях:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

причем переходы системы из состояния в состояние возможны только в моменты:

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots.$$

Будем называть эти моменты «*шагами*» процесса и рассматривать марковский случайный процесс $x(t)$, происходящий в системе *A*, как функцию целочисленного аргумента: $1, 2, \ldots, k, \ldots$ (номер шага). Тогда $x(k)$ обозначает состояние системы *A* через *k* шагов. Предположим, что цепочка последовательных переходов

$$x(0) \to x(1) \to x(2) \to \ldots$$

зависит от вмешательства случая, причем соблюдается следующая закономерность: если на каком-либо шаге *k* система находилась в состоянии $A_i^{(k)}$, то независимо от предшествующих обстоятельств, она на следующем шаге с вероятностью P_{ij} переходит в состояние $A_j^{(k+1)}$:

$$P_{ij} = P\left(A_j^{(k+1)} \mid A_i^{(k)}\right) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Такая случайная последовательность называется *марковской цепью*, а вероятности P_{ij} – *переходными вероятностями*.

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае марковская цепь называется *неоднородной*.

Если для каждого состояния физической системы *A* известна вероятность перехода в любое другое состояние за один шаг, то переходные вероятности P_{ij} записывают в виде матрицы

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots & P_{mm} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей перехода*.

Так как в каждой строчке матрицы записаны вероятности всех возможных переходов из выбранного состояния и эти переходы образуют полную систему событий, то

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Поставим следующую задачу: зная переходные вероятности P_{ij}, найти вероятности $P_{ij}(n)$ перехода системы из состояния *i* в состояние *j* за *n* шагов. Для этого введем промежуточное (между *i* и *j*) состояние *r*. Другими словами, будем считать, что из первоначального состояния *i* за *m* шагов система перейдет в промежуточное состояние r с вероятностью $P_{ir}(m)$, после чего за оставшиеся $n-m$ шагов из промежуточного состояния r она перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n-m)$. По формуле полной вероятности $P_{ij}(n)=\sum\limits_{r=1}^{k}P_{ir}(m)P_{rj}(n-m)$.

Покажем, что, зная все переходные вероятности $P_{ij}=P_{ij}(1)$, т.е. матрицу P_1 перехода из состояния в состояние за один шаг, можно найти вероятность $P_{ij}(2)$ перехода из состояния в состояние за два шага, а следовательно, и саму матрицу перехода P_2, по известной матрице P_2 можно найти матрицу P_3 перехода из состояния в состояние за три шага и т.д. Действительно, положив $n=2, m=1$ в равенстве Маркова, получим $P_{ij}(2)=\sum\limits_{r=1}^{k}P_{ir}(1)P_{rj}(2-1)$ или $P_{ij}(2)=\sum\limits_{r=1}^{k}P_{ir}P_{rj}$. По этой формуле можно найти все вероятности $P_{ij}(2)$, а следовательно, и саму матрицу P_2. Запишем вытекающее из полученной формулы соотношение в матричной форме:

$$P_2=P_1P_1=P_1^2.$$

При $n=3, m=2$, аналогично получим $P_3=P_1P_2=P_1P_1^2=P_1^3$ и в общем случае $P_n=P_1^n$.

Для описания случайного процесса, протекающего в физической системе A с дискретными состояниями $A_1, A_2, \ldots, A_m$, часто пользуются вероятностями состояний

$$p_1(k), p_2(k), \ldots, p_m(k),$$

где $p_l(k)\ (l=1,2,\ldots,m)$ – вероятность того, что через k шагов система A будет находиться в состоянии A_l. Вероятности $p_l(k)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{l=1}^{m}p_l(k)=1.$$

Если система A в начальный момент (перед первым шагом) находится в каком-то определенном состоянии, например A_r, то для начального момента ($t=0$) будем иметь

$$p_1(0)=0,\ p_2(0)=0,\ \ldots,\ p_r(0)=1, \ldots,\ p_m(0)=0.$$

Вероятности состояний системы *A* через *k* шагов определяются рекуррентной формулой

$$p_j(k)=\sum_{i=1}^{m}p_i(k-1)p_{ij}.$$

Если переход системы *A* из одного состояния в другое возможен в любой момент времени *t*, вероятности $P_{ij}(t,\tau)$ перехода системы из состояния A_i в момент времени *t* в состояние A_k в момент времени τ не зависит от поведения системы до момента времени *t*, то он является марковским случайным процессом с дискретным числом состояний и для вероятностей перехода $P_{ik}(t,\tau)$ справедливо соотношение

$$P_{ik}(t,\tau)=\sum_{j=1}^{m}P_{ij}(t,s)P_{ik}(s,\tau).$$

Процесс называется *однородным*, если

$$P_{ik}(t,\tau)=P_{ik}(\tau-t).$$

В этом случае для марковского процесса

$$P_{ik}(\tau-t)=\sum_{j=1}^{m}P_{ij}(s-t)P_{jk}(\tau-s)\quad(t\le s\le \tau).$$

Марковский процесс называется *регулярным*, если выполняются условия.

1. Для любого состояния системы A_k существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(1-P_{kk}(t,t+\Delta t)\right)=c_k(t). \qquad (8.9)$$

2. Для каждой пары состояний системы A_l, A_k существует непрерывная по *t* плотность вероятности перехода $P_{ik}(t)$, определяемая равенством

$$P_{ik}(t)=\frac{1}{c_i(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ik}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}. \qquad (8.10)$$

Для регулярных марковских процессов вероятности P_{ik} определяются системами дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P_{ik}(t,\tau)}{\partial t}=-c_k(t)P_{ik}(t,\tau)+\sum_{j\neq k}P_{ij}(t,\tau)c_j(t)P_{ik}(t,\tau);$$
$$\frac{\partial P_{ik}(t,\tau)}{\partial t}=c_i(t)P_{ik}(t,\tau)-c_i\sum_{j\neq i}P_{ik}(t,\tau)P_{ij}(t); \quad (i,j,k=0,1,2,\ldots,m)$$

при начальных условиях $P_{ik}(t,t)=\delta_{ik}$

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad i=k;\\ 0, & \text{если} \quad i\neq k.\end{cases}$$

Для однородных марковских процессов в силу того, что $c_i(t)$ и $P_{ij}(t)$ не зависят от *t*, а $P_{ik}(t,\tau)=P_{ik}(\tau-t)$ системы дифференциальных уравнений имеют вид

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt}=-c_kP_{ik}(t)+\sum_{j\neq k}c_jP_{jk}P_{ij}(t);$$
$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt}=-c_iP_{ik}(t)+c_i\sum_{j=k}P_{ij}P_{jk}(t); \quad (i,j,k=0,1,2,\ldots,m)$$

при начальных условиях $P_{ik}(0)=\delta_{ik}$.

Вероятности P_k нахождения системы в состоянии A_k в момент t определяются системой

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=-c_kP_k(t)+\sum_{j\neq k}c_j(t)P_{ik}(t)P_j(t); \quad (j,k=0,1,2,\ldots,m)$$

при соответствующих начальных условиях для $P_j(t)$. Если начальное состояние A_i задано, то начальными условиями будут $P_k(t)=\delta_{ik}$ при $t=0$.

Для однородных процессов последняя система имеет вид:

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=-c_kP_k(t)+\sum_{j\neq k}c_jP_{jk}P_j(t)$$

при начальных условиях $P_k(t)=\delta_{ik}$ при $t=0$.

Если для однородного процесса $P_k(t)>0$ при $t>0$, и любых *i* и *k*, то процесс называется *транзитивным* и для него существует не зависящий от номера исходного состояния предел

$$\lim_{t\to\infty}P_{ik}(t)=\lim_{t\to\infty}P_k(t)=P_k \tag{8.11}$$

причем предельные вероятности P_k в этом случае определяются из системы

$$c_k P_k = \sum_{j \neq k} c_j P_{jk} P_j \quad (j,k = 0,1,2,\dots,m). \qquad (8.12)$$

Процессом Маркова является простейший поток, обладающий свойствами:

1) стационарностью: при любом $\Delta t > 0$ и целом $k \geq 0$ вероятность того, что за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ произойдет k событий, одна и та же для всех $t \geq 0$.

2) отсутствием последействия, т.е. вероятность наступления событий за промежуток $t, t+\Delta t$ не зависит от числа наступления событий до момента t;

3) ординарностью:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

где $R_2(\Delta t)$ – вероятность наступления не менее двух событий за промежуток времени Δt.

Пример 1. Система обслуживания состоит из m приборов, каждый из которых может обслуживать одновременно только одно требование, затрачивая на обслуживание случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ. В систему поступает простейший поток требований с параметром λ. Обслуживание требования начинается сразу после его поступления, если в этот момент имеется хотя бы один свободный прибор, в противном случае требование получает отказ и не возвращается в систему. Определить предельную вероятность отказа.

Решение. Пусть A_i – состояние, при котором i приборов заняты обслуживанием, тогда $P_{ik}(t) > 0$ для конечного t, и следовательно, согласно (8.11),

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t).$$

Вероятность P_n определяем из системы (8.12)

$$c_n P_n = c_{n-1} P_{n-1}, \quad np_{n-1} + c_{n+1} P_{n+1}, \quad np_{n+1}. \qquad (8.13)$$

Так как поток требований простейший, а время обслуживания подчиняется показательному закону, то для промежутка времени $(t, t+\Delta t)$ можем записать

$$P_{n,n+1}(t+\Delta t)=\lambda\Delta t(1-n\mu\Delta t)+0(\Delta t)=\lambda\Delta t+0(\Delta t);$$
$$P_{n,n-1}(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)n\mu\Delta t+0(\Delta t)=n\mu\Delta t+0(\Delta t);$$
$$P_{n,n}(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t)+0(\Delta t)=1-(\lambda+n\mu)+0(\Delta t).$$

Отсюда, согласно формулам (8.9) и (8.10), имеем

$$c_n=\lambda+n\mu;\quad P_{n,n+1}=\frac{\lambda}{\lambda+n\mu}\,P_{n,n-1}=\frac{n\mu}{\lambda+n\mu};\quad c_m=m\mu;\quad P_{m,m+1}=0$$

остальные $P_{jk}=0$. Подставляя полученные значения в (8.13), найдем

$$(\lambda+n\mu)P_n\lambda p_{n-1}+(n+1)\mu P_{n+1}\quad (0\le n\le m-1);\quad m\mu P_m=\lambda P_{m-1}.$$

Отсюда

$$P_k=\frac{\lambda}{n\mu}P_{n-1}\text{ или }P_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{m}P_n=1,\text{ то }P_0\frac{1}{\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

Вероятность отказа требованию в обслуживании выражается *формулой Эрланга*

$$P_m=\frac{\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

Пример 1. Дана матрица перехода $P_1=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода

$$P_2=\begin{pmatrix}P_{11}(2) & P_{12}(2)\\ P_{21}(2) & P_{22}(2)\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $P_2=P_1^2$.

$$P_2=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}34 & 0{,}66\\ 0{,}33 & 0{,}67\end{pmatrix}.$$

Задачи

207. Дана матрица перехода P_1. Найти матрицу перехода P_2, если 1) $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; 2) $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

208. Найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага, если вероятности перехода за один шаг заданы матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

209. Один рабочий обслуживает m автоматических станков, которые при нормальной работе не требуют его вмешательства. Остановки каждого станка вследствие неполадок образуют независимый простейший поток с параметром λ. Для устранения неполадки рабочий тратит случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ. Найти предельные вероятности того, что k станков не работают.

210. Сколько должно быть мест на станции обслуживания автомобилей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, автомашина, нуждающаяся в ремонте, обеспечивалась местом для ремонта, если заявки образуют простейший поток, а время обслуживания подчиняется показательному закону? Среднее время ремонта – одни сутки. В течение суток на станцию поступают в среднем пять автомашин.

211. В ремонтную мастерскую, имеющую трех рабочих, поступает в среднем 4 заказа в час. Среднее время выполнения заказа 0,5 ч. Определить среднее число заказов, ожидающих начала исполнения.

Указание. Применить формулу

$$m_1 = p_n \frac{\lambda}{n\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^{-2}.$$

Ответы. 207. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}63 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0{,}68 & 0{,}32 \\ 0{,}32 & 0{,}68 \end{pmatrix}$. 208. 1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

209. $P_k = \frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$. 210. Не менее 8 мест. 211. $m_1 = 0{,}888$ заказа.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 570 с.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.

3. Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: ТетраСистем, 1999. – 288 с.

4. Жевняк, С.М. Высшая математика: в 5 ч. / С.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Выш. школа, 1988. – Ч. 5. – 253 с.

5. Жевержеев, В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов / В.Ф. Жевержеев, Л.А. Кальницкий, Н.А. Сапогов. – М.: Высшая школа, 1970. – 415 с.

6. Микулик, Н.А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике / Н.А. Микулик, Г.Н. Рейзина. – Минск: Выш. школа, 1991. – 164 с.

7. Микулик, Н.А. Основы теории динамических систем транспортных средств: монография / Н.А. Микулик. – Минск: БНТУ, 2007. – 218 с.

8. Лебедева, Г.И. Прикладная математика. Математические модели в транспортных системах / Г.И. Лебедева, Н.А. Микулик. – Минск: Асар, 2009. – 512 с.

9. Микулик, Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.А. Микулик. А.В. Метельский. – Минск: НПОО «Пион», 2001. – 191 с.

10. Математика для инженеров в 2 т. / С.А. Минюк [и др.]. –Минск: «Элайда», 2006. – Т. 2. – 496 с.

11. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

12. Сборник задач по математике для втузов / Э.А. Вуколов [и др.]; под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1984. – 608 с.

13. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А.Свешникова. – М.: Наука, 1970. –656 с.

14. Математика: сборник заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов: в 2 ч. / А.Н. Андриянчик [и др.]. – Минск: БНТУ, 2005. – Ч. 2. – 156 с.

15. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – 191 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1j74	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{t^2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,44	0,1700	0,88	0,3106	1,32	0,4066
0,01	0,0040	0,45	0,1736	0,89	0,3133	1,33	0,4082
0,02	0,0080	0,46	0,1772	0,90	0,3159	1,34	0,4099
0,03	0,0120	0,47	0,1808	0,91	0,3186	1,35	0,4115
0,04	0,0160	0,48	0,1844	0,92	0,3212	1,36	0,4131
0,05	0,0199	0,49	0,1879	0,93	0,3238	1,37	0,4147
0,06	0,0239	0,50	0,1915	0,94	0,3264	1,38	0,4162
0,07	0,0279	0,51	0,1950	0,95	0,3289	1,39	0,4177
0,08	0,0319	0,52	0,1985	0,96	0,3315	1,40	0,4192
0,09	0,0359	0,53	0,2019	0,97	0,3340	1,41	0,4207
0,10	0,0398	0,54	0,2054	0,98	0,3365	1,42	0,4222
0,11	0,0438	0,55	0,2088	0,99	0,3389	1,43	0,4236
0,12	0,0478	0,56	0,2123	1,00	0,3413	1,44	0,4251
0,13	0,0517	0,57	0,2157	2,01	0,3438	1,45	0,4265
0,14	0,0557	0,58	0,2190	1,02	0,3461	1,46	0,4279
0,15	0,0596	0,59	0,2224	1,03	0,3485	1,47	0,4292
0,16	0,0636	0,6,	0,2257	1,04	0,3508	1,48	0,4306
0,17	0,0675	0,61	0,2291	1,05	0,3531	1,49	0,4319
0,18	0,0714	0,62	0,2324	1,06	0,3554	1,50	0,4332
0,19	0,0753	0,63	0,2357	1,07	0,3577	1,51	0,4345
0,20	0,0793	0,64	0,2389	1,08	0,3599	1,52	0,4357
0,21	0,0832	0,65	0,2422	1,09	0,3621	1,53	0,4370
0,22	0,0871	0,66	0,2454	1,10	0,3643	1,54	0,4382
0,23	0,0910	0,67	0,2486	1,11	0,3665	1,55	0,4394
0,24	0,0948	0,68	0,2517	1,12	0,3686	1,56	0,4406
0,25	0,0987	0,69	0,2549	1,13	0,3708	1,57	0,4418
0,26	0,1026	0,70	0,2580	1,14	0,3729	1,58	0,4429
0,27	0,1064	0,71	0,2611	1,15	0,3749	1,59	0,4441
0,28	0,1103	0,72	0,2642	1,16	0,3770	1,60	0,4452
0,29	0,1141	0,73	0,2673	1,17	0,3790	1,61	0,4463
0,30	0,1179	0,74	0,2703	1,18	0,3810	1,62	0,4474
0,31	0,1217	0,75	0,2734	1,19	0,3830	1,63	0,4484
0,32	0,1255	0,76	0,2764	1,20	0,3849	1,64	0,4495
0,33	0,1293	0,77	0,2794	1,21	0,3869	1,65	0,4505
0734	0,1331	0,78	0,2823	1,22	0,3883	1,66	0,4515
0,35	0,1368	0,79	0,2852	1,23	0,3907	1,67	0,4525
0,36	0,1406	0,80	0,2881	1,24	0,3925	1,68	0,4535
0,37	0,1443	0,81	0,2910	1,25	0,3944	1,69	0,4545
0,38	0,1480	0,82	0,2939	1,26	0,3962	1,70	0,4554
0,39	0,1517	0,83	0,2967	1,27	0,3980	1,71	0,4564
0,40	0,1554	0,84	0,2995	1,28	0,3997	1,72	0,4573
0,41	0,1591	0,85	0,3023	1,29	0,4015	1,73	0,4582
0,42	0,1628	0,86	0,3051	1,30	0,4032	1,74	0,4591
0,43	0,1664	0,87	0,3078	1,31	0,4049	1,75	0,4599

Окончание табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,76	0,4608	1,97	0,4756	2,36	0,4909	2,76	0,4971
1,77	0,4616	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,78	0,4973
1,78	0,4625	1,99	0,4767	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,79	0,4633	2,00	0,4772	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,80	0,4641	2,02	0,4783	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,81	0,4649	2,04	0,4793	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,82	0,4656	2,06	0,4803	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,83	0,4664	2,08	0,4812	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,84	0,4671	2,10	0,4821	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,85	0,4678	2,12	0,4830	1,54	0,4945	2,94	0,4984
1,86	0,4686	2,14	0,4838	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,87	0,4693	2,16	0,4846	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,88	0,4699	2,18	0,4854	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,89	0,4706	2,20	0,4861	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,90	0,4713	2,22	0,4868	2764	0,4959	3,40	0,49966
1,91	0,4719	2,24	0,4875	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,92	0,4726	2,26	0,4881	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,93	0,4732	2,28	0,4887	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,94	0,4738	2,30	0,4893	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,95	0,4744	2,32	0,4898	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,96	0,4750	2,34	0,4904				

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Приведенная функцияЛапласа $\Phi(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\rho^2x^2dx} = \Phi(\rho\sqrt{2}\,z)$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	0	538	1073	1603	2127	2641	3143	3632	4105	4562
1,	5000	5418	5817	6194	6550	6883	7195	7485	7753	8000
2,	8227	8433	8622	8792	8945	9082	9205	9314	9410	9495
3,	9570	9635	9691	9740	9782	9818	9848	9874	9896	9915
4,	9930	9943	9954	9963	9970	9976	9981	9985	9988	9990
5,	9992	9994	9995	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999

В таблице приведены значения $\hat{\Phi}(z)10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке – десятые доли аргумента *z*.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений $t_v = t(v, n)$

$n\backslash v$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash v$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	3,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	4,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	4,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,332
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица значений $q = q(\nu, n)$

$n \backslash \nu$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \nu$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Таблица значений вероятностей $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$

$\chi_q^2 \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	016(1	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	001G	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0146	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	ООП	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21		0000	0001	0003	0008	0018	0038	0071
22		0000	0001	0002	0005	0012	0025	0049
23		0000	0000	0001	0003	0008	0017	0034
24		0000	0000	0001	0002	0005	ООП	0023
25		0000	0000	0001	0001	0003	0008	0016
26		0000	0000	0000	0001	0002	0005	0010
27		0000	0000	0000	0001	0001	0003	0007
28		0000	0000	0000	0000	0001	0002	0005
29		0000	0000	0000	0000	0001	0001	0003
30		0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

МИКУЛИК Николай Александрович
РЕЙЗИНА Галина Николаевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ТЕХНИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

Справочное пособие

Технический редактор О.В. Песенько
Ответственный за выпуск Г.Н. Рейзина

Подписано в печать 25.01.2011.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 8,89. Уч.-изд. л. 6,95. Тираж 300. Заказ 583.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.