Домашнее задание №1

по „Математической статистике"

Вариант 1

Студент: Барсуков Н.М

Группа: ИУ7-66Б

Преподаватель:

Саркисян П.С.

Москва 2020г.

Барсуков Н.М группа ИУ7-66Б

Вариант 1 стр 2

Комментарии

Задача 1:

Пусть X - число солнечных дней в году (случайная величина), тогда 1-ое неравенство Чебышёва дает (X неотрицательно, по этому оно применимо)

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon = 200$, $M(X) = 150$ получаем:

$$P(X \geq 200) \leq \frac{150}{200} = 0,75$$

Если известна дисперсия X, то 2^е неравенство Чебышева уточнит оценку этой вероятности:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Пусть $\varepsilon_1 = 50$, тогда:

$$P(X \leq M(X) - 50 \lor X \geq M(X) + 50) \leq \frac{\sigma^2}{50^2}$$

$$P(X \leq 150 - 50 \lor X \geq 150 + 50) \leq \frac{10^2}{50^2}$$

$$P(X \leq 100) + P(X \geq 200) \leq 0,04$$

$$P(X \geq 200) \leq 0,04 - P(X \leq 100) \leq 0,04$$

Задача 2:

$M(X) = \overline{X}$

Мат ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^3}{2!} \cdot x^2 \cdot e^{-\theta x} dx = \frac{\theta^2}{2} \cdot \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \theta \cdot e^{-\theta x} dx =$$

$$= \frac{\theta^2}{2} \cdot M(y^3) = \frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{3!}{\theta^3} = \frac{3}{\theta}$$

где учтено, что последний интеграл это момент третьего порядка для экспоненциально распределенной случ. величины с пар θ

Получаем:

$$\frac{3}{\theta} = \overline{X}$$

$\theta = \frac{3}{\overline{X}}$, $\overline{X}$ - выбор среднее

Комментарии

Задача 3:

Функция правдоподобия:

$$L = P(x_1;\theta) \cdot \ldots \cdot P(x_n;\theta) = \frac{\theta^{x_1}}{(x_1)!} \cdot e^{-\theta} \cdot \ldots \cdot \frac{\theta^{x_n}}{(x_n)!} e^{-\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{x_1+x_2+\ldots+x_n}}{(x_1)! \cdot \ldots \cdot (x_n)!} \cdot e^{-n\cdot\theta}$$

$$\ln(L) = (x_1+\ldots x_n) \cdot \ln\theta - \ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!) - n\cdot\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln L) = 0$$

$$\frac{x_1+\ldots x_n}{\theta} - n = 0$$

$$\theta = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \overline{x}$$

Проверка на экстремальность

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\ln L) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{x_1+\ldots x_n}{\theta} - n\right) = -\frac{x_1+\ldots+x_n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка максимума L

Задача 4:

Доверительный интервал для неизвестного мат. ожидания генеральной совокупности (при изв σ):

$$\overline{x} - u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < a < \overline{x} + u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Абсолют погрешность:

$$\Delta = |\overline{x} - a| = u_{1-\varepsilon} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

В нашем случае:

$$\varepsilon = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05$$

$u_{1-\varepsilon} = u_{1-0.005} = u_{0{,}95} = 1{,}64$ - квантиль стандартизованного нормального распределения (из таблицы)

Получаем:

$$N = \left(\frac{\sigma \cdot u_{1-\varepsilon}}{\Delta}\right)^2 = \left(\frac{10 \cdot 1{,}64}{5}\right)^2 = 10{,}75$$

Ответ: минимум 11