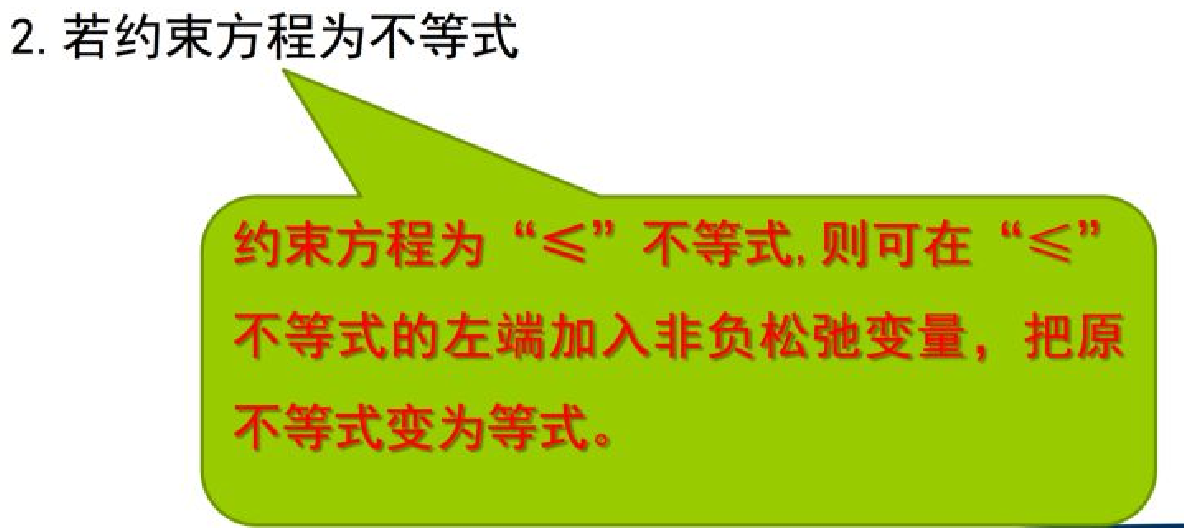
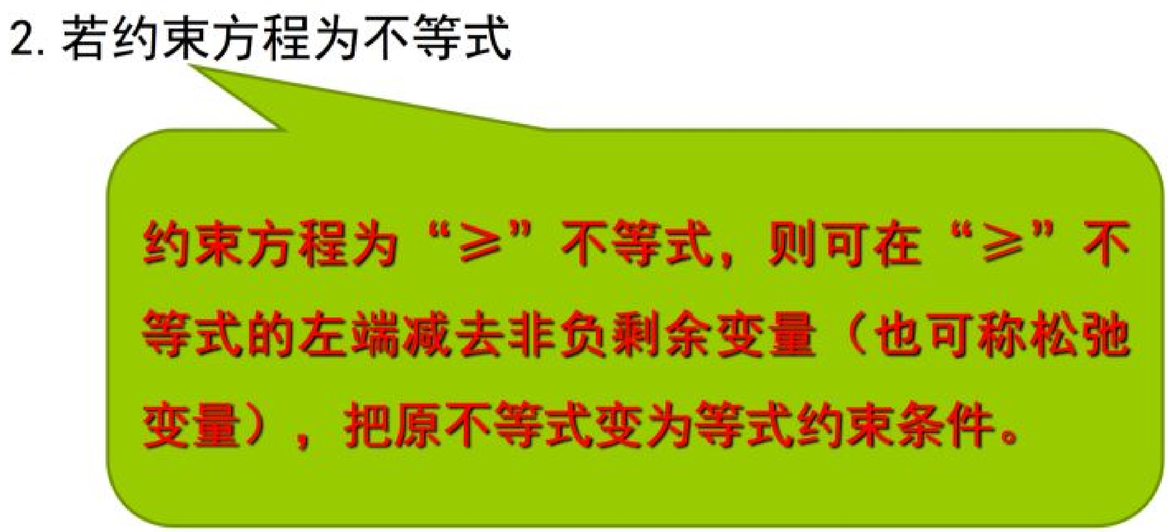
最优化导论

单纯形法

第一步：标准化

教材是标准型是MIN！！！！！！





解：步骤

（1）在第一个约束不等式“≤”号的左端加入松弛变量

（2）在第二个约束不等式“≥”号的左端减去剩余变量

（3）把目标函数最小化改成最大化

例2 将LP问题

$$Min \quad z=-x_1+2x_2-3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 7 \\ x_1-x_2+x_3\ge 2 \\ -3x_1+x_2+2x_3=5 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

化为标准形。

于是原LP问题化为标准形式：

$$Max \quad z'=x_1-2x_2+3x_3+0x_4+0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ x_1-x_2+x_3-x_5=2 \\ -3x_1+x_2+2x_3=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0 \end{cases}$$

【记住，在教材中，线性规划的目标函数必须取**最小值**！因此如果是MAX，在原式取反即可】

【每个变量必须有≥0之约束】

遇到变量无约束的情况时

例3 将LP问题化为标准形。

$$Min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2, \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：步骤

（1）用x_4-x_5代替x_3

（2）在第一个约束不等式“≤”号的左端加入松弛变量

（3）在第二个约束不等式“≥”号的左端减去剩余变量

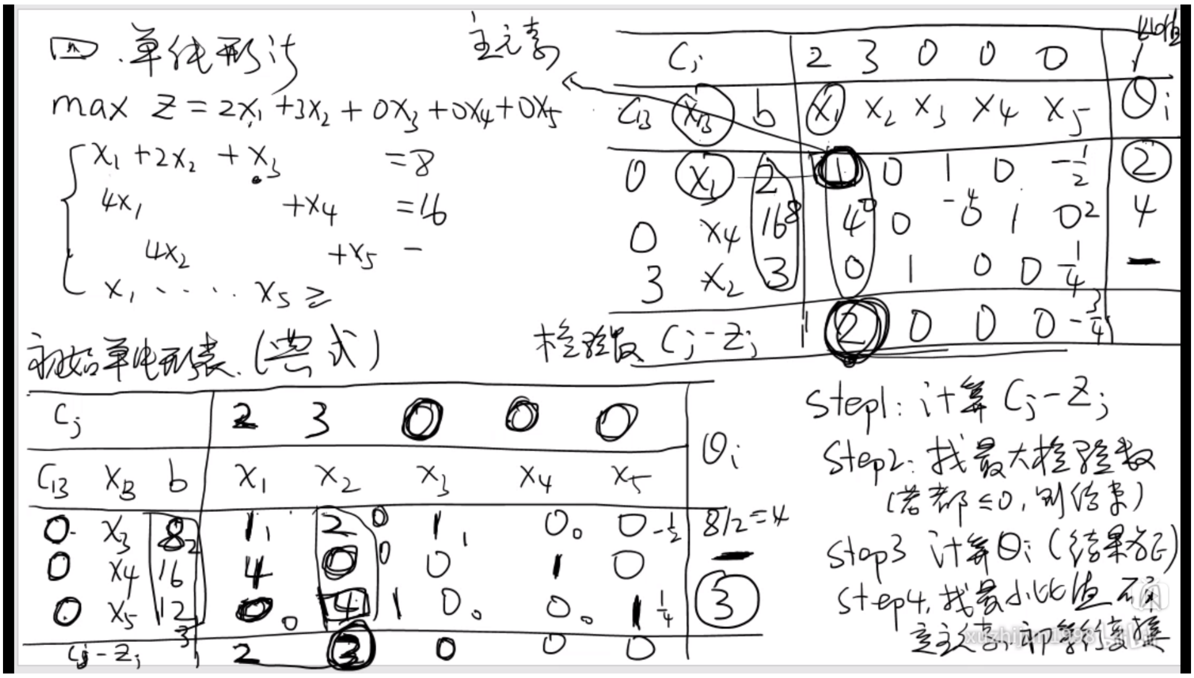
（4）把目标函数最小化改成最大化

于是原LP问题化为标准形式：

$$Max \quad z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

第二步：单纯形法



注意！ 书上的标准型是MIN

解释：x1,x2,x3,x4,x5是系数，b是右边数，Xb是每一行有1时对应的xi（也就是单位矩阵，三行就是三阶单位矩阵），

Cb就是要求计算max公式中Xb对应的系数。Cj是max公式中所有系数

1. 首先计算单位矩阵，3行算式就算出3阶单位矩阵（初等行变换，加减乘除，注意b也跟着变） 更新枢轴方程
2. 将这些单位矩阵对应的Xi填入XB
3. 将XB对应要求最优解的算式XB（非基算式）的系数填入Cb
4. 在Cj-Zj中计算Cj-（Cb*Xi之和） （2-0x1-0x4-0x0=2）(其实Cj-Zj是检验数)
5. 如果Cj-Zj全部小于等于0，跳转步骤12 min是全部大于等于0，因为标准型不同
6. 找最后一行最大检验数（3） min是找最小
7. 每一行的b除以最大数【对应列】的值（ 除数小于等于0时忽略 min也是如此） （min最小数），得出Qi（8/2，16/0，12/4）其中，
8. 找到Qi中最小的 min也是最小的
9. Qi中最小的和 5. 中最大的交汇点需要变成1，该点所在列（也就是 进基向量 ）的其他点都变成0（主元素,枢轴元素，出基入基，变成1的方法是初等行变换）变换完后，如果不足N阶单位矩阵需变换其他列直到N阶。
10. 此时的基本可行解是【在当前表格中，Xb有对应b的话，那么XB=b。。。然后其他X=0】
11. 变成1后重复步骤2
12. 如果Cj-Zj都<=0 min由于标准型不同是大于0，宣告结束，基本可行解就是【XB=DB...】

tips:

1. 如果Qi全是负数 那么可以无限增大，故max=∞
2. Qi最小值有多个相同时任选一个
3. Cj-Zj最大值有多个相同时任选一个

等式约束优化

在无约束问题中，对于最优解我们可以求导，最速下降法，梯度下降法等。

但当出现一个等式约束时，解法如下【拉格朗日法】：

1. 定义拉格朗日函数：

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k h_k(x)$$

f(x)是需要求得最优解的方程，λk是各个约束条件的待定系数，h(x)是约束条件。

例如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ，求 $f(x,y,z)=8xyz$ 最大值，那么

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z) \\ &= 8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) \end{aligned}$$

。

2. 对F（x,y,z,λ)的每个变元求偏导

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial x} &= 8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial y} &= 8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial z} &= 8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{aligned}$$

，联立前三个方程，带入第四个方程（其实就是约束条件），得到

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{3}b \qquad z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$ 的解，最后带入f(x)，得到最优解：

$$V_{max}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)=\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$$

。

含不等式约束优化

$$\begin{aligned} &min \quad f(X) \\ &s.t. \quad h_j(X)=0 \qquad j=1,2,\ldots,p \\ &\qquad\quad g_k(X)\leq 0 \qquad k=1,2,\ldots q \end{aligned}$$

方法：构造拉格朗日函数L

$$L(X,\lambda,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j h_j(X)+\sum_{k=1}^{q}\mu_k g_k(X)$$

其中f(x)是需要求得最优解的方程，hj(x)是第j个【等式】约束条件，λj是对应的约束系数，gk是【不等式】约束，uk是对应的约束系数。

KKT条件是说**最优值**必须满足以下条件：

1）L(x,λ,u)对x求导为零；

2）h(x) =0;

3）u*g(x) = 0

注意，上述仅限于MIN且不等式约束为>=0之情形，其余情况参见课本