第6章 几种特殊的图

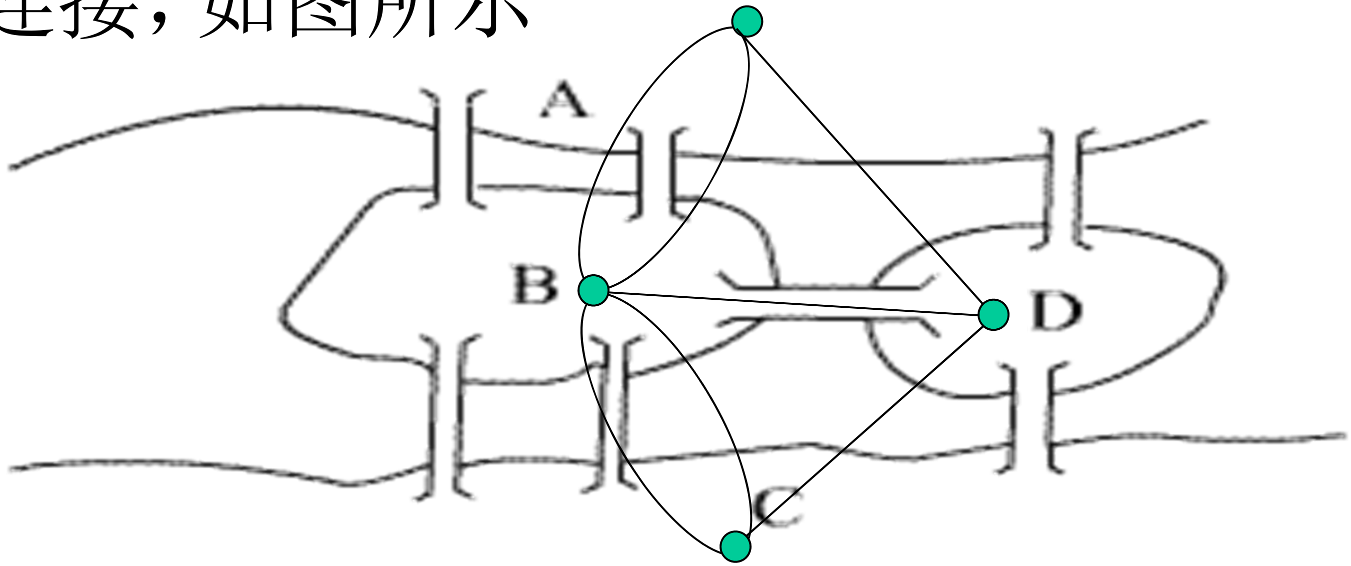
6.1 欧拉图与哈密尔顿图

6.1.1 欧拉图

1736年数学家欧拉（Leonhard Euler）发表了第一篇图论论文《哥尼斯堡七桥问题》，奠定了图论发展的基础。

哥尼斯堡（Königsberg ）城中有一条贯穿

全城的普雷格尔（Pregel）河，城中各部分用七座桥连接，如图所示



欧拉在论文中提出了一条简单准则，确定了哥尼斯堡七桥问题无解。

欧拉

莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）

莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler，1707年4月15日~1783年9月18日)，瑞士数学家，13岁进巴塞尔大学读书，得到著名数学家贝努利的精心指导.欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，他从19岁开始发表论文，直到76岁，他那不倦的一生，共写下了886本书籍和论文，其中在世时发表了700多篇论文。

顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神。即使在他双目失明后的17年间，也没有停止对数学的研究，口述了好几本书和400余篇的论文。当他写出了计算天王星轨道的计算要领后离开了人世。

欧拉

莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）

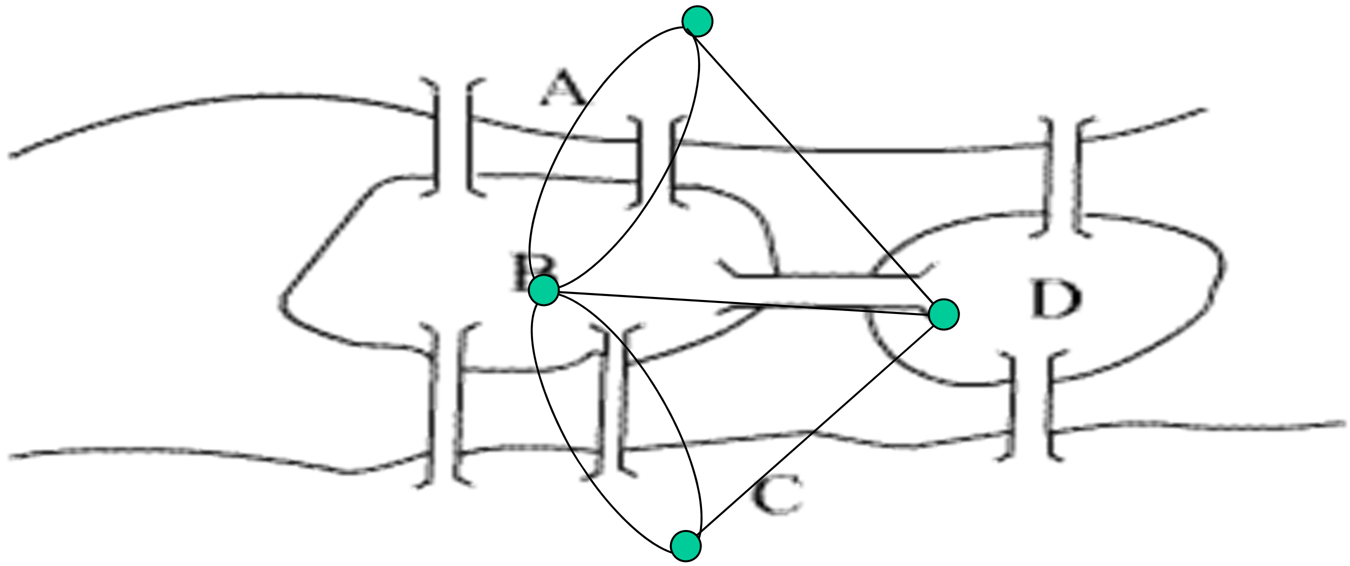
对著名的"哥尼斯堡七桥问题"的完美解答开创了"图论"的研究。欧拉发现，不论什么形状的凸多面体，其顶点数**V**、棱数**E**、面数**F**之间总有关系**V+F-E=2**，此式称为欧拉公式。**V+F-E**即欧拉示性数，已成为"拓扑学"的基础概念

定义1 给定没有孤立结点的无向图G，若存在一条通路，经过图中每一边一次且仅一次，称该通路为欧拉通路；若存在一条回路，经过图中每一边一次且仅一次，称该回路为欧拉回路，具有欧拉回路的图称为欧拉图。

定理1 无向图 G 存在欧拉通路 $\Leftrightarrow$ G 是连通的，且有0个或2个奇数度结点。

推论 无向图 G 存在欧拉回路 $\Leftrightarrow$ G 是连通的，且所有结点的度数均为偶数。

证（略）



由定理1和推论知，哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的，因为图中所有4个结点的度数均为奇数。

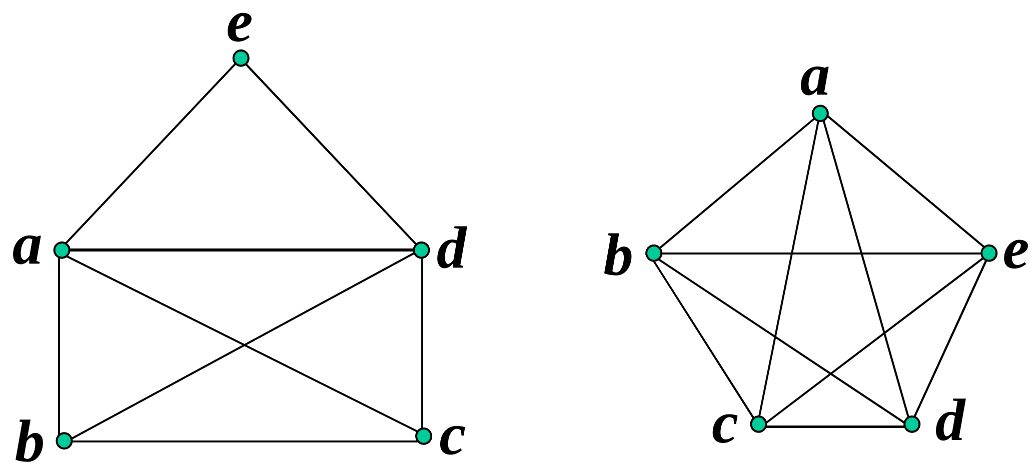
与哥尼斯堡七桥问题类似的还有图的一笔画的判断问题。要判断一个图是否可以一笔画出，有两种情况：

（1）从图中某一个结点出发，经过每条边一次且仅一次，到达另一个结点；（用定理1判断）

（2）从图中某一个结点出发，经过每条边一次且仅一次，再回到该结点。（用推论判断）

例1　判断下列两图是否可以一笔画

如选路径
baedcadbc



(*a*)　　(*b*)

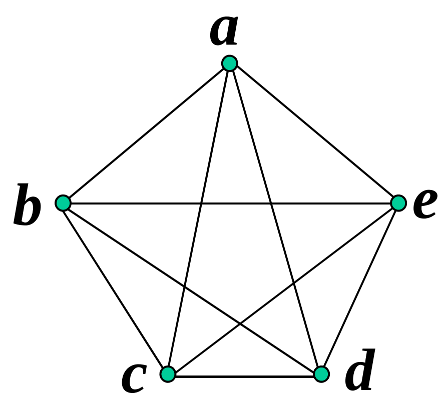
解　(*a*) 中，$\deg(a)=\deg(d)=4$；$\deg(e)=2$；$\deg(b)=\deg(c)=3$，故可从 *b* 或 *c* 两个结点的任一个出发，一笔画到另一个结点结束。

(b) 图中

$$\deg(a)=\deg(b)$$
$$=\deg(c)=\deg(d)$$
$$=\deg(e)=4$$

如选路径

abcdeacebda



(b)

故可从任意一个结点出发，一笔画出一个回路

因此它是一个欧拉图。

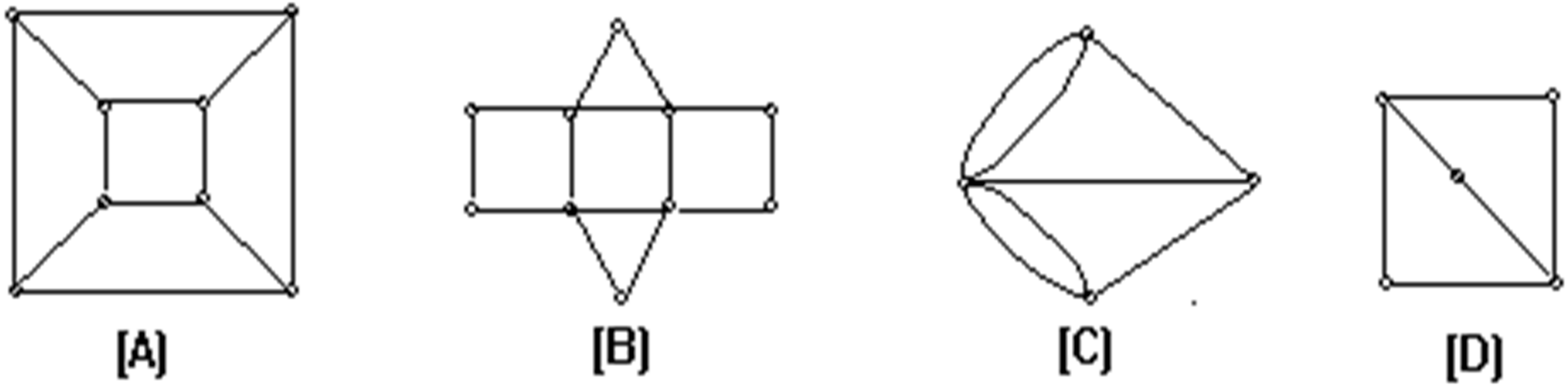
定义2 给定没有孤立结点的有向图G，经过图中每一边一次且仅一次的单向通路（回路），称为**单向欧拉通路（回路）**。

定理2 有向图G存在欧拉通路$\Leftrightarrow G$是连通的，有两个结点,一个结点的入度比出度大1另一个结点的出度比入度大1,其余每个结点的入度等于出度。

有向图G存在欧拉回路$\Leftrightarrow G$是连通的，且每个结点的的入度等于出度。

此定理可以看成无向图存在欧拉通路和回路的推广，证明略。

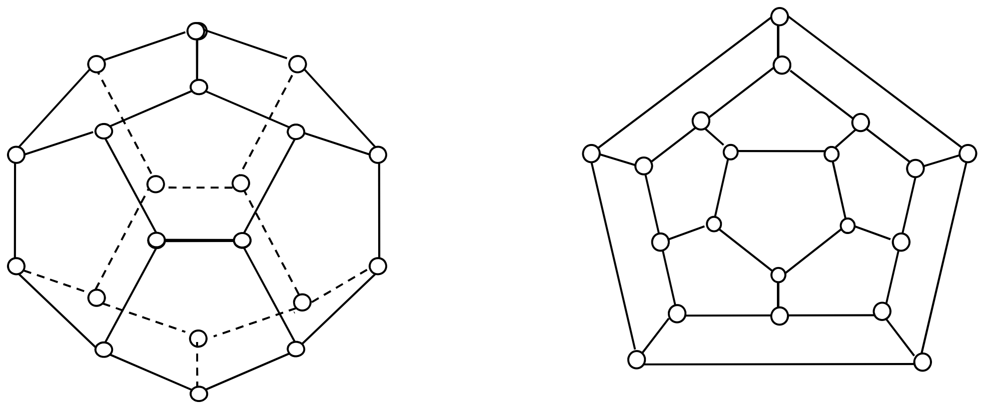
- 例：下列图是欧拉图的是（）



答案为B。因为只有图B连通且所有结点度数为偶数

6.1.2 哈密尔顿图

1859年爱尔兰数学家哈密尔顿(Hamilton)设计了一个奇特的数学游戏，问题的主要部分涉及到一个正十二面体，如图所示，



哈密尔顿将正十二面体的每一个顶点标上一个城市的名字，问题：沿着正十二面体的棱寻找一条旅游路线，经过每个城市恰好一次再回到出发城市。

这个问题就是我们下面讨论的哈密尔顿回路问题。

哈密尔顿

1805年**8**月**3**日生于爱尔兰首都都柏林。**5**岁时就能读拉丁文、希腊文和希伯来文，**14**岁时就掌握了**12**种语言[1] 。**1822**年撰文指出了拉普拉斯的《天体力学》中的一个错误。**1832**年成为爱尔兰科学院院士，**1837-1845**年任院长。

成就： 四元数 光线论等

定义3 给定图G，若存在一条通路，经过图中的每个结点恰好一次，称该通路为**哈密尔顿通路**；若存在一条回路，经过图中的每个结点恰好一次，称该回路为**哈密尔顿回路**，具有哈密尔顿回路的图称为哈密尔顿图。

定理3 若图 $G=<V,E>$ 存在哈密尔顿回路，则对于集合V的每一个非空子集S，均有

$$W(G-S)\le |S|$$

证 设C是G的一条哈密尔顿回路，则对于集合V的每一个非空子集S，在C中删去S中的任一结点v_1，则$C-\{v_1\}$是连通的非回路，若再删去另一个结点v_2，则$W(C-\{v_1\}-\{v_2\})\le 2$，由归纳

法可得 $$W(C-S)\le |S|$$

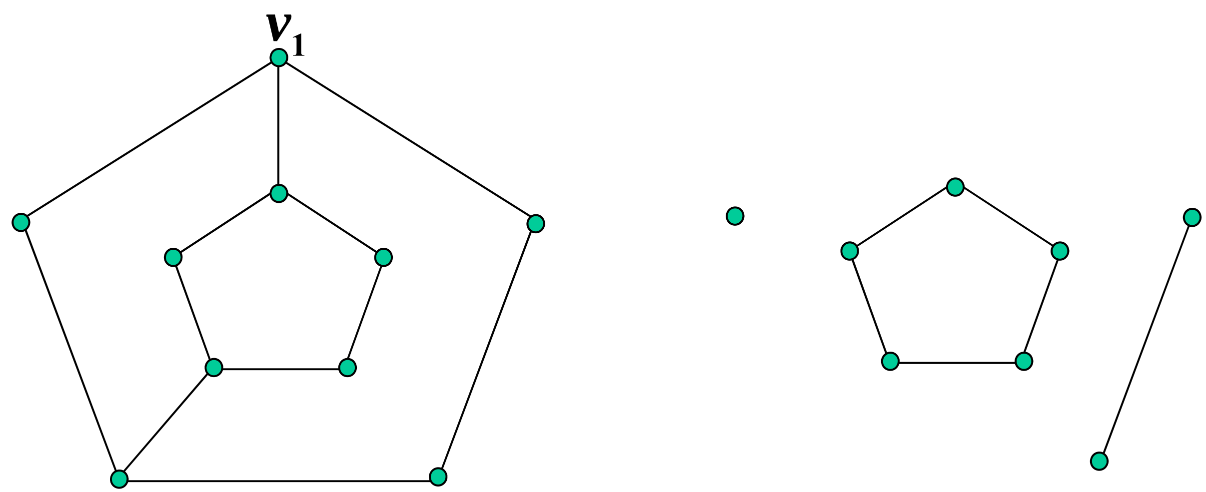
同时，$C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，有

$$W(G-S)\le W(C-S)$$

故 $$W(G-S)\le |S|$$ 证毕

说明 此定理是哈密尔顿图的必要非充分条件，利用此定理只能判断某些图不是哈密尔顿图。

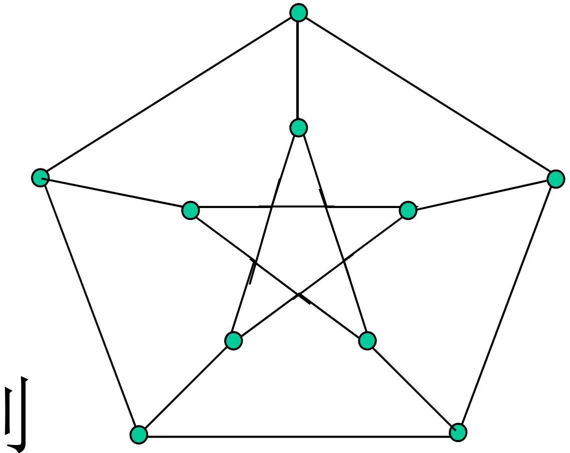
例2　如图(a)所示



(a)　　(b)

若取 $S=\{v_1,v_2\}$，则图 $G-S$ 如图(b)所示，而 $W(G-S)=3\geq|S|=2$，故此图不是哈密尔顿图。

例3 如图所示



彼得森(Petersen)图

在该图中，删去任意1个或2个结点，不能破坏连通性；删去3个结点，最多只能得到2个连通分支子图，删去4个结点，最多只能得到3个连通分支子图，删去5个或5个以上结点，余下子图的结点均不大于5，故不能有5个以上的连通分支数，即总有 $W(G-S)\le|S|$ ，但该图却不是哈密尔顿图。

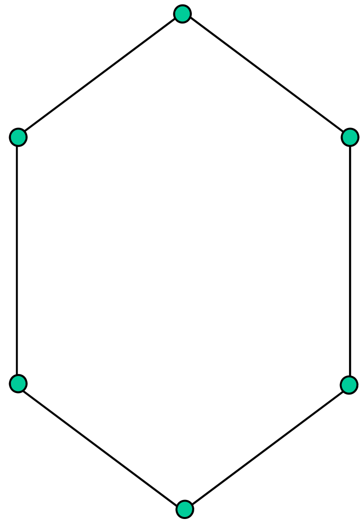
定理4 设图 $G=<V,E>$ 是一个n阶无向简单图，若G中每对结点的度数之和大于等于$n-1$，则在G中存在哈密尔顿通路。

推论 设图 $G=<V,E>$ 是一个n阶无向简单图，若G中每对结点的度数之和大于等于n，则在G中存在哈密尔顿回路。

以上定理和推论的证明略

说明　定理4及推论是存在哈密尔顿通路或回路的充分非必要条件。若满足定理或推论的条件，一定存在哈密尔顿通路或回路，但不满足条件，也可能存在哈密尔顿通路或回路。

例4 如图所示



该图中，任意两结点的度数之和均为4，不满足定理和推论的条件，但它却存在哈密尔顿回路，故此图是哈密尔顿图。

内容小结

1.欧拉图的概念

2.哈密尔顿图概念

3.如何判断欧拉图与哈密尔顿图

课下练习 P102 习题6.1 1,2,3,4

6.2 二部图

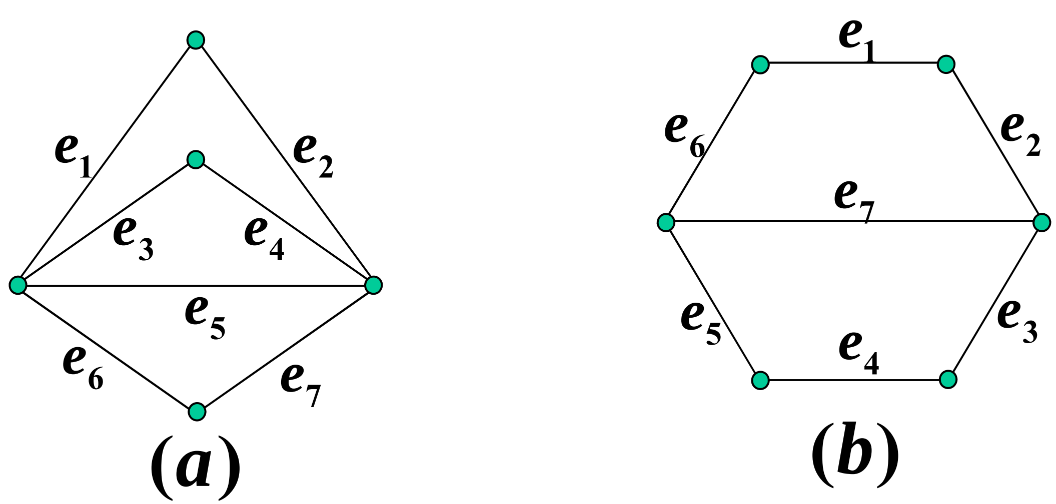
6.2.1 匹配

定义4 设 $G=<V,E>$ 是无向图，$M \subseteq E$，若 M 中任意两条边均不邻接，称 M 是图 G 的一个匹配（或边独立集）；若在 M 中加入任意一条边就不匹配了，称 M 为 G 的一个极大匹配；边数最多的极大匹配称为最大匹配；最大匹配中的元素（边）个数，称为 G 的匹配数，记为 $\beta(G)$，简记为 β。

设 M 是图 G 的一个匹配，$v \subseteq V(G)$，若存在 M 中的边与结点 v 关联，称 v 是 M 的饱和点，否则称 v 是 M 的不饱和点；若 G 中每一结点均为 M 饱和点，称 M 是 G 的完全匹配。

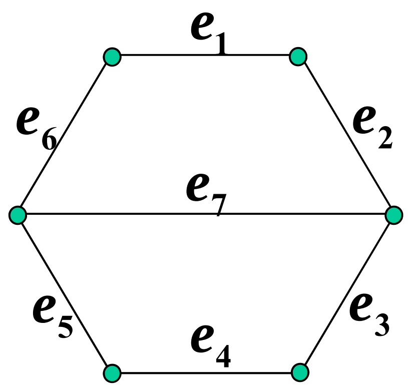
完全匹配是最大匹配，但最大匹配不一定是完全匹配。

例5　如图所示



在 (*a*) 中，$\{e_1\},\{e_1,e_7\},\{e_5\},\{e_4,e_6\}$ 均是其匹配其中 $\{e_1,e_7\},\{e_5\},\{e_4,e_6\}$ 是极大匹配，$\{e_1,e_7\},\{e_4,e_6\}$ 是最大匹配，匹配数 $\beta=2$ 。

在 (b) 中，$\{e_2,e_5\},\{e_3,e_6\}$，$\{e_1,e_4,e_7\}$ 均是其极大匹配，其中 $\{e_1,e_4,e_7\}$ 是最大匹配，也是完全匹配，匹配数 $\beta=3$ 。



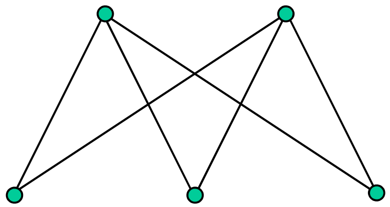
(b)

6.2.2 二部图

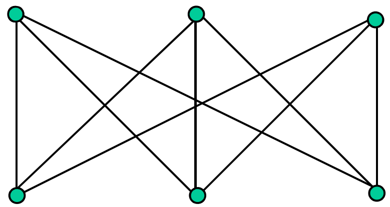
定义5 若能将无向图$G=<V,E>$的结点集V划分为两部分V_1和V_2 $(V_1\cup V_2=V, V_1\cap V_2=\Phi)$，使得$G$中任一条边的两个端点，一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，称$G$是二部图（也称为偶图），$V_1$和$V_2$称为互补结点子集，将$G$记为

$$G=<V_1,V_2,E>$$

若V_1中任一结点与V_2中所有结点有且仅有一条边相关联，称该二部图G为完全二部图（或完全偶图），若$|V_1|=n$，$|V_2|=m$，将完全二部图记为$K_{n,m}$。



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

判断二部图的方法

定理5 一个无向图 $G=<V,E>$ 是二部图 $\Leftrightarrow$ G 中所有回路的长度均为偶数。

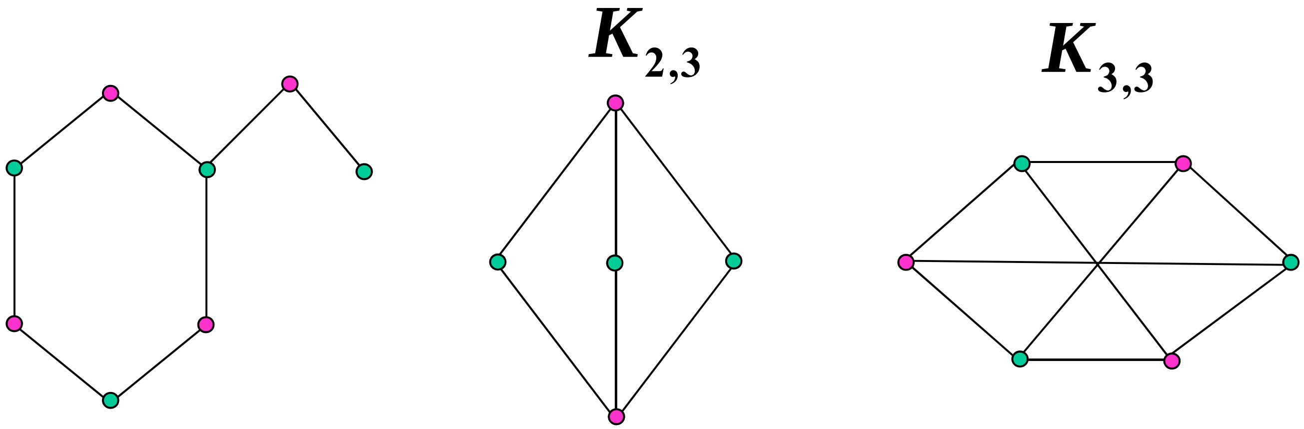
证 $\Rightarrow$ 设 G 是二部图 $G=<V_1,V_2,E>$, 则对任意边 $uv\in G$，有 $u\in V_1, v\in V_2$， 或 $u\in V_2, v\in V_1$，设 $v_0v_1\cdots v_{k-1}v_0$ 是长度为 k 的回路，不妨设 $v_0\in V_1$，则必有 $v_0,v_2,\cdots,v_{2n},\cdots\in V_1$，$v_1,v_3,\cdots,v_{2n+1},\cdots\in V_2$，而 $v_{k-1}\in V_2$， 故 $k-1$ 是奇数，则回路长度 k 是偶数。

$\Leftarrow$ 设G中所有回路的长度均为偶数,不妨设G是连通图，则任意两结点之间均有通路存在，任取$u \in V$，令V_1是图G中到u的最短通路长度为偶数的集合,$V_2 = V - V_1$，则有 $V_1 \cup V_2 = V$，$V_1 \cap V_2 = \Phi$，下面利用反证法证明G是二部图:

假设G不是二部图,即存在$w,v \in V_1$(或V_2)有$wv \in E$，于是由u到w的最短通路、边wv及v到u的最短通路构成一个长度为奇数的回路，

与 G 中所有回路的长度均为偶数矛盾，故 G 是二部图。证毕

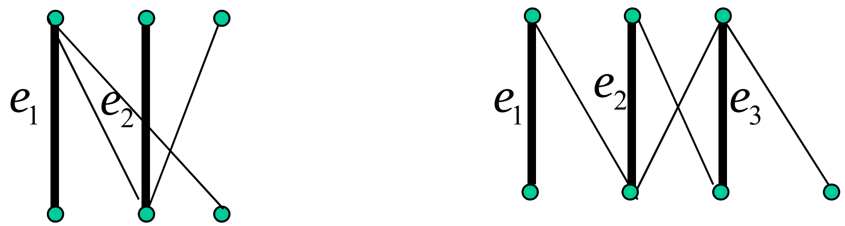
例6 如图所示



由定理5可判断，以上3图均为二部图。

定义6 设 $G=<V_1,V_2,E>$ 是一个二部图，M 是 G 中的一个最大匹配，若 $|M|=\min\{|V_1|,|V_2|\}$，称 M 是 G 的一个完备匹配，此时若 $|V_1|\le|V_2|$，称 M 是 V_1 到 V_2 的一个完备匹配；若 $|V_1|=|V_2|$，称 M 是 G 的一个完全匹配。

例7 如图所示



(1) (2) (3)

解 （1）中，$\{e_1,e_2\}$是最大匹配，没有完备匹配；（2）中，$\{e_1,e_2,e_3\}$是完备匹配，没有完全匹配；（3）中，$\{e_1,e_2,e_3\}$是完备匹配，也是完全匹配。

定理6 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，$|V_1|\le|V_2|$，G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配 $\Leftrightarrow$ V_1 中任意 k $(k=1,2,\cdots,|V_1|)$ 个结点至少邻接 V_2 中 k 个结点。

——Hall定理

证（略）。

说明 定理中的条件称为“相异性条件”。

定理7 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，若满足

（1）V_1 中每个结点至少关联 $t(t>0)$ 条边；

（2）V_2 中每个结点至多关联 t 条边.

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配。

证（略）。

说明 定理中的条件称为“t 条件”，满足“t 条件”的二部图，一定满足“相异性条件”

例8 某学校有3个课外小组：物理组、化学组和生物组，今有张、王、李、赵和陈5位同学，若已知

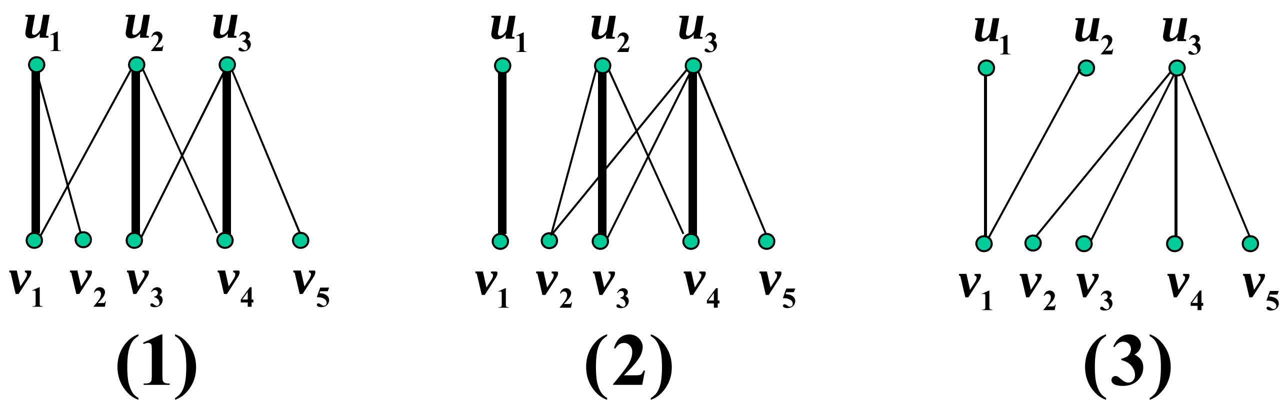
（1）张、王为物理组成员，张、李、赵为化学组成员，李、赵、陈为生物组成员；

（2）张为物理组成员，王、李、赵为化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员；

（3）张为物理组和化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员；

问分别在以上3种情况下，能否选出3名不兼职的组长？

解 设v_1,v_2,v_3,v_4,v_5分别代表张、王、李、赵和陈，u_1,u_2,u_3 分别表示物理、化学和生物组 令 $V_1=\{u_1,u_2,u_3\},V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，如图所示



（1）二部图（1）满足 $t=2$ 的 t 条件，故存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配，图中粗线表示的匹配是其中之一，即选张、李和赵分别为物理组、化学组和生物组组长。

（2）二部图（2）不满足 t 条件，但满足相异性条件，故也存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配，图中粗线表示的匹配是其中之一，即选张、李和赵分别为物理组、化学组和生物组组长。

（3）二部图（3）既不满足t条件，也不满足相异性条件，故不存在从V_1到V_2的完备匹配，即不能选出3名不兼职的组长。

内容小结

1.匹配的概念

2.各种特殊的匹配

3.二部图的概念及判定

课下练习 P106 习题6.2 1,3,4