第8章 谓词逻辑

- 谓词公式及其解释
- 谓词公式的等值式与蕴含式
- 前束范式
- 谓词逻辑的推理理论

第8章 谓词逻辑

在命题逻辑中，主要研究命题和命题演算，其基本单位是原子命题，这对研究命题间的关系而言是合适的。但进一步分析时发现，它又非常不充分，例如逻辑学上著名的“苏格拉底三段论”，在命题演算中就无法推得。

苏格拉底三段论，用命题符号表示：

P： 所有的人都要死；

Q： 苏格拉底是人；

R： 苏格拉底是要死的。

它的本意是 $P \wedge Q \Rightarrow R$

但命题演算得不到（三个命题独立）此结论。

主要原因是：这种推理需要对原子命题作进一步的分解，这三个命题间具有内在的逻辑关系，只有对这种内在的关系深入研究后，才能解决这样一些推理问题。

8.1 谓词公式及其解释

8.1.1 谓词与量词

在谓词逻辑中，原子命题被分解为**个体**和**谓词**两部分。

定义1 可以独立存在的事物称为**个体**，它可以是抽象的，也可以是具体的。

例如 人、桌子、$\sqrt{2}$ 等均为个体。

在谓词逻辑中，个体通常在一个命题里，表示思维的对象，类似句子的主语。

定义2 用来刻画个体的性质或个体间的关系的词称为**谓词**。

陈述句： 主语 + 谓语 = $P(x)$

个体(**x**)可以独立存在的个体

谓词P表示个体的性质或个体之间的关系

谓词形式

例如　观察下面3个命题

（1）$\sqrt{2}$ 是无理数。

（2）王宏是程序员。

（3）小李比小赵高2厘米。

命题中的 $\sqrt{2}$ 、王宏、小李、小赵均为个体，……是无理数、 ……是程序员、 ……比 ……高2厘米等是谓词。

个体 $\begin{cases} \text{个体常元（常项）——具体或特定的个体，一般用小写字母 } a,b,c,\ldots \text{表示} \\ \text{个体变元（常项）——抽象或泛指的个体，一般用小写字母 } x,y,z,\ldots \text{表示} \end{cases}$

定义3 个体变元的取值范围称为**个体域**（或**论域**），没有特别声明时，将宇宙间的一切事物或概念构成的集合作为个体域，称为**全总个体域**。

谓词
- 谓词常元（常项）——具体性质或关系的谓词，一般用大写字母 $F,G,H,\ldots$ 表示
- 谓词变元（常项）——抽象性质或关系的谓词，一般也用 $F,G,H,\ \ldots$ 表示。

"个体变元 x 具有性质 F " 表示为 $F(x)$

"个体变元 x,y 之间有关系 L" 表示为 $L(x,y)$

谓词中所含个体变元的个数，称为谓词的**元数**，含有 n 个个体变元的谓词称为 n **元谓词**用 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示。一般而言，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不是命题，只有当用 n 个常元代替 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，才有确定的真值，此时成为命题。

例如 $L(x, y)$ 表示 " x 小于 y " 是一个二元谓词，不是命题，但 $L(2,3)$ 是一个真命题。

不含个体变元的谓词称为 0 元谓词，命题逻辑中的原子命题均可用0元谓词表示，此外，命题逻辑中的联结词在谓词逻辑中均可使用，且含义不变。

例1 将以下命题用0元谓词形式符号化

（1） 她是三好学生。

令 $S(x)$： x 是三好学生， t： 她

命题符号化为：$S(t)$

（2） 5大于3。

令 $S(x,y)$： x 大于 y， $a:5, b:3$

命题符号化为：$S(a,b)$

注意1 个体常元 $n>1$ 时,个体次序很重要。

注意2 个体变元的取值范围，有时也会影响命题及命题的真值。

例2 设 $R(x)$：x 是大学生

（1）若 $x\in\{$某大学的学生$\}$，则 $R(x)\Leftrightarrow T$

（2）若 $x\in\{$某中学的学生$\}$，则 $R(x)\Leftrightarrow F$

（3）若 $x\in\{$某剧场的观众$\}$，则 $R(x)$ 不是命题（可真可假）。

在日常生活中，除了使用个体和谓词外，还会有一类表示数量的词，称为**量词**。

定义3 “一切的”、“所有的”、“任意的”等等词，称为**全称量词**，用符号$\forall$表示，$\forall x$表示对个体域中的所有个体，$\forall x F(x)$表示个体域中所有个体都有性质F。

定义4 “存在着”、“有些”、“至少一个”等词，称为**存在量词**，用符号∃表示，$\exists x$表示存在个体域中的个体，$\exists x F(x)$表示存在个体域中的个体具有性质F。全称量词和存在量词统称为**量词**。

加上量词后即成为命题

例2中的三个语句表示为：

(1) $\forall x R(x)$　(2) $\forall x \neg R(x)$　(3) $\exists x R(x)$

均为真命题。

例3　将下列语句符号化

（1）人无完人；（2）有些人是聪明的

解　（1）可转化为“所有人都有缺点”

令 $M(x)$：x 是人，$A(x)$：x 有缺点

故该语句表示为 $\forall x(M(x) \to A(x))$

（2）令 $M(x)$：x 是人，$R(x)$：x 是聪明的

故该语句表示为 $\exists x(M(x) \wedge A(x))$

当个体域没有特别说明时，一般指全总个体域，在符号化时，首先需要对个体加以限制，因此引进一个新的谓词，称为**特性谓词**。如例3两小题中的 $M(x)$，一般情况下

对全称量词，特性谓词常作蕴含的前件。
对存在量词，特性谓词常作合取项。

使用量词时需要注意以下几点：

（1）在不同的个体域中，命题符号化的的形式可能不同。

（2）若没有给出个体域，应理解为全总个体域

（3）当个体域为有限集时，量词可以消掉，

如个体域 $D=\{a,b,c,d\}$，有

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a)\wedge A(b)\wedge A(c)\wedge A(d)$$

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a)\vee A(b)\vee A(c)\vee A(d)$$

（4）多个量词同时出现时，一般不能颠倒顺序，否则有可能改变原命题的含义。如

对任意的 x，存在 y，有 $x+y=5$ 。

若个体域为实数集，符号化为 $\forall x \exists y H(x,y)$

其中 $H(x,y): x+y=5$，这是个**真命题**，但若写成 $\exists y \forall x H(x,y)$， 则表示

存在 y，对所有的 x，有 $x+y=5$ 。

这是个**假命题**。

例4 将下列语句符号化

x 是人　　x 犯错误

（1）没有不犯错误的人 $(M(x), F(x))$

（2）尽管有人聪明，但未必一切人都聪明

x 是人 $(M(x), P(x))$ x 聪明

解

（1）$\neg\exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$ 或 $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

（2）$\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$

8.1.2 谓词公式

为了更准确和规范地进行谓词演算及推理，定义下面4种符号：

常量符号：用小写字母 $a,b,\cdots,a_1,a_2,\cdots$ 等表示，在给定的个体域 D 内，它们是属于 D 中的任一确定的个体。

变量符号：用小写字母 $x,y,\cdots,x_1,x_2,\cdots$ 等

表示，在给定的个体域 D 内，它们可以被 D 中的任何个体替代。

函数符号：用小写字母 $f, g, \cdots, f_1, f_2, \cdots$ 等表示，在给定的个体域 D 内，它们表示一个 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 n 个自变量可被 D 内的 n 个个体替代，所得的函数值仍属于 D。

谓词符号：用大写字母 $P, Q, \cdots, P_1, P_2, \cdots$ 等

表示，在给定的个体域 D 内，符号 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以是任一确定的 n 元谓词。

说明　在这4种符号中，前3种是关于个体的，均用小写字母表示，最后1种是关于谓词的用大写字母表示。对函数符号，下面用例子说明

例　$f(x)$：x 的父亲，$T(x)$：x 是教师

$T(f(x))$：x 的父亲是教师，　$T(f(c))$：？

定义5 谓词逻辑中的**项**，递归地定义为

（1）常量符号是项；

（2）变量符号是项；

（3）若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数符号，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是项，则 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是项；

（4）有限次使用上述（1）～（3）生成的符号串是项。

定义6 若 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是**原子命题**。

例 $P, Q(x, y), Q(x, f(y)), R(a, x, y)$ 均为原子公式。

定义7 谓词逻辑中的**合式公式**（简称**公式**），递归定义如下：

（1）原子命题是合式公式；

（2）若G, H是合式公式，则$\neg G, G \wedge H, G \vee H$，$G \to H, G \leftrightarrow H$ 也是合式公式；

（3）若G是合式公式，则$\forall xG, \exists xG$也是合式公式；

（4）当且仅当有限次使用（1）～（3）所得到的符号串是合式公式。

定义8 在含有$\forall xP(x)$或$\exists xP(x)$的公式中，称x为**指导变元**或**作用变元**，　称$P(x)$为相应量词的**作用域**或**辖域**。在作用域中，x的一切出现，称为**约束出现**（即x受相应量词指定变元的约束），$P(x)$中除去约束以外出现的变元，称为**自由变元**，自由元是不受约束的变元，尽管有时它也在量词的作用域中，但不受量词的指导变元的约束，故可将它看成公式中的参数。

量词的约束关系

量词

自由变元

$$\exists x \underline{P(x)} \rightarrow \forall y \exists z \underline{(Q(x,y) \wedge R(z))}$$

指导变元

辖域

定义9 设 A 是任一公式，若 A 中无自由出现的个体变元，称 A 为封闭的合式公式，简称**闭式**。

例 $\forall x(R(x) \to L(x))$，$\exists x \forall y(F(x) \vee G(x,y))$ 均为闭式，而 $\forall x(R(x) \to L(x,y))$ 不是闭式。

闭式和非闭式在解释时会有一些不同。

约束变元的改名规则

将量词辖域中出现的某个约束变元及相应的指导变元，改成未曾出现的个体变元名，公式的其余部分不变。例

$$\exists x P(x) \rightarrow \forall y \exists z (Q(x, y) \wedge R(z))$$

t 正确　y 错误　并非同一个变元

自由变元的代入规则

对某个自由出现的个体变元，用与公式中所有变元名不同的变元名替换，且处处替换。

例

$$\exists x P(x) \to \forall y \exists z (Q(x, y) \land R(z))$$

t 正确　y，z 错误

一般而言，一个谓词公式并没有确切的含义，因此需要对公式中的各种符号用特定的常元代替，由此构成对公式的解释（赋值）。

定义10 一个解释 I 由下列几部分构成：

（1）非空个体域 D；

（2）D 中一部分特定元素；

（3）D 中一些特定的函数；

（4）D 上一些特定的谓词。

用一个解释 ***I*** 来解释一个公式 ***A*** 包括：

（1）将 ***I*** 中的个体域 ***D*** 作为 ***A*** 的个体域；

（2）***A*** 中的个体常元用 ***I*** 中的特定元素代替；

（3）***A*** 中的函数用 ***I*** 中的特定函数代替；

（4）***A*** 中的谓词用 ***I*** 上的特定谓词代替。

说明　一个公式可以有很多解释，反之给定一个解释，也可以解释很多公式。

例7 给定解释 I 如下：

（1）$D=\{2,3\}$ （2）D 中特定元素 $a=2$

（3）函数 $f(x)$： $f(2)=3$；$f(3)=2$

（4）谓词 $F(x)$： $F(2)\Leftrightarrow F$；$F(3)\Leftrightarrow T$

$$G(x,y): G(i,j)\Leftrightarrow T \quad (i,j=2,3)$$

$$L(x,y): L(2,2)\Leftrightarrow L(3,3)\Leftrightarrow T; L(2,3)\Leftrightarrow L(3,2)\Leftrightarrow F$$

在解释 I 下，求下列各式的真值

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$ (2) $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$

(3) $\forall x\exists y L(x,y)$

解 (1) $\forall x(F(x) \land G(x,a))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \land G(x,2))$

$\Leftrightarrow (F(2) \land G(2,2)) \land (F(3) \land G(3,2))$

$\Leftrightarrow (F \land T) \land (T \land T) \Leftrightarrow F$

(2) $\exists x(F(f(x)) \land G(x, f(x))) \Leftrightarrow T$

(3) $\forall x \exists y L(x, y) \Leftrightarrow \exists y L(2, y) \land \exists y L(3, y)$

$\Leftrightarrow (L(2,2) \lor L(2,3)) \land (L(3,2) \lor L(3,3))$

$\Leftrightarrow (T \lor F) \land (F \lor T) \Leftrightarrow T$

练习 讨论公式$\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$的真值

其中 $P: 2>1, Q(x): x \leq 3, R(x): x>5, a: 5$

个体域 $\{-2,3,6\}$

解 $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$

$\Leftrightarrow ((P \rightarrow Q(-2)) \wedge (P \rightarrow Q(3)) \wedge (P \rightarrow Q(6))) \vee R(5)$

$\Leftrightarrow (T \wedge T \wedge F) \vee F \Leftrightarrow F$

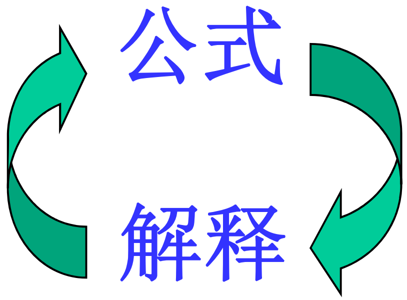
定义11 设A是一个谓词公式，若A在任何解释下均为T，称A是**永真式**（或**重言式**或**逻辑有效式**）；若A在任何解释下均为F，称A是**永假式**（或**矛盾式**）；若至少存在一个解释使A为T，称A是**可满足式**。

由于谓词公式的复杂性和解释的多样性判断它的类型比判断命题公式的类型要困难。

内容小结

1.谓词和量词

2.谓词公式及其解释



课下练习 **P150 习题8.1 1,4,5**

8.2 谓词公式的等值式与蕴涵式

8.2.1 等值式

定义12 设 A,B 是任意两个公式，且具有相同的个体域 D，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，两公式的真值相同，即 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，称公式 A 和 B 在 D 上**等值**（**等价**），记为 $A \Leftrightarrow B$ 。

命题演算的推广

命题逻辑中的等值式均可作为谓词逻辑中的等值式。例如

$$A(x,y) \to B(x,y) \Leftrightarrow \neg A(x,y) \vee B(x,y)$$

$$\neg\neg A(x) \Leftrightarrow A(x)$$

定理1 量词否定等值式

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

（$A(x)$为任意公式）

证（只证个体域是有限的情况）

设个体域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n))$

$\Leftrightarrow \neg A(a_1)\vee\neg A(a_2)\vee\cdots\vee\neg A(a_n) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

（2）证明自己完成。证毕

通俗讲，量词与否定$\neg$之间的关系如下

否定所有 ⟺ 至少有一个非

否定存在 ⟺ 所有非

例 设$A(x)$表示“x是生物”，则$\forall xA(x)$表示“所有的都是生物”，这是一个假命题，$\neg\forall xA(x)$表示“不是所有的都是生物”，这是一个真命题，表示“至少存在一个不是生物”即$\exists x\neg A(x)$。

例　设$A(x)$表示“x 会飞”，$D=\{人类\}$ 则 $\exists xA(x)$ 表示“有一些人会飞”，这是一个假命题，$\neg\exists x\,A(x)$ 表示“并非有一些人会飞”这是一个真命题，表示“所有的人都不会飞”，即 $\forall x\neg A(x)$。

定理2　量词辖域的收缩与扩张等值式

设 H 是一个不含约束变元 x 的公式

(1)　$\forall x(P(x) \vee H) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee H$

(2)　$\forall x(P(x) \wedge H) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge H$

(3)　$\exists x(P(x) \vee H) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee H$

(4)　$\exists x(P(x) \wedge H) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge H$

由上述等值式可推出如下等值式

(5) $\exists x(P(x) \to H) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to H$

(6) $\forall x(P(x) \to H) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to H$

(7) $\exists x(H \to P(x)) \Leftrightarrow H \to \exists x P(x)$

(8) $\forall x(H \to P(x)) \Leftrightarrow H \to \forall x P(x)$

（证明自己完成）

定理3 量词分配等值式

(1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

(2) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

举例说明

所有人唱歌并且跳舞 $\Longleftrightarrow$ 所有人唱歌并且所有人跳舞。

有些人唱歌或者跳舞 $\Longleftrightarrow$ 有些人唱歌或者有些人跳舞。

例9 证明

（1）$\forall x(A(x)\vee B(x))$ 与 $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ 不等值

（2）$\exists x(A(x)\wedge B(x))$ 与 $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 不等值

证 取解释 I 的个体域 $D=\{$自然数$\}$，$A(x)$：x 是奇数，$B(x)$：x 是偶数，则

$$\forall x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow T\text{；}\ \forall xA(x)\vee\forall xB(x))\Leftrightarrow F$$

故两式不等值，（1）式成立。同理可证（2）式

证毕

定理4 多个量词的等值式

(1) $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

(2) $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

证（略）

说明 相同量词可以交换，但不同量词不可随意交换。

8.2.2 蕴涵式

定义13 设A,B是任意两个公式，且具有相同的个体域D，若对A和B的任一组变元进行赋值，$A \rightarrow B$为永真式，称公式A蕴含B，记为$A \Rightarrow B$。

定理5　量词与联结词之间的蕴涵式

(1)　$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

(2)　$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

举例说明

所有人唱歌或所有人跳舞 ⟶ 所有人唱歌或跳舞。

有些人唱歌并且跳舞 ⟶ 有些人唱歌并且有些人跳舞。

由此可推出下列蕴涵式

(3) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

(4) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

(5) $\exists x P(x) \to \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$

（证明自己完成）

定理6 多个量词的蕴涵式

(1) $\forall x\forall yA(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xA(x,y)$

(2) $\forall y\forall xA(x,y)\Rightarrow\exists x\forall yA(x,y)$

(3) $\exists y\forall xA(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yA(x,y)$

(4) $\exists x\forall yA(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xA(x,y)$

(5) $\forall x\exists yA(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xA(x,y)$

(6) $\forall y\exists xA(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yA(x,y)$

证（略）

内容小结

1. 等值式

2. 蕴涵式

课下练习 P153 习题8.2 1

8.3 前束范式

同命题逻辑一样，在谓词逻辑中也要研究其合式公式的规范形式，这种规范式称为前束范式。

定义14　一个谓词公式，若量词均在全式的最前面，且其辖域延伸到整个公式的末尾，该公式称为**前束范式**。其形式为

$$\Box \boldsymbol{v}_1 \Box \boldsymbol{v}_2 \cdots \Box \boldsymbol{v}_n \boldsymbol{A}$$

其中$\Box$ 可以是量词 $\forall$ 或 $\exists$, $\boldsymbol{v}_i$ $(\boldsymbol{i}=1,2,\cdots \boldsymbol{n})$是个体变元，$\boldsymbol{A}$ 是不含量词的谓词公式。

例　$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \rightarrow R(z))$ 是前束范式

定理7 任意一个谓词公式，均与一个前束范式等值（即任何一个谓词公式均可化成一个前束范式），一般情况下，前束范式不是唯一的。

证 首先利用量词转化公式，将量词前的否定符号深入到谓词前面，再利用改名或代人规则及量词辖域的扩张，将量词移至全式的最前面，即可得到与之等值的前束范式。证毕

将谓词公式化为前束范式的步骤：

（1）换名：即将不同辖域的变量用不同字母表示；

（2）转换联结词：用合取与析取表示；

（3）将否定交换到谓词前

（4）将量词提到公式前

例10 将公式$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$化为前束范式。

解 $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$$

例11 将公式$\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$化为前束范式

解 $\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y))$

定义15 一个谓词公式，若有如下形式：

$$\Box v_1 \Box v_2 \cdots \Box v_n (A_{11} \wedge \cdots \wedge A_{1m_1}) \vee \cdots \vee (A_{k1} \wedge \cdots \wedge A_{km_k})$$

或

$$\Box v_1 \Box v_2 \cdots \Box v_n (A_{11} \vee \cdots \vee A_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{k1} \vee \cdots \vee A_{km_k})$$

该公式称为前束析取（或合取）范式。

其中 $\Box$ 可以是量词，$v_i\ (i = 1, 2, \cdots n)$ 是个体变元，

$A_{im_j}\ (i, j = 1, 2, \cdots, k)$ 是不含量词的谓词公式。

定理8 任意一个谓词公式，均与一个前束析取（合取）范式等值。

证（略）

内容小结

1.前束范式

2.将公式转化为前束范式

作业 P155 习题8.3 1,2,3

8.4 谓词逻辑的推理理论

谓词逻辑的推理方法,可看作是命题逻辑推理方法的推广，故命题逻辑的很多等值式和蕴涵式,均可在谓词逻辑中使用，如 ***P*** 规则、***T*** 规则和 ***CP*** 规则。

但在谓词逻辑中，某些前提与结论可能会受量词限制，为了使用命题逻辑中的等值式和蕴涵式，必须在推理过程中设立消去和添加量词的规则，下面介绍这些规则。

8.4.1 全称指定规则（简称 *US* 规则）

规则如下：

由一般得到特殊

$$\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$$

其中 P 是谓词，c 是个体域中某个个体。

例 设个体域 $D=\{$全人类$\}$, $P(x): x$ 是要呼吸的，c : 张三，$\forall xP(x)$: 所有人都是要呼吸的

由此得到 $P(c)$: 张三是要呼吸的。

8.4.2 存在指定规则（简称 *ES* 规则）

规则如下：

由存在得到具体

$$\exists x P(x) \Rightarrow P(c)$$

其中 ***P*** 是谓词，***c*** 是个体域中某个个体。

注意　应用 ***ES*** 规则时，指定的个体 ***c*** 不是任意的。

看下面例题

例12 讨论下列推理过程是否正确

(1) $\exists x F(x)$ P

(2) $F(c)$ $ES(1)$

(3) $\exists x G(x)$ P

(4) $G(c)$ $ES(3)$

(5) $F(c) \wedge G(c)$ $T(2),(4)$

解 推理的第4步是错误的，因为使$F(x)$成立的个体不一定使$G(x)$成立，故不可以同时指定$F(c)$和$G(c)$。

8.4.3 全称推广规则（简称*UG*规则）

规则如下：

由全部个体得到一般

$$P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$$

其中 P 是谓词。

注意　若能证明个体域中任何一个个体 c，都能使 $P(c)$ 成立，则可得结论 $\forall x P(x)$ 。

8.4.4 存在推广规则（简称*EG*规则）

规则如下：

由个体得到存在

$$P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$$

其中 P 是谓词，c 是个体域中某个个体。

这个结论比较明显

总结 应用以上规则时需要注意：

（1）应用全称推广规则 *UG* 时，要说明 $P(x)$ 对个体域中的每个 x 均为真。

（2）应用存在指定规则 *ES* 时，若公式中有两个存在符号，如 $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$，不能指定为 $P(a)\wedge Q(a)$，应该为 $P(a)\wedge Q(b)$。

例13 证明苏格拉底三段论

$$\forall x(H(x) \to M(x)) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$$

其中 $H(x): x$ 是一个人；$M(x): x$ 是要死的；

s: 苏格拉底。

证

(1)	$\forall x(H(x) \to M(x))$	P
(2)	$H(s) \to M(s)$	$US(1)$
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	$T(2)(3)$

证毕

例14 证明

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow \forall xP(x)\to \forall xQ(x)$$

证

(1)	$\forall xP(x)$	P（附加前提）
(2)	$P(u)$	$US(1)$
(3)	$\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
(4)	$P(u)\to Q(u)$	$US(3)$
(5)	$Q(u)$	$T(2)(4)$
(6)	$\forall xQ(x)$	$UG(5)$
(7)	$\forall xP(x)\to \forall xQ(x)$	CP

例15 证明 $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)\wedge R(x))$
$\wedge\exists x(P(x)\wedge M(x))\Rightarrow\exists x(M(x)\wedge R(x))$

证

(1)	$\exists x(P(x)\wedge M(x))$	P
(2)	$P(a)\wedge M(a)$	$ES(1)$
(3)	$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)\wedge R(x))$	P
(4)	$P(a)\rightarrow Q(a)\wedge R(a)$	$US(3)$
(5)	$P(a)$	$T(2)$

(6)	$Q(a) \wedge R(a)$	$T(4)(5)$
(7)	$M(a)$	$T(2)$
(8)	$R(a)$	$T(6)$
(9)	$M(a) \wedge R(a)$	$T(7)(8)$
(10)	$\exists x(M(x) \wedge R(x))$	EG

证毕

内容小结

1.推理规则
- *US* 规则
- *UG* 规则
- *ES* 规则
- *EG* 规则

2.推理证明

课下练习 P157 习题8.4 1,2,3