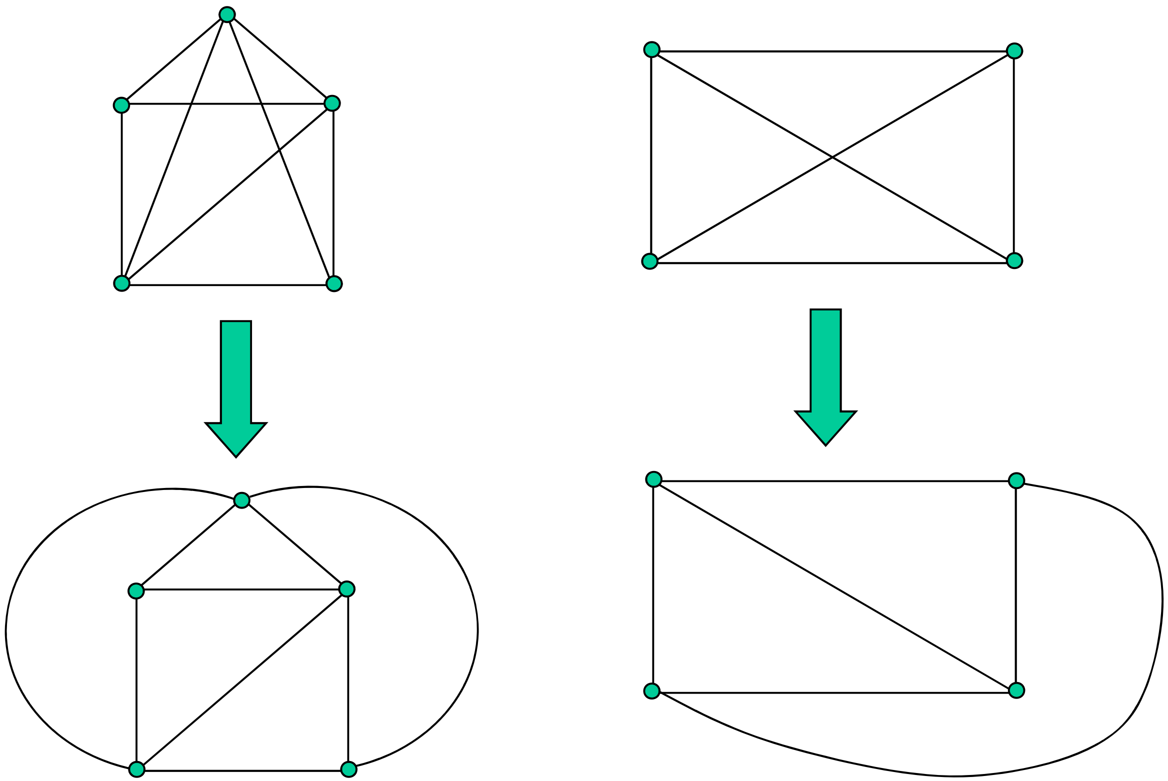
6.3 平面图

6.3.1 平面图的概念

定义7 设 $G=<V,E>$ 是一个无向图，若可将G的所有结点和边都画在平面上，且使得任意两条边除端点外，没有其它交点，称G是一个平面图（也称G可嵌入平面）。

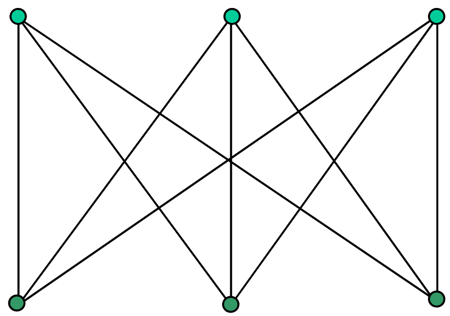
事实上，有些图的边看似相交，但改画后，可看出它是一个平面图（同构意义下）。

例9　如图所示，下列两图均为平面图

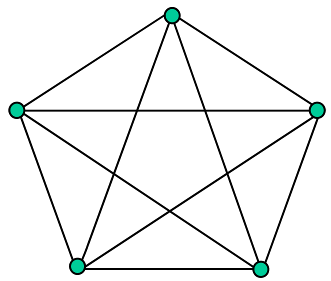


有些图，无论如何改画，均不能构成平面图

例10 如图所示



$K_{3,3}$

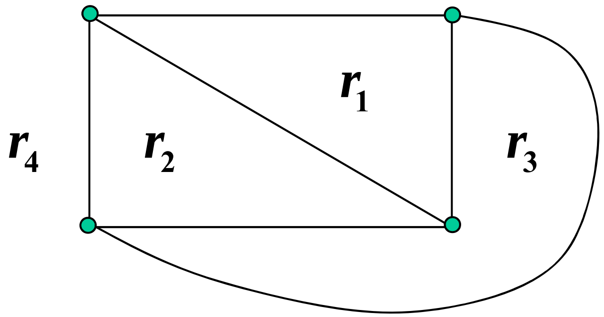


K_5

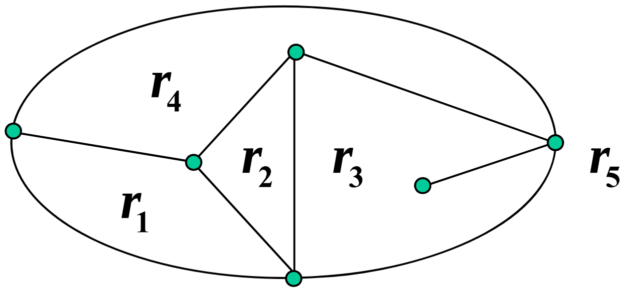
$K_{3,3}$和K_5均为非平面图

定义8 设 $G=<V,E>$ 是一个无向连通图，由图中的边所围成的区域，区域内既不包含图的结点，也不包含图中的边，称这样的区域为图 G 的面，其中面积无限的区域称为无限面，面积有限的区域称为有限面，包含该面的诸边构成的回路称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数，面 r 的次数记为 $\deg(r)$ 。

例11　如图所示



(*a*)

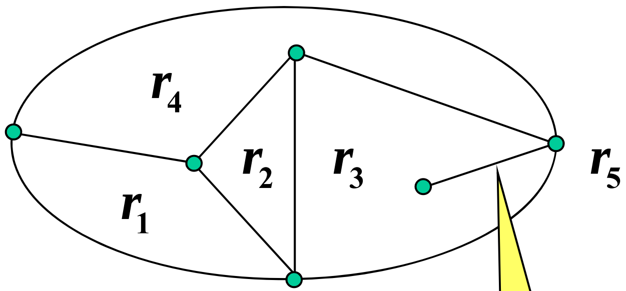


(*b*)

图(*a*)共有4个面，其中r_1,r_2,r_3是有限面，r_4是无限面，且

$$\deg(r_1)=\deg(r_2)=\deg(r_3)=\deg(r_4)=3$$

图(b)共有5个面，其中 r_1, r_2, r_3, r_4 是有限面，r_5 是无限面，且



(b)

计算了两次

$$\deg(r_1) = \deg(r_2) = 3,$$

$$\deg(r_3) = 5, \quad \deg(r_4) = 4, \quad \deg(r_5) = 3$$

6.3.2 平面图的性质及判定

定理8 一个平面图中，面的次数之和，等于其边数的两倍。

证 由于任何一条边，要么是两个面的公共边，要么是一个面中作为边界被计算了两次故面的次数之和等于边数的两倍。证毕

例11 (a) 中，共有6条边，$\sum_{i=1}^{4}\deg(r_i)=12$

(b) 中，共有9条边，$\sum_{i=1}^{5}\deg(r_i)=18$

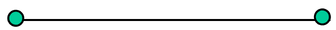
定理9 设有一个连通的平面图G，共有v个结点，e条边，则一定有

$$v - e + r = 2 \qquad \text{——Euler公式}$$

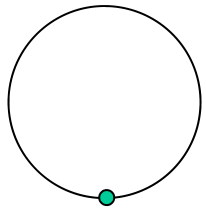
其中r为图的面数。

证 （1）若G只有一个孤立结点时，此时$v = 1, e = 0, r = 1$，故 $v - e + r = 2$ 成立。

（2）若G有n条边时，利用归纳法，设 $e = 1$ ，此时只有两种情况，如下图：



(*a*)



(*b*)

在图(*a*)中，$v=2, e=1, r=1$，故 $v-e+r=2$

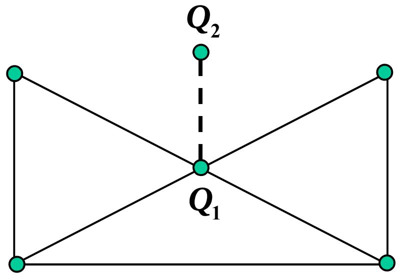
在图(*b*)中, $v=1, e=1, r=2$, 故 $v-e+r=2$ 也成立

设 $e=k$ 时，欧拉公式成立，即 $v_k-e_k+r_k=2$

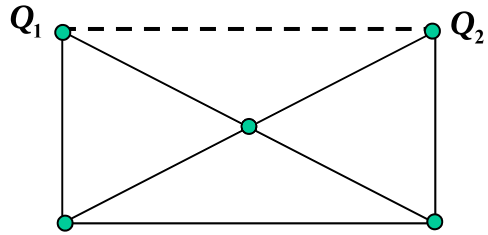
下面讨论当 $e=k+1$ 的情况。

由于在k条边的连通图上增加一条边，使得

图仍是连通的，只有如下图的两种情况：



(*a*)

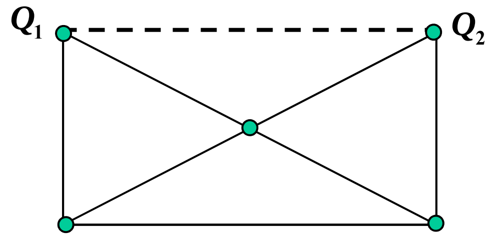


(*b*)

第一种情况如图(*a*)所示，增加一个新结点Q_2，并与图中结点Q_1相连，此时v_k和e_k两者均增加1，而r_k未变，故

$$(v_k+1)-(e_k+1)+r_k=v_k-e_k+r_k=2 \quad \text{结论成立}$$

第二种情况如图(*b*)所示，用一条边连接图中的两个已知点Q_1和Q_2，此时e_k和r_k两者均增加1，而v_k未变，故



(*b*)

$$v_k-(e_k+1)+(r_k+1)=v_k-e_k+r_k=2$$

结论成立，由归纳法知，欧拉公式成立。证毕

定理10 设G是一个有v个结点e条边的连通简单平面图，若$v \geq 3$，则 $e \leq 3v-6$

证 设G的面数为r，当$v=3$, $e=2$ 时，结论成立；若 $e \geq 3$ 时，则每一面的次数不小于3，由定理8知，各面的次数之和为 $2e$，因此 $2e \geq 3r$

即 $r \leq \frac{2}{3}e$，代入欧拉公式 $2=v-e+r \leq v-e+\frac{2}{3}e$

故 $e \leq 3v-6$。证毕

例12　证明：图 K_5 不是平面图

证　在 K_5 中，$v=5$, $e=10$，则

$$3v-6=3\times5-6=9<e=10$$

与定理10的结论矛盾，故 K_5 不是平面图。证毕

说明　定理10是平面图的必要非充分条件

当 $e\le 3v-6$ 成立时，也不一定是平面图。

例13　证明：图$K_{3,3}$不是平面图

证　利用反证法．若$K_{3,3}$是平面图，在$K_{3,3}$中任取3个结点，其中必有2个结点不邻接，因此每个面的次数都不小于4，所以有 $2e \geq 4r$

$\Rightarrow r \leq \frac{e}{2}$，即 $2 = v - e + r \leq v - e + \frac{e}{2} \Rightarrow e \leq 2v - 4$

而在$K_{3,3}$中，$v = 6$，$e = 9$，则 $2v - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8 < 9$

与所得结论矛盾，故$K_{3,3}$不是平面图。证毕

说明　（1）在$K_{3,3}$中，$e \le 3v-6$ 成立，但$K_{3,3}$不是平面图。

（2）若平面图每个面的次数均不小于4时，一定有结论　$e \le 2v-4$

尽管可以用欧拉公式判断某个图不是平面图，但还是比较困难，因为它不是充分必要条件，下面介绍平面图的一个充分必要条件。

定义9 给定两个图 G_1 和 G_2，若它们同构，或反复插入或除去度数为2的结点后同构，称 G_1 和 G_2 在**2度结点内同构**（或**同胚**）。

同胚不影响图的平面性

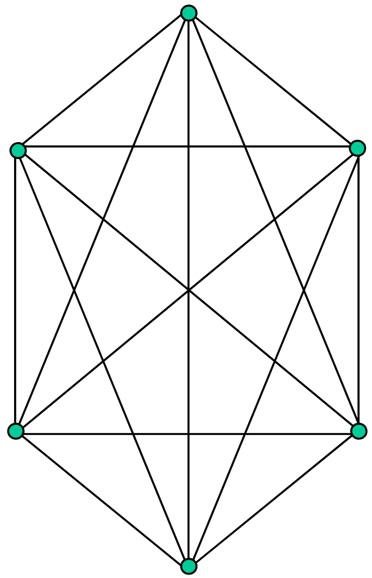
定理11 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

——库拉托夫斯基(Kuratowski)定理

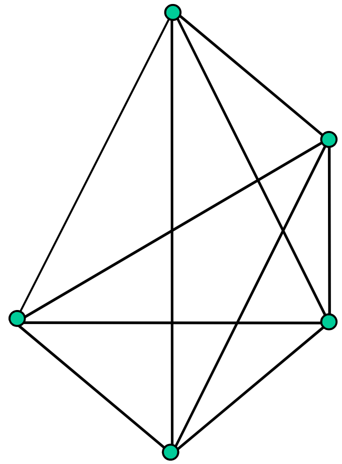
证（略）

K_5 或 $K_{3,3}$ 称为库氏图

例14　说明 K_6 不是平面图



K_6



K_6 的子图 K_5

故 K_6 不是平面图。

内容小结

1.平面图的概念

2.利用欧拉公式判断非平面图

3.库氏定理

课下练习 P110 习题6.3 1,4