第二部分 代数系统

第3章 代数系统的一般概念和性质

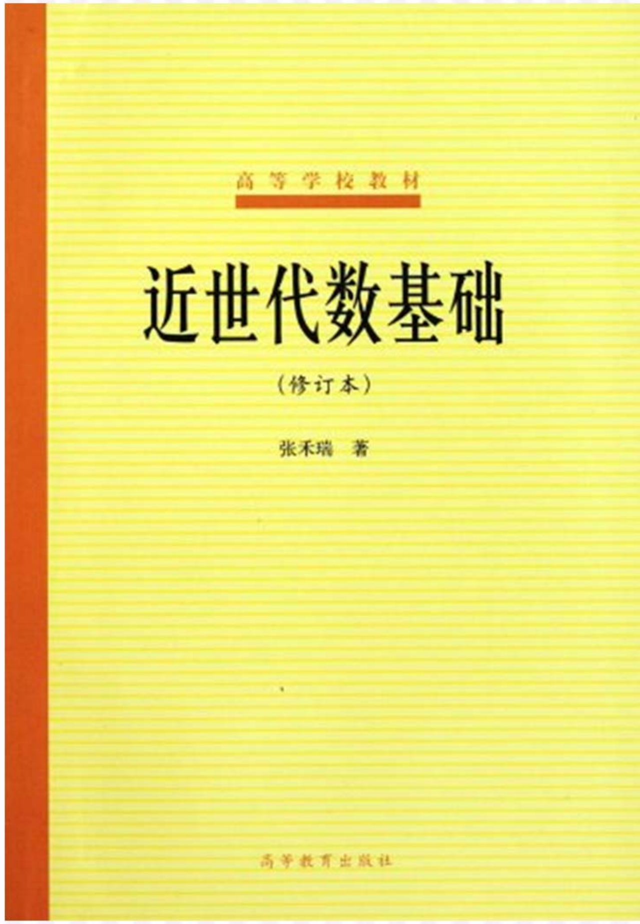
- 代数系统
- 代数系统的同态和同构

第二部分 代数系统

第4章 几个典型的代数系统

- 半群
- 群与子群
- 循环群与置换群
- 陪集与拉格朗日定理
- 环与域
- 格与布尔代数

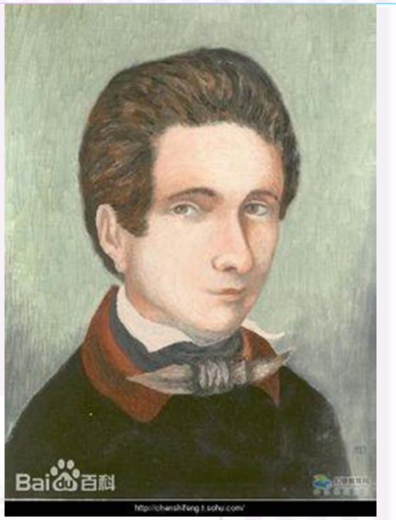
代数系统属于抽象代数(近世代数)的研究范畴



19世纪30年代，法国青年数学家伽罗瓦寻找五次方程的求解方法过程中提出“群”的概念，发展成为一门新的学科

抽象代数学

伽罗瓦



埃瓦里斯特·伽罗瓦，1811年10月25日生，法国数学家。现代数学中的分支学科群论的创立者。用群论彻底解决了根式求解代数方程的问题，而且由此发展了一整套关于群和域的理论，人们称之为伽罗瓦群和伽罗瓦理论。伽罗瓦16岁才开始系统学习数学，18岁就创立了群论。这是当代代数与数论的基本支柱之一。在世时在数学上研究成果的重要意义没被人们所认识，曾呈送科学院3篇学术论文，均被退回或遗失。后转向政治，支持共和党，曾两次被捕。21岁时死于一次决斗。

第3章 代数系统的一般概念和性质

3.1 代数系统

3.1.1 运算

定义1 设 A,B 为集合，映射 $f: A^n \to B$ 称为集合 A 到 B 上的一个 n 元运算（映射），特别地，当 $A=B$ 时，称为 A 上的 n 元运算。

例1 一台自动售货机按下表提供商品

*	一元	二元
一元	橙汁	可乐
二元	可乐	冰淇淋

表中左上角的符号 * 是一个二元运算符

这是一个集合 {一元，二元} 到集合 {橙汁，可乐，冰淇淋} 上的一个二元运算。

一元运算　由一个元素运算的结果。

例　求相反数的运算，求倒数的运算。

二元运算　由两个元素运算的结果。

例　$+, -, \times, \div$ 等运算。

本教材主要讨论一元和二元运算。

通常用“*”，“o”，“△”，“★”等表示运算符。

事实上，“运算”一词就是“函数”的同义词，**运算是在非空集合上定义的一种规则**。

例 对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的元素 a,b，作加法运算 $a+b$，若写成 $+(a,b)$ 也未尝不可，这就与二元函数 $f(x,y)$ 的表示方法一致了。

若 A 是有限集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 时，可用运算表表示 A 上的运算

一元运算表

a	$\circ(a)$
a_1	$\circ(a_1)$
a_2	$\circ(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\circ(a_n)$

二元运算表

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

例2 集合 $A=\{0,1\}$ 上布尔加法、布尔乘法的运算如下表

布尔加法

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

布尔乘法

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

分别用$\oplus_m$，$\otimes_m$表示模m的加法和乘法运算

例3 $I_2=\{0,1\}$，$\oplus_2,\otimes_2$为I_2上的二元运算，运算表为

模2加法

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

模2乘法

$\otimes_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

3.1.2 二元运算的性质

定义2 若对任意的 $x,y \in A$，都有 $x * y \in A$，称二元运算 $*$ 在 A 上**封闭**。

前面例子中，例1不封闭，例2、3封闭。由定义知，A 上的运算是封闭的。

例 设 $A=\{x \mid x=2^n, n \in N\}$，对乘法运算封闭，对加法运算不封闭。

设 $*,\circ$ 是定义在集合 A 上的两个二元运算

定义3 若对 $\forall x,y \in A$，都有 $x * y = y * x$，称二元运算 $*$ 在 A 上是可交换的，即运算满足交换律。

定义4 若对 $\forall x,y,z \in A$，都有

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

称二元运算 $*$ 在 A 上是可结合的，即运算满足结合律。

例4 设 Q 是有理数集合，运算 $*$ 定义如下

$\forall x, y \in Q$， $x * y = x + y - xy$

讨论运算是否可交换？是否可结合？

解 $x * y = x + y - xy$

$= y + x - yx = y * x$ 可交换

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z$$

$$= x + y - xy + z - (x + y - xy)z$$

$$= x + (y + z) - yz - x(y + z - yz) = x * (y * z)$$

可结合

定义5 若对 $\forall x,y,z \in A$，都有

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$$

$$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)$$

称运算 $*$ 在 A 上对运算 $\circ$ 是可分配的，即运算满足分配律。

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$$

称运算 $*$ 在 A 上对运算 $\circ$ 是左分配的。

例5　设集合 $A=\{\alpha,\beta\}$，定义运算$*$,$\circ$如下

$*$	α	β
α	α	β
β	β	α

$\circ$	α	β
α	α	α
β	α	β

讨论运算$*$对$\circ$是否可分配？运算$\circ$对$*$呢？

解　经过验证，运算$\circ$对$*$可分配，由于

$$\beta*(\alpha\circ\beta)=\beta*\alpha=\beta$$

$$(\beta*\alpha)\circ(\beta*\beta)=\beta\circ\alpha=\alpha$$

运算$*$对$\circ$不可分配

定义6 设 $*,\circ$ 定义在 A 上且可交换，

$\forall x, y \in A$， 都有

$$x * (x \circ y) = x$$
$$x \circ (x * y) = x$$

称运算 $*$ 和运算 $\circ$ 在 A 上满足**吸收律**。

例6 自然数集 N 上定义运算 $*$,$\circ$ 如下：

$$x * y = \max\{x, y\} \quad ; \quad x \circ y = \min\{x, y\}$$

验证：运算 $*$ 和运算 $\circ$ 在 N 上满足吸收律。

解 显然 $*$ 和 $\circ$ 是可交换的，

$$x * (x \circ y) = \max\{x, \min\{x, y\}\} = x$$

$$x \circ (x * y) = \min\{x, \max\{x, y\}\} = x$$

所以 $*$ 和 $\circ$ 满足吸收律。

定义7 设$*$定义在A上，$\forall x \in A$，都有

$$x * x = x$$

称运算$*$在A上满足**等幂律**。

例7 设 $P(A)$ 是集合 A 的幂集，由于

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$$

故并运算 $\cup$ 和交运算 $\cap$ 均是等幂的。

定义8 设$*$定义在A上，$\forall x,y,z \in A$，都有

$$x*y=x*z \Rightarrow y=z$$
$$y*x=z*x \Rightarrow y=z$$
（x不是零元）

称运算$*$在A上满足**消去律**。

例8 实数集R上的加法运算$+$满足消去律；$P(A)$上的$\cup$和$\cap$均不满足消去律。

例9 设 $A=\{a,b,c\}$， 对任意的 $x,y\in A$，

定义 $x\circ y=x$

其运算表

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

由于 $a\circ b=a\neq b=b\circ a$，故交换律不成立。

由于 $x\circ x=x$，故等幂律成立。

例10 设 Z 为整数集，对任意 $x,y \in Z$，定义

$$x * y = |x - y|$$

因 $x * y = |x - y| = |y - x| = y * x$ 交换律成立

而 $(1 * 2) * 5 = |1 - 2| * 5 = 1 * 5 = |1 - 5| = 4$

$1 * (2 * 5) = 1 * |2 - 5| = 1 * 3 = |1 - 3| = 2$

结合律不成立

$2 * 2 = |2 - 2| = 0 \neq 2$ 等幂律不成立

但 $0 * 0 = |0 - 0| = 0$ 称0为等幂元。

特殊元素

代数系统中的特殊元素有三种，即幺元（单位元），零元及可逆元。

定义9 设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果有一个元素 $e_l \in A$，对于任意的元素 $x \in A$，都有 $e_l * x = x$，称 e_l 为 A 中关于运算 $*$ 的左幺元；如果有一个元素 $e_r \in A$，对于任意

的元素 $x \in A$， 都有 $x * e_r = x$，称 e_r 为 A 中关于运算 $*$ 的右幺元；若 A 中的一个元素 e 既是左幺元又是右幺元，称 e 为 A 中关于运算 $*$ 的幺元。

例11 设集合 $S=\{a,b,c,d\}$，在 S 上定义运算 $*$ 和 $\star$ 如下表，指出运算的左幺元或右幺元

*	a	b	c	d
a	a	d	c	b
b	a	b	c	d
c	c	b	a	d
d	a	b	c	d

★	a	b	c	d
a	a	a	c	a
b	a	b	c	b
c	c	c	a	c
d	a	d	c	d

在 $*$ 的运算中，b,d 是左幺元；

在 $\star$ 的运算中，b,d 是右幺元。

说明 左右幺元不一定都存在，如果只有左（右）幺元，不一定唯一。

定理1 设 $*$ 是定义在集合 A 上的一个二元运算，存在左幺元 e_l 和右幺元 e_r，则 $e_l = e_r = e$，且 A 中的幺元是唯一的。

证 存在性 $e_l = e_l * e_r = e_r = e$

唯一性 若存在两个幺元 e_1, e_2，有

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$ 证毕

例　在实数集 R 上，“×”运算的幺元是1，“+”运算的幺元是0。

说明　幺元“e”类似于乘法中的1，但它不一定是1，只是幺元的符号而已。

例　在集合“并”的运算中，由于

$$\Phi \cup A = A \cup \Phi = A$$　幺元是空集

在集合“交”的运算中，由于

$$\Omega \cap A = A \cap \Omega = A$$　幺元是全集

定义10 设$*$是定义在集合A上的二元运算若有一个元素$\theta_l \in A$，对任意的元素$x \in A$，有$\theta_l * x = \theta_l$，称θ_l为运算$*$的左零元；若有一个元素$\theta_r \in A$，对任意的元素$x \in A$，有$x * \theta_r = \theta_r$，称θ_r为运算$*$的右零元；若A中的一个元素θ，它既是左零元又是右零元，称θ为运算$*$的零元。

例12　设 R 是实数集，对任意的 $a,b\in R$，定义运算 $a\circ b=a+b+2ab$

$\forall b\in R$

$$(-\frac{1}{2})\circ b=-\frac{1}{2}+b+2(-\frac{1}{2})b=-\frac{1}{2}$$

$$b\circ(-\frac{1}{2})=b+-\frac{1}{2}+2b(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

所以 $-\frac{1}{2}$ 是 $\circ$ 的零元。

实数集上加法运算无零元，乘法运算的零元为0。

例13 设 S={浅色，深色}，在洗衣机里衣服混洗的情形如表所示

*	浅色	深色
浅色	浅色	深色
深色	深色	深色

浅色是运算的幺元，深色是运算的零元。

定理2 设$*$是集合A上的二元运算，且在A中有运算$*$的左零元θ_l和右零元θ_r，则$\theta_r=\theta_l=\theta$，且A中的零元是唯一的。

证 类似幺元的证明（略）。

说明 零元θ的作用类似乘法中的0，但不一定是0，仅仅是零元符号。

例 正整数集I_+上的运算“min”，零元为1。

定理3 设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，且 A 中的元素的个数大于1，若集合 A 中存在幺元 e 和零元 θ，则 $e \neq \theta$。

证 反证法 若 $e=\theta$，则对 A 中的任意元素 x，有 $x=e*x=\theta*x=\theta=e$，即每个元素均相同，都等于 e，集合中只有一个元素，矛盾，证毕

多于1个元素的集合中，幺元一定不是零元

定义11 设 e 是 $<A,*>$ 中的幺元，若对 A 中的一个元素 a，存在 A 中的某个元素 b，使得 $b*a=e$，称 b 是 a 的左逆元；若 $a*b=e$，称 b 是 a 的右逆元；若一个元素 b 既是 a 的左逆元又是右逆元，称 b 是 a 的逆元，记为 a^{-1}。

一个元素可能不存在左（右）逆元
也可能存在多个左（右）逆元

例14　设 $A=\{a,b,c\}$，$\circ$ 是 A 上的二元运算

运算表

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

则 $\circ$ 满足结合律。由运算表知，a 是幺元，运算没有零元，且 $a^{-1}=a$，$b^{-1}=c$，$c^{-1}=b$

例15 设 $A=\{a,b,c\}$，$*$ 是 A 上的二元运算

运算表

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则 a 是幺元，c 是零元，且 $a^{-1}=a$，$b^{-1}=b$，

c 不可逆。

定理4 设 $*$ 是集合 A 上的二元运算，若

（1）A 中存在幺元；

（2）每个元素都有左逆元；

（3）$*$ 满足结合律；

则集合中任何一个元素的左逆元必定也是它的右逆元，且每个元素的逆元是唯一的。

证　设 $a,b,c \in A$，其中 b 是 a 的左逆元，c 是 b 的左逆元，则

$$b*a=e=c*b=e*(c*b)=c*e*b$$

$$=c*(b*a)*b=(c*b)*a*b=e*a*b=a*b$$

即 b 也是 a 的右逆元（存在性）。

设 a 有两个逆元 b,c，则有

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$$

所以 a 的逆元是唯一的（唯一性）。证毕

例 实数集合 $\boldsymbol{R}$ 上的加法运算“+”的幺元是0，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$，因为 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{x}$ 的逆元是 $-\boldsymbol{x}$ 。

例 设 $\boldsymbol{A}=\{0,1\}$，对乘法运算“$\times$”

幺元是1，1的逆元是1；

0是零元，且0无逆元。

运算*的性质在运算表中的体现

1.封闭性：表中各元素与表头中元素相同。

2.交换律：表中各元素关于对角线对称。

3.等幂律：表中对角线各元素与之相应的表头元素相同。

4.零元：该元素所对应的行和列中的元素与该元素相同。

5.幺元：　　该元素所在的行和列中的元素依次与表头元素相同。

6.可逆元：表中交叉位置的元素为幺元。

3.1.3 代数系统

定义12 一个非空集合 A，连同若干个定义在该集合上的运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$， 构成的系统称为一个**代数系统**，记为 $< A, f_1, f_2, \cdots, f_k >$ 。

一个代数系统需要满足三个条件：

①有一个非空集合 S ；

②定义一些运算；

③这些运算在集合 S 上是封闭的。

例　整数集 I 上具有加法运算的系统，构成一个代数系统 $<I,+>$ 。

例　实数集 R 上具有二元运算“+”和“×”的系统，构成一个代数系统 $<R,+,\times>$ 。

例　设 A 是任意集合，$\rho(A)$ 是 A 的幂集，$\cup,\cap,\bar{}$ 分别是幂集上的并、交、补运算，则 $<\rho(A),\cup,\cap,\bar{}>$ 是定义了两个二元运算和一个一元运算的代数系统。

内容小结

1.二元运算的性质

2.代数系统的概念

课下练习 P50 习题3.1 1,2,3,4