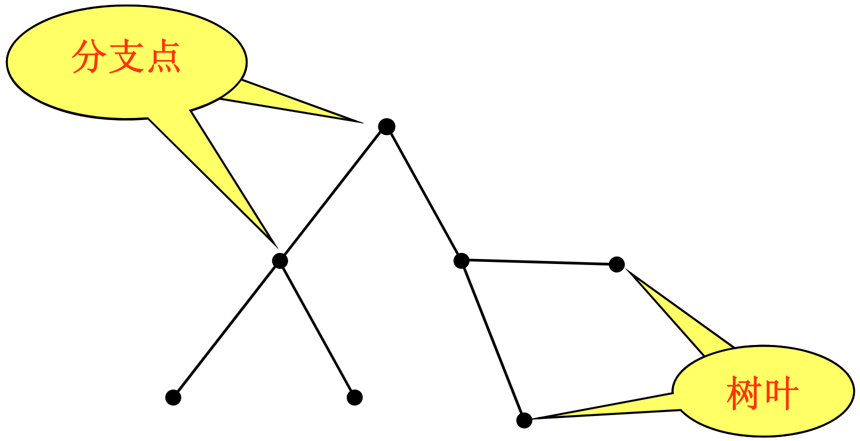
6.4 树

6.4.1 无向树和生成树

定义10　一个连通且无回路的无向图，称为无向树（简称为树），常用 *T* 表示；树中度为1的结点称为树叶；度数大于1的结点称为分支点（或内点）。



一个无回路的无向图称为**森林**,它的每个连通分图是树；平凡图称为**平凡树**。

树的基本特征：

（1）树是平面图；

（2）树中任意两个结点间均有唯一通路；

（3）删除树的任一边，成为森林。

定理12 给定无向图T,以下关于树的定义是等价的（其中e表示边数,v表示结点数）

（1）无回路的连通图;

（2）无回路且 $e=v-1$;

（3）连通且 $e=v-1$;

（4）无回路,但增加一边后得唯一回路;

（5）连通,删除任一边后便不连通;

（6）每一对结点之间有且仅有一条通路。

证明（略）

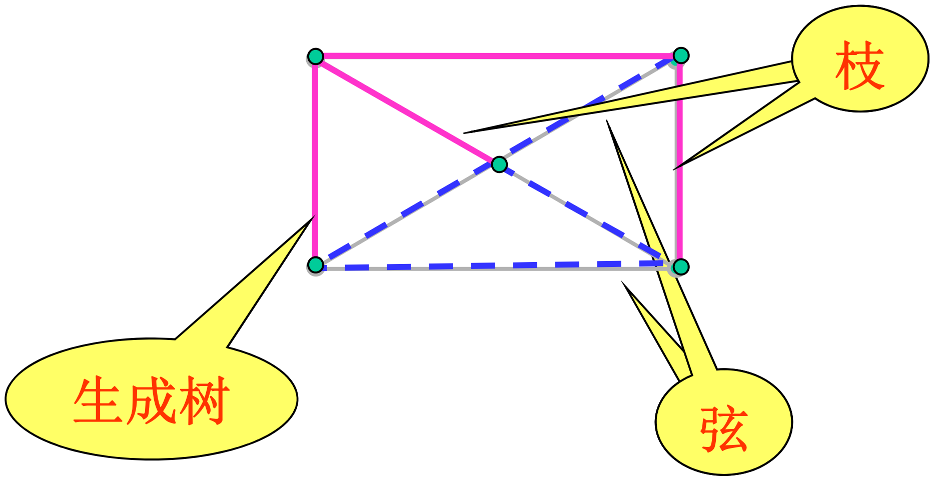
定理13 任一n阶非平凡树，至少有两片树叶。**（非平凡树至少有两个1度点）**

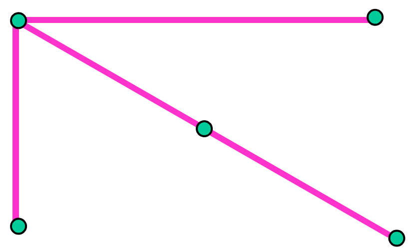
证 设该树有k片树叶，则有$n-k$个分支点总度数 $2(n-1) \geq k+2(n-k)$，即 $k \geq 2$ 。证毕

非平凡树中，分支点的度数一定大于等于2

定义11 若图 G 的生成子图 T 是树，称树 T 为图 G 的生成树，树 T 的边称为树枝，图 G 的不在生成树 T 中的边称为弦，所有弦的集合称为 T 的补（余树）。

生成树不唯一





也是一棵生成树

定理14 连通图至少有一棵生成树。

证 设G是一个连通图

（1）若G无回路，它本身是树，生成树是自己；

（2）若G有回路，删除回路上的一边，得到图G_1

G_1仍连通，并与G有相同的结点集，若G_1无回路

则G_1是生成树，否则重复上述步骤，直到得到一

个没有回路的连通图T，T 即为G的生成树。证毕

定义12 若 G 是一个有 n 个结点 m 条边的连通图，它的生成树中有 $n-1$ 条边，必须删除

$$m-(n-1)=m-n+1$$

条边，称数 $m-n+1$ 为连通图 G 的秩。

定理15 图中一个回路和任意一棵生成树的补，至少有一条公共边。

证 反证法 若图中有一个回路和一棵生成树的补没有公共边，那么这回路包含在生成树中，这与树的定义矛盾，原结论正确。证毕

定理16 图中一个边割集和任意一棵生成树，至少有一条公共边。

证 反证法 若图中有一个边割集和一棵生成树没有公共边，那么删去这个边割集后，所得子图必包含这棵生成树，即删去边割集后仍是连通图，与边割集的定义矛盾，故原结论正确。证毕

定义13　若给连通图G的每一边e, 赋予一个数字$C(e)$, 称$C(e)$为边e的权; 图G的生成树T的所有边权之和, 称为生成树T的树权, 记为$C(T)$; 在G的所有生成树中, 树权最小的一棵称为最小生成树。

城市通讯网图中, 最小生成树就是能保证通讯费用最小的通讯网。

寻找最小生成树的方法 (Kruskal避圈法)

定理17 设图G有n个结点，以下算法产生的是它的最小生成树：

（1）选取最小权的边 e_1，置边数$i \leftarrow 1$；

（2）$i = n-1$结束，否则转入（3）；

（3）设已选择边为$e_1, e_2, \cdots, e_i$，在G中选取不同于$e_1, e_2, \cdots, e_i$的边e_{i+1}，使得$\{e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}\}$中无回路，且$e_{i+1}$是满足此条件的权最小边；

（4）$i \leftarrow i+1$，转入（2）. 证（略）

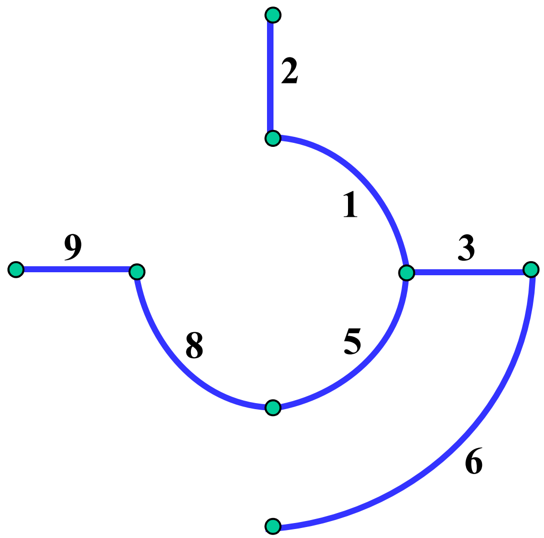
避圈法的基本思想：

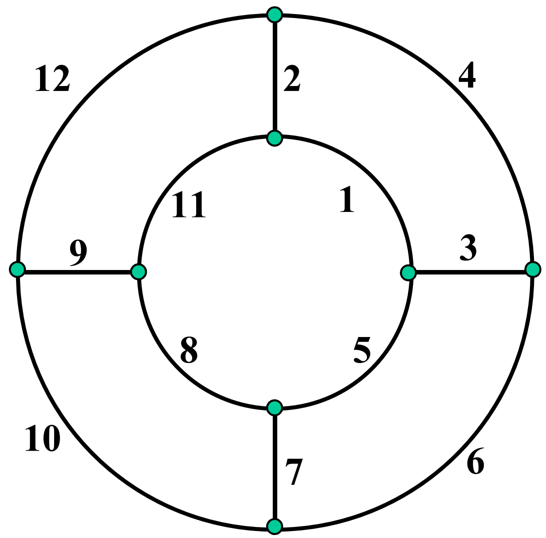
在已有的边集上找相邻不成回路的最小边

说明 Kruskal避圈法是假定图*G*的边权不同，事实上，它也适用于任何边权的情况，若有两条边的权数相同，可将其中一条边的权改变一个很小的量，由于图*G*的边数是有限的，总能选择这个改变量不影响最小生成树的最小性。

例15　找出下图的最小生成树

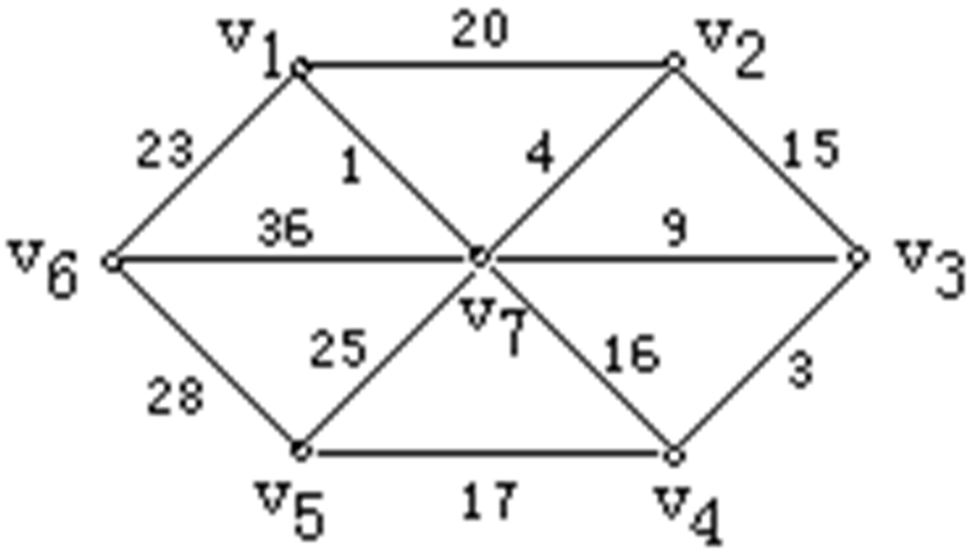
解　如图所示



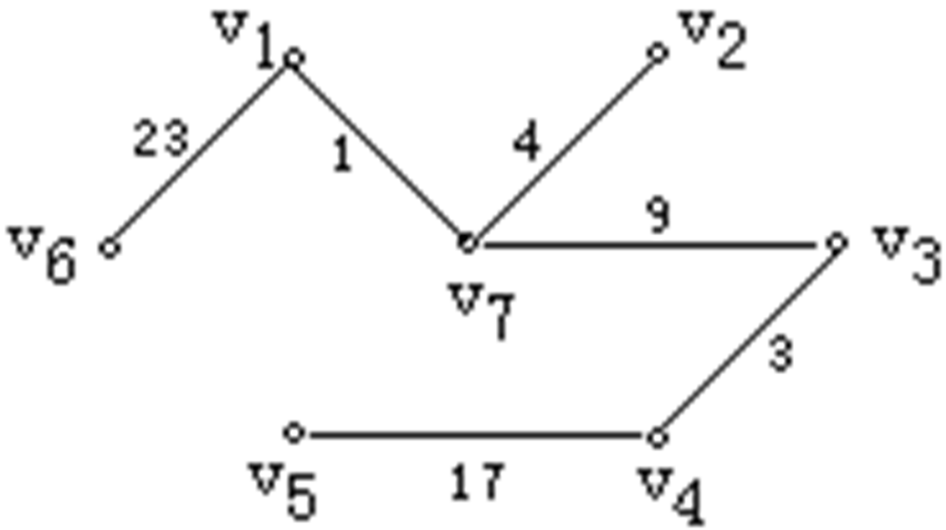


最小生成树的树权为$1+2+3+5+6+8+9=34$

例：如下图所示的赋权图表示七个城市及它们之间的通信线路造价。试给出一个设计图使得各城市之间能够通信而且总造价最小。



用库斯克（Kruskal）算法求产生的最小生成树。结果如图：



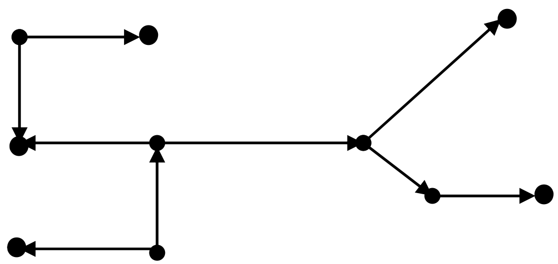
树权C(T)=23+1+4+9+3+17=57即为总造价。

6.4.2 根树及其应用

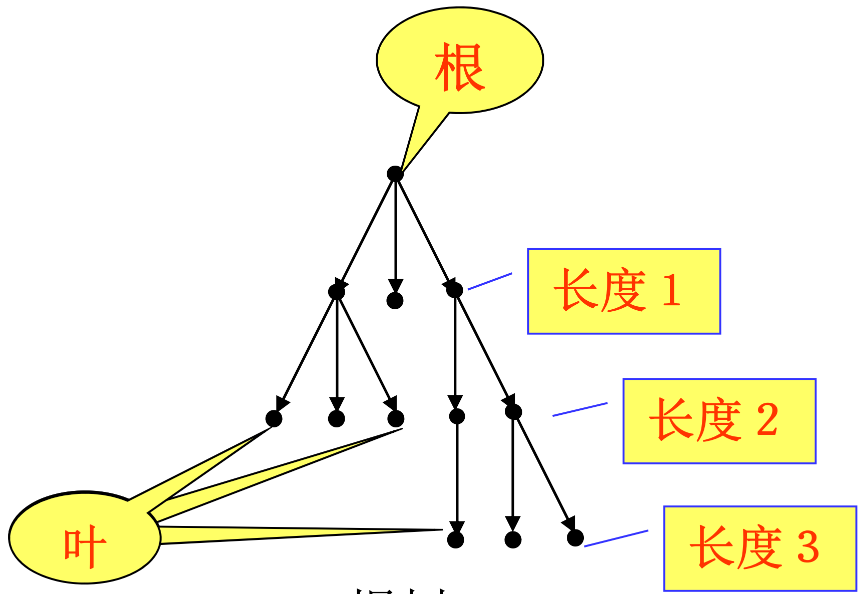
定义14 如果一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树，称该有向图为有向树。

定义15 一棵有向树如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度都为1，称它为根树；入度为0的结点称为根；出度为0的结点称为叶；出度不为0的结点称为分支点(或内点)

从根到结点v的单向通路的长度，称为结点v的**长度**（或**层数**）；根树中结点最大长度称为**树高**。

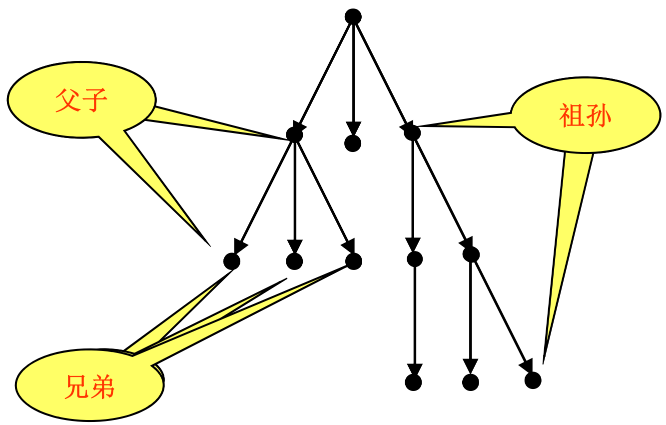


有向树



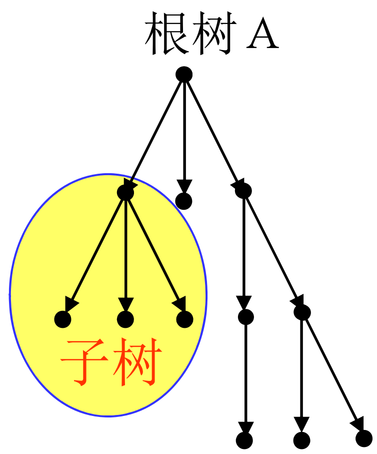
根树

定义16　根树$T=<V,E>$中，若$<a,b>\in E$，称a是b的父亲，b是a的儿子；若$<a,b>\in E$，$<a,c>\in E$，称b和c是兄弟；若a到d有通路存在，称a是d的祖先，d是a的后裔。



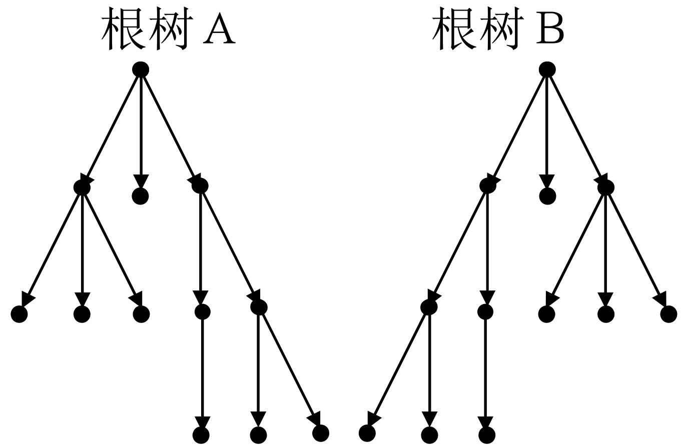
定义17 根树 $T=<V,E>$，a 是 T 的分支点 V_a 是 a 及其后裔的集合，E_a 是 a 到各后裔通路上边的集合，则 $T_a=<V_a,E_a>$ 称为 T 的以 a 为根的**子根树**（简称**子树**）。

说明 以 a 为根的子树包含根结点 a 。



定义18 对根树中的“儿子”规定次序，（通常指从左到右），称此根树为**有序树**。

如图所示两棵根树，作为根树：同构；作为有序树：不同构



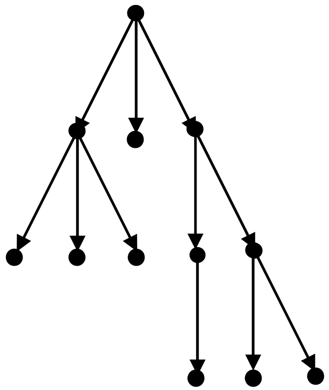
有序树中一般规定：

左儿子：分支点的左边儿子；
右儿子：分支点的右边儿子。
左子树：左儿子为根的子树；
右子树：右儿子为根的子树。

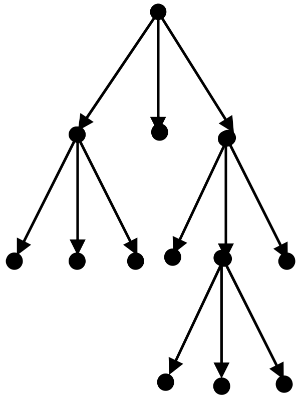
定义19 若每个结点的出度最大是 m（最多有 m 个儿子）的根树称为 m 叉（元）树；若每个结点的出度均为 m 或0，称该树为完全 m 叉（元）树；若所有树叶的层数相同，称该树为正则 m 叉（元）树。

计算机中最常用的是 $m=2$ 的二叉树

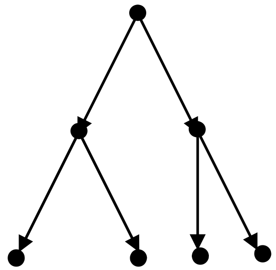
例16　如图所示



三叉树



完全三叉树



正则二叉树

定理18 设有完全m叉树，其树叶数为t，分支点数为i，则 $(m-1)i=t-1$

证 由于该树为完全m叉树，故有mi条边且有$t+i$个结点，由树的定义得 $mi=(t+i)-1$

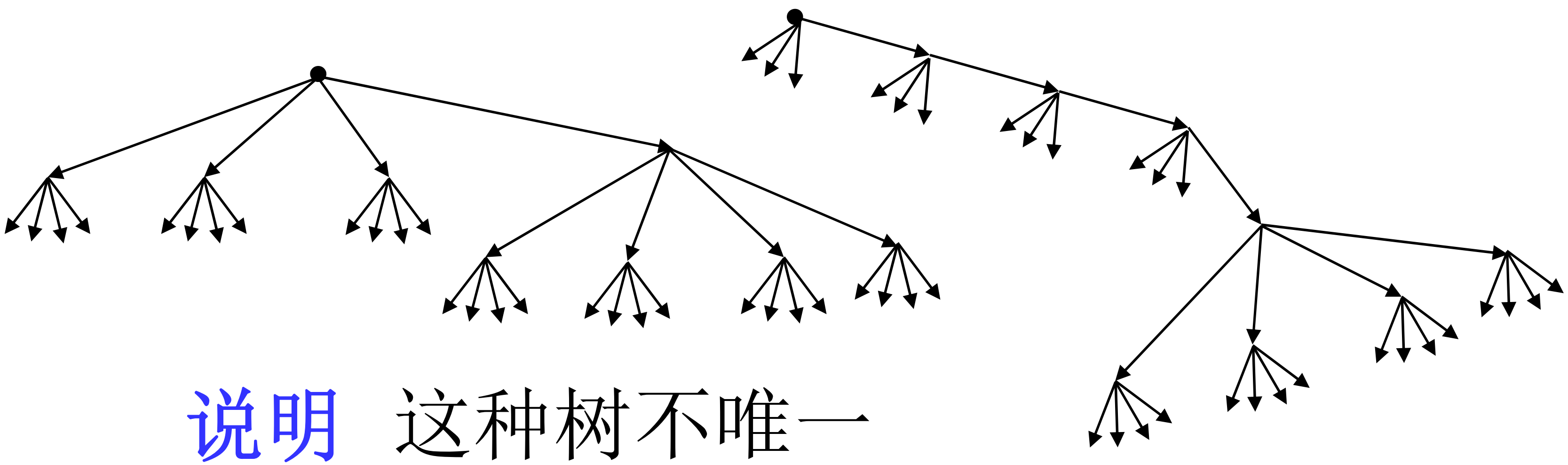
即 $(m-1)i=t-1$ 证毕

当树是完全二叉树时，$i=t-1$，即分支点比树叶少1个。

例17 设有28盏电灯，拟公用一个电源插座，问需要多少个具有四孔的插座？

解 已知 $t=28, m=4$，根据定理18

$$(4-1)i = 28-1 \Rightarrow i = 9$$ 如图所示

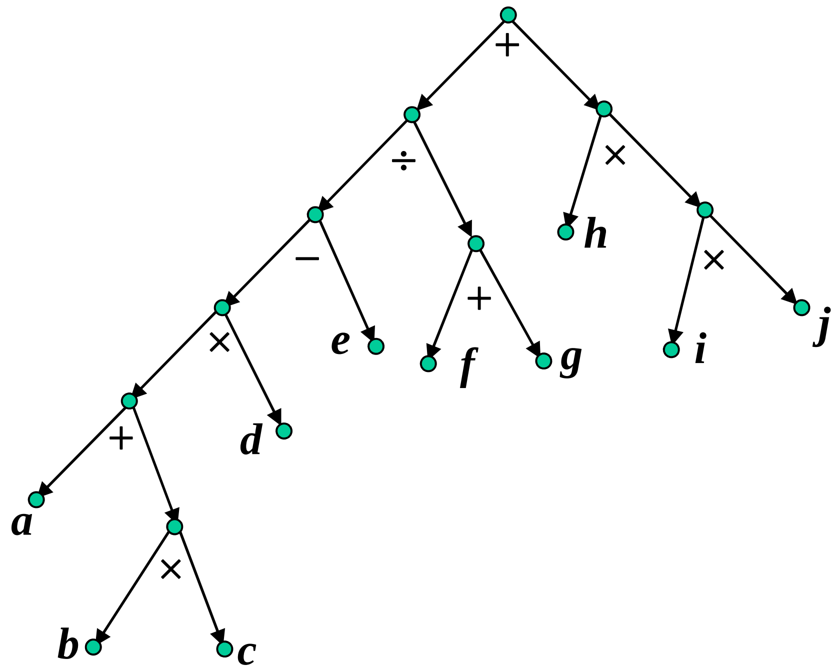


说明 这种树不唯一

二叉树的应用

1、算术表达式的树表示(二叉树)

例 $((a+b\times c)\times d-e)\div(f+g)+h\times(i\times j)$



2、最优树

定义20 一棵二叉树 T，每一片树叶都带权，称该树为带权二叉树。

定义21 在带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二叉树中，若带权为 w_i 的树叶，其通路长度为 $L(w_i)$，将

$$W(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$$

称为带权二叉树的权；在所有带权二叉树中，$W(T)$ 最小的那棵树，称为最优树。

定理19 设T为带权$w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_t$的最优树，则

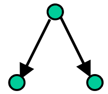
（1）带权w_1, w_2的树叶v_{w_1}, v_{w_2}是兄弟；

（2）以树叶v_{w_1}, v_{w_2}为“儿子”的分支点，其通路长度最长。

定理20 设T为带权$w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_t$的最优树，若将以带权$w_1$和$w_2$的树叶为“儿子”的分支点改为带权$w_1 + w_2$的树叶，得到一棵新二叉树$T'$，则$T'$也是最优树。

画出带权二叉树的最优树的方法

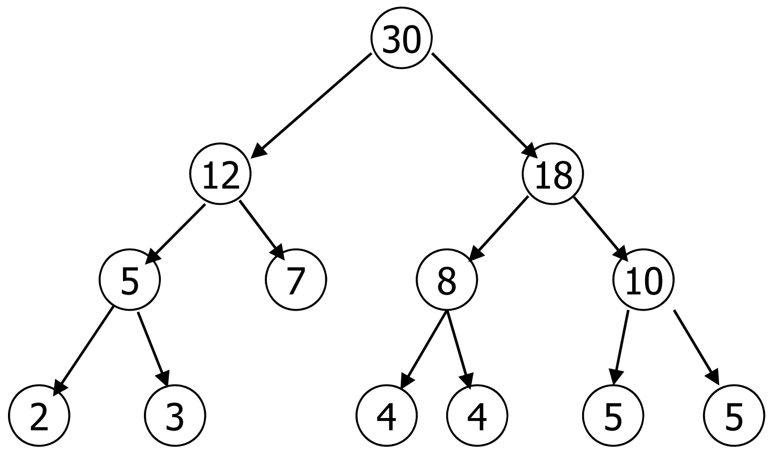
（1）找出两个最小的权w值，不妨设为w_1, w_2；

（2）对$t-1$个权$w_1+w_2, w_3, \cdots, w_t$，作一棵最优树并将这棵最优树中的结点$v_{w_1+w_2}$代之以 ，以此类推，即得最优树。

例18　构造叶权为 2,3,4,4,5,5,7 的最优树

解　过程如下

2	3	4	4	5	5	7
	5	4	4	5	5	7
	5		8	5	5	7
	5		8		10	7
			8		10	12
					18	12
						30



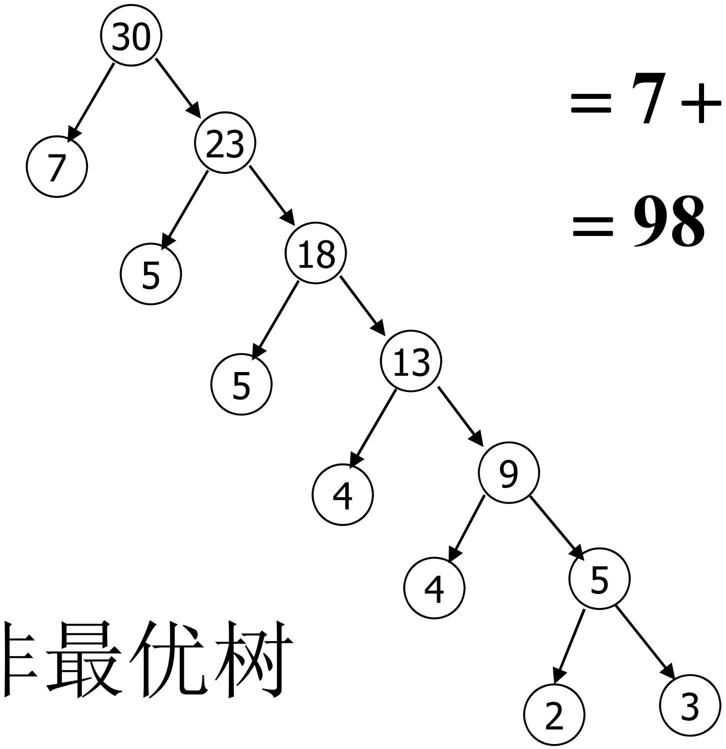
$$w(T)=\sum_{i=1}^{7} w_i L(w_i)$$

$$=2\times3+3\times3+7\times2+4\times3$$

$$+4\times3+5\times3+5\times3=83$$

其它构造法

例



非最优树

$$w(T)=\sum_{i=1}^{7} w_i L(w_i)$$

$$=7+10+15+16+20+12+18$$

$$=98$$

内容小结

1.树与根树的概念和性质

2.最小生成树

3.最优树

课下练习 P118 习题6.4 1,2,4,6