四川工业学院学报
Journal of Sichuan University of Science and Technology
文章编号：1000-5722(2001)04-0057-03

应用卷积公式的一种方法——直线作图法

李红娥　朱　雯
（四川工业学院计算机科学与工程系，四川 成都 610039）

摘　要： 卷积公式在很多学科领域都具有广泛的应用而直接应用卷积公式进行计算常常是比较困难的。本文作者给出了一种计算卷积的有效的简便的方法。该方法易于操作。

关键词： 卷积公式；密度函数；直线作图
中图分类号：O15　　**文献标识码：**B

0　引言

众所周知，当随机变量 X，Y 独立时，Z = X + Y 的概率密度函数 $P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_X(x)P_Y(z-x)\mathrm{d}x$（其中 $P_X(x)$，$P_Y(y)$ 分别为 X，Y 的概率密度函数）此即卷积公式。但是在具体计算过程中，当 $P_X(x)$，$P_Y(y)$ 为分段函数时学生感到应用的困难较大。主要涉及到 Z 的取值范围的讨论和此时 x 的上下限的选取，鉴于此，这里给出一种较易掌握的方法 —— 直线作图法。此法学生容易理解，也容易操作，效果良好。

1　直线作图法原理

为说明简单起见，不防设 $P_X(x)$，$P_Y(y)$ 为如下的分段定义函数

$$P_X(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\in I_1\\ f_2(x) & x\in I_2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\begin{cases}g_1(y) & y\in J_2\\ g_2(y) & y\in J_2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

式中 I_1,I_2,J_1,J_2 为区间，$I_1\cap I_2=\Phi$，$J_1\cap J_2=\Phi$，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(y)$，$g_2(y)$ 一般为非零函数。

记 $I_i\times J_i=\{(x,y)\mid x\in I_i,y\in J_i\}(i,j=1,2)$，则易知，

$$P_X(x)P_Y(y)=\begin{cases}f_1(x)g_1(y) & (x,y)\in I_1\times J_1=D_1\\ f_1(x)g_2(y) & (x,y)\in I_1\times J_2=D_2\\ f_2(x)g_1(y) & (x,y)\in I_2\times J_1=D_3\\ f_2(x)g_2(y) & (x,y)\in I_2\times J_2=D_4\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

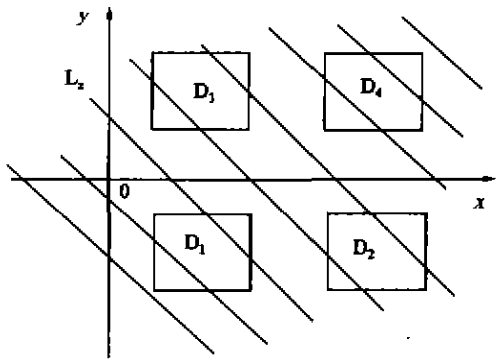

图 1　原理示意图

作区域 $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$，则 $P_X(x)P_Y(z-x)$ 非零必有 $(x,z-x)$ 在 D 中，于是作直线 $L_Z:x+y=z$，则 L_Z 在 D 中的线段上的点 $(x,z-x)$ 使得 $P_X(x)P_Y(z-x)$ 非零，平行移动 L_Z，从而可由 L_Z 与 $D=D_1,D_2,D_3,D_4$ 的各种相交情况定出 L_Z 的截距 z 的不同取值范围，再由此确定相应线段上 x 的取值区间（一般与 z 有关），即卷积公式中 x 的积分区间。下面举例说明。

2　直线作图法应用举例

例 1　已知随机变量 X、Y 的概率密度函数分别为

收到日期：2001-03-05

作者简介：李红娥（1973 - ），女，湖北省咸宁市人，四川工业学院计算机科学与工程系助教，在读硕士研究生，主要从事区域经济学研究与大学数学教学。

$$P_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

X,Y 独立,求 Z = X + Y 的概率密度函数.

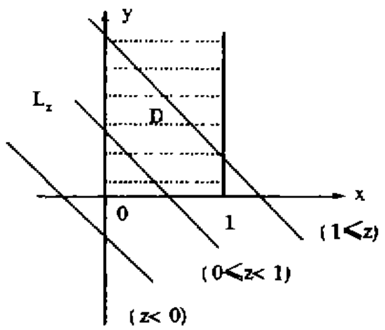

图 2 例 1 图示

解 $I_1=[0,1]$

$J_1=[0,\infty)$

作 $D=I_1\times J_1$ 如图 2 所示,再作直线 $L_Z: x+y=z$,L_Z 与 D 的相交情况有三种:

① 当 $z<0$ 时,$L_Z\cap D=\Phi$

② 当 $0\leqslant z<1$ 时,$L_Z\cap D=\{(x,z-x)\mid 0\leqslant x\leqslant z\}$

③ 当 $1\leqslant z$ 时,$L_Z\cap D=\{(x,z-x)\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

于是,

① $z<0$ 时,$P_Z(z)=0$

② $0\leqslant z<1$ 时,$P_Z(z)=\int_0^z P_X(x)P_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z 2e^{-2(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-2z}$

③ $1\leqslant z$ 时,$P_Z(z)=\int_0^1 P_X(x)P_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2e^{-2(z-x)}\mathrm{d}x=e^{-2z}(e^2-1)$

故 $$P_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-2z} & 0\leqslant z<1\\ e^{-2z}(e^2-1) & 1\leqslant z\end{cases}$$

例 2 已知随机变量 X,Y 的概率密度函数分别为

$$P_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\begin{cases}1 & y\in[2,,3]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X,Y 独立,求 Z = X + Y 的概率密度函数。

解 $I_1=[0,1]$, $J_1=[2,3]$

作 $D=I_1\times J_1$ 如图 3,再作 $L_z: x+y=z$,平移 L_z,可得到 L_z 与 D 相交有以下四种情况:

① 当 $z<2$ 时,$L_z\cap D=\Phi$

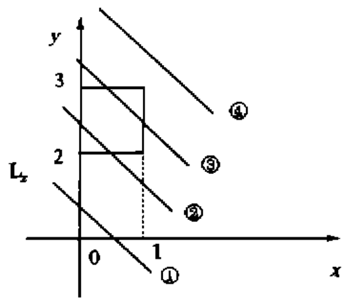

图 3 例 2 图示

② 当 $2\leqslant z<3$ 时,$L_z\cap D=\{(x,z-x)\mid 0\leqslant x\leqslant z-2\}$

③ 当 $3\leqslant z\leqslant 4$ 时,$L_z\cap D=\{(x,z-x)\mid z-3\leqslant x\leqslant 1\}$

④ $4<z$ 时,$L_z\cap D=\Phi$

于是,

① $z<2$ 时,$P_Z(z)=0$

② $2\leqslant z\leqslant 3$ 时,$P_Z(z)=\int_0^{z-2}P_X(x)P_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^{z-2}\mathrm{d}x=z-2$

③ $3\leqslant z<4$ 时,$P_Z(z)=\int_{z-3}^1 P_X(x)P_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-3}^1\mathrm{d}x=4-z$

④ $4<z$ 时,$P_Z(z)=0$

故 $$P_Z(z)=\begin{cases}z-2 & 2\leqslant z<3\\ 4-z & 3\leqslant z\leqslant 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 3 已知随机变量 X,Y 的概率密度函数分别为

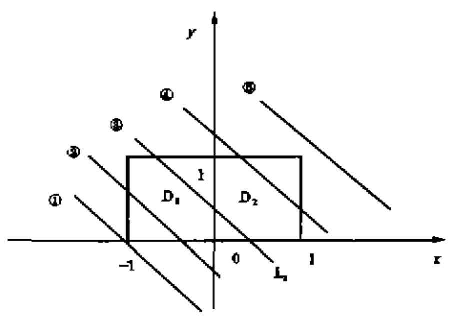

图 4 例 3 图示

$$P_X(x)=\begin{cases}x+1 & x\in[-1,0]\\ 1-x & x\in(0,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X,Y 独立,求 Z = X + Y 的概率密度函数。

解 $I_1=[-1,0]$, $I_2=[0,1]$, $J_1=[0,1]$

作 $D = D_1 \cup D_2 = (I_1 \times J_1) \cup (I_2 \times J_1)$,如图 4。

再作 $L_z: x + y = z$,L_z 与 D 的相交情况有以下五种:

①$z < -1$ 时,$L_z \cap D = \Phi$

② 当 $-1 \leqslant z < 0$ 时,$L_z \cap D = \{(x, z - x) \mid -1 \leqslant x \leqslant z\}$

③$0 \leqslant z \leqslant 1$ 时,$L_z \cap D = (l_2 \cap D_1) \cup (l_z \cap D_2) = \{(x, z - x) \mid z - 1 \leqslant x \leqslant 0\} \cup \{(x, z - x) \mid 0 \leqslant x \leqslant z\}$

④$1 \leqslant z \leqslant 2$ 时,$L_z \cap D = \{(x, z) \mid z - 1 \leqslant x \leqslant 1\}$

⑤$2 < z$ 时,$L_z \cap D = \Phi$

于是,

①$z < -1$ 时,$P_Z(z) = 0$

②$-1 \leqslant z < 0$ 时,$P_Z(z) = \int_{-1}^{z} P_X(x) P_Y(z - x) dx = \int_{1}^{z} (x + 1) \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2}(z + 1)^2$

③$0 \leqslant z < 1$ 时,$P_Z(z) = \int_{z-1}^{0} (x + 1) dx + \int_{0}^{z} (1 - x) dx = -z^2 + z + \frac{1}{2}$

④$1 \leqslant z \leqslant 2$ 时,$P_Z(z) = \int_{z-1}^{0} P_X(x) P_Y(z - x) dx = \int_{z-1}^{1} (1 - x) dx = \frac{1}{2}(z - 2)^2$

⑤$2 < z$ 时,$P_Z(z) = 0$

故　　$Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(z + 1)^2 & -1 \leqslant z < 0 \\ -z^2 + z + \frac{1}{2} & 0 \leqslant z < 1 \\ \frac{1}{2}(z - 2)^2 & 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$$

参　考　文　献

[1] 复旦大学编．概率论[M]．北京:高等教育出版社,1979.

[2] 华东师大数学系编．概率论与数理统计习题集[M]．北京:高等教育出版社,1984.

·CH·

Computation of Convolution with Line Drawing

LI Hong-e　ZHU Wen

(Department of Computer Science and Engineering, Sichuan University of Science and Technology, Chengdu 610039 Sichuan China)

Abstract: Convolution plays an important role in many thearetical and technical areas. But it is diffcult to directly compute convolution by its definition. In this paper an effective method to compute convolution is presented, which can be easily operated.

Key words: convolution; dense function; linear graph

简讯

中国科学院专家来校讲学

2001 年 10 月 29～31 日,中国科学院数学与系统研究院陆如钤院士、周龙骧博士导师和陆维明博士导师一行专程来我校访问、讲学。

三位专家学者的川工之行受到罗中先院长的热情欢迎。罗院长亲切会见了三位专家,向他们介绍学校各方面特别是学科建设的情况,诚挚地听取了他们的意见,并陪同他们参观了校园。

陆如钤院士在学术交流中心报告厅作了题为《知识科学及其研究前沿》的专场学术报告,比较系统地阐述了知识科学的发展、应用及获取方法,将知识科学、知识工程和知识产业联系起来,探寻知识科学的未来,引起广大听众的热烈反响。周龙骧博士导师和陆维明博士导师先后以《电子商务及其原子性与匿名性》和《Petri 网系统活性研究》为题作报告,分别介绍了自己所在学术领域的最新动态。三场专题讲座受到全院师生的广泛关注,场场爆满,引发了大家对信息科学的浓厚兴趣,活跃了校园学术气氛。

据了解,计算机系为此次中科院专家的川工之行倾注了极大的热情和努力,三位专家也对计算机科学与工程系的学科建设提出了宝贵的建议:要厚基础,课程设置少而精,充分发挥学生的主动性。专家们还对接受我校的聘请、对计科系的研究生给予指导以及接受我校教师到中国科学院访问、进修等诸多问题达成了初步意向。

摘自《四川工业学院报》总第 225 期