5.3 图的矩阵表示

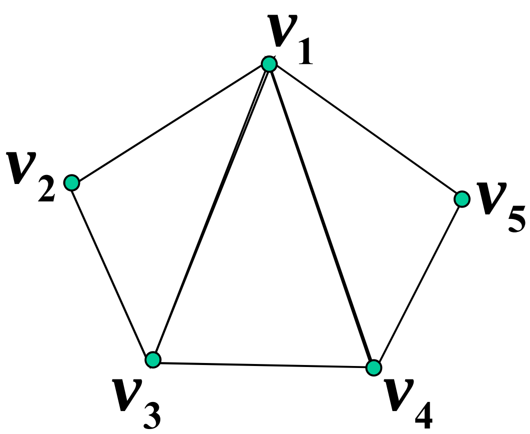
5.3.1 图的邻接矩阵与可达性矩阵

定义22 设 $G=<V,E>$ 是一个简单图，且有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 n 阶方阵 $A(G)=(a_{ij})$ 为 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\ adj\ v_j\\ 0, & v_i\ nadj\ v_j\ or\ i=j\end{cases}$$

（adj表示邻接， nadj表示不邻接）

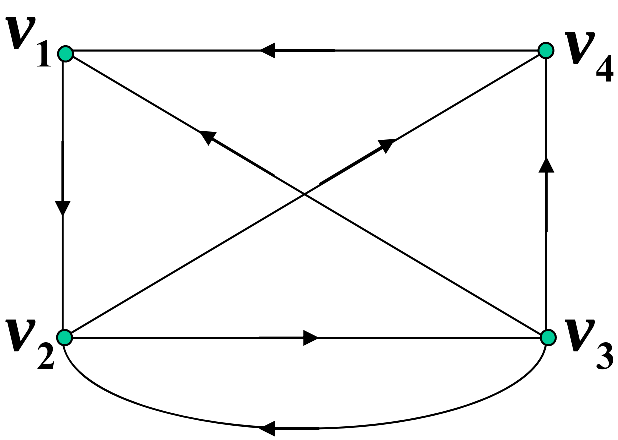
例4　求下列两图的邻接矩阵



(a)

无向图(a)的邻接矩阵

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(*b*)

有向图(*b*)的邻接矩阵

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当给定的简单图是无向图时，邻接矩阵是对称阵；当给定的简单图是有向图时，邻接矩阵不一定是对称阵。

由有向图的邻接矩阵，得到图的以下特征

（1）第i行的元素是由结点v_i射出的边决定的第j列的元素是由射入结点v_j的边决定的，且有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \deg^{+}(v_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \deg^{-}(v_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）若邻接矩阵是零阵，则对应的图是零图；

（3）设邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_n$，则

$$(a_{ij}^{(2)})_n = (A(G))^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$a_{ij}^{(2)}\ (i \neq j)$表示从结点v_i到v_j的长度为2的通路数目；$a_{ii}^{(2)}$表示结点v_i到自身的长度为2的回路数目；以此类推，$a_{ij}^{(l)}\ (i \neq j)$表示从结点v_i到v_j的长度为l的通路数目；$a_{ii}^{(l)}$表示结点v_i到自身的长度为l的回路数目，其中$(a_{ij}^{(l)})_n = (A(G))^l$

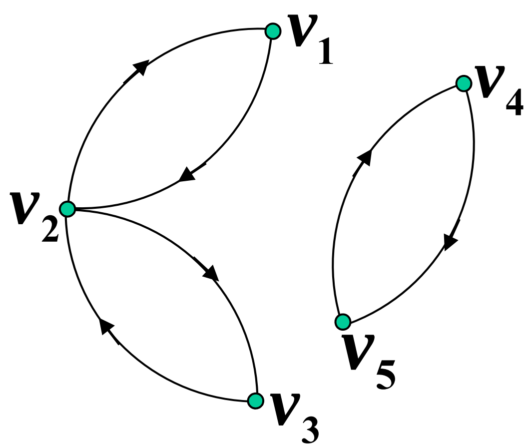
例5　求下图中

（1）结点 v_1 到 v_2 长度为3的通路数目；

（2）结点 v_2 到自身长度为4的回路数目.

解　邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故（1）从结点 v_1 到 v_2 有2条长度为3的通路；

（2）结点 v_2 到自身有4条长度为4的回路。

$(A(G))^l$ 中所有元素之和是

长度为 l 的所有通路和回路的总数目

▲

定义23 设 $G=<V,E>$ 是一个简单有向图，有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 n 阶方阵 $P(G)=(p_{ij})$ 为 G 的**可达性矩阵**，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少有一通路} \\ 0, & v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不存在通路}\end{cases}$$

说明 可达性矩阵表明图中两结点间是否存在通路或回路。

（可达性矩阵的定义可以推广到无向图）

利用邻接矩阵求可达性矩阵的方法

设 $G=<V,E>$ 是一个简单有向图，有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其邻接矩阵为 A，令

$$B_n = A + A^2 + \cdots + A^n$$

再将 B_n 中不为0的元素均改为1，得到的矩阵即为可达性矩阵 P。

例6　设图 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

求其可达性矩阵。

解

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix};\quad A^3=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $B_n = A + A^2 + A^3 + A^4$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

故可达性矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由可达性矩阵知：

图中任意两点均可到达，

且任意结点均有回路。

此图是连通图

事实上，求可达性矩阵可以利用布尔运算

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix};\quad A^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};\quad A^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

由邻接矩阵和可达性矩阵的定义知，两种矩阵有以下特征：

（1）邻接矩阵的元素a_{ij}表示，结点v_i到v_j是否有边存在，若 $a_{ij}=1$，表示有边存在，即有长度为1的通路存在。

（2）可达性矩阵的元素p_{ij}表示，结点v_i到v_j是否有通路存在，若 $p_{ij}=1$，表示存在通路（不一定有边存在）。

5.3.2 图的关联矩阵

定义24 设 $G=<V,E>$ 是一个无向图，且 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$， 称矩阵

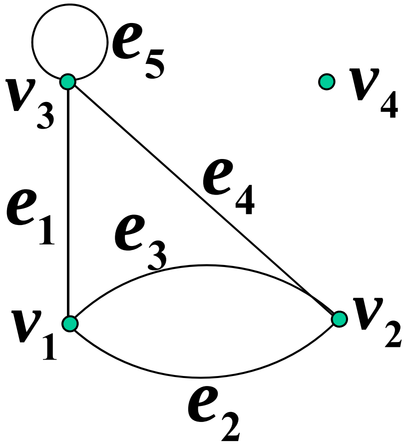
$$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$$

为无向图 G 的关联矩阵。其中

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & v_i \text{与} e_j \text{不关联} \\ 1, & v_i \text{与} e_j \text{关联一次} \\ 2, & v_i \text{与} e_j \text{关联两次}\end{cases}$$

所谓“关联两次”即 e_j 是以 v_i 为端点的环。

例7　写出下图的关联矩阵



解　关联矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由无向图的关联矩阵，得到图的以下性质

（1）$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2\ (j = 1,2,\cdots,m)$，即每条边关联两个结点，环关联的结点重合；

（2）$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \deg(v_i)\ (i = 1,2,\cdots,n)$，即第$i$行元素之和，等于结点$v_i$的度数；

（3）$2m = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)$，握手定理

（4）$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0\ (i = 1,2,\cdots,n) \Leftrightarrow v_i$ 是孤立结点；

（5）若第l列的元素与第k列的对应元素相同，表明e_l与e_k是平行边。

根据图的以上性质，若已知一个无向图的关联矩阵，在同构意义下，均可作出此图。

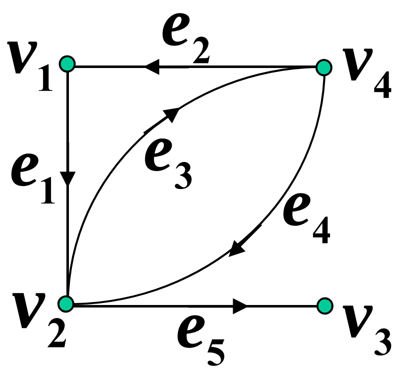
定义25 设 $G=<V,E>$ 是一个简单有向图 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，称矩阵

$$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$$

为有向图 G 的关联矩阵。其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

例8　写出下图的关联矩阵



解　关联矩阵为 $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

由有向图的关联矩阵，得到图的以下性质

（1）$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0\,(j = 1,2,\cdots,m) \Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$

关联矩阵中所有元素之和为0，即在有向图中，所有结点总度数（出度为正、入度为负）的代数和为0；

（2）$\sum_{j=1}^{m}(m_{ij} = 1) = \deg^{+}(v_i)$，$\sum_{j=1}^{m}(m_{ij} = -1) = -\deg^{-}(v_i)$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=\sum_{i=1}^{n}\deg^{+}(v_i)=m$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\deg^{-}(v_i)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)$$

即所有结点的出度之和等于入度之和，且等于边数。

内容小结

1.图的邻接矩阵和可达性矩阵

2.无向图和有向图的关联矩阵

课下练习 P98 习题5.3 1,2,3,4