2.4 逻辑函数的公式化简法

函数的简化依据

- 逻辑电路所用门的数量少
- 每个门的输入端个数少

降低成本

- 逻辑电路构成级数少
- 逻辑电路保证能可靠地工作

提高电路的工作速度和可靠性

1. 6逻辑函数的公式化简法

1.6.1逻辑函数的最简形式

一个逻辑函数的表达式不是唯一的，可以有多种形式，并且能互转换。

$Y_1 = AB + \overline{B}C$ 与-或表达式

$Y_2 = (A + \overline{B})(B + C)$ 或-与表达式

$Y_3 = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{B}C}}$ 与非-与非表达式

$Y_4 = \overline{\overline{A + \overline{B}} + \overline{B + C}}$ 或非-或非表达式

$Y_5 = \overline{\overline{A} \cdot B + \overline{B}\,\overline{C}}$ 与或非表达式

其中，与—或表达式是逻辑函数的最基本表达形式。

逻辑函数的最简“与—或表达式” 的标准

（1）或项最少，即表达式中“+”号最少。

（2）每个与项中的变量数最少，即表达式中“· ”号最少。

1.6.2常用的化简方式

（1）并项法。运用公式，将两项合并为一项，消去一个变量。如

$$A+\bar{A}=1$$

$$Y=A(BC+\bar{B}\bar{C})+A(B\bar{C}+\bar{B}C)=ABC+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+A\bar{B}C=AB(C+\bar{C})+A\bar{B}(C+\bar{C})$$
$$=AB+A\bar{B}=A(B+\bar{B})=A$$

（2）吸收法。

利用公式$A+AB=A$，消去多余的与项。如 $L=A\bar{B}+A\bar{B}(C+DE)=A\bar{B}$

（3）消因子法。

利用公式 $A+\bar{A}B=A+B$，消去多余的因子。如

$$Y=\bar{A}+AB+\bar{B}E=\bar{A}+B+\bar{B}E=\bar{A}+B+E$$

（4）配项法。

先通过乘以 $A+\bar{A}$ 或加上 $A\bar{A}$，增加必要的乘积项，再用以上方法化简。如

$$Y=AB+\bar{A}C+BCD=AB+\bar{A}C+BCD(A+\bar{A})=AB+\bar{A}C+ABCD+\bar{A}BCD=AB+\bar{A}C$$

代数法化简在使用中遇到的困难：

1. 逻辑代数与普通代数的公式易混淆，化简过程要求对所有公式熟练掌握；

2. 代数法化简无一套完善的方法可循，它依赖于人的经验和灵活性；

3. 用这种化简方法技巧强，较难掌握。特别是对代数化简后得到的逻辑表达式是否是最简式判断有一定困难。

2.5 逻辑函数的卡诺图化简

逻辑函数的卡诺图表示法

一、表示最小项的卡诺图

1. 卡诺图:将n变量的所有最小项各用一个小方块表示，使具有逻辑相邻项的最小项在几何位置上也相邻的排列。

2. 相邻性：仅有一个因子不同，其余因子都相同

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$、与 $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻

m_6	m_7

3. 卡诺图的表示（2~4变量）

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

二、用卡诺图表示逻辑函数

1、把逻辑函数化为最小项之和的形式，

2、在卡诺图上与这些最小项对应的位置上填1

3、在其余位置上填入0

[例2.5.1] 用卡诺图表示逻辑函数

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\overline{D}+ACD+A\overline{B}$$

解：首先将Y化为最小项之和的形式

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B(C+\overline{C})\overline{D}+A(B+\overline{B})CD+A(C+\overline{C})(D+\overline{D})\overline{B}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+ABCD$$

$$+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$=m_1+m_4+m_6+m_8$$

$$+m_9+m_{10}+m_{11}+m_{15}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

[例2.5.2] 画出逻辑函数

$L(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 14, 15)$的卡诺图

L *AB* \ *CD*	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

[例2.5.3] 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$$
$$(A+\bar{B}+\bar{C}+D)(A+B+C+D)$$

解 1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\bar{L}=ABCD+AB\bar{C}D+A\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$=\sum m(0,6,10,13,15)$$

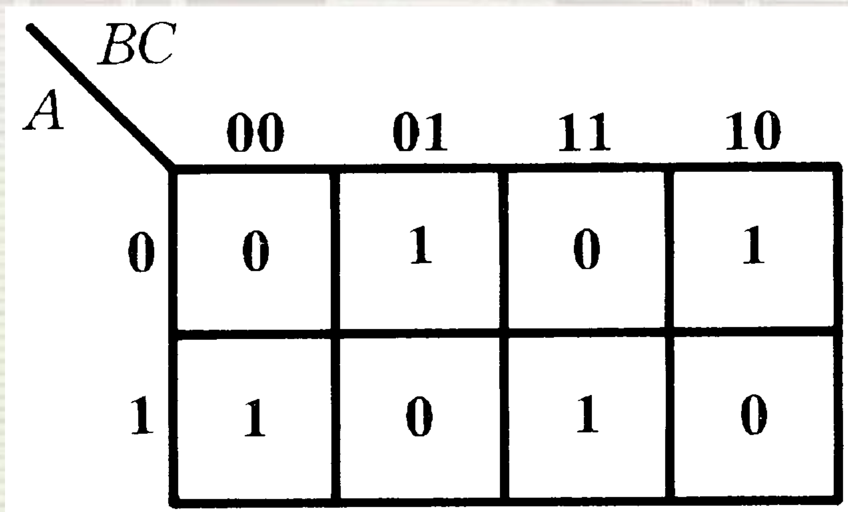
2. 填写卡诺图

L: AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	1	1	0

[例2.5.4]已知一逻辑函数卡诺图如图所示,写出逻辑函数式。

解：先卡诺图中所有为1的位置对应的最小项相加。

$$Y = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC + \overline{A}B\overline{C}$$



例2.5.4的卡诺图

用卡诺图化简逻辑函数

化简原理：具有相邻性的最小项可以合并，并消去不同的因子

一、合并最小项的规则

1、若两个最小项相邻，则可合并为一项并消去一对因子

2、若四个最小项相邻并排成一个矩形组，则可合并为一项并消去两对因子。

3、若八个最小项相邻并排成一个矩形组，则可合并为一项并消去三对因子。

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

二、卡诺图化简的步骤：

1、将函数化为最小项之和的形式

2、画出表示该逻辑函数的卡诺图

3、找出可以合并的最小项

4、选取化简后的乘积项。

画圈的原则：

（1）尽量画大圈，但每个圈内只能含有2^n（n=0, 1, 2, 3……）个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性。

（2）圈内方格数要尽可能多，圈的个数要尽可能少。

（3）卡诺图中所有取值为1的方格均要被圈过，即不能漏下取值为1的最小项。

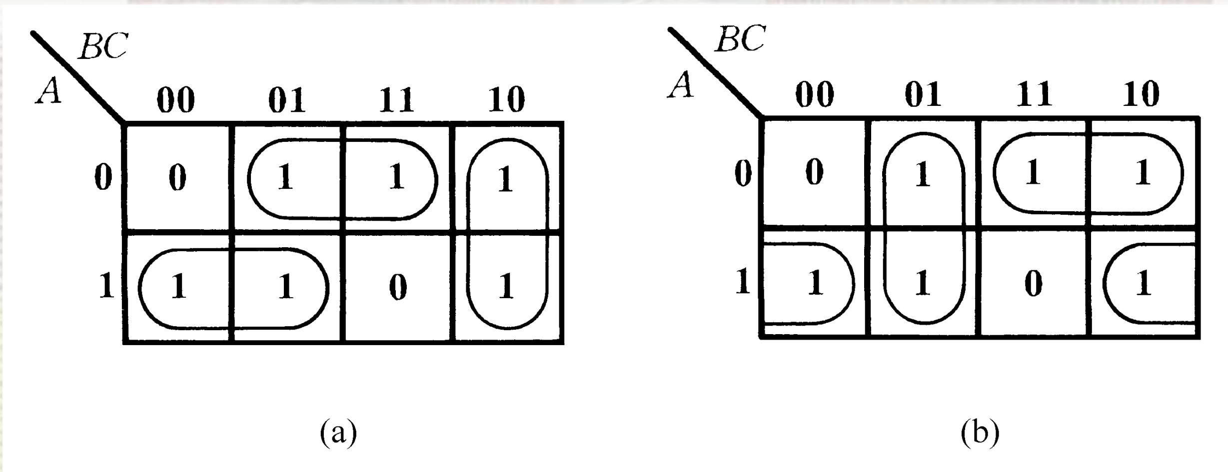
（4）在新画的圈中至少要含有1个未被圈过的1方格，否则该包围圈是多余的。

[例2.5.5]用卡诺图将下式化简为最简的与或表达式

$$Y = A\overline{C} + \overline{A}C + B\overline{C} + \overline{B}C$$

解：$Y = AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$



例2.5.5的卡诺图

得到：$\mathbf{Y = \overline{A}C + A\overline{B} + B\overline{C}}$　　或　　$\mathbf{Y = \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C}$

[例2.5.6] :用卡诺图法化简下列逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$$

解：(1) 由L 画出卡诺图

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$$L=BD+\overline{B}\,\overline{D}$$

[例2. 5. 7]： 用卡诺图化简

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim 3,5\sim 7,8\sim 11,13\sim 15)$$

圈1

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$\overline{B}$

C

D

$$L=D+C+\overline{B}$$

圈0

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$$\overline{L}=B\overline{C}\overline{D}$$

$$L=D+C+\overline{B}$$

[例2.5.8] 用卡诺图化简法将下式化为最简与-或逻辑式

$$Y = ABC + ABD + A\bar{C}D + \bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C + \bar{A}C\bar{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

例2.5.8的卡诺图

圈“1”时，得：$Y = A + \bar{D}$

圈“0”时，得：$\bar{Y} = \bar{A}D$,

$Y = \overline{\overline{Y}} = A + \bar{D}$

这说明，如果合并0，可以方便地得到最简的与或非表达式