代数系统部分作业 (答案)

姓名：____________班级：____________学号：____________班级序号：____________

一. 填空

1. 令 $Z_4=\{0,1,2,3\}$，$+_4$ 表示模 4 加法，则在模 4 加群 $<Z_4,+_4>$ 中，2 的阶数是____2____，3 的阶数是____4____。

2. 设 A={a，b，c，d}，A 上二元运算如下：

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统 $<A,*>$ 的幺元是____a____，b 的逆元为____d____，c 的逆元为____c____。

3. 以下两个置换是 S_5 中的置换，其中

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&3&1\end{pmatrix}$$

α 表示成不交的轮换之积为 $\alpha=$ ____(124) (35)____，

以不交的轮换之积形式写出 $\alpha\circ\beta=$____(13452)____。

4. 下列说法错误的是____C E____。

   A. 在群中消去率成立；B. 域一定是整环；C. $<Z,+,\times>$ 是域，其中 Z 是整数集；

   D. 设 S={1,2}，则 S 在普通加法和普通乘法运算下都不封闭；E. 阶数大于 1 的群中可能存在零元。

5. 设 S 是非负整数集，$\times$ 是关于数的普通乘法运算，则____B____。

   A．$<S,\times>$ 是群；B．$<S,\times>$ 是有幺元的半群；

   C．$<S,\times>$ 是无幺元的半群；D．$<S,\times>$ 不是群，也不是半群。

6. 在 S_3 中，元素 $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 的阶数是____3____。

二. 证明与解答

1. 设 $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$，$+_6$为模6加法运算。证明：Z_6 与$+_6$运算构成群。

证明：

(1) $\forall a,b\in Z_6$，$a+_6 b\in Z_6$，所以运算$+_6$ 在集合 Z_6 上是封闭的。

(2) $\forall a,b,c\in Z_6$，有 $(a+_6 b)+_6 c=a+_6(b+_6 c)$，故运算$+_6$是可结合的。

(3) $\forall a\in Z_6$，$a+_6 0=0+_6 a=a$，故 0 是幺元。

(4) 0 的逆元是 0，对于除 0 外任一元素 $a\in Z_6$，因为 $a+_6(6-a)=(6-a)+_6 a=0$，因此 $6-a$ 是 a 的逆元。

由此可知 Z_6 与$+_6$ 运算构成群。

2. （8 分）设 Z 为整数集合，$V=<Z,*>$，$*$ 是二元运算，定义为对任意的 $x,y\in Z$，有 $x*y=x+y-2$。请证明：V 是群。

证明：（1）因为对于 Z 中的任意两个元素 x 与 y，满足 $x*y=x+y-2\in Z$，即*运算在 Z 上封闭；

（2）*运算可结合，对任意 x、y、$z\in Z$

$x*(y*z) = x*(y+z-2) = x+y+z-2-2=x+y+z-4$

$(x*y)*z = (x+y-2)*z = x+y-2+z-2= x+y+z-4$

所以 $x*(y*z)= (x*y)*z$；

（3）对 Z 中的任意元素 x，因为 $2*x=2+x-2=x$，$x*2=x+2-2=x$，所以*运算的幺元是 2；

（4）任意 $x\in Z$，$x*(4-x)= (4-x)*x=2$，所以 x 的逆元为 $4-x$。

由上述可知，$V=<Z,*>$ 是群。

3. $<Z_6,+_6>$ 是一个群，这里$+_6$ 是模 6 加法，$Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$，试求出 $<Z_6,+_6>$ 的所有子群及其相应陪集。

解: 取 Z_6 的子集 $S_1=\{0\}$，$S_2=\{0,3\}$，$S_3=\{0,2,4\}$，$S_4=\{0,1,2,3,4,5\}=Z_6$

子群有 $<\{0\},+_6>$；$<\{0,3\},+_6>$；$<\{0,2,4\},+_6>$；$<\{0,1,2,3,4,5\},+_6>$

$<\{0\},+_6>$ 的陪集：{0}；{1}；{2}；{3}；{4}；{5}

$<\{0,3\},+_6>$ 的陪集：{0，3}；{1，4}；{2，5}

$<\{0,2,4\},+_6>$ 的陪集：{0，2，4}；{1，3，5}

$<\{0,1,2,3,4,5\},+_6>$}的陪集：{0，1，2，3，4，5}

4. 设 Z 为整数集合，$V=<Z,*>$，*是二元运算，定义为：$x*y=x+y-xy$.请证明：V 是含幺半群而不是群。

证明：（1）*运算在 Z 上封闭；

（2）*运算可结合，对任意 a、b、$c\in Z$

$a*(b*c) = a*(b+c-bc) = a+b+c-bc-a(b+c-bc) = a+b+c-ab-ac-bc+abc$

$(a*b)*c = (a+b-ab)*c = a+b-ab+c-(a+b-ab)c = a+b+c-ab-ac-bc+abc$

所以 $a*(b*c) = (a*b)*c$；

（3）*运算的幺元是 0；

（4）任意 $x\in Z$，$x*1=1*x=1$，所以 1 是零元，它没有逆元。

由上述可知，故 $V=<Z,*>$ 是含幺半群而不是群。