4.4 陪集与拉格朗日定理

4.4.1 陪集

定义14 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，且 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$，$\forall g\in G$，集合 $\{g*h_1,g*h_2,\cdots,g*h_n\}$ $(\{h_1*g,h_2*g,\cdots,h_n*g\})$ 称为 g 关于子群 $<H,*>$ 的左（右）陪集，记作 $g*H$ $(H*g)$，若左、右陪集相等，称其为关于子群 $<H,*>$ 的陪集。

例15 写出群$<N_{12},+_{12}>$中各元素关于子群$<\{0,4,8\},+_{12}>$的陪集。

解 $N_{12}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$，令$H=\{0,4,8\}$，运算满足交换律，故所求陪集为

$$0+_{12}H=\{0+_{12}0,0+_{12}4,0+_{12}8\}=\{0,4,8\}$$

$$1+_{12}H=\{1+_{12}0,1+_{12}4,1+_{12}8\}=\{1,5,9\}$$

$$2+_{12}H=\{2+_{12}0,2+_{12}4,2+_{12}8\}=\{2,6,10\}$$

$$3 +_{12} H = \{3 +_{12} 0, 3 +_{12} 4, 3 +_{12} 8\} = \{3, 7, 11\}$$

同理可得

$$4 +_{12} H = 8 +_{12} H = \{0, 4, 8\} = 0 +_{12} H$$

$$5 +_{12} H = 9 +_{12} H = \{1, 5, 9\} = 1 +_{12} H$$

$$6 +_{12} H = 10 +_{12} H = \{2, 6, 10\} = 2 +_{12} H$$

$$7 +_{12} H = 11 +_{12} H = \{3, 7, 11\} = 3 +_{12} H$$

引理1 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，$\forall h_i \in H$，则 $h_i * H = H * h_i = H$

证明 设 $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$

$$h_i * H = \{h_i * h_1, h_i * h_2, \cdots, h_i * h_n\}$$

由于运算$*$对H封闭，所以 $h_i * h_1, h_i * h_2, \cdots, h_i * h_n$ 均属于H，由群的消去律知 $h_i * h_1, h_i * h_2, \cdots, h_i * h_n$ 均不同，故 $h_i * H = H$，同理可证 $H * h_i = H$ 证毕

例15中 $0+_{12}H=4+_{12}H=8+_{12}H=\{0,4,8\}=H$

引理2 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，对 $a\in G,h\in H$，有 $(a*h)*H=a*H$

证明 由于运算$*$满足结合律，故

$$(a*h)*H=a*(h*H)$$

由引理1知 $h*H=H$，所以

$$(a*h)*H=a*H$$ 证毕

引理3 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，$a,b\in G$，则$a*H$与$b*H$或者相等，或者互不相交。

证明 只需证明当$a*H$和$b*H$有公共元d时，$a*H=b*H$

设$H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$，由d是$a*H$和$b*H$的公共元，所以存在$h_i,h_j\in H$，使得

$$d=a*h_i=b*h_j$$

得 $$a*h_i*h_j^{-1}=b*h_j*h_j^{-1}=b$$

由于运算 $*$ 对 H 封闭，则 $h_i*h_j^{-1}\in H$，不妨设

$h_i*h_j^{-1}=h_k\in H$，由引理2知

$$b*H=(a*h_k)*H=a*(h_k*H)=a*H$$

故当 $a*H$ 和 $b*H$ 有公共元时，$a*H=b*H$；

否则 $a*H\cap b*H=\Phi$ 。证毕

4.4.2 拉格朗日定理

定理14 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，若$|G|=m$，$|H|=n$，则$n\,|\,m$。

——拉格朗日定理

证明 由于群中运算满足消去律，$\forall a \in G$，其左陪集中的元素有$a*h_i \neq a*h_j$ $(h_i,h_j \in H, h_i \neq h_j)$由此知左陪集$a*H$和子群$<H,*>$中的元素个数相等，即$|a*H|=|H|=n$.

又因为H中含有幺元，所以 $a \in a * H$，这说明 G 中的任意元素必属于某个左陪集。

由于群 $<G,*>$ 中有m个元素，共有m个左陪集，由引理3知，这些左陪集或相等或不交在相等的左陪集中仅取一个，得到k个两两不交的左陪集，不妨设为 $a_1 * H, a_2 * H, \cdots, a_k * H$，则这些左陪集满足：

（1）$(a_1 * H) \cup (a_2 * H) \cup \cdots \cup (a_k * H) = G$;

（2）$(a_i * H) \cap (a_j * H) = \Phi\ (i \neq j)$;

（3）$|a_i * H| = |H| = n\ (i = 1, 2, \cdots, k)$.

由此可知，这 k 个左陪集是 G 的一个划分，则 $|G|/|H| = m/n = k$，即 $n \mid m$。证毕

定理表明

子群存在时，子群的阶数一定是原群阶数的因子

其逆不真

例16 设$<G,*>$是具有12个元素的置换群，其12个元素分别为

$$a_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

$$a_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$a_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},a_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$a_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},a_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$

$$a_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},a_{10}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$

$$a_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},a_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

讨论其是否存在6阶子群。

解　群 $<G,*>$ 中，a_1 是幺元，a_1, a_4, a_9, a_{12} 的逆元是自身，a_2 与 a_3 互逆，a_5 与 a_7 互逆，a_6 与 a_{10} 互逆，a_8 与 a_{11} 互逆，a_4, a_9, a_{12} 是2阶元，$a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}$ 是3阶元。

下面讨论6阶群的一般情况：已经研究表明6阶群只有两种，一种是循环群，另一种是3元对称群，下面分别讨论：

对于6阶循环群，其中必有一个元素为6阶元（生成元），由于$<G,*>$中无6阶元，故它没有6阶循环子群。

对于3元对称群，设其6个元素为

$$b_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$b_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},b_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},b_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

前例14 $S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，其运算表如下

$\circ$	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	(1)	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	(1)	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	(1)	(123)

$< S_3 \circ >$为 $S = \{1,2,3\}$ 上的 3 元对称群。

其中 b_1 是幺元，b_1, b_2, b_3, b_6 的逆元是自身，b_4 与 b_5 互逆，b_2, b_3, b_6 是2阶元，b_4, b_5 是3阶元。

由此可见，若 $<G,*>$ 中存在此结构的6阶子群，G 中必存在含有6个元素的子集，其中1个元素为幺元，3个元素是2阶元，2个元素是3阶元，且 $*$ 对该子集是封闭的。但在 G 中找不到这样的子集关于运算 $*$ 构成群，因此 $<G,*>$ 中没有6阶对称子群，故 $<G,*>$ 中没有6阶子群。

由拉格朗日定理得到以下结论

推论1 设$< G,* >$是一个m阶群，$a \in G$，且a是k阶元，则$k|m$。

证明 由于a是k阶元，令

$$H = \{a, a^2, \cdots, a^k = e\}$$

则$< H,* >$构成$< G,* >$的k阶子群，由拉格朗日定理知，$k|m$. 证毕

推论2 设$<G,*>$是一个m阶群，$\forall a\in G$，则$a^m=e$。

证明 设元素a的阶数为k，由推论1知，$k\mid m$，即$m=pk$ (p是正整数)，故

$$a^m=a^{pk}=(a^k)^p=e^p=e$$ 证毕

推论3 素数阶群没有非平凡子群。

证明 由拉格朗日定理知，子群的阶数一定是原群阶数的因子，而素数的因子只有1和它本身，故素数阶群只能有平凡子群。证毕

推论4 素数阶群必是循环群，且除幺元外其余元素均为生成元。

证明 设 $<G,*>$ 是一个素数 p 阶群, a 是 G 中的非幺元，由推论1知，元素 a 的阶数是群的阶数 p 的因子，由于 p 是素数, 只有因子1和 p, 故非幺元 a 的阶数为 p，因此 a 是生成元，且 $<G,*>$ 是循环群。 证毕

拉格朗日定理表明，m 阶群若有 n 阶子群时，一定有 $n \mid m$ ；可群不一定有其因子阶数的子群，但对循环群有下面定理：

定理15 设$<G,*>$是一个m阶循环群，且$n|m$，则$<G,*>$必有n阶循环子群。

证明 设$<G,*>$是一个m阶循环群，生成元为a，则$G=\{a,a^2,\cdots,a^m=e\}$，若$n|m$，令$m=kn$，取$H=\{a^k,a^{2k},\cdots,a^{nk}=e\}$，易知$*$对$H$封闭，故$<H,*>$是$<G,*>$的$n$阶循环子群，生成元为$a^k$。证毕

例　在12阶循环群$<N_{12},+_{12}>$中，有

2阶循环子群 $<\{0,6\},+_{12}>$

3阶循环子群 $<\{0,4,8\},+_{12}>$

4阶循环子群 $<\{0,3,6,9\},+_{12}>$

6阶循环子群 $<\{0,2,4,6,8,10\},+_{12}>$

12阶循环子群 $<N_{12},+_{12}>$

内容小结

1.陪集的概念

2.拉格朗日定理及其应用

课下练习 P70 习题4.4 1,2,3,4,5,6