第三部分 图论

第5章 图的一般概念与性质

- 图的基本概念
- 连通性与赋权图的最短路径
- 图的矩阵表示

第6章 几种特殊的图

- 欧拉图与哈密尔顿图
- 二部图
- 平面图
- 树

1736年数学家欧拉发表了第一篇图论论文解决了哥尼斯堡七桥问题。

图论起源于一些数学游戏，如迷宫问题、匿门博弈问题、棋盘上马的行走路线、哥尼斯堡七桥问题等，在这些问题的研究基础上，又提出了著名的四色问题、哈密尔顿图（环游世界）等数学难题。

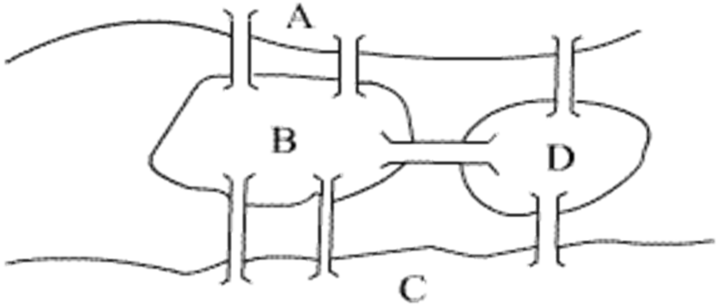
1847年克希霍夫用图论分析电路网络，最早将图论应用于工程科学。

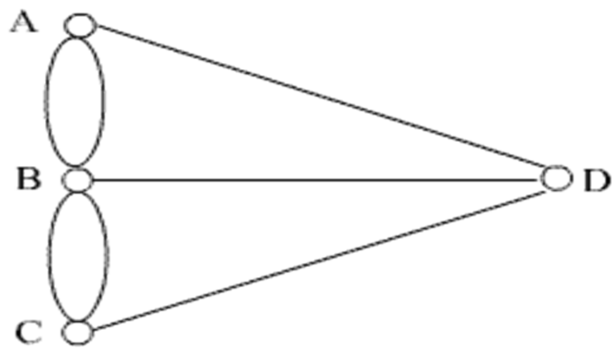
图论的应用非常广泛，主要有运筹学、网络理论、信息论、控制论、博奕论及计算机科学等领域。

哥尼斯堡七桥问题

每逢假日，城中居民进行环城游玩，就产生了一个问题：能不能设计一次‘遍游’，使得从某地出发，对每座跨河桥只走一次，而在遍历了七座桥之后，又能回到原地。

城中四个陆地部分分别用A、B、C、D表示，将陆地设想为图的结点，将桥画成相应的边则问题等价于：在图中从某一结点出发，找一条通路，通过它的每条边一次且仅一次，并回到原结点。





第5章 图的一般概念与性质

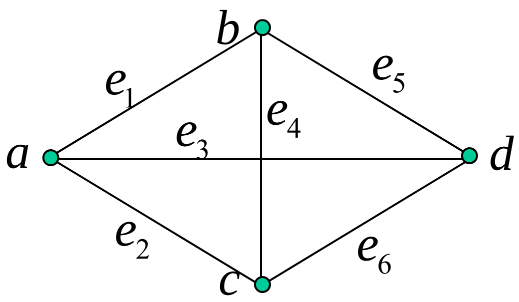
5.1 图的基本概念

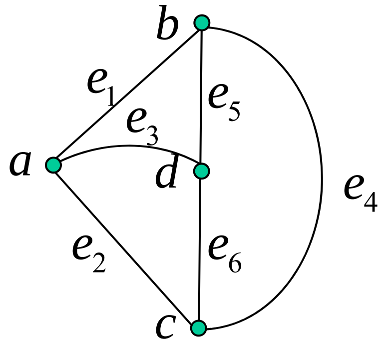
5.1.1 图

定义1 一个三元数组 $<V(G),E(G),\varphi_G>$，其中$V(G)$是一个非空的点集合，其元素称为**结点**（或**顶点**），$E(G)$是边的集合，φ_G是从边到点集合上的函数，称此三元数组为**图**G。

一个图是由一些结点和连接两个结点之间的边所组成的,与连线的长度及结点的位置无关

例1 下面两图是相同的





$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$\varphi_G = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$

因为点、边及对应关系均相同。

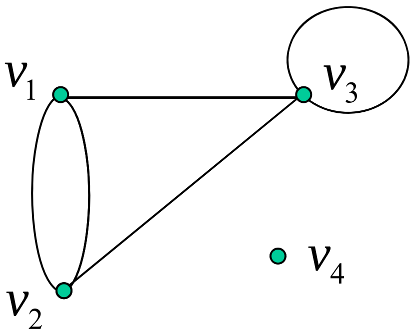
若将图中的边 e_i 总看作与两个结点关联，那么一个图也可简记为 $G=<V,E>$，其中V是非空结点集，E是连接结点的边集，若 $|V|=n$，$|E|=m$，称图G为 (n,m) 图，也称为n阶图。

5.1.2 无向图与有向图

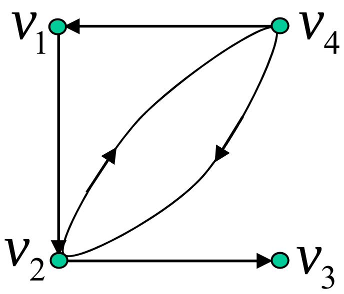
定义2 若边 e_i 与结点无序偶 (v_j, v_k) 相关联称该边为无向边；若边 e_i' 与结点有序偶 $<v_j, v_k>$ 相关联，称该边为有向边，其中 v_j 为起点，v_k 为终点。

定义3 每条边均为无向边的图称为无向图每条边均为有向边的图称为有向图，既有有向边又有无向边的图称为混合图。

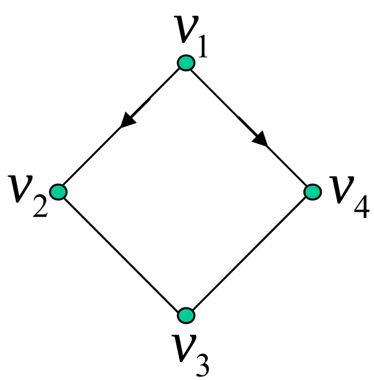
如图所示



无向图



有向图



混合图

本教材只讨论无向图和有向图。

定义4 在一个图中，若两个结点由无向边或有向边关联，称这两个结点为**邻接点**。不与任何结点相邻接的点称为**孤立结点**，仅由孤立结点构成的图称为**零图**，只有一个孤立结点的图称为**平凡图**。

定义5 在一个图中，关联同一结点的两条边称为**邻接边**，关联同一结点的一条边称为**自回路**（或**环**）。

5.1.3 结点的度数

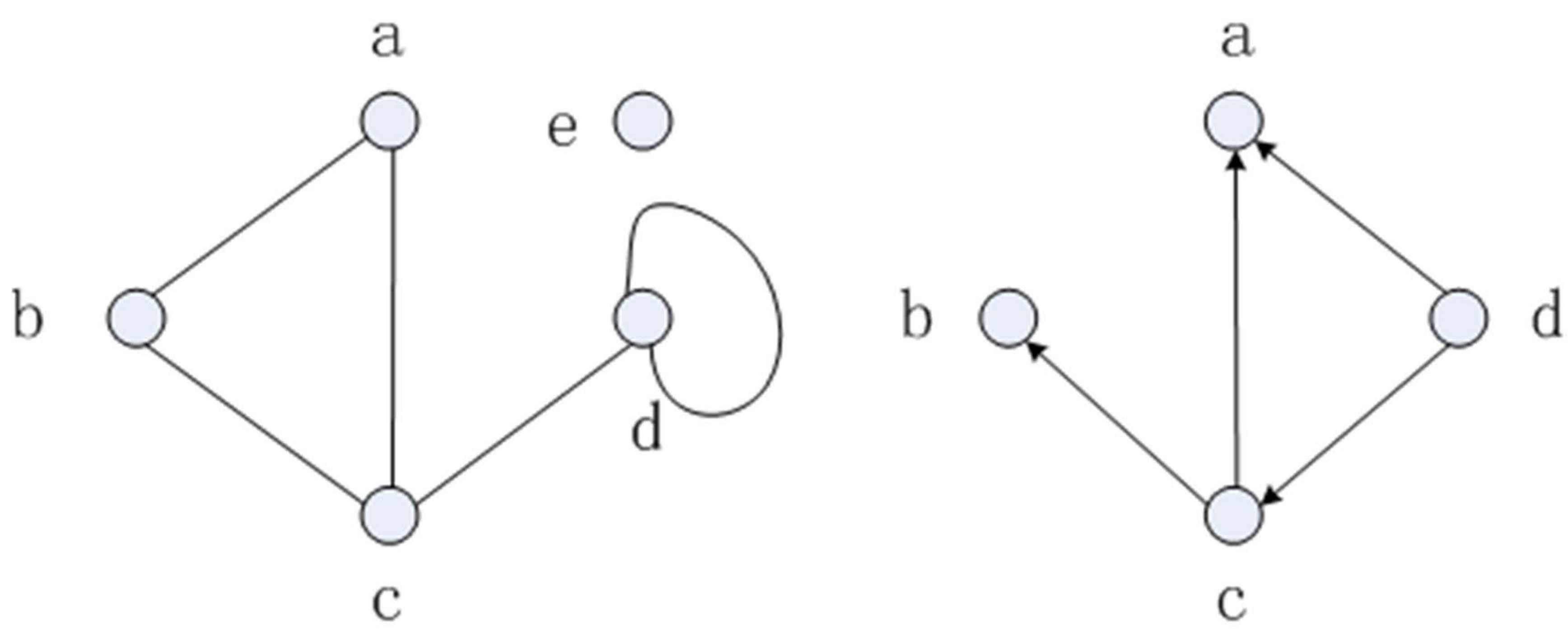
定义6 在图 $G=<V,E>$ 中，与结点 $v(v\in V)$ 关联的边数，称为该点的度数，记为 $\deg(v)$ 。

记 $\Delta(G)=\max\{\deg(v)\mid v\in V(G)\}$

$\delta(G)=\min\{\deg(v)\mid v\in V(G)\}$

分别称为图 $G=<V,E>$ 的**最大度数**和**最小度数**。

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 $\{\deg(v_1),\deg(v_2),\cdots,\deg(v_n)\}$ 为图 G 的**度数序列**。



(1) (2)

规定在计算度数时，环算两度

定理1 任何一个图 $G=<V,E>$, 其结点度数总和，等于边数的两倍，即

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$ （**Handshaking 握手定理**）

证 由于每条边必关联两个结点，而每条边给予关联的每个结点的度数为1，因此在一图中，结点度数的总和等于边数的两倍。证毕

定理2 在任何图中，度数为奇数的结点必是偶数个。

证 设V_1,V_2分别为图中奇数度数和偶数度数的结点集合，由握手定理有

$$\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

由于$\sum_{v\in V_2}\deg(v)$是偶数之和，必是偶数，$2|E|$也是偶数，故$\sum_{v\in V_1}\deg(v)$是偶数，但它是奇数之和，因此奇数的个数一定是偶数个。证毕

例2 （1）给定两个序列 **(1,1,2,2,3)** 和 **(1,3,4,4,5)**，问是否可以构成图的度数序列？

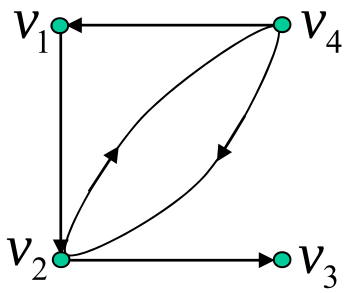
（2）已知图 ***G*** 中有10条边，4个3度结点，其余结点的度数均不超过2，问 ***G*** 中至少几个结点？

解 （1）由于这两个序列结点度数之和均为奇数，不满足握手定理，所以不能构成图的度数序列。

（2）图中边数为 $|E|=10$，由握手定理知图中结点度数之和为20，4个3度结点占去12，其余结点按2度计算，剩余8度需要4个结点，故图中至少有 $4+4=8$ 个结点。

定义7 在有向图中，射入一个结点 v_i 的边数称为该结点的**入度**，记为 $\deg^-(v_i)$；射出一个结点v_j的边数称为该结点的**出度**，记为 $\deg^+(v_j)$

例　下图中　$\deg^-(v_1)=1$，　$\deg^+(v_1)=1$



$\deg^-(v_2)=2$，　$\deg^+(v_2)=2$

$\deg^-(v_3)=1$，　$\deg^+(v_3)=0$

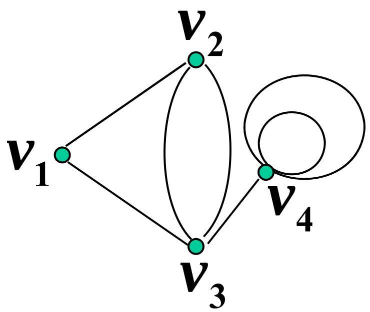
$\deg^-(v_4)=1$，　$\deg^+(v_4)=2$

定理3　在任何一个有向图中，所有结点的入度之和等于出度之和，且等于边数。

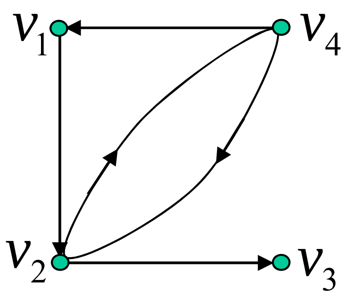
证　由于每条有向边必对应一个入度和一个出度，若一个结点具有一个入度或一个出度它必关联一条有向边，所以有向图中各结点入度或出度之和都等于边数。证毕

定义8 在图中，关联一对结点的边若多于一条，称这些边为**平行边**；含有平行边的图称为**多重图**；不含平行边和环的图称为**简单图**

例 如图所示



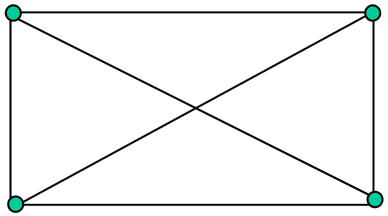
多重图



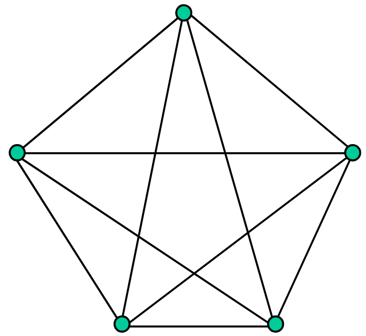
简单图

5.1.4 完全图与子图

定义9 简单图$G=<V,E>$中，若每对结点间都有边关联，称该图为完全图，n阶无向完全图记为K_n。



K_4



K_5

定理4 n 阶无向完全图 K_n 的边数等于

$$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

证 在 K_n 中，任意两个不同的结点间均有一条边连接，n 个结点中取任意两个的组合数，就是 K_n 的边数，即

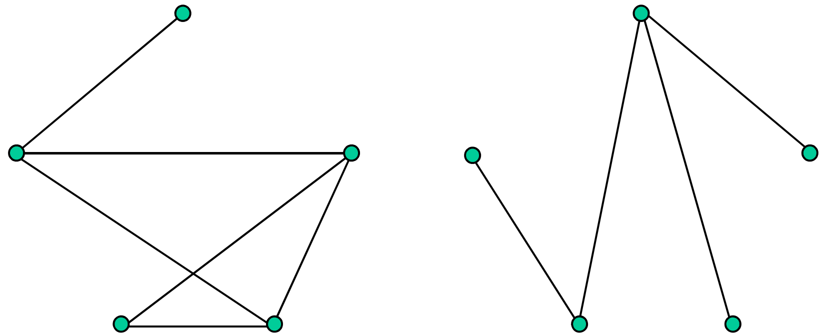
$$|E| = C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$ 证毕

K_4 的边数 $C_4^2 = 6$

K_5 的边数 $C_5^2 = 10$

定义10 由图G中所有结点，以及所有能使图G成为完全图的添加边构成的图，称为图G相对于完全图的补图，简称补图，记为$\overline{G}$。

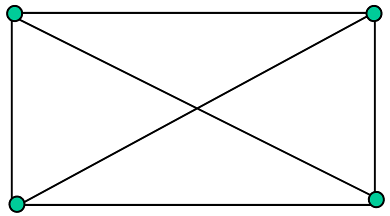
例 如图所示



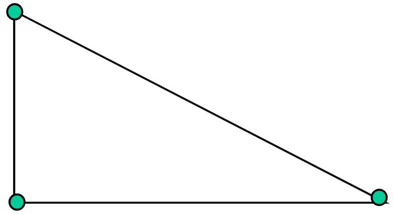
这两个图互为补图。

定义11 设图 $G=<V,E>$，存在图 $G'=<V',E'>$ 且 $E'\subseteq E$，$V'\subseteq V$，称 G' 为 G 的子图。如果 G 的子图包含 G 的所有结点，称该子图为 G 的生成子图。

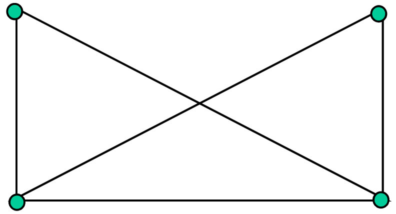
例 如图



(a)



(b)



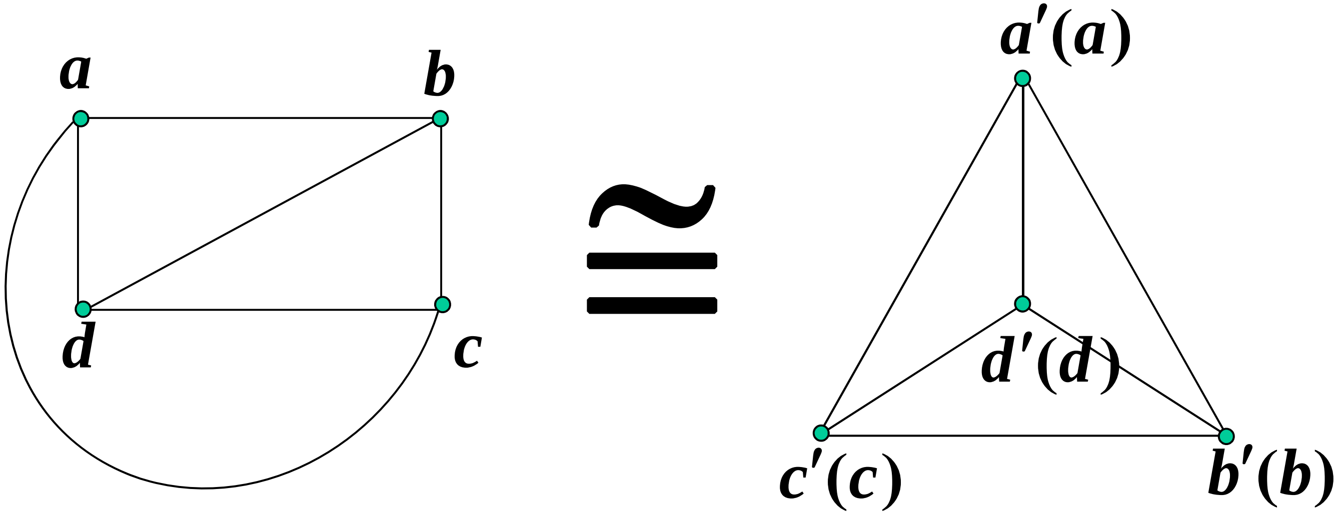
(c)

(b) 和 (c) 均为 (a) 的子图，其中 (c) 是其生成子图。

5.1.5 图的同构

定义12 设图 $G=<V,E>$ 及图 $G'=<V',E'>$ 若存在一一对应的映射 $g:v_i \rightarrow v_i'$，且 $e=(v_i,v_j)$（或 $e=<v_i,v_j>$ ）是G 的一条边，当且仅当 $e'=(g(v_i),g(v_j))$（或 $e'=<g(v_i),g(v_j)>$ 是 G' 的一条边，称 G 与 G' **同构**，记为 $G \cong G'$ 。

例　下面两个图同构



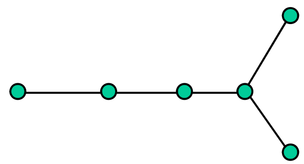
两图同构的必要条件（非充分）

（1）结点数相同

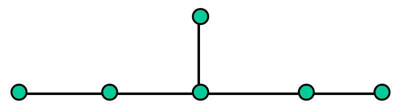
（2）边数相同

（3）度数相同的结点数相同

下列两图满足必要条件



(*a*)



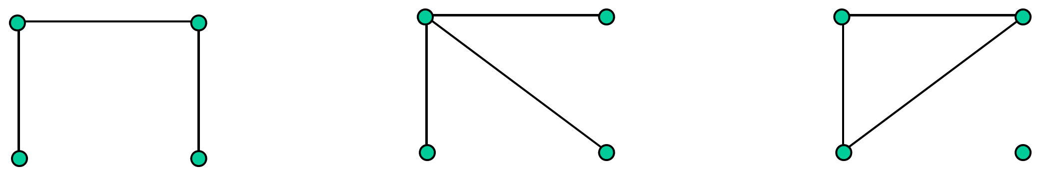
(*b*)

但不同构

例3（1）画出4个顶点3条边的所有可能非同构的无向简单图；

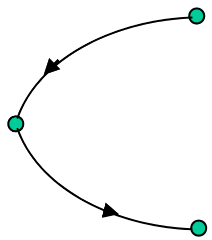
（2）画出3个顶点2条边的所有非同构的有向简单图。

解　（1）所有满足要求的图如下

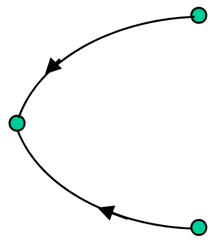


(a)　　***(b)***　　**(*c*)**

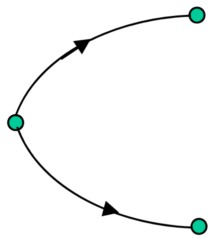
（2）所有满足要求的图如下



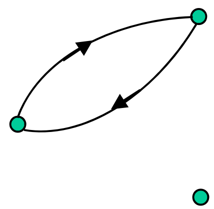
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

内容小结

1.图的一些基本概念

2.利用握手定理解题

3.判断两个简单图同构

课下练习 P86 习题5.1 1,2,3,4,6,9,11,12