习题 4.1 6 设$< A,* >$是一个半群，而且对于 A 中的元素a,b，若$a \neq b$，必有$a*b \neq b*a$,试证明：(1) 对任意的$x \in A$，有$x*x=x$。(2) 对任意的$x,y \in A$，有$x*y*x=x$。(3) 对任意的$x,y,z \in A$，有$x*y*z=x*z$。

证明：由题意，对于A中的元素a,b，若$a*b=b*a$，必有$a=b$。

(1) 对任意的$x \in A$，由半群满足结合律，$(x*x)*x=x*(x*x)$。所以$x*x=x$。

(2) 对任意的$x,y \in A$， $(x*y*x)*x=x*y*(x*x)=x*y*x$

且$x*(x*y*x)=(x*x)*y*x=x*y*x$，即$x*(x*y*x)=(x*y*x)*x$，所以$x*y*x=x$。

(3) 对任意的$x,y,z \in A$,$(x*y*z)*(x*z)=x*y*(z*x*z)=x*y*z$

且$(x*z)*(x*y*z)=(x*z*x)*y*z=x*y*z$，

即$(x*y*z)*(x*z)=(x*z)*(x*y*z)$，所以$x*y*z=x*z$。

习题4.2 第3和6题·题面微变

设<G，*>是一个群，则<G，*>为交换群的充分必要条件是：对$\forall a$，$b \in G$，有$(a*b)^2 = a^2*b^2$

证明 "⇒" 对$\forall a$，$b \in G$，由于运算"*"是可交换的，所以有：

$(a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*(b*a)*b$

$= a*(a*b)*b = (a*a)*(b*b) = a^2*b^2$。

"⇐" 对$\forall a$，$b \in G$，若有$(a*b)^2 = a^2*b^2$，则：

$(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b)$，

$\rightarrow a*(b*a)*b = a*(a*b)*b$，

由消去律知：$b*a = a*b$，

所以，运算"*"满足交换律，即群<G, *>是交换群。

习题 4.2 4 $<G,*>$是半群，e是左幺元，且对每一个$x\in G$，存在$\hat{x}\in G$，使得$\hat{x}*x=e$。证明：(1) 对任意的$a,b,c\in G$，若$a*b=a*c$，则$b=c$。

(2) $<G,*>$是一个群。

证明：(1) 对任意的$a,b,c\in G$，存在$\hat{a}\in G$，使得$\hat{a}*a=e$。若$a*b=a*c$，则$\hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c)$，由$<G,*>$是半群，有$(\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c$，即$e*b=e*c$，又因为$e$是左幺元，所以$b=c$。

(2) $\forall a\in G$,有$\hat{a}*a*e=e*e=e=\hat{a}*a$，由(1),有$a*e=a$，所以$e$是幺元。

$\forall a\in G$，存在$\hat{a}\in G$，使得$\hat{a}*a=e$，有$\hat{a}*a*\hat{a}=e*\hat{a}=\hat{a}*e$，由(1)有$a*\hat{a}=e$，所以$\hat{a}$是$a$的逆元。综上，由群的定义，$<G,*>$是一个群。

习题 4.2 5 设 $<G,*>$ 是一个群，对任一 $a\in G$，令 $H=\{y \mid y*a=a*y, y\in G\}$，试证明：$<H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群。

证明：对任意的 $x,y\in H$，有 $x*a=a*x$ 和 $y*a=a*y$，则 $y^{-1}*y*a*y^{-1}=y^{-1}*a*y*y^{-1}$，所以有 $a*y^{-1}=y^{-1}*a$，进一步有

$$(x*y^{-1})*a=x*(y^{-1}*a)=x*(a*y^{-1})=(x*a)*y^{-1}=(a*x)*y^{-1}=a*(x*y^{-1})$$

所以 $x*y^{-1}\in H$，故 $<H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群。

本题应用了定理4.12