7.3 等值演算

7.3.1 等值公式

给定$n(n \geq 1)$个命题变元，按合式公式的形成规则，可以得到无数多个命题公式，但有些公式具有相同的真值，例如在$n = 2$时，

$$P \to Q,\quad \neg P \vee Q,\quad \neg(P \wedge \neg Q)$$

这三个公式真值相同，因此可以认为它们本质上是一个公式。

事实上，n 个命题变元，只能生成 2^{2^n} 个真值不同的命题公式。

定义12　设 A,B 是两个命题公式，若 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，称 A 与 B 是等值的，记为 $A \Leftrightarrow B$ 。

说明　（1）定义中的 $\Leftrightarrow$ 不是联结词，只是 A 与 B 等值的记号。

（2）公式的等值关系是一个等价关系。

判断公式等值 ——真值表

构造真值表可用下列两种方法:

方法一：作出 $A \leftrightarrow B$ 的真值表，若其最后一列全为 T，则 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，故 $A \Leftrightarrow B$。

方法二：在同一个真值表中，分别作出 A 和 B 两列，若在任何一组指派下，这两列的真值相同，说明 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，故 $A \Leftrightarrow B$。

例3 判断下列命题公式是否等值

(1) $\neg(P\vee Q)$ 与 $\neg P\vee\neg Q$

(2) $\neg(P\vee Q)$ 与 $\neg P\wedge\neg Q$

解 （1）作出两公式的真值表

P	Q	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P\vee\neg Q$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T

不是在所有指派下真值相同,故两公式不等值。

（2）作出两公式的真值表

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

在所有指派下，两公式的真值均相同，故两公式**等值**。

例4　证明：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

解　作出真值表

P	Q	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

表中最后一列均为 T，故两公式等值。

下面给出了24个等值式（用真值表证明）

1. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ （对合律）

2. $A \Leftrightarrow A \vee A$； 3. $A \Leftrightarrow A \wedge A$ （等幂律）

4. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$， 5. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ （交换律）

6. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
7. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ （结合律）

8. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ （分配律）

$10. \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

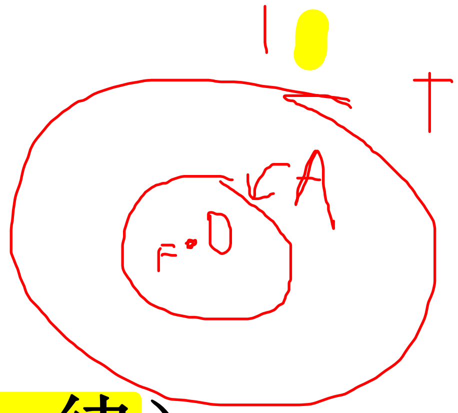
$11. \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

（德·摩根律）

$12. A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$13. A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

（吸收律）



$14. A \vee T \Leftrightarrow T$； $15. A \wedge F \Leftrightarrow F$ （零一律）

$16. A \wedge T \Leftrightarrow A$； $17. A \vee F \Leftrightarrow A$ （同一律）

$18. A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$； $19. A \vee \neg A \Leftrightarrow T$（否定律）

20. $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ （蕴含等值式）

21. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ （等价等值式）

22. $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$ （假言易位）

23. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ （等价否定等值式）

24. $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$ （归谬论）

有了上述等值式，利用逻辑推理的方法，可以证明其它等值式，此过程称为**等值演算**。

7.3.2 置换定理

定义13 设 X 是命题公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个命题公式，称 X 为公式 A 的子公式。

例 在公式 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee\neg Q)$ 中，$P\wedge Q$ 和 $\neg P\vee\neg Q$ 均为其子公式。

定理1 设 X 是命题公式 A 的子公式，且 $X \Leftrightarrow Y$，若将 A 中的 X 用 Y 置换，所得公式 B 与 A 等值，即 $A \Leftrightarrow B$。 ——置换定理

证 由于在变元的任何指派下，X 与 Y 的真值相同，所以用 Y 替代 X 后，所得公式 A 与公式 B 在相应的指派下，其真值也一定相同，故

$A \Leftrightarrow B$ 证毕

例5　证明：$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P$

证　$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge T \quad \Leftrightarrow P$

例6　证明：$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$

$\Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)$

证　$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$（第一式）

$\Leftrightarrow \neg\neg R \vee (\neg Q \vee \neg P) \quad \Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)$

例7 证明：$((P \vee S) \wedge R) \vee \neg((P \vee S) \wedge R)$ 是重言式。

证 由于 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

用 $((P \vee S) \wedge R)$ 置换 P，得

$$((P \vee S) \wedge R) \vee \neg((P \vee S) \wedge R) \Leftrightarrow T$$ 即

$((P \vee S) \wedge R) \vee \neg((P \vee S) \wedge R)$ 是重言式。证毕

例8 化简下列语句："情况并非如此，如果他不来，那么我也不去。"

解 将上面语句符号化

P："他来"；Q："我去"

语句翻译为 $\neg(\neg P \to \neg Q)$

化简 $\neg(\neg P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

此语句的意思为："我去了，但他没来"。

证明等值式的方法：

1、利用真值表

2、利用24个基本等值公式进行等值演算

内容小结

1.熟记24个基本等值公式

2.证明等值公式 $\begin{cases} \text{真值表} \\ \text{等值演算} \end{cases}$

课下练习 P129 习题7.3 1,2,3

7.4 其它联结词

7.4.1 其它联结词

定义14 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题“P,Q 中恰有一个成立”称为 P 与 Q 的不可兼析取（或排斥或、异或），记作 $P \bar{\vee} Q$

真值情况如表所示

P	Q	$P \bar{\vee} Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

联结词$\bar{\vee}$的性质 （P,Q,R为任意命题）

(1) $P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow Q \bar{\vee} P$

(2) $(P \bar{\vee} Q) \bar{\vee} R \Leftrightarrow P \bar{\vee} (Q \bar{\vee} R)$

(3) $P \wedge (Q \bar{\vee} R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \bar{\vee} (P \wedge R)$

(4) $P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(5) $P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$

(6) $P \bar{\vee} P \Leftrightarrow F$

(7) $F \bar{\vee} P \Leftrightarrow P$

(8) $T \bar{\vee} P \Leftrightarrow \neg P$

定义15 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"若 P，则 Q"的否定,称为 P 与 Q 的条件否定记为 $P \xrightarrow{c} Q$，真值情况如表所示

P	Q	$P \xrightarrow{c} Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

由真值表知

$$P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg(P \to Q)$$

定义16 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"P 合取 Q"的否定，称为 P 与 Q 的与非，记为 $P \uparrow Q$，真值情况如表所示

P	Q	$P \uparrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

联结词“↑”的性质

(1) $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

(2) $P \uparrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

(3) $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

(4) $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

$$\Leftrightarrow P \vee Q$$

说明 联结词“¬,∧,∨”均可用“↑”表示

定义17 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"P 析取 Q"的否定，称为 P 与 Q 的**或非**，记为 $P \downarrow Q$，真值情况如表所示

P	Q	$P \downarrow Q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

联结词“↓”的性质

(1) $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

(2) $P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$

(3) $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$

(4) $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q$

说明 联结词“$\neg, \wedge, \vee$ ”均可用“↓”表示

7.4.2 极小联结词组

定义18 设D是联结词集合，若D中某个联结词可以用D的其它联结词表示，称该联结词为冗余联结词，否则称为独立联结词。

定义19 设D是联结词集合，若任意命题公式总可以用含在D中的联结词的等值式表示且D中不含冗余联结词，称D为极小联结词组（或极小全功能集）。

例如 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 说明 $\to$ $\neg$ $\vee$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 说明 $\leftrightarrow$ $\to$ $\wedge$

$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

说明 $\wedge \longleftrightarrow \vee$

因此，联结词 $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ 均可由“$\neg, \wedge$”或“$\neg, \vee$”表示。

又因为 $P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$

$$P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$$

$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

因此 $\bar{\vee}, \xrightarrow{c}, \uparrow, \downarrow$ 也可由"$\neg, \wedge$"或"$\neg, \vee$"表示又由于"$\neg, \wedge$"和"$\neg, \vee$"均可由"$\uparrow$"或"$\downarrow$"表示，故 $\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$ 均可构成极小联结词组。

内容小结

1.熟悉本节的4个联结词

2.极小联结词组的概念

课下练习 P132 习题7.4 1,2,3,4