第2章 逻辑代数与硬件描述语言基础

2. 1逻辑代数的基本公式和常用公式

基本公式

序号	公式	序号	公式	运算规律
		10	$\overline{1}=0$；$\overline{0}=1$	
1	$0\cdot A=0$	11	$1+A=1$	
2	$1\cdot A=A$	12	$0+A=A$	
3	$A\cdot A=A$	13	$A+A=A$	重叠律
4	$A\cdot\bar{A}=0$	14	$A+\bar{A}=1$	互补律
5	$A\cdot B=B\cdot A$	15	$A+B=B+A$	交换律
6	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	16	$A+(B+C)=(A+B)+C$	结合律
7	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	17	$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$	**分配律**
8	$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$	18	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$	**反演律**
9	$\overline{\overline{A}}=A$			还原律

若干常用公式

序号	公式
19	$A + A \cdot B = A$
20	$A + \overline{A} \cdot B = A + B$
21	$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$
22	$A \cdot (A + B) = A$
23	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$ $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + BCD = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$
24	$A \cdot \overline{A \cdot B} = A \cdot \overline{B}$ ； $\overline{A} \cdot \overline{A \cdot B} = \overline{A}$

例：试化简下列逻辑函数$L=(A+B)(\overline{A}+B)$

$$L = A\overline{A} + AB + B\overline{A} + BB(\text{分配律})$$

$$= 0 + AB + B\overline{A} + B \quad (A\cdot\overline{A} = 0,\ A\cdot A = A)$$

$$= AB + B\overline{A} + B \quad (A + 0 = A)$$

$$= B(A + \overline{A} + 1) \quad [AB + AC = A(B + C)]$$

$$= B\cdot 1 = B \quad (A + 1 = A,\ A\cdot 1 = A)$$

2. 2逻辑代数的基本定理

2.2.1代入定理

在任何一个包含变量A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中所有A的位置，则等式仍然 成立。

[例2.1] 用代入定理证明德·摩根定理也适用于多变量的情况.

解：已知二变量的德·摩根定理为:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

（B+C）代替B,（B·C）代替B

$$\overline{A+(B+C)}=\overline{A}\cdot\overline{(B+C)}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$\overline{A\cdot(B\cdot C)}=\overline{A}+\overline{(B\cdot C)}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

2.2.2反演定理

对于任何一个逻辑式Y，若将其中的 “·”换 “+”， “+”换 “·”；

0换1，1换0；原变量换反变量，反变量换原变量，得到的结果就是 $\overline{Y}$

规则：遵守“先括号、然后乘、最后加”的运算优先次序。

不属于单个变量上的反号应保留不变。

[例2.2] 已知 $Y = A(B+C)+CD$

求$\overline{Y}$

解：根据反演定理可写出

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= (\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C})(\overline{C}+\overline{D}) \\ &= \overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \\ &= \overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{D}\end{aligned}$$

2.2.3 对偶定理

对于任何一个逻辑式Y，“·”换“+”，“+”换“·”；0换1，1换0；可得Y的对偶式 Y'

若 $Y = A(B+C)$

则 $Y' = A + BC$

对偶规则的基本内容是：如果两个逻辑函数表达式相等，那么它们的对偶式也一定相等。

用途：为了证明两个逻辑式相等，可以通过证明它们的对偶式相等来完成，因为有些情况下证明它们的对偶式相等更加容易。

证明：**A+BC=(A+B)(A+C)**

2. 3逻辑函数的两种标准形式

一、最小项和最大项

1.最小项：在**n**个变量的逻辑函数中，若**m**为包括全部**n**个变量的乘积项，而且每个变量必须而且只能以原变量或反变量的形式在**m**中出现一次，则称**m**为该组变量的最小项。

例如，**A**、**B**、**C**三个变量的最小项：

输入变量的每一组取值都使一个对应的最小项的值等于**1.**

3个变量有 2^3 个最小项

n个变量有 2^n 个最小项

最小项性质：

① 在输入变量的任何取值下必有一个最小项，而且仅有一个最小项的值为1

② 全体最小项之和为1

③ 任意两个最小项的乘积为0

④ 具有相邻性的两个最小项之和可以合并成一项并消去一对因子

相邻性：若两个最小项只有一个因子不同，则称这两个最小项具有相邻性。

例如：A、B、C三个变量的最小项编号表

表 1.5.4 三变量最小项的编号表

最小项	使最小项为 1 的变量取值			对应的十进制数	编号
	A	B	C		
$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$	0	0	0	0	m_0
$\overline{A}\ \overline{B}\ C$	0	0	1	1	m_1
$\overline{A}\ B\ \overline{C}$	0	1	0	2	m_2
$\overline{A}\ B\ C$	0	1	1	3	m_3
$A\ \overline{B}\ \overline{C}$	1	0	0	4	m_4
$A\ \overline{B}\ C$	1	0	1	5	m_5
$A\ B\ \overline{C}$	1	1	0	6	m_6
$A\ B\ C$	1	1	1	7	m_7

三个变量的所有最小项的真值表

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

2.最大项： n个变量的逻辑函数中，若M为n个变量之和，而且这n个变量均以原变量或反变量的形式在M中出现一次，则M为该组变量的最大项

3个变量有 2^3 个最大项

n个变量有 2^n 个最大项

最大项性质：

① 在输入变量的任何取值下必有一个最大项，而且仅有一个最大项的值为0

② 全体最大项之积为0

③ 任意两个最大项之和为1

④ 只有一个变量不同的两个最大项的乘积等于各相同变量之和

例如：A、B、C三个变量的最大项编号表

最大项	使最大项为0的变量取值			对应的十进制数	编号
	A	B	C		
$(A+B+C)$	0	0	0	0	M_0
$(A+B+\overline{C})$	0	0	1	1	M_1
$(A+\overline{B}+C)$	0	1	0	2	M_2
$(A+\overline{B}+\overline{C})$	0	1	1	3	M_3
$(\overline{A}+B+C)$	1	0	0	4	M_4
$(\overline{A}+B+\overline{C})$	1	0	1	5	M_5
$(\overline{A}+\overline{B}+C)$	1	1	0	6	M_6
$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$	1	1	1	7	M_7

二、逻辑函数的最小项之和的形式

利用基本公式 $A+\overline{A}=1$ 可以把任何一个逻辑函数化为最小项之和的标准形式。

例 将 $L(A,B,C)=AB+\overline{A}C$ 化成最小项表达式

$$L(A,B,C)=AB(C+\overline{C})+\overline{A}(B+\overline{B})C$$

$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}C$$

$$=m_7+m_6+m_3+m_1$$

$$=\sum m(1,3,6,7)$$

[例1.5.5]将逻辑函数$Y = A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}CD + AC$写成标准与或表达式

解：$Y = A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}CD(B+\overline{B}) + AC(B+\overline{B})(D+\overline{D})$

$$= A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}\overline{B}CD + (ABC + A\overline{B}C)(D+\overline{D})$$

$$= A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}\overline{B}CD + ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$= m_9 + m_7 + m_3 + m_{15} + m_{14} + m_{11} + m_{10}$$

$$= \sum_i m_i(3,7,9,10,11,14,15)$$

$$= \sum m(3,7,9,10,11,14,15)$$

$$= \sum (3,7,9,10,11,14,15)$$

例 将 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C})\overline{AB}}$ 化成最小项表达式

a. 去掉非号 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C})}+AB$

$$=(\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot C)+AB$$

$$=(\overline{A}+\overline{B})(A+B)C+AB$$

b. 去括号

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB$$

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB(C+\overline{C})$$

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}$$

$$=m_3+m_5+m_7+m_6=\sum m(3,5,6,7)$$

三、逻辑函数的最大项之积形式

相同编号的最小项和最大项存在互反关系　　即:

$$m_i = \overline{M_i} \qquad M_i = \overline{m_i}$$

若干个最小项之和表示的表达式F，其反函数$\overline{F}$可用等同个与这些最小项相对应的最大项之积表示。

例：
$$F = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\overline{F} = \overline{m_1 + m_3 + m_5 + m_7}$$

$$= \overline{m_1} \bullet \overline{m_3} \bullet \overline{m_5} \bullet \overline{m_7}$$

$$= M_1 \bullet M_3 \bullet M_5 \bullet M_7$$

推论：以m个最小项之和表示的n个变量的函数Y，改用最大项之积表示时，其最大项的编号必定都不是最小项的编号，而最大项与最小项的个数之和为2^n。

因$Y = m_2 + m_3 + m_4 + m_7$

则必有:$\overline{Y} = m_0 + m_1 + m_5 + m_6$,

那么$Y = \overline{m_0 + m_1 + m_5 + m_6} = \overline{m_0} \cdot \overline{m_1} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_6} = M_0 M_1 M_5 M_6$

三、逻辑函数的最大项之积形式

[例1.5.5]将逻辑函数$Y = AB\bar{C} + BC$写成标准或与表达式

解：$Y = AB\bar{C} + BC = AB\bar{C} + (A + \bar{A})BC$

$$= AB\bar{C} + ABC + \bar{A}BC = m_3 + m_6 + m_7$$

$$= M_0 M_1 M_2 M_4 M_5$$

$$= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

[例1.5.6]将逻辑函数$Y = (A + B)(\bar{A} + B + C)$写成标准或与表达式

解：$Y = (A + B)(\bar{A} + B + C) = (A + B + C\bar{C})(\bar{A} + B + C)$

$$= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)$$

例：逻辑电路的真值表如右，写出最小项和最大项表达式。

最小项表达式：

将L＝1的各个最小项相加

$$L(A,B,C)=m_3+m_5+m_6$$

$$=\sum m(3,5,6)$$

$$=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

最大项表达式：

将L＝0的各个最大项相乘

$$L(A,B,C)=M_0\cdot M_1\cdot M_2\cdot M_4\cdot M_7$$

$$=\prod M(0,1,2,4,7)$$

$$=(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	$1\rightarrow m_3$
1	0	0	0
1	0	1	$1\rightarrow m_5$
1	1	0	$1\rightarrow m_6$
1	1	1	0