5.2 连通性与赋权图的最短路径

5.2.1 通路与回路

定义13 给定图 $G=<V,E>$，设

$$v_0,v_1,\cdots,v_n \in V,\ e_1,e_2,\cdots,e_n \in E$$

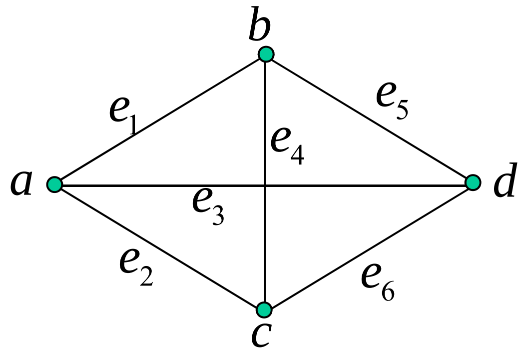
其中e_i是关联结点v_{i-1}与v_i的边，交替序列

$$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$$

称为连接v_0到v_n的**通路**，其中v_0和v_n分别称为通路的**起点**和**终点**，边的数目n称为通路的**长度**；

当$v_0=v_n$时，称该通路为回路。若通（回）路中的各边$e_1,e_2,\cdots,e_n$均不相同，称此通（回）路为简单通（回）路；在通路中，若各结点v_0，$v_1,\cdots,v_n$ 均不相同，称此通路为基本通路；在回路中，除$v_0=v_n$外，其余各结点均不相同，称此回路为基本回路。

例　如图所示



$ae_1be_4ce_2ae_1be_5d$ 是一条由 a 到 d 的通路；

$ae_1be_4ce_2ae_3d$ 是一条由 a 到 d 的简单通路；

$ae_1be_4ce_6d$ 是一条由 a 到 d 的基本通路；

$ae_1be_4ce_6de_3a$ 是一条基本回路。

定理5 在一个 n 阶图中，若从结点 v_i 到结点 $v_j(i \neq j)$ 存在一条通路，则从结点 v_i 到结点 v_j 必存在一条长度小于等于 $n-1$ 的通路。

证 设从结点 v_i 到结点 $v_j(i \neq j)$ 存在一条通路，该通路上的结点序列为 $v_i \cdots v_k \cdots v_j$，若通路长度为 l，则序列中必有 $l+1$ 个结点。若 $l > n-1$，则必存在结点 v_s 在序列中不止出现一次，即结

点序列必是$v_i \cdots v_s \cdots v_s \cdots v_j$的形式，这时删去中间从$v_s$到$v_s$的那些边，则剩下的序列仍是从$v_i$到到$v_j$的通路，而此通路比原通路的长度要短，如此反复下去，最终得到一条基本通路，其长度一定小于等于$n-1$。证毕

推论　在一个 n 阶图中，若存在结点 v_i 到自身的回路，则必存在一条长度小于等于 n 的回路。

证明类似定理5，自己完成

5.2.2 连通性

定义14　在无向图G中，若从结点u到结点v存在通路，称结点u和v是连通的。

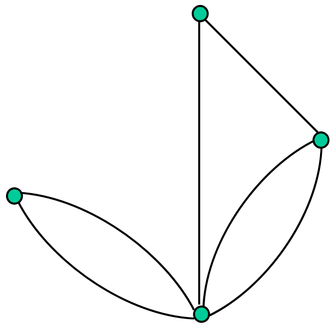
由于结点之间的连通性是结点集V上的等价关系，利用它对结点集V作一个划分，将V分成非空子集$V_1,V_2,\cdots,V_m$，使得两个结点v_i与v_j连通，当且仅当它们属于同一个V_k中。子图

$G(V_1), G(V_2), \cdots, G(V_m)$ 称为图 G 的连通分支，且将图 G 的连通分支数记为 $W(G)$ 。

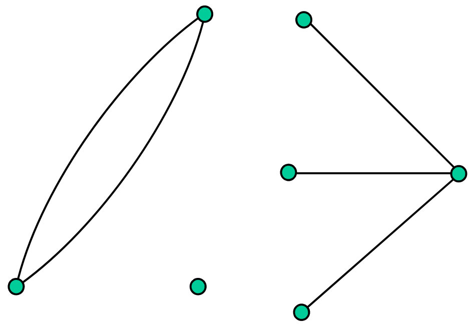
定义15 若图 G 的连通分支数 $W(G)=1$，称图 G 是连通图。

由定义知，连通图中，任意两结点之间一定是连通的。

例 如图所示



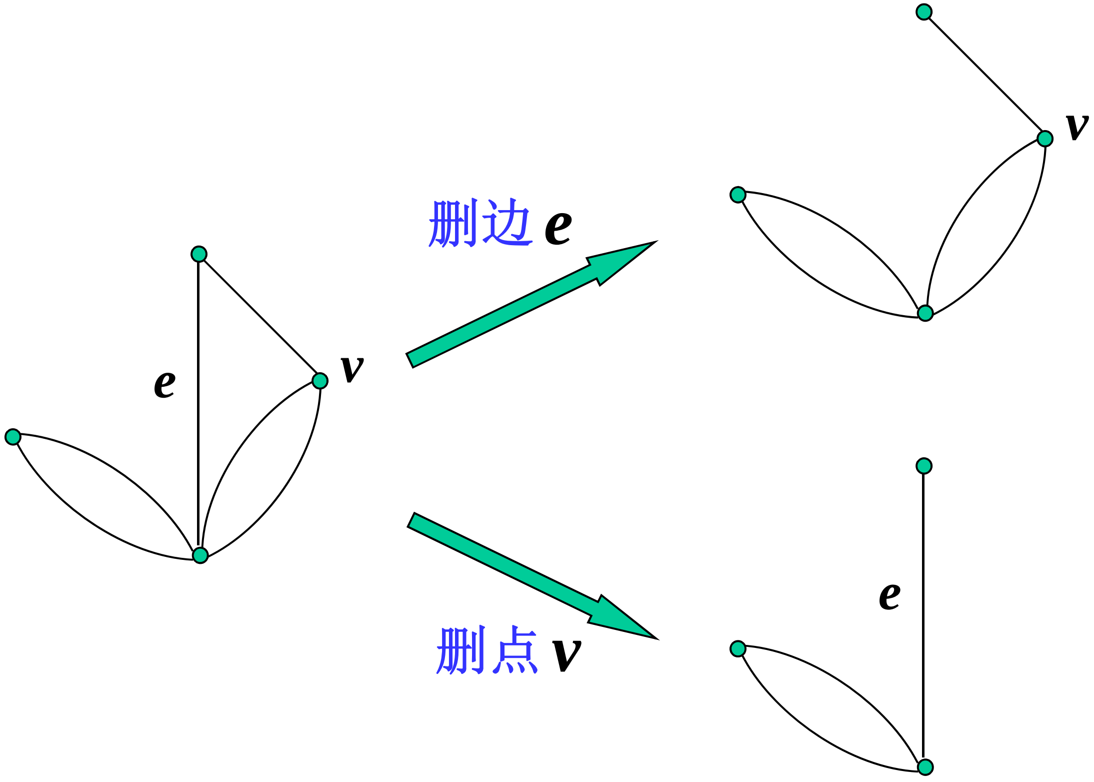
(***a***)



(***b***)

图(***a***)是连通图；图 (***b***) 是具有三个连通分支的非连通图。

删边、删点



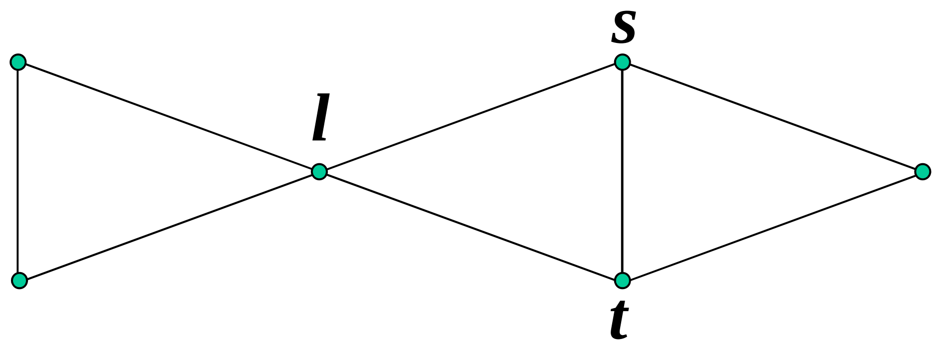
定义16 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若有点集 $V_1 \subset V$，使图 G 删除了 V_1 中的所有结点后，得到的子图是不连通的，而删除了 V_1 的任何真子集后，所得的子图仍是连通图，称 V_1 是 G 的一个点割集。若某个点割集中只含有一个点，称该点为割点，称

$$k(G)=\min\{|V_1| \mid V_1\text{是}G\text{的点割集}\}$$

为图 G 的点连通度（简称连通度）。

连通度 $k(G)$ 是为了产生一个不连通图，需要删除的点的最少数目，因此一个非连通图其连通度 $k(G)=0$；存在割点的连通图，其连通度 $k(G)=1$；而完全图 K_p，其连通度 $k(G)=p-1$

例　如图所示



$V=\{l\}$ 是点割集，l 也是割点，$k(G)=1$

$V'=\{s,t\}$ 也是点割集

$V^*=\{s,l\}$ 不是点割集

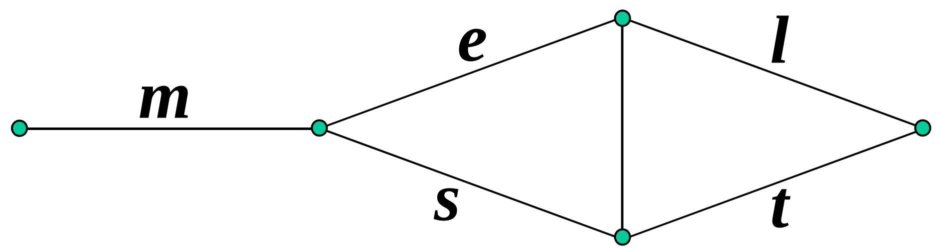
定义17 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若有边集 $E_1 \subseteq E$，使图 G 中删除了 E_1 中的所有边后，得到的子图是不连通图，而删除了 E_1 的任何真子集后所得到的图是连通图，称 E_1 是 G 的一个**边割集**，若某个边割集中只含有一条边称该边为**割边**（或**桥**），称

$$\lambda(G)=\min\{|E_1| \mid E_1 \text{是} G \text{的边割集}\}$$

为图 G 的**边连通度**。

边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个不连通图需要删除的边的最少数目，故一个非连通图，其边连通度$\lambda(G)=0$；存在割边的连通图，其边连通度$\lambda(G)=1$。

例　如图所示



$E=\{m\}$是边割集，m也是割边，$\lambda(G)=1$

$V_1=\{e,s\}$, $V_2=\{t,l\}$ 均为边割集

定理6 对任意一个图 G，有

$$k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

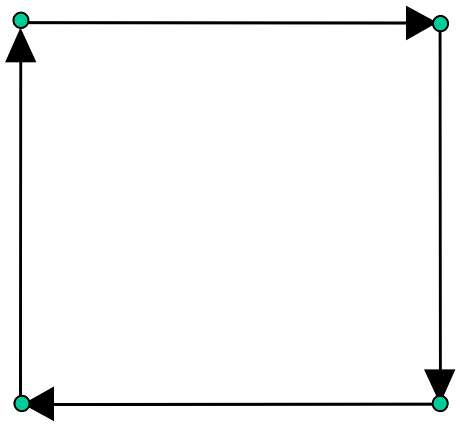
定理7 一个无向连通图G中的结点v是割点$\Leftrightarrow$存在两个结点u和w，使得它们之间的每一条通路均经过结点v。

以上两个定理的证明可作为扩充知识自学。

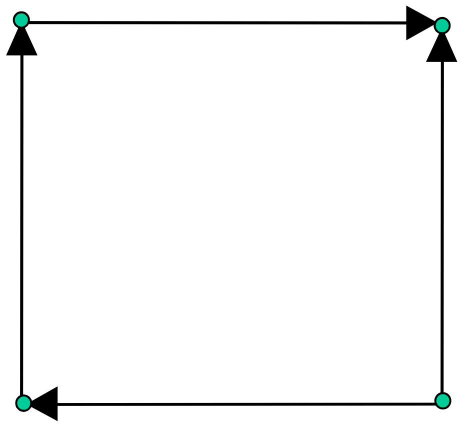
下面讨论有向图的连通性

定义18 在简单有向图G中，若任意两个结点间，至少从一个结点到另一个结点存在通路（也称可达），称此图为**单侧连通的**；若任意两个结点均可达，称此图为**强连通的**；若去掉边的方向后，该图是无向连通图，称此图为**弱连通的**。

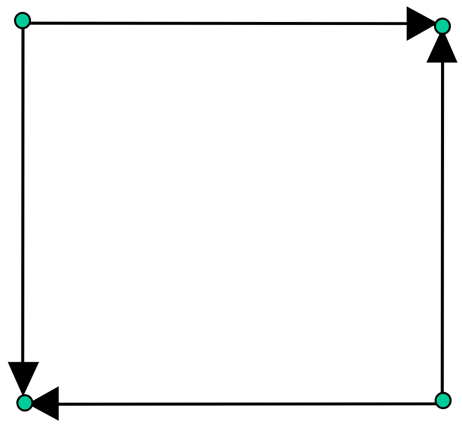
例　如图所示



强连通



单侧连通



弱连通

强连通 → 单侧连通 → 弱连通

定理8 一个有向图G是强连通的$\Leftrightarrow$ G中有一个回路，它至少包含G中所有结点一次。

证 $\Leftarrow$ 设G中有一回路，它至少包含每个结点一次，在G中任意两个结点都是相互可达的，故图G是强连通的。

$\Rightarrow$ 设有向图G是强连通的，则任意两个结点都是相互可达的，若存在一个回路不包含某

个点v，那么v一定不与回路上的任何结点相互可达，与强连通的定义矛盾，故至少存在一个回路，包含G中所有的结点。证毕

5.2.3 赋权图

定义20　给有向图或无向图G的每条边e附加一个实数$w(e)$，称$w(e)$为边e上的权，G连同附加在各边上的实数称为（边）赋权图，常记为$G=<V,E,W>$。

5.2.4 最短路径问题

定义21 设赋权图$G=<V,E,W>$, G中每条边e所带权$w(e)\geq 0$, u,v是G中任意两个结点，从u到v的所有通路中，赋权最小的通路称为u到v的**最短路径**，求给定两点的最短路径称为**最短路径问题**。

求最短路径的Dijkstra标号算法

基本思想：给 n 阶赋权图 G 的每个结点记一个数（称为标号），标号有两种：临时标号（T 标号）和固定标号（P 标号），T 标号表示从始点到终点的最短通路的权的上界；P 标号表示从始点到该点的最短通路的权。

具体算法如下：

第一步　给始点 v_1 标上 P 标号 $d(v_1)=\infty$，给其它结点标上 T 标号 $d(v_j)=w_{1j}\ (2\le j\le n)$，其中 w_{ij} 是连接 v_i 和 v_j 的边权，若 v_i 与 v_j 没有边相连令 $w_{ij}=\infty$，用计算机计算时，可根据具体问题，取一个足够大的数代替 ∞。

第二步　在所有的 T 标号中取最小者，如 v_k 的 T 标号 $d(v_k)$ 最小，则将 v_k 的 T 标号改为 P 标号

并重新计算具有T标号的其它结点v_j的T标号：

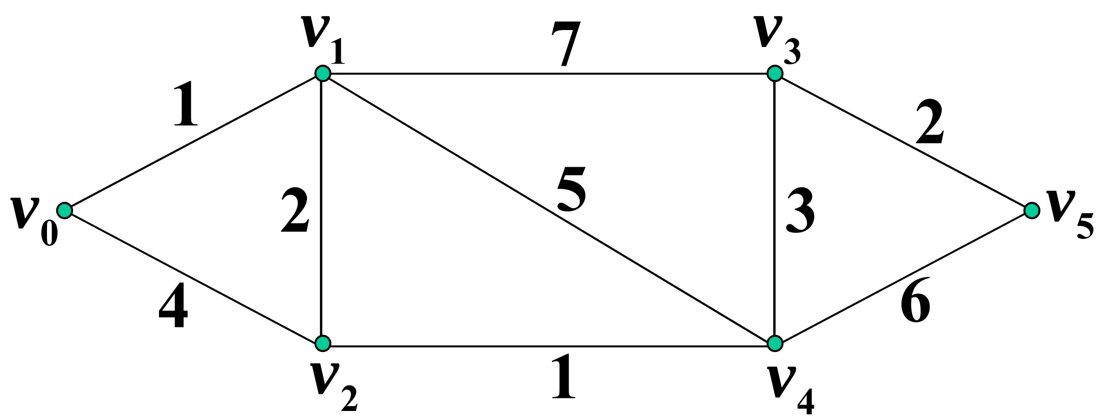
$$\text{新的}d(v_j)=\min\{\text{旧的}d(v_j),d(v_k)+w_{kj}\}$$

第三步　若终点已具有P标号，则此标号即为所求的最短路径的权，算法停在；否则转入第二步。

若要求始点到其它各点的最短路径，第三步修改为所有结点都已具有P标号时算法停止

下面通过例题说明标号法如何实现

例　求下图中结点 v_0 与 v_5 的最短路径



解　列表如下

$d(v_0)$	$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$
∞^*	1	4	∞	∞	∞
	$1^*/v_0$	3	8	6	∞
		$3^*/v_1$	8	4	∞
			7	$4^*/v_2$	10
			$7^*/v_4$		9
					$9^*/v_3$

从表中寻找 v_0 与 v_5 的最短路径过程如下：

采取逆推法，从 v_5 开始：

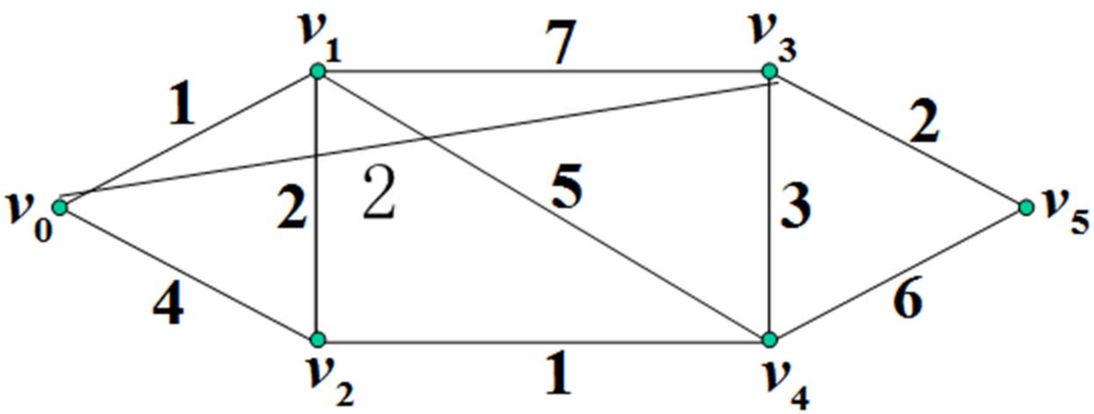
v_5 与 v_3 相邻，v_3 与 v_4 相邻，v_4 与 v_2 相邻，v_2 与 v_1 相邻，v_1 与 v_0 相邻，得到最短路径为

$$\Gamma = v_0\ v_1\ v_2\ v_4\ v_3\ v_5$$

说明 （1）此算法可以求从任何结点v_s到其它结点之间的最短路径，只要开始先给v_s加P标号∞即可。

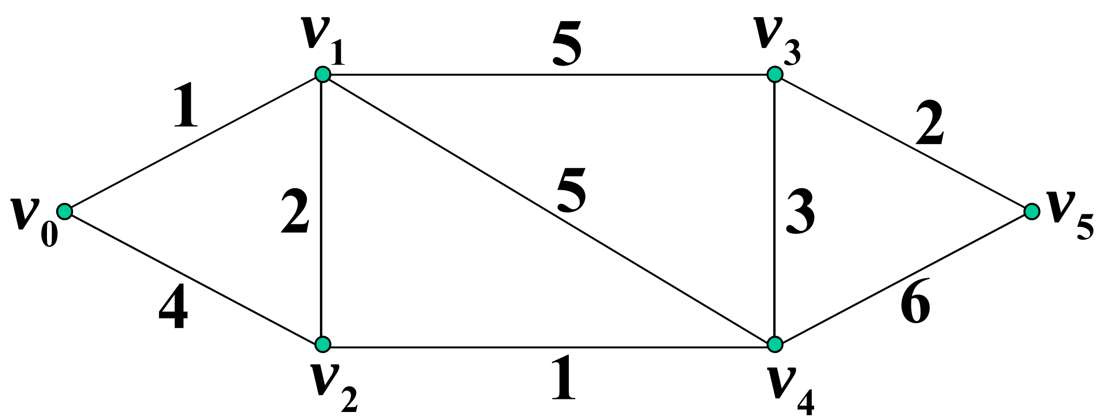
（2）若已求出了从结点v_i到v_j的最短路径，则可得到从v_i到此路径上任意其它各点的最短路径。如本例中，从v_0到v_1,v_2,v_3,v_4的最短路径分别为v_0v_1，$v_0v_1v_2$，$v_0v_1v_2v_4v_3$，$v_0v_1v_2v_4$，权数分别为**1，3，7，4.**

练习1　求下图中结点v_0与v_5的最短路径



解　　$\Gamma = v_0 \ \ v_3 \ \ v_5$

练习2 求下图中结点v_0与v_5的最短路径



最短路径 $\Gamma = v_0\, v_1\, v_3\, v_5$

内容小结

1.图的连通性

2.赋权图的最短路径

课下练习　P93　习题5.2　4 。
自己动手练习求最短路径的典型例题