3.2 代数系统的同态与同构

3.2.1 代数系统的同态

定义13 设$V_1 =< S_1, \circ >$和$V_2 =< S_2, * >$是两个代数系统，$\circ$ 和 $*$ 分别是S_1和S_2上的二元运算，若存在映射$\varphi : S_1 \to S_2$，满足

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

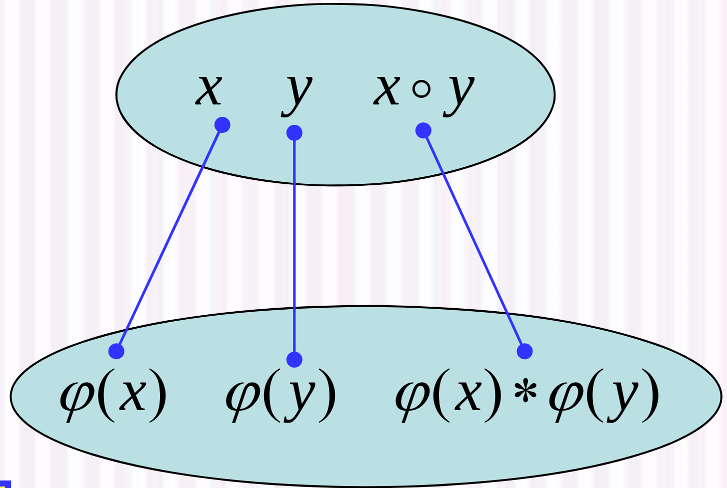
称φ是V_1到V_2的一个同态映射，称V_1同态V_2

记作 $S_1 \sim S_2$，称 $< \varphi(S_1), * >$ 是 V_1 的一个同态像

其中 $\varphi(S_1)=\{y \mid y=\varphi(x), x \in S_1\} \subseteq S_2$

两个代数系统在同态意义下的相互关系

$$\varphi(x \circ y)=\varphi(x) * \varphi(y)$$



运算的像等于像的运算

同态映射的特点：

（1）映射允许有单射、满射及双射；P40

（2）映射的像允许$\varphi(S_1) \subseteq S_2$ 。

例16　设 $V_1 =< Z,+ >, V_2 =< I_n, \oplus_n >$，定义

$$\varphi : Z \to I_n, \varphi(i) = (i) \bmod n$$

则对于任意的 $i, j \in Z$，有

$$\varphi(i+j) = (i+j) \bmod n$$

$$= (i) \bmod n \oplus_n (j) \bmod n = \varphi(i) \oplus_n \varphi(j)$$

故 $Z \sim I_n$

定义　设 $f: A \to B$

（1）若对任意的 $x_1, x_2 \in A$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，称 f 是单射。

（2）若 $f(A) = B$，称 f 是满射。

（3）若 f 既是单射又是满射，称 f 是双射或一一映射。

3.2.2 代数系统的同构

定义14 设 φ 是从 $<S_1,\circ>$ 到 $<S_2,*>$ 的同态映射

若 φ 是 S_1 到 S_2 的单射，则 φ 称为**单一同态**；

若 φ 是 S_1 到 S_2 的满射，则 φ 称为**满同态**；

若 φ 是 S_1 到 S_2 的双射，则 φ 称为**同构映射**，

并称 $<S_1,\circ>$ 和 $<S_2,*>$ 同构，记作 $S_1 \cong S_2$ 。

例17 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，在 A,B 上分别定义运算 $\circ,*$ 如表所示，验证两代数系统 $<A,\circ>$ 和 $<B,*>$ 同构。

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	b	d	d	c
d	a	b	c	d

$*$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	α	γ
γ	β	δ	δ	γ
δ	α	β	γ	δ

解　考察映射 f：

$$f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta,\ f(c)=\gamma,\ f(d)=\delta$$

验证得到 f 是一个 A 到 B 上的同构映射，故 $<A,\circ>$ 与 $<B,*>$ 同构。

事实上，也可考虑映射 g：

$$g(a)=\delta,\ g(b)=\gamma,\ g(c)=\beta,\ g(d)=\alpha$$

同构映射不一定是唯一的，同构是可逆的

两个代数系统同构的必要条件

（1）必须是同一类型的（带有相同个数的运算）；

（2）两集合的元素“个数”应该是相同的（两个集合间元素是一一对应的）；

（3）运算定义是相同的（将一运算表中的元素换成其对应的元素后即得另一运算表）。

同构的代数系统可看作：
相同的系统，不同的符号

定义15 设 $<A,*>$ 是一个代数系统

若 f 是 $<A,*>$ 到 $<A,*>$ 的同态映射，则称 f 是**自同态**；

若 g 是 $<A,*>$ 到 $<A,*>$ 的同构映射，则称 g 是**自同构**。

定理5 设 G 是代数系统的集合，则 G 中代数系统之间的同构关系是等价关系。

证

1）自反性：利用恒等映射

2）对称性：利用可逆映射

3）传递性：利用复合映射

同构是一种关系，而且是一个等价关系

内容小结

1. 同构与同态的概念

2.同构与同态的判断

课下练习 **P53** 习题**3.2 1**

第二部分 代数系统

第4章 几个典型的代数系统

- 半群
- 群与子群
- 循环群与置换群
- 陪集与拉格朗日定理
- 环与域
- 格与布尔代数

第4章 几个典型的代数系统

4.1 半群

4.1.1 半群

定义1 设 $<S,*>$ 为代数系统，若运算 $*$ 满足结合律，称代数系统 $<S,*>$ 为半群。

例 $<Z,+>$, $<R,+>$ 都是半群。

代数系统 $<Z,\max>$ 也是一个半群。

例1　设 $<S,*>$ 是一个代数系统，其中 $S=\{a,b,p,q\}$，运算 $*$ 如表所示

*	a	b	p	q
a	q	p	b	a
b	b	b	b	b
p	p	p	p	p
q	a	b	p	q

经验证，运算 $*$ 满足结合律

如
$$a*(b*p)=a*b=p$$
$$(a*b)*p=p*p=p$$

故　$a*(b*p)=(a*b)*p$　（需全部验算）

因此它是一个半群。

例2　设$S_k=\{x \mid x\in Z, x\geq k, k\geq 0\}$，证明$<S_k,+>$是一个半群。

证　$\forall x,y\in S_k \Rightarrow x\geq k\ , y\geq k \Rightarrow\ x+y\geq k$

得 $x+y\in S_k$ ，运算封闭，$<S_k,+>$是代数系统；

又因为"+"满足结合律，故$<S_k,+>$是一个半群。证毕

4.1.2 子半群

定义2 设$<S,*>$是一个半群，若对非空集$B\subseteq S$，$*$在B上是封闭的，那么$<B,*>$也是一个半群，称$<B,*>$是$<S,*>$的子半群。

例 偶数加法半群$<E,+>$是整数加法半群$<Z,+>$的子半群。

$<[0,1],\times>$，$<[0,1),\times>$，$<Z,\times>$都是$<R,\times>$的子半群。

在半群 $<S,*>$ 上，定义元素 a 的幂

$$a^1 = a\,,\quad a^2 = a*a\,,\quad \ldots,\ a^{j+1} = a^j * a$$

利用结合律得

$$a^n * a^m = a^{n+m}\,,\qquad (a^n)^m = a^{nm}$$

定理 设$<S,*>$是一个半群，若S是一个有限集，则必存在$a\in S$，使得$a*a=a$。

证明 由$<S,*>$是一个半群，$\forall b\in S$有 $b^2=b*b\in S$，$b^3=b^2*b\in S$，……

由于S是有限集，一定存在$j>i$，使得

$b^j=b^i$，令$p=j-i$，有 $b^i=b^j=b^p*b^i$，即

$$b^q=b^p*b^q\ (q\geq i)$$

S中一定存在等幂元

因为 $p \geq 1$，总可以找到 $k \geq 1$，使得 $kp \geq i$，

对于 S 中的元素 b^{kp}，有

$$b^{kp} = b^p * b^{kp} = b^p * (b^p * b^{kp}) = b^{2p} * b^{kp}$$

$$= b^{2p} * (b^p * b^{kp}) = \cdots = b^{kp} * b^{kp}$$

即存在元素 $a = b^{kp}$，使得 $a * a = a$。证毕

定义2 若半群$<S,*>$中的二元运算满足交换律，称其为**可换半群**。

定义3 若半群$<S,*>$中含有幺元，称其为**独异点**（也称**含幺半群**）。

例 代数系统$<Z,+>,<R,\times>$是可换半群，也是独异点；而代数系统$<N-\{0\},+>$是可换半群，但不是独异点。

定理 设$< S,* >$是一个独异点，则在$*$的运算表中，任意两行或两列都是不同的。

证明 设S中运算$*$的幺元为e，$\forall a,b \in S$，$a \neq b$，有

$$e*a = a \neq b = e*b$$

$$a*e = a \neq b = b*e$$

故在$*$的运算表中，不会有相同的行和列。证毕

定理 设$<S,*>$是一个独异点，且任意元素均有逆元，则

(1) $(a^{-1})^{-1}=a$

(2) $a*b$ 有逆元，且 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

证明 （1）由于 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

故由逆元的定义知 $(a^{-1})^{-1}=a$

（2）因为

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*b^{-1})*a^{-1}$$

$$=a*e*a^{-1}=e$$

$$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=b^{-1}*(a^{-1}*a)*b$$

$$=b^{-1}*e*b=e$$

故 $a*b$ 可逆，且 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$　　证毕

内容小结

1.半群的定义

2.半群的性质

课下练习 P58 习题4.1 1,2,3,4,5,6,7