数理逻辑部分作业 (答案)

要求：写清个人姓名学号等信息

姓名：____________班级：____________学号：____________班级序号：____________

一. 填空

1. 下列语句中，(C)是命题。

A． 你明天出去玩吗？　　B．您的书法作品太棒了！

C． 天空是蓝色的。　　D．我正在说谎。

2. 命题公式 $P\to(Q\vee P)$ 的真值是(本题填写 T 或 F)____T____。

3. 设 P：你去，Q：他去，将命题“如果你去了，那么他就不去．”翻译成符号形式为：$\underline{P\to\neg Q}$。

4. 公式 $P\to((P\to Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$ 的主析取范式为 $\underline{(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)}$ 。

5. $\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\underline{\forall x\neg P(x)}$。

二. 证明

1 (1) 设前提集合 $\Gamma=\{P\vee Q,Q\to R,P\to S,\neg S\}$,结论为 $H=R\wedge(P\vee Q)$,试证明 $\Gamma\Rightarrow H$ 。

(2) 设前提集合 $\Gamma=\{P\to(Q\to S),\neg R\vee P,Q\}$,结论为 $H=R\to S$,试证明 $\Gamma\Rightarrow H$ 。

证明：(1):

$(1)\ \neg S$	P
$(2)\ P\to S$	P
$(3)\ \neg P$	$T(1),(2)$
$(4)\ P\vee Q$	P
$(5)\ Q$	$T(3),(4)$
$(6)\ Q\to R$	P
$(7)\ R$	$T(5),(6)$
$(8)\ R\wedge(P\vee Q)$	$T(4),(7)$

(2):

$(1)\ R$	P(附加前提)
$(2)\ \neg R\vee P$	P
$(3)\ P$	$T(1),(2)$
$(4)\ P\to(Q\to S)$	P
$(5)\ Q\to S$	$T(3),(4)$
$(6)\ Q$	P
$(7)\ S$	$T(5),(6)$
$(8)\ R\to S$	CP

2. 如果 A 努力工作，那么 B 或 C 感到愉快；如果 B 愉快，那么 A 不努力工作；如果 D 愉快，那么 C 不愉快。所以，如果 A 努力工作，则 D 不愉快。设 A：A 努力工作；B：B 愉快；C：C 愉快；D：D 愉快。符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$A\to(B\vee C)$，$B\to\neg A$，$D\to\neg C$

结论：$A\to\neg D$

证明：

$(1)\ A$	P(附加前提)
$(2)\ A\to(B\vee C)$	P
$(3)\ B\vee C$	$T(1),(2)$
$(4)\ B\to\neg A$	P
$(5)\ \neg B$	$T(1),(4)$
$(6)\ C$	$T(3),(5)$
$(7)\ D\to\neg C$	P
$(8)\ \neg D$	$T(6),(7)$
$(9)\ A\to\neg D$	CP

3.如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。(这个例子旨在说明推理的有效性和结论的真实性是不同的，只管推理即可。)设 P:马会飞；Q:羊吃草；R:母鸡是飞鸟；S:烤熟的鸭子会跑。符号化上述前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$(P\vee Q)\to R, R\to S, \neg S$

结论：$\neg Q$

证明：方法一：直接证明法。

$(1)\neg S$ $\quad P$

$(2)R\to S$ $\quad P$

$(3)\neg R$ $\quad T(1),(2)$

$(4)(P\vee Q)\to R$ $\quad P$

$(5)\neg(P\vee Q)$ $\quad T(3),(4)$

$(6)\neg P\wedge\neg Q$ $\quad T(5)$

$(7)\neg Q$ $\quad T(6)$

方法二：反证法

$(1)Q$ $\quad P$(附加前提)

$(2)\neg S$ $\quad P$

$(3)R\to S$ $\quad P$

$(4)\neg R$ $\quad T(2),(3)$

$(5)(P\vee Q)\to R$ $\quad P$

$(6)\neg(P\vee Q)$ $\quad T(4),(5)$

$(7)\neg P\wedge\neg Q$ $\quad T(6)$

$(8)\neg Q$ $\quad T(7)$

$(9)Q\wedge\neg Q$(矛盾) $\quad T(1),(7)$

4 所有的哺乳动物是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。

设 $P(x)$: x 是哺乳动物；$Q(x)$: x 是脊椎动物；$R(x)$: x 是胎生动物；符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$(\forall x)(P(x)\to Q(x)), \neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

证明：

(1) $\neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$ $\quad P$

$(2)(\exists x)\neg(P(x)\to R(x))$ $\quad T(1)$

$(3)(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$ $\quad T(2)$

$(4)P(c)\wedge\neg R(c)$ $\quad ES(3)$

$(5)P(c)$ $\quad T(4)$

$(6)(\forall x)(P(x)\to Q(x))$ $\quad P$

$(7)P(c)\to Q(c)$ $\quad US(6)$

$(8)Q(c)$ $\quad T(5),(7)$

$(9)\neg R(c)$ $\quad T(4)$

$(10)Q(c)\wedge\neg R(c)$ $\quad T(8),(9)$

$(11)(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$ $\quad EG(10)$

5. 所有有理数都是实数。某些有理数是整数。所以，某些实数是整数。

设 $R(\mathrm{x})$: x 是实数； $Q(\mathrm{x})$: x 是有理数； $I(\mathrm{x})$: x 是整数。符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提： $\forall x(Q(x)\to R(x))$ ， $\exists x(Q(x)\wedge I(x))$ ，

结论： $\exists x(R(x)\wedge I(x))$

证明：

$(1)\ \exists x(Q(x)\wedge I(x))$　　P

$(2)\ Q(a)\wedge I(a)$　　$ES(1)$

$(3)\ \forall x(Q(x)\to R(x))$　　P

$(4)\ Q(a)\to R(a)$　　$US(3)$

$(5)\ Q(a)$　　$T(2)$

$(6)\ R(a)$　　$T(4),(5)$

$(7)\ I(a)$　　$T(2)$

$(8)\ R(a)\wedge I(a)$　　$T(6),(7)$

$(9)\ \exists x(R(x)\wedge I(x))$　　$EG(8)$