7.6 推理理论

定义27 设 A 和 C 是两个命题公式，当且仅当 $A \to C$ 是一重言式，称 C 是 A 的有效结论，或称 C 可由 A 逻辑地推出，也称 A 蕴含 C，记为 $A \Rightarrow C$，此时 A 是 C 的前提。

前提也可以有 n 个，设 $H_1, H_2, \cdots H_n$ 和 C 均为命题公式，当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$ 称 C 是这组前提 $H_1, H_2, \cdots H_n$ 的有效结论。

判断有效结论的过程是一个论证过程，基本的论证方法一般有三种。

7.6.1 真值表法

设$P_1,P_2,\cdots P_n$是出现在前提$H_1,H_2,\cdots,H_m$和结论C中的全部命题变元，假设对$P_1,P_2,\cdots P_n$作了全部的真值指派，得到确定的$H_1,H_2,\cdots,H_m$和C的所有真值，作出这个真值表，并从中找出$H_1,H_2,\cdots,H_m$真值均为T的行，对于每个这

样的行，若C 也有真值T，则有

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

或者找出C 的真值为F的行，在每个这样的行中，$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 的真值中至少有一个为F，则

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

仍然成立。

例20 判断下列推理是否正确

一份统计表的错误或者是由于材料不可靠，或者是由于计算有错误，这份统计表的错误不是由于材料不可靠，所以这份统计表的错误是由于计算有错误。

解 P：统计表的错误是由于材料不可靠

Q：统计表的错误是由于计算有错误

前提：$P \vee Q$,$\neg P$　结论：Q

要判断 $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

作出真值表

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

从表中可看出在第三行 $P \vee Q$ 和 $\neg P$ 的真值均为 T，此时 Q 的真值也为 T，故 $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ 推理正确。

7.6.2 直接证明法

直接证明法，是由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等值或蕴含公式，推演得到有效结论的方法。常用的推理规则如下：

P 规则（前提引入规则）：前提在推理过程中的任何步骤均可以引入。

T 规则（结论引入规则）：推理过程中得到的中间结论，均可作为后续论证的前提引入

下面给出的蕴含式，与前面的24个等值式一样，在推理过程中的任何时候均可应用。

$1.\ P \wedge Q \Rightarrow P$;　$2.\ P \wedge Q \Rightarrow Q$

$3.\ P \Rightarrow P \vee Q$;　$4.\ Q \Rightarrow P \vee Q$

$5.\ \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$;　$6.\ Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

$7.\ \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$;　$8.\ \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

$9.\ P, Q \Rightarrow P \wedge Q$;　$10.\ \neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

$11.\ P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$;　$12.\ \neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

$\neg(\neg P \vee Q)$

$= P\bar{Q} \Rightarrow P$

$\neg Q$

13. $P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$

14. $P \vee Q, P \to R, Q \to R \Rightarrow R$

15. $P \to R \Rightarrow (P \vee Q) \to (R \vee Q)$

16. $P \to R \Rightarrow (P \wedge Q) \to (R \wedge Q)$

要求：熟记以上16个推理规则

例21　试证明公式 $R\vee S$ 是前提 $\neg P\rightarrow(\neg R\rightarrow S)$, $P\rightarrow Q$, $\neg Q$ 的有效结论。

即证明 $\neg P\rightarrow(\neg R\rightarrow S)\wedge P\rightarrow Q\wedge\neg Q\Rightarrow R\vee S$

证

(1) $\neg Q$	P	(5) $\neg R\rightarrow S$	$T(3)(4)$
(2) $P\rightarrow Q$	P	(6) $R\vee S$	$T(5)$
(3) $\neg P$	$T(1)(2)$		
(4) $\neg P\rightarrow(\neg R\rightarrow S)$	P		

证毕

例22 试证明由前提

$$(U \vee V) \to (M \wedge N), U \vee P, P \to (Q \vee S), \neg Q \wedge \neg S$$

可有效推出 M。

证

(1) $\neg Q \wedge \neg S$ P

(2) $\neg(Q \vee S)$ $T(1)$

(3) $P \to (Q \vee S)$ P

(4) $\neg P$ $T(2)(3)$

(5) $U \vee P$ P

(6) U $T(4)(5)$

(7) $U \vee V$ $T(6)$

(8) $(U \vee V) \to (M \wedge N)$ P

(9) $M \wedge N$ $T(7)(8)$

(10) M $T(9)$

证毕

7.6.3 间接证明法

1、附加前提证明法（*CP* 规则）

若要证明的结论以蕴含式的形式出现，即

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow A \rightarrow B$$

也就是要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow T$

化简如下

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m) \vee \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge A) \rightarrow B$$

原推理形式转化为要证明

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge A) \rightarrow B \Leftrightarrow T$$

即 $$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge A \Rightarrow B$$

附加前提

例23　证明由前提 $P \rightarrow (Q \rightarrow R), Q, P \vee \neg S$ 可有效推出 $S \rightarrow R$ 。

证　利用附加前提证明

(1) S　　P（附加前提）

(2) $P \vee \neg S$　　P

(3) P　　$T(1)(2)$

(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$　　P

(5) $Q \rightarrow R$　　$T(3)(4)$

(6) Q　　P

(7) R　　$T(5)(6)$

(8) $S \rightarrow R$　　CP

证毕

例24 试给出以下推理论证

一个科室指定出差的人，有以下要求：

（1）如果李去，则王必须去；

（2）张和王不能同时去。

结论：如果张去，则李不能去。

证 将前提和结论符号化，令

Z：张去；L：李去；W：王去

证明 $(L \to W) \wedge \neg(Z \wedge W) \Rightarrow Z \to \neg L$

证 (1) Z P（附加前提）

(2) $\neg(Z \wedge W)$ P

(3) $\neg Z \vee \neg W$ $T(2)$

(4) $\neg W$ $T(1)(3)$

(5) $L \to W$ P

(6) $\neg L$ $T(4)(5)$

(7) $Z \to \neg L$ CP 证毕

2、归谬法（反证法）

定义28 设$H_1, H_2, \cdots, H_m$是m个命题公式，若$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$是可满足式，称这$m$个公式$H_1, H_2, \cdots, H_m$是相容的，否则称它们不相容。

假设推理形式为 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$

即要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \to C \Leftrightarrow T$

化简如下：

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \to C$$
$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m) \vee C$$
$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge \neg C)$$

要证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \to C \Leftrightarrow T$

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge \neg C \Leftrightarrow F$

也就是 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 不相容，即将 $\neg C$ 作为附加前提进行演算，最后得出矛盾。

例25 试用归谬法证明 $W \vee S$ 可由前提 $S \vee U, U \rightarrow (Q \wedge R), Q \rightarrow W$ 有效推出。

证 (1) $\neg(W \vee S)$ P （否定结论）

(2) $\neg W \wedge \neg S$ $T(1)$

(3) $\neg W$ $T(2)$

(4) $\neg S$ $T(2)$

(5) $S \vee U$ P

(6) U $T(4)(5)$

$(7)\ U \to (Q \wedge R) \quad P$

$(8)\ Q \wedge R \quad T(6)(7)$

$(9)\ Q \quad T(8)$

$(10)\ Q \to W \quad P$

$(11)\ W \quad T(9)(10)$

$(12)\ W \wedge \neg W \quad T(3)(11)$ 矛盾

证毕

内容小结

论证方法
- 真值表法（不常用）
- 直接证明法
- 间接证明法

课下练习 P143 习题7.6 1,2,3,4