第四部分 数理逻辑

数理逻辑从17世纪末莱布尼茨（Gottfred Wlhelm Leibniz 数理逻辑的创始人）起，至今已有几百年的历史了，它与数学的其它分支、计算机科学、人工智能及语言学等都有密切的的联系，并日益显示其重要作用和广泛的应用前景。

莱布尼茨

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨 (**Gottfried Wilhelm Leibniz，1646年-1716年)**德国数学家。第一个公开微积分方法的人，并且符号被主流应用，而牛顿是确认早于莱布尼茨使用微积分的。中年后莱布尼茨健康出现问题，智力退化严重, 于**50**岁左右开始研究古代中国 ,并且与闵明我通信。死于**70**岁。

莱布尼茨一生没有结婚。

- 8岁时，莱布尼茨进入尼古拉学校，学习拉丁文、希腊文、修辞学、算术、逻辑、音乐以及《圣经》、路德教义等。
- 1661年，15岁的莱布尼茨进入莱比锡大学学习法律，一进校便跟上了大学二年级标准的人文学科的课程，他还抓紧时间学习哲学和科学。1665年，莱布尼茨向莱比锡大学提交了博士论文《论身份》，1666年，审查委员会以他太年轻（年仅20岁）而拒绝授予他法学博士学位，黑格尔认为，这可能是由于莱布尼茨哲学见解太多，审查论文的教授们看到他大力研究哲学，心里很不乐意。他对此很气愤，于是毅然离开莱比锡，前往纽伦堡附近的阿尔特多夫大学，并立即向学校提交了早已准备好的那篇博士论文，1667年2月，阿尔特多夫大学授予他法学博士学位，还聘请他为法学教授。
- 这一年，莱布尼茨发表了他的第一篇数学论文《论组合的艺术》。这是一篇关于数理逻辑的文章，其基本思想是想把理论的真理性论证归结于一种计算的结果。这篇论文虽不够成熟，但却闪耀着创新的智慧和数学的才华，后来的一系列工作使他成为数理逻辑的创始人。

众所周知，语言是交流思想的工具，日常生活的语言称为自然语言，它虽然丰富多彩，但容易产生二义性，因此对严格的推理问题，使用自然语言是不方便的，这就需要引入一种形式化的语言，它具有单一、明确的含义，这种形式化的语言在逻辑中称为目标语言，由目标语言和一些规定的公式与符号构成了数理逻辑的形式符号体系。

逻辑学 ——研究推理的一门学科。

数理逻辑（符号逻辑）——用数学方法研究推理的一门数学学科。

一套符号体系＋一组规则

数理逻辑的内容

古典数理逻辑
（本教材的内容）
- 命题逻辑
- 谓词逻辑（一阶逻辑）

现代数理逻辑
- 公理化集合论
- 递归论
- 模型论
- 证明论

第7章 命题逻辑

- 命题与联结词
- 命题公式及其分类
- 等值演算
- 其它联结词
- 对偶与范式
- 推理理论

第7章 命题逻辑（Proposition Logic）

7.1 命题与联结词

7.1.1 命题

目标语言中的基本元素是具有判断内容的语句，而判断是对事物作出肯定或否定的一种思维形式，因此能表达判断的语句应该是陈述句。

定义1 能够判断真假的陈述句称为命题。一个命题所取的“值”称为**真值**，真值只能取“真”或“假”两种情况,“真”记为***T*(*True*)**或**1**，“假”记为***F*(*False*)**或**0**。

非真即假的陈述句称为命题。

例1 判断下列语句是否命题（若是命题判断其真值）

（1） 2是素数 ✓ ***T***

（2）雪是黑色的 ✓ ***F***

（3）我们正在上课 ✓ ***T***

（4）2+2=5 ✓ ***F***

（5） 1+101=110 √

在二进制中为真命题，十进制中为假命题

真值依赖上下文。

（6）别的星球上有生命 √

目前无法决定真值，但真值一定存在。

（7）请勿吸烟！ ×

（8）明天有会吗？ ×

（9）天气多好啊！ ×

这三个均不是命题，因为都不是陈述句。

（10）我正在说谎 ×

也不是命题，这种语句称为悖论。

若给它指派“真”，但语句本身说明是“假”

若给它指派“假”，语句本身又暗指是“真”

- 古代的一名国王要处死一名政治反对派。假惺惺地说：“让神的旨意决定这个人的命运吧。我允许他在临刑前说一句话，如果讲的是真话，那么他将被斩首，如果说的是假话，那么他将被绞死。”聪明的反对派说：“我将被绞死。”国王陷入窘境。如果断定为真话，则将问斩，但犯人自称“被绞死。”故为假话。但此时按国王之言应处绞刑，犯人正言是“被绞死”，又成真话，故此，国王只能放其生路。

命题的语句形式 ——陈述句

非命题的陈述句 ——悖论语句

疑问句
祈使句
感叹句

} 非命题语句

判断一个句子是否为命题：

（1）看它是否为陈述句；

（2）看它的真值是否唯一。

确定命题的真值需注意：

（1）时间性

（2）区域性

（3）标准性

定义2 为了便于对命题作一般性的讨论，在数理逻辑中，常用大写的英文字母或带下标的大写字母表示命题，称其为**命题标示符**，如 $P,Q,R,\cdots,A_1,A_2,\cdots$ 等等。

例如 P： 今天下雨

A_1： 雪是黑的

这里的 P,A_1 即为命题标示符。

一个命题标示符，如果表示确定的命题，称其为命题常元；如果只是任意命题的位置标志，称其为命题变元。由于命题变元可以代表任意命题，所以不能确定真值情况，故命题变元不是命题，只有当命题变元 P 用一个确定的命题取代后，才具有真值，这时 P 才是命题，称为对 P 进行指派。

7.1.2 联结词

在自然语言中,经常使用如“与”“或”“但是”“如果...那么...”等一些联结词,由于对这些联结词没有严格的定义,极易产生多义性。在数理逻辑中,也有类似的联结词,为了避免出现多义性,给出了严格的定义,并且予以符号化。

1、否定　　“否定”是一个一元运算

定义3　设 P 是一个命题，P 的否定是一个新命题，记作 $\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。其关系如表所示

P	$\neg P$
T	F
F	T

例　P： 伦敦是个多雾的城市

$\neg P$： 伦敦并非是个多雾的城市

$\neg P$： 伦敦不是个多雾的城市

练习　Q： 3是个偶数

$\neg Q$： ？

2、合取 “合取”是一个二元运算

定义4 设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的合取也是一个命题，记作 $P \wedge Q$，当且仅当 P,Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T，其它情况下，$P \wedge Q$ 均为 F。

其关系如表所示

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

自然语言中:“与”“但是”“既…，就…”“不仅…，而且…”“虽然…，但是…”等等均可用∧表示。

例　P：今天下雨；Q：明天下雨；

$P\wedge Q$：今明两天都下雨。

虽然“合取”联结词可以对应于自然语言但并不完全相同。例如

P：我去看电影；Q：房间里有10张桌子；

$P \wedge Q$：我去看电影并且房间里有10张桌子.

在自然语言中，$P \wedge Q$ 这个命题是没有意义的，但在数理逻辑中却是一个新命题，可按“合取”的定义确定真值。

3、析取　　“析取”是一个二元运算

定义5　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的析取也是一个命题，记作 $P \vee Q$，当且仅当 P,Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 为 F，其它情况下，$P \vee Q$ 均为 T。

其关系如表所示

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

自然语言中，“或”可用∨表示。

例　P：今天下雨；Q：明天下雨；

$P \vee Q$：今天或明天下雨.

“析取”联结词也与自然语言有所不同

自然语言中的“或”，有两种含义：

（1）相容“或”——可兼或（用∨表示）

（2）不相容“或”——异或、排斥或

例如

（1）灯泡有故障或开关有故障。

（2）我在家通过电视看这场杂技或到剧场看这场杂技。

（3）他昨天做了二或三十道习题。

这里（1）是可兼或，（2）是异或，（3）中的“或”是指习题的近似数目,不是联结词。

4、蕴含　　“蕴含”是一个二元运算

定义6　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的蕴含也是一个命题，记作 $P \to Q$，当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P \to Q$ 的真值为 F，其它情况下，$P \to Q$ 均为 T。其关系如表所示

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

自然语言中,“如果…，那么…”可以用$\rightarrow$表示。

例　P：天不下雨；Q：我去看电影；

$P \rightarrow Q$：如果天不下雨，那么我去看电影

但在自然语言中，前面的原因与后面的结果一般是有联系的，否则就没有意义了，但逻辑语言中，蕴含联结词没有这个要求。

例　P：雪是黑色的；Q：$2+2=4$

$P \to Q$：如果雪是黑色的，那么$2+2=4$

而且命题 $P \to Q$ 是 T。因为此命题的前件是F，无论后件的情况如何，命题的真值总是T，将这种情况称为“善意的推断”。

例　假如给我一根杠杆和一个支点，我可以橇起地球（阿基米德）。

例 　伊索的主人一次在酒桌上喝醉酒说：我没醉，我可以和你们打赌，我能把大海喝干。醒来后别人找他理论，怎么办？

他求救于伊索，伊索说：如果你堵住所有的入海口，我就把大海喝干。

如果一个条件语句的前一部分条件（前件）为假，那么这个语句总被认为是真的。

5、等价　　“等价”是一个二元运算

定义7　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的等价也是一个命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，当 P 与 Q 的的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F，其关系如表所示

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P \leftrightarrow Q$ ——充分必要条件

例 （1）两个三角形全等(P)，当且仅当它们的三组对应边均相等(Q)。

符号化：$P \leftrightarrow Q$

（2）函数$y = f(x)$在$x = a$处连续(P)，充分必要条件是：当$x \to a$时，$f(x) \to f(a)$ (Q)。

符号化：$P \leftrightarrow Q$

（3）$2+2=4$ (P)当且仅当雪是黑的(Q)。

符号化：$P \leftrightarrow Q$

内容小结

1.命题的判定

2.联结词的概念

课下练习 P123 习题7.1 1,2,4

7.2 命题公式及其分类

7.2.1 命题公式

定义8 不含有任何联结词的命题，称为原子命题或简单命题；至少包含一个联结词的命题，称为复合命题。

例 设 P,Q,R 是任意命题，则

$$\neg P, P \vee Q, P \wedge Q \leftrightarrow R, P \rightarrow (Q \vee \neg R)$$

均为复合命题，也称为命题公式。

定义9 命题逻辑中的合式公式（well formed formula），递归定义如下：

（1）单个命题常元或变元是合式公式；

（2）若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是合式公式,则$\neg\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 也都是合式公式；

（3）当且仅当能够有限次地应用（1）~（2）得到的包含命题常元、命题变元，联结词和括号的符号串是合式公式，合式公式也称为命题公式或简称为公式。

说明1　定义是以递归形式给出的。

（1）称为基础；（2）称为归纳；

（3）称为界限。

说明2　命题公式不是命题。

7.2.2 赋值（解释或指派）

定义10 设 A 是一个命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 A 中的所有命题变元，给 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 指定一组真值，称为对公式 A 的一个赋值（解释或指派）；若指定的一组值使 A 的值为 T，称这组值为 A 的成真赋值；若使 A 为 F，称其为 A 的成假赋值。

例　若给公式 $A=\neg(P\vee Q)\rightarrow R$ 一组赋值 T,T,F（赋值一般按字典顺序排列，$P=T,Q=T,R=F$），得 A 的真值为 T，故 T,T,F 是 A 的成真赋值；若另给一组赋值 F,F,F，得 A 的真值为 F，则 F,F,F 是 A 的成假赋值。

一个含 n 个命题变元的公式共有 2^n 组不同的赋值

将公式在所有赋值之下取值的情况列成表，称为公式的真值表。

例1 构造公式 $\neg P \vee Q$ 的真值表

解 如表所示

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

例2　构造下列两个公式的真值表

(1)　$P \wedge Q \rightarrow P$　　　(2)　$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$

解　（1）如表所示

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

（2）如表所示

P Q	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg(P \to Q) \wedge Q$
T T	T	F	F
T F	F	T	F
F T	T	F	F
F F	T	F	F

7.2.3 命题公式的分类

定义11 设 A 是一个命题公式

（1）若 A 在它的任何赋值下取值均为 T，称 A 是重言式或永真式，如例2（1）。

（2）若 A 在它的任何赋值下取值均为 F，称 A 是矛盾式或永假式，如例2（2）。

（3）若 A 至少存在一组赋值使其为 T，称 A 是可满足式，如例1。

结论：

（1）设公式A是重言式，则A的否定$\neg A$是矛盾式，反之亦然。

（2）设公式A,B是重言式，则$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ 均为重言式。

内容小结

1.真值表

2.判断公式的类型

课下练习 P125 习题7.2 1,2,3