

Оглавление

1	Когда тигры курили	2
2	Гироскоп в кардановом подвесе	8
3	Уравнения движения гироскопа	9
4	Свойства гироскопа с тремя степенями свободы . . .	16
5	Гироскоп с двумя степенями свободы	17
6	Авиационные гироскопы	20
7	Порядок выполнения работы	22

Гироскопы

§1. Когда тигры курили

Игрушка, которую возможно многие помнят из собственного детства — волчок или юла. Предмет, который при быстром раскручивании, получал новые свойства — свою удивительную устойчивость. На протяжении веков волчок сопровождал человека, не только как забава для детей, но и как спортивный снаряд в Древней Греции, для создания иллюзионных шоу — в Японии, в качестве веретена для прялок и средства разведения огня — в Латинской Америке и Африке.

Свойство быстровращающихся тел сохранять направление оси вращения оказалось полезным в морских путешествиях. Рассказывают, что первую удачную конструкцию искусственного горизонта предложил в 1742—1743 гг. английский механик Серсон. Основой этого прибора являлся волчок в виде большого отполированного диска с заострением в центре. Волчок Серсона запускался от руки. Поэтому продолжительность его вращения оказалась небольшой. Его коллега Дж. Грехем существенно усовершенствовал это изобретение, предложив запускать волчок раскручиваем намотанного на его ось шнура. Уже одно это сделало прибор Серсона более пригодным для пользования.

В 1743 г. «искусственный горизонт» подвергли всесторонним испытаниям при плавании яхты в Ламанше. Испытания оказались успешными. Вслед за этим Адмиралтейство отправило изобретателя Серсона в плавание на фрегате «Виктория» для дальнейших детальных испытаний. К сожалению, результаты их остались неизвестными. Корабль со всем экипажем и изобретателем искусственного горизонта погиб во время шторма. Считали, что это произошло по вине испытывавшего прибора.

Произошедшая катастрофа создала непреодолимые затруднения для Дж. Грехема, создавшего новый вариант искусственного горизонта.

В течение следующего века попытки использовать вращающийся волчок не возобновились. Новым толчком в этом направлении явились знаменитые опыты французского физика Леона Фуко. Среди других приборов, продемонстрированных Фуко Парижской Академии Наук в 1852 г., был прибор, который впервые позволял

обнаружить факт суточного вращения Земли в лабораторных условиях.

Основным элементом этого прибора, названного Фуко «гироскопом», был быстро вращающийся волчок. Термин «гироскоп» [1] (в буквальном переводе — «прибор, обнаруживающий вращение», от греческих слов «gyro» — вращение и «scopos» — смотрю, наблюдаю) удержался в науке. В настоящее время этот термин применяется в более широком смысле для обозначения всякого прибора, в котором использованы своеобразные свойства быстро вращающегося тела. Эти свойства принято называть гироскопическими, а устройства, основанные на свойствах гироскопа — гироскопическими приборами.

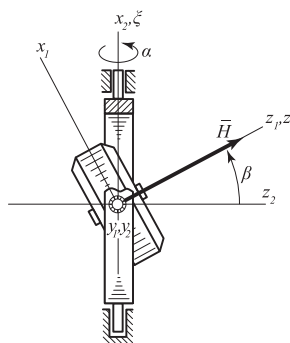


Рис. 1.1. Гироскоп в кардановом подвесе

После начинается практически современная бурная история развития гироскопов. В 1886 году француз Флерие предлагает очень компактный искусственный горизонт.

Быстровращающийся маховик придумали использовать не только для навигационных целей. Целый ряд изобретений, основанных на свойствах быстрого вращения, 19 и 20 веков сегодня стали частью истории, а возможно ждут своего момента славы, а некоторые исправно работают.

В 1904 г. немецкий инженер О. Шлик разработал и испытал на бывшем минном заградителе «Зеебор», водоизмещением около шестидесяти тонн, гироскопическое устройство для борьбы с качкой — стабилизатор, или успокоитель качки.

Без стабилизаторов наклоны судна при качке достигали сорока градусов. С запуском гироскопического стабилизатора раскачивание судна резко уменьшилось. Оно стало не выше чем один градус. Сильно раскачивался лишь гироскоп.

Внеся некоторые изменения в конструкцию успокоителя, американец Э. Сперри создал так называемый активный успокоитель, при помощи которого можно было активно воздействовать на судно, не только успокаивая, но и увеличивая качку. Последнее обстоятельство очень важно, например, для ледокола, проходящего через ледяные поля, где специальное раскачивание может облегчить разрушение льда.

В Российской империи развитию гироскопических устройств уделялось не очень большое внимание со стороны государственной казны, на что сетовали ученые того времени, имевшие собственные проекты гироскопических успокоителей качки, и других устройств, которым не было дано стать первыми в своем роде.

Например однорельсовую железную дорогу предложили примерно в 1909 г. почти одновременно англичане Бреннан, Шарль и русский инженер П. П. Шиловский, который был англофилом.

В годы Первой мировой войны граф Петр Шиловский разработал проект стабилизации корабельного орудия, действующая модель гироскопического успокоителя качки корабля, «ортоскоп» (гироскопический курсоуказатель), проверенный на яхте и на самолете «Илья Муромец». Шиловский поехал в Лондон, где продемонстрировал идею руководителям крупного автомобильного завода Wolseley Tool & Motorcar Company. В Англии к его проекту оказались более благосклонны, чем в России. И через год уже в металле появился двухколесный гироскопический автомобиль, гирокар, который он построил вместе с фирмой Wolseley в Лондоне.

Русское издание «Аэро и автомобильная жизнь» написало о нем: «Особое восхищение прохожих вызывало то обстоятельство, что коляска даже при совершенно тихом ходе не теряла устойчивости. Шиловский нарочно ехал как можно медленнее, чтобы доказать, что устойчивость его автомобиля совсем не зависит от быстроты его движения».

Машина, задуманная Шиловским, имела одну продольную ось с парой колес, передним и задним. Кроме двигателя внутреннего сгорания она оборудовалась гироскопом, который представлял собой

быстро крутящийся ротор, чья ось вращения могла изменять свое положение в пространстве. Именно это устройство должно было удерживать равновесие конструкции и не позволять ей упасть, даже когда та стояла на месте. Тяжеловесный ротор весом 600 килограммов приводил в действие электромотор, который питался от динамомашины, подключенной к главному двигателю. Общий вес машины составила составил 2750 килограммов.

Первый опыт с гирокаром состоялся 13 ноября 1913 года: инженеры раскрутили маховик гироскопа, а затем убрали из-под машины подпорки. Та осталась на месте как ни в чем не бывало! Тогда испытатели отважились сесть в гирокар, залезая в него по очереди. Люди менялись местами, выходили и снова входили, а под конец даже попытались опрокинуть машину — гироскоп стойко все выдержал.

Опытные поездки на гирокаре продолжались, и одна из них все же закончилась аварией, что отложило публичную демонстрацию прототипа до весны 1914-го. В сотый раз все перепроверив, Шиловский выкатил свою машину в Риджентс-парк, к самому центру Лондона, чтобы ее могло увидеть максимальное количество публи-

ки. И гирокар вызвал настоящую сенсацию. Пресса трубила, проходившие рукоплескали.

Но в 1914 году началась Первая мировая война. Это поставило крест на разработках и в целом сильно затруднило передвижение Шиловского между Санкт-Петербургом и Лондоном, а гирокар компания Wolseley закопала в прямом смысле слова в землю, как и ряд других опытных образцов, чтобы в случае неблагоприятного исхода войны он не достался немцам. Петр Петрович и до войны много работал над системами орудийной стабилизации, а теперь у него появился веский повод предложить армии целый ряд проектов подобного свойства. Среди них было гироскопически сбалансированное корабельное орудие, неподвластное качке, а также ортоскоп — гироскопический курсоуказатель. Последний испытывали на паровой яхте «Стрела» и на самолетах Сикорского «Илья Муромец». В 1917 году русские летчики Александр Журавченко и Глеб Алехнович совершили на самолете «Илья Муромец» слепой полет, выдерживая заданный прямолинейный курс по гироскопическому курсоуказателю Шиловского. Но в производство его так и не запустили.

А потом случилась революция. Шиловский, в отличие от многих других чиновников и инженеров, остался в России.

Восьмого сентября 1919 года граф Петр Шиловский выступил на очередном съезде ВСНХ с докладом «О постройке гироскопической железнодорожной ветки Кремль — Кунцево». В нем он под-

нял свою идею 1911 года в надежде на интерес к ней новых властей. И не ошибся. Дорога была признана нужным и важным проектом. Вот что сообщала об этом «Красная газета» от 15 апреля 1921 года: «Президиум ВСНХ обсуждал вопрос о сооружении однопутной гироскопической железной дороги. Постановлено использовать ныне бездействующую бывшую царскую ветку Петроград — Детское Село — Александрова. Путиловский завод исполняет уже раму и корпус двухвагонного поездного состава. Пробный поезд будет готов через год. Он рассчитан на 150-верстную скорость в час. Такая скорость для двухпутных дорог была пока недоступна». Шиловскому выделили средства. Получив от советского правительства заказ на разработку и строительство дороги протяженностью около сорока километров, Шиловский организовал собственное конструкторское бюро, привлек к проекту таких блестящих инженеров и механиков, как Р. Н. Вульф, А. М. Годицкий-Цвирко, В. Н. Евреинов, Р. А. Лютер, А. С. Шварц, И. В. Мещерский, П. Ф. Папкович, Н. Е. Жуковский. Гирокар на выставке Гирокар на выставке (1913)

Через год, когда были разработаны необходимые проекты и схемы и модель поезда прошла испытания в аэродинамической трубе Политехнического института, началось строительство. За четыре месяца проложили 12 километров, то есть примерно четвертую часть пути от Детского Села до Средней Рогатки. Однако в 1922 году финансирование проекта было прекращено, и все работы по сооруже-

нию монорельса оказались брошены. Некоторые историки считают, что это стало результатом болезни Ленина, который увлекался техническими новинками. Его соратники отложили проект до лучших времен.

Разочарованный Шиловский снова уехал в Англию вместе с семьей, на это раз навсегда.

Он сделал неплохую инженерную карьеру в британском отделении знаменитой Sperry Corporation — компании, отметившийся серьезными разработками в области гироскопов и внедрением автопилотов в авиации. Гироскопические патенты Шиловского сыграли важную роль, когда в США и Великобритании разрабатывали системы стабилизации самолетов и вертолетов.

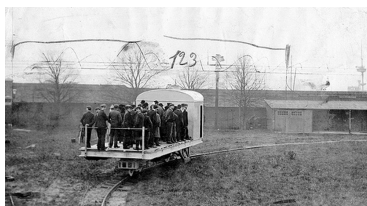
В 1924 году была издана его работа, посвященная теории

и использованию гироскопов под длинным названием «The gyroscope: its practical construction and application, treating of the physics and experimental mechanics of the gyroscope, and explaining the methods of its application to the stabilization of monorailways, ships, aeroplanes, marine guns, etc.»[1].

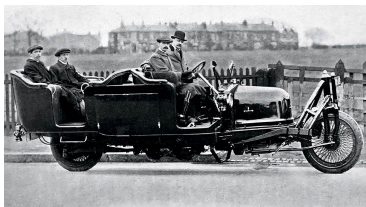
В 1938 году Шиловский добился наконец, чтобы его гирокар откопали. Машину отреставрировали, покрасили и поставили в музей Wolseley. Удивительно, но десятью годами позже, еще при жизни графа, при проведении ревизии музея экспонат признали не имеющим ценности и разрезали на металл. Впоследствии историки техники очень переживали по этому поводу. Сам Шиловский умер в тишине и спокойствии в 1957 году в возрасте 85 лет

Для пропаганды идеи однорельсовой дороги Шарль и Шиловский построили однокольный автомобиль. В нем они разъезжали по Лондону, удивляя жителей британской столицы.

В современной технике гироскоп — основной элемент целого ряда сложных приборов, широко применяемых для автоматического управления движением самолётов, морских судов, торпед, ракет и других объектов. Гироскопы используются для определения горизонта и географической широты, для измерения угловых и поступательных скоростей движущихся объектов. При помощи гироскопов осуществляется бурение скважин, прокладка штолен метрополитена, управление космическими объектами и многое другое. А гироавтомобиль Шиловского мы и сегодня видим на улицах — это моноколесо.



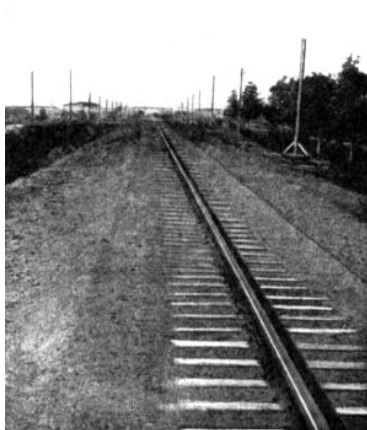
Монорельсовая железная дорога на заводе Wolseley Tool & Motorcar Company



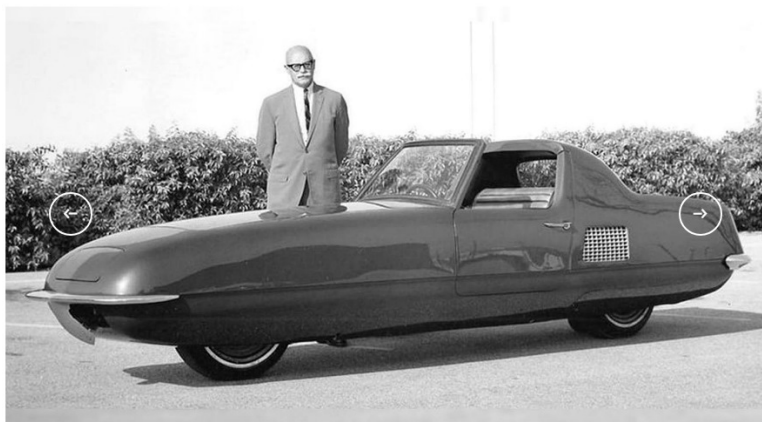
П. Шиловский на гирокаре собственного изобретения



Эксгумация легендарного гирокара, пролежавшего в земле 23 года. 1938 год



Монорельсового пути (от Детского Села до Средней Рогатки)



Гирокар Gyro-X, инженер Томас Саммерс (США)

§2. Гироскоп в кардановом подвесе

«Гироскоп — быстро вращающееся твёрдое тело, ось вращения которого может изменять своё направление в пространстве» [2].

Чтобы ось гироскопа могла свободно изменять ориентацию, гироскоп обычно помещают в так называемый *карданов подвес* (рис. 1.1). Карданов подвес состоит из двух колец: внешнего и внутреннего. Внешнее кольцо может свободно вращаться относительно основания, то есть того объекта, на котором установлен гироскоп. Внутреннее кольцо, которое несёт ротор, может свободно поворачиваться относительно внешнего кольца. Оси вращения колец обычно взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке, которая называется *центром карданова подвеса* и является его неподвижной точкой. Обладая таким подвесом, ротор гироскопа имеет три степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса. Ось вращения ротора перпендикулярна к оси вращения внутреннего кольца и, как правило, проходит через его неподвижную точку. Вращение ротора гироскопа вокруг этой оси принято называть *собственным вращением*, а саму ось — осью собственного вращения или просто осью гироскопа. Если ось собственного вращения гироскопа является осью его материальной симметрии, гироскоп называется *симметричным*.

Гироскоп называется *уравновешенным*, или *астатиическим*, если общий центр тяжести гироскопа и внутреннего кольца совпадают с центром карданова подвеса, а центр тяжести внешнего кольца лежит на его оси вращения. Такой гироскоп сохраняет равновесие при любом положении его ротора.

Гироскоп с тремя степенями свободы, у которого сумма моментов всех внешних сил относительно точки подвеса равна нулю, называется *свободным*.

Применяемые в технике гироскопы представляют собой тела вращения, имеющие обычно форму маховика с утолщенным ободом или шара, массой от нескольких граммов до десятков килограммов. Быстрое вращение гироскопа (со скоростью до 60000 об./мин.) достигается тем, что ротор гироскопа делают вращающейся частью (ротором) быстроходного двигателя. Внутреннее кольцо конструктивно выполняется в форме кожуха. Статор электродвигателя крепится на крышке кожуха. Неподвижная относительно кожуха трёхфазная обмотка статора создаёт вращающееся магнитное поле, которое при взаимодействии с ротором создаёт необходимый вращающий момент. При этом скорость ротора почти достигает скорости вращения магнитного поля и практически сохраняется постоянной.

В ряде случаев вращение гироскопа поддерживается струёй сжатого воздуха — ротор гироскопа является одновременно ротором воздушной турбины. В некоторых приборах ротор, заключённый в кожух, помещают в жидкость. Подшипники кожуха (поплавки) при этом полностью разгружаются и момент трения скольжения в них существенно уменьшается.

Существуют гироскопы вовсе не имеющие карданова подвеса, например, шар-гироскоп (рис. 2.2), вращающийся на «воздушной подушке», и гироскоп с магнитным или электростатическим подвесом (рис. 2.3).

§3. Уравнения движения гироскопа

3.1. Угловые координаты и угловые скорости твердого тела Для определения положения гироскопа введём следующие системы координат (рис. 3.4): $\xi\eta\zeta$, связанную с основанием гироскопа, $x_2y_2z_2$ — с его внешним кольцом, $x_1y_1z_1$ — с его внутренним кольцом и, наконец, xyz , связанную с ротором гироскопа. Начала всех введённых систем координат поместим в центр карданова подвеса, точку O .

Оси ξ и x_2 направим по оси вращения внешнего кольца, оси y_2 и y_1 — по оси вращения кожуха, а оси z_1 и z — по оси вращения ротора. Положение гироскопа по отношению к основанию, на котором он установлен, можно определить тремя углами

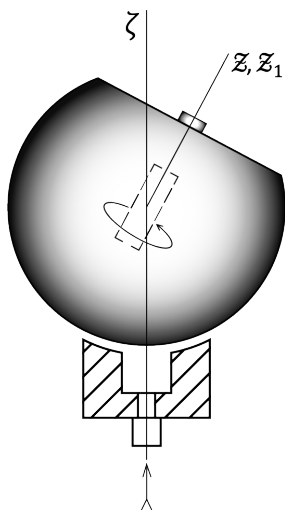


Рис. 2.2. Шар-гироскоп

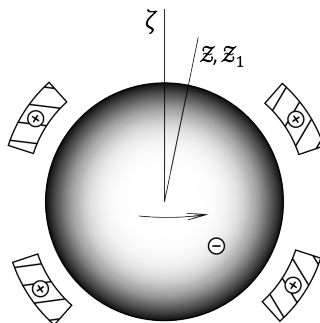


Рис. 2.3. Гироскоп с электростатическим подвесом

Эйлера ψ , θ , ϕ (рис. 3.4) или тремя углами Крылова¹⁾ α , β , γ (рис. 3.5). От системы координат $\xi\eta\zeta$, связанной с основанием, к системе xyz , связанной с ротором, можно перейти (рис. 3.5) тремя последовательными поворотами на углы α , β , γ , что схематично можно записать так

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[\xi, x_2]{\alpha} x_2y_2z_2 \xrightarrow[y_2, y_1]{\beta} x_1y_1z_1 \xrightarrow[z_1, z]{\gamma} xyz.$$

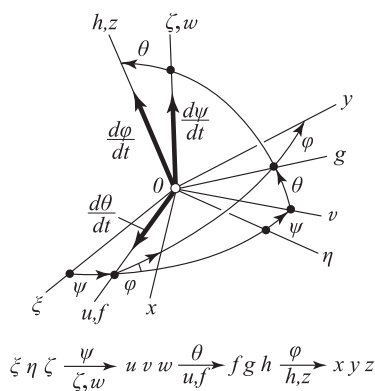


Рис. 3.4. Углы Эйлера

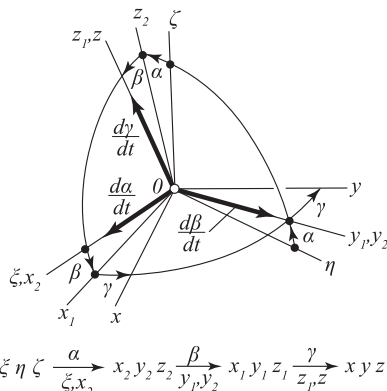


Рис. 3.5. Углы Крылова

¹⁾ Углы впервые введены академиком А.Н. Крыловым при исследовании задачи о качке корабля.

Для гироскопа в кардановом подвесе α — угол поворота внешнего кольца относительно основания, β — угол поворота внутреннего кольца (кожуха) по отношению к внешнему кольцу, γ — угол поворота ротора относительно внутреннего кольца. Углы считаются положительными, если вращение, наблюдаемое с положительного направления соответствующей оси, происходит против хода часовой стрелки. При $\alpha = \beta = \gamma = 0$ плоскости кардановых колец взаимно перпендикулярны и все введённые системы координат совпадают.

Абсолютные угловые скорости внешнего кольца $\bar{\omega}_2$, кожуха $\bar{\omega}_1$ и ротора $\bar{\omega}$ выражаются через угловую скорость основания \bar{u} и относительные скорости $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2 &= \bar{u} + \frac{d\alpha}{dt} \bar{i}_2, \\ \bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_2 + \frac{d\beta}{dt} \bar{j}_1 = \bar{u} + \frac{d\alpha}{dt} \bar{i}_2 + \frac{d\beta}{dt} \bar{j}_1, \\ \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \bar{k} = \bar{u} + \frac{d\alpha}{dt} \bar{i}_2 + \frac{d\beta}{dt} \bar{j}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \bar{k},\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $\bar{i}_2, \bar{j}_1, \bar{k}$ — единичные векторы осей $x_2(\xi)$, $y_1(y_2)$, $z_1(z)$.

Обозначим p , q , r — проекции абсолютной угловой скорости ротора $\bar{\omega}$ на эти оси. В случае, когда угловая скорость основания $\bar{u} = 0$ (см. рис. 3.5)

$$\begin{aligned}p &= \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma, \\ q &= -\frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma, \\ r &= \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2. Движение твёрдого тела с закреплённой точкой Напомним некоторые сведения из курса теоретической механики. При вращении твёрдого тела с некоторой угловой скоростью ω линейные скорости в этом теле будут распределяться по закону $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \omega \times \mathbf{r}_i$ для каждой i -той точки, где \mathbf{v}_c — скорость центра масс, а \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -той точки. Сумму $\sum_i m_i r_i^2 = J_\omega$ называют моментом инерции относительно оси, задаваемой вектором ω .

Известные нам определения и законы можно переписать с использованием введенных нами обозначений. В частности напомним определение кинетической энергии для вращающегося твёрдого тела.

Определение 1. Кинетическая энергия. Если момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения с угловой скоростью ω равен J_ω , то кинетическая энергия тела выражается:

$$T = J_\omega \frac{\omega^2}{2}.$$

Другая, хорошо известная вам величина — кинетический момент $K = \sum_i r_i \times m_i v_i$. При дифференцировании величины K получим теорему об изменении кинетического момента.

Теорема 1 Производная от кинетического момента системы материальных точек (относительно неподвижной точки) равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно этой же точки).

$$\frac{dK}{dt} = M_{\text{внеш}}.$$

Подставив сюда выражение для скорости можем записать, что

$$K_\omega = J_\omega \omega.$$

Классические уравнения механики — уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа, q — обобщенные координаты.

В рассматриваемом случае обобщенными координатами выберем компоненты угловой скорости p , q и r и соответствующие углы поворота.

Потенциальная энергия в данном случае движения тела вокруг неподвижной точки постоянна. так что подставим выражение для кинетической энергии в уравнения Лагранжа.

Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Первое слагаемое:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = C \frac{dr}{dt}.$$

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \gamma} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \gamma} = \\ &= Ap \left(-\frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma \right) + Bq \left(-\frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \cos \gamma - \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma \right) = \\ &= Apq - Bqp = (A - B)pq \end{aligned}$$

Для того чтобы определить обобщенную силу, соответствующую какому-либо из эйлеровых углов, надо в соответствии с общим

приемом определения обобщенных сил дать приращение этому углу (не меняя двух остальных углов), подсчитать работу всех приложенных сил при этом приращении и разделить затем работу приложенных сил на приращение угла. Но при таком приращении тело совершает малый поворот вокруг неподвижной оси, и поэтому работа равна главному моменту всех сил относительно этой оси, умноженному на приращение угла. Отсюда сразу следует, что обобщенными силами для этих эйлеровых углов будут моменты сил относительно осей, перпендикулярных плоскостям, в которых меняются эти углы — обобщенные координаты.

Объединяя все результаты получим

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_z.$$

Еще два уравнения можно получить аналогично, или воспользовавшись циклической перестановкой (для этого надо показать, что любые операции над тензорами и векторами инвариантны относительно циклической перестановки осей этой системы).

3.3. Уравнения движение астатического гироскопа. Итак, движение твёрдого тела с закреплённой точкой описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_x, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M_y, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В них A , B , C — главные моменты инерции ротора относительно закреплённой точки O ; M_x , M_y , M_z — моменты внешних сил, действующих на ротор относительно осей x , y , z ; p , q , r — проекции абсолютной угловой скорости ротора $\bar{\omega}$ на эти оси.

Динамические уравнения Эйлера (3.3) могут быть получены из теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на оси, жёстко связанные с самим телом.

Для имеющегося в нашей задаче случая — динамически симметричного твёрдого тела (ротора) эти уравнения удобнее записать не в осях x , y , z , жёстко связанных с ротором, а в осях x_1 , y_1 , z_1 , связанных с кожухом и не участвующих в быстром вращении тела. Уравнения движения симметричного твёрдого тела в осях x_1 , y_1 , z_1 , не принимающих участия в быстром вращении тела, называются *модифицированными уравнениями Эйлера* или *гироскопическими уравнениями*. Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp_1}{dt} + (C - A)q_1 r_1 \\ A \frac{dq_1}{dt} + (A - C)p_1 r_1 \\ C \frac{dr_1}{dt} \end{aligned} \right| \begin{aligned} + q_1 H = M_{x_1}, \\ - p_1 H = M_{y_1}, \\ + \frac{dH}{dt} = M_{z_1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величина $H = C \frac{d\gamma}{dt}$ называется собственным кинетическим моментом гироскопа; p_1, q_1, r_1 — проекции угловой скорости $\bar{\omega}_1$ системы координат xyz на оси x_1, y_1, z_1 .

Для быстро вращающегося гироскопа, то есть, когда $\frac{d\gamma}{dt} \gg p_1, q_1, r_1$, в этих уравнениях можно пренебречь членами, стоящими слева от вертикальной черты.

Уравнения

$$\begin{aligned} q_1 H &= M_{x_1}, \\ -p_1 H &= M_{y_1}, \\ \frac{dH}{dt} &= M_{z_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

называются *укороченными* или *прецессионными уравнениями* теории гироскопов [3]. Их можно представить также в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{M}, \quad (3.6)$$

где \bar{H} — вектор, направленный по оси симметрии ротора гироскопа и по модулю равный собственному кинетическому моменту гироскопа, то есть произведению полярного момента инерции ротора C на угловую скорость собственного вращения $\frac{d\gamma}{dt}$.

Уравнение (3.6) является основным уравнением прецессионной теории гироскопов.

Переход к прецессионным уравнениям теории гироскопов соответствует тому, что вектор полного кинетического момента тела

$$\bar{K} = A p_1 \bar{i}_1 + A q_1 \bar{j}_1 + C \left(r_1 + \frac{d\gamma}{dt} \right) \bar{k}_1$$

отождествляется с составляющей

$$C \frac{d\gamma}{dt} \bar{k},$$

направленной по оси симметрии тела, в силу того, что $\frac{d\gamma}{dt} \gg p_1, q_1, r_1$, а моменты инерции A и C — величины одного порядка.

3.4. Чем же мы пренебрегли. При исследовании переходных процессов и решении вопросов устойчивости гироскопических систем необходимо учитывать влияние инерции колец подвеса на

движение оси гироскопа. В этом случае для составления уравнений движения следует рассматривать гироскоп в кардановом подвесе как систему трёх твёрдых взаимодействующих тел. Соответствующие уравнения движения являются уравнениями нутационной теории гироскопов. Их можно получить как при помощи теоремы об изменении кинетического момента, так и методом Лагранжа.

Кинетическая энергия гироскопа в кардановом подвесе в этом случае имеет вид

$$T = \frac{1}{2}[A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2 + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2].$$

Здесь (p_2, q_2, r_2) , (p_1, q_1, r_1) , (p, q, r) — проекции абсолютных угловых скоростей $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}$ внешнего кольца, кожуха и ротора соответственно на оси систем координат $x_2 y_2 z_2$, $x_1 y_1 z_1$ и xyz , жёстко связанных с этими телами и являющихся для них главными осями инерции. A_2 , B_2 , C_2 — моменты инерции внешнего кольца относительно его главных осей инерции x_2 , y_2 , z_2 ; A_1 , B_1 , C_1 — главные моменты инерции кожуха (моменты инерции относительно осей x_1 , y_1 , z_1); A и C — экваториальный и полярный моменты инерции ротора. Проекции (p_2, q_2, r_2) , (p_1, q_1, r_1) абсолютных угловых скоростей $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_1$ вычисляются на основании формул (3.1). В случае неподвижного основания уравнения Лагранжа второго рода для гироскопа в кардановом подвесе записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[J(\beta) \frac{d\alpha}{dt} + C \left(\frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \beta \right] &= Q_\alpha, \\ B_0 \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \frac{1}{2} J(\beta) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta &= Q_\beta, \\ \frac{d}{dt} \left[C \left(\frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] &= Q_\gamma, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J(\beta) &= A_2 + (A_1 + A) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta, \\ B_0 &= B_1 + A. \end{aligned}$$

Q_α , Q_β , Q_γ — обобщённые силы, соответствующие координатам α , β , γ .

При учете дополнительных слагаемых представляется возможным оценить погрешность допущения, что изменение угла между осью гироскопа и основанием можно приравнять изменению соответствующего угла, описывающего положение самолета в пространстве (курс, крен, тангаж).

§4. Свойства гироскопа с тремя степенями свободы

Свойства гироскопа проявляются при выполнении двух условий:

1. ось гироскопа должна иметь возможность изменять своё направление в пространстве;
2. угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть намного больше угловой скорости, которую будет иметь сама ось при изменении своего направления.

Первое свойство свободного гироскопа с тремя степенями свободы заключается в том, что его ось стремится устойчиво сохранять неизменное направление в инерциальном пространстве. Если ось вначале была направлена на какую-нибудь неподвижную звезду, то при любых движениях основания она будет сохранять это направление.

Второе свойство гироскопа проявляется, когда на его ось начинает действовать сила, создающая момент относительно центра подвеса. Под действием этой силы конец оси гироскопа будет отклоняться не в сторону действия силы, как это было бы при невращающемся роторе, а в направлении перпендикулярном к этой силе. В результате ось гироскопа начнёт поворачиваться вокруг оси, лежащей в плоскости пары сил, причём не ускоренно, а с постоянной угловой скоростью. Это движение оси вращающегося гироскопа называется *прецессией*. Оно происходит тем медленнее, чем быстрее вращается вокруг своей оси сам гироскоп. Если в какой-то момент времени действие сил прекратится, то одновременно прекратится прецессия и ось гироскопа мгновенно остановится, то есть прецессионное движение гироскопа как бы безынерциально (в рамках этой теории). Величина угловой скорости прецессии определяется на основании равенств (3.5) формулами

$$q_1 = \frac{M_{x_1}}{H}, \quad p = -\frac{M_{y_1}}{H}$$

или непосредственно из уравнения (3.6), откуда следует, что линейная скорость конца вектора \vec{H} равна моменту \vec{M} внешней силы.

Формула (3.6) показывает, что если момент внешних сил равен нулю, то ось гироскопа сохраняет неизменное направление по отношению к неподвижным звёздам, то есть в этом случае угловая скорость оси равна нулю. Кратковременные воздействия на ось такого гироскопа пары с моментом $M \neq 0$ вызовут смещение оси на малый угол тем меньший, чем меньше угловая скорость прецессии, то есть чем больше \vec{H} . С прекращением же этого воздействия

момент \bar{M} будет опять равен нулю, а следовательно равна нулю и угловая скорость прецессии, так что смещение оси прекратится. Таким образом, ось быстро вращающегося свободного гироскопа практически не изменяет своего направления под воздействием кратковременных внешних возмущений (ударов), то есть устойчива.

Удар, нанесённый по одному из колец гироскопа не только вызывает малое смещение оси согласно правилу прецессии, но и сопровождается ничтожно малыми её дрожаниями, которые называются *нутацонными колебаниями*. Амплитуды этих колебаний у быстро вращающегося гироскопа очень малы и из-за наличия неизбежных сопротивлений быстро затухают. Это позволяет при решении большинства технических задач учитывать только прецессию гироскопа, что и приводит к так называемой элементарной теории гироскопических явлений.

Итак, равномерное движение оси волчка по конусу в отсутствие внешних сил представляет собой свободную прецессию. Применительно к гироскопу ее принято называть нутацией.

§5. Гироскоп с двумя степенями свободы

Если закрепить одно из колец карданова подвеса, то у гироскопа останется две степени свободы.

5.1. Гироскопический момент. Рассмотрим случай, когда оси карданова подвеса и ось ротора взаимно перпендикулярны. Закрепим внешнее кольцо подвеса и нанесём по оси ротора вертикальный удар. Если бы внешнее кольцо могло вращаться вокруг своей вертикальной оси, то за время удара ось ротора повернулась бы на малый угол в горизонтальной плоскости. Но повороту ротора вокруг вертикали препятствует закрепление внешнего кольца. Поэтому в точках крепления внешнего кольца возникают горизонтальные силы, которые через посредство внутреннего кольца передаются на ось ротора и вызывают его прецессию в вертикальной плоскости. Таким образом, результатом вертикального удара явится длительное вращение прибора вокруг горизонтальной оси (оси внутреннего кольца). В данном случае быстро вращающийся гироскоп ведёт себя совершенно так же, как если бы его ротору не было сообщено никакого собственного вращения. Быстро вращающийся гироскоп с двумя степенями свободы совершенно лишён способности сопротивляться действию усилий, стремящихся изменить направление его оси. Если основанию гироскопа сообщить вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси, образующей угол θ с осью гироскопа,

то гироскоп будет совершать вынужденную прецессию. При этом со стороны гироскопа на подшипники кольца действует пара сил, стремящаяся кратчайшим путём установить ось собственного вращения параллельно оси прецессии, так, чтобы направления векторов \vec{H} и $\vec{\omega}$ совпадали. Момент этой пары называется *гироскопическим моментом* и определяется равенством

$$\vec{G} = \vec{H} \times \vec{\omega}. \quad (5.7)$$

Подобный гироскопический эффект имеет место у ротора турбин, установленных на судах, при циркуляции (повороте) судов или при качке, у винтовых самолётов при виражах и т. д. Формула (5.7) позволяет определить возникающие при этом гироскопические давления на подшипники.

На гироскопическом эффекте основан принцип так называемой силовой гироскопической стабилизации, а также устройство ряда приборов, например, датчика угловой скорости.

Датчик угловой скорости или *гиротаксометр* — гироскопическое устройство для определения угловой скорости объекта, на котором оно установлено (рис. 5.6). Наиболее распространены гиротаксометры, основанные на использовании астатического гироскопа с двумя степенями свободы. В таком тахометре ротор (1) гироскопа установлен в кардановом кольце (2), повороту которого препятствует пружина (3), создающая восстанавливающий момент. Гашение собственных колебаний осуществляется демпфером (4). При вращении объекта вокруг оси ξ с угловой скоростью $\vec{\omega}$ возникает гироскопический момент, направленный по оси $\eta(y_1)$, который стремится кратчайшим путём совместить ось ротора с осью вращения объекта. Этому препятствует пружина. Чем больше угловая скорость вращения объекта, тем больше гироскопический момент, тем сильнее растягивается пружина и на больший угол отклоняется кожух гироскопа. Сигнал, пропорциональный углу отклонения кожуха (а следовательно, и угловой скорости вращения объекта) снимается с потенциометра (рис. 5.6) в виде напряжения.

Уравнение движения гиротаксометра для случая малых углов отклонения оси ротора имеет вид

$$I \frac{d^2\beta}{dt^2} = Hu - C_{\Pi}\beta - C_{\text{Д}} \frac{d\beta}{dt}. \quad (5.8)$$

Здесь β — угол поворота кожуха, I — момент инерции гироскопа вместе с кожухом относительно оси вращения кожуха, C_{Π} — постоянная пружины, $C_{\text{Д}}$ — постоянная демпфера.

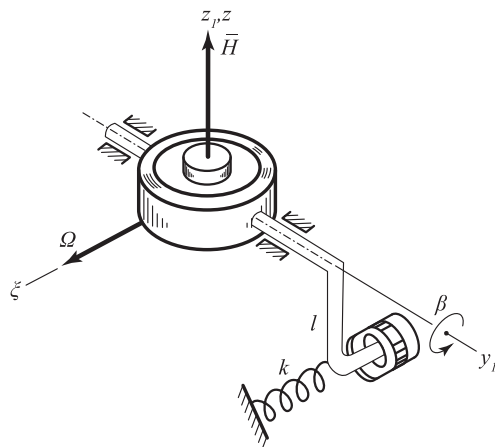


Рис. 5.6. Схема гироскометра

Уравнение (5.8) показывает, что в установившемся режиме угол отклонения гироскопа пропорционален угловой скорости объекта

$$\beta = \frac{H}{C_{\Pi}} u.$$

5.2. Современные исполнения датчика угловой скорости.

Сегодня классические механические гироскопы, которые мы рассмотрели, используются в технике не так широко, как в начале истории их использования. В вашем смартфоне, например, обязательно присутствует датчик угловой скорости, причем измеряющий все три компоненты угловой скорости телефона, но принципы работы у него несколько отличаются.

Сегодня вы пользуетесь датчиками угловой скорости разных типов: поплавковыми, динамически настраиваемыми, волоконно-оптическими, вибрационными и т.д. С их принципами работы вы можете ознакомиться самостоятельно из открытых источников.

Примером близким к рассмотренным нами устройствам может служить гироскопический измеритель угловой скорости с жидким ферромагнитным ротором [7]. конструкция которого не содержит в себе вращающихся частей, а в качестве чувствительного элемента используется ферромагнитная жидкость (феррофлюид).

Датчик выполняется в виде тора, его внутренняя полость заполнена ферромагнитной жидкостью. Для приведения жидкости в движение с помощью 4 пар соленоидов электромагнитного насоса. Каждая из пар представляет собой отдельный электромагнитный

насос. При поочередной подаче импульсов управляющего напряжения на каждый из соленоидов электромагнитного насоса ферромагнитная жидкость поляризуется в зоне действия соленоида, а при смене полярности импульсов управляющего напряжения перемещается в направлении течения. Частота и последовательность импульсов подбираются таким образом, чтобы обеспечить в контуре, образованном корпусом, ламинарное течение ферромагнитной жидкости. Регистрация углового движения жидкости относительно корпуса происходит посредством датчиков Холла.

На ферромагнитную жидкость действует ряд сил: сила тягести, центробежная сила, равнодействующая силы давления, сила трения и силы, составляющие гироскопический момент — для которого попрежнему остается верна рассмотренная нами гироскопическая теория.

§6. Авиационные гироскопы

Свойства свободного гироскопа с тремя степенями свободы устойчиво сохранять направление своей оси по отношению к неподвижным звёздам используется в устройствах, применяемых для управления движением различных объектов. В качестве примера рассмотрим устройство и принцип действия авиационных приборов, применяемых в настоящее время для определения курса самолёта и его положения относительно плоскости горизонта.

Авиагоризонт — гироскопический прибор, предназначенный для измерения углов крена и тангажа летательного аппарата. (Угол тангажа — угол между продольной осью самолёта и горизонтальной плоскостью, а угол крена — угол наклона плоскости симметрии самолёта к вертикали) [5]. Основным элементом авиагоризонта является гироскоп в кардановом подвесе, ось ротора которого вертикальна, а оси карданова подвеса расположены в горизонтальной плоскости. Для правильного измерения углов крена и тангажа ось внешнего кольца должна быть направлена параллельно продольной оси самолёта, а ось внутреннего кольца параллельна поперечной оси. Такое расположение осей карданова подвеса позволяет измерить истинный угол тангажа и истинный угол крена и при отличном от нуля угле тангажа. При повороте самолета относительно поперечной оси из горизонтального положения вместе с продольной осью самолёта будет поворачиваться внешнее кольцо карданова подвеса авиагоризонта. Внутреннее кольцо вместе с ротором гироскопа при этом останется неподвижным. Таким образом, угол поворота внешнего кольца относительно

но оси внутреннего кольца будет равен углу тангажа самолёта. При крене самолёта вместе с самолётом поворачивается корпус прибора. Внешнее кольцо, стабилизированное ротором гироскопа, при этом остаётся неподвижным. Угол поворота корпуса прибора относительно внешнего кольца при этом будет равен углу крена самолёта.

На практике в российском авиастроении распространён авиагоризонт, у которого на лицевой части прибора нанесён силуэт самолёта, неподвижный относительно корпуса и, следовательно, самолёта. За силуэтом находится сфера, положение которой стабилизировано гироскопом. На сфере нанесена линия искусственного горизонта и шкалы для измерения углов тангажа и крена. Наблюдая за положением силуэта самолёта относительно перемещающейся линии горизонта, лётчик судит о наличии и величине углов.

Авиагоризонт будет правильно показывать углы крена и тангажа, если ось ротора гироскопа будет занимать строго вертикальное положение. Однако вследствие вращения Земли, перемещения самолёта относительно Земли, а также из-за наличия возмущающих моментов, ось ротора гироскопа отклоняется от вертикали. Поэтому для правильного измерения углов крена и тангажа гироскоп с тремя степенями свободы должен быть объединён с какой-либо системой коррекции. Во всех случаях несовпадения оси ротора с истинной вертикалью система коррекции, состоящая из маятника и коррекционных двигателей, вызывает прецессию гироскопа до тех пор, пока ось не займёт заданного ей положения.

Курсовой гироскоп (гирополукомпас) — устройство для определения углов рыскания (изменения курса) и углов поворота объекта вокруг вертикальной оси. Чувствительным элементом такого прибора является гироскоп в кардановом подвесе с горизонтальной осью ротора и с вертикальной осью внешнего кольца.

В гирополукомпасе горизонтальность оси ротора обеспечивается контактным устройством, включающимся при нарушении взаимной перпендикулярности осей ротора и внешнего кольца и посылающим сигнал в коррекционный двигатель, создающий момент относительно оси внешнего кольца. На внешнем кольце укреплен шкала, видимая сквозь окно, имеющееся на передней крышке прибора. На стенке корпуса имеется так называемая курсовая черта, по углу поворота которой относительно шкалы определяется угол поворота самолёта относительно вертикали. Для устранения погрешностей, накапливающихся с течением времени и для установки необходимых показаний прибора применяется

специальный арретир. Ручка арретира находится под шкалой прибора. Вдвигая ручку, мы лишаем гироскоп двух степеней свободы. При этом при повороте ручки поворачивается и весь узел гироскопа вокруг вертикали. После установки необходимого показания (соответствующего показаниям магнитного компаса) ручка выдвигается. Таким образом, прибор разарретируется и приводится в рабочее состояние.

Для повышения точности гироскопических приборов, требуется максимально уменьшать величину момента \bar{M} , возникающего вследствие трения в осях подвеса и несовпадения центра тяжести ротора с центром подвеса, так как этот момент вызывает прецессию (уход) оси.

Момент трения в подвесах точных (прецизионных) гироскопов обычно уменьшают специально изготовленными шариковыми подшипниками. Вследствие вибраций подвеса или возвратно-вращательных движений внешней обоймы шарикоподшипников момент трения в ряде случаев удаётся сделать значительно меньше момента силы тяжести. Для уменьшения сил трения в гироскопах систем инерциальной навигации применяются опоры на драгоценных камнях.

Уменьшение момента силы тяжести достигается соответствующей балансировкой гироскопа. Требуемая при этом точность совмещения центра масс с геометрическим центром подвеса очень велика. Так для гироскопов средних размеров весом около 4 кг, имеющего угловую скорость вращения ротора порядка 30000 об/мин, смещение центра масс от оси подвеса на один микрон вызывает прецессию со скоростью около 4 град/ч Земля вращается со значительно большей угловой скоростью (15 град/ч). Следовательно, подобным гироскопом можно легко обнаружить факт вращения Земли. Однако для решения ряда технических вопросов, например, навигации судов и ракет, требуется ещё более высокая точность балансировки, так как скорость ухода оси гироскопа относительно неподвижных звёзд порядка 4 град/ч оказывается чрезмерно большой.

§7. Порядок выполнения работы

Настоящая задача является, в основном, демонстрационной. Её цель — познакомить студентов с теорией гироскопов и на ряде гироскопических приборов и их моделей продемонстрировать основные свойства быстро вращающегося твёрдого тела. Показать,

как можно использовать свойства гироскопов в приборостроении и в механике управляемых систем.

7.1. Гироскоп в кардановом подвесе

1. Проверить, что астатический гироскоп сохраняет равновесие при любом положении его ротора.

2. Убедиться, что никакой устойчивостью гироскоп не обладает, пока его ротору не сообщено быстрое вращение.

3. Наблюдать поведение гироскопа под действием силы, приложенной к оси ротора гироскопа.

4. С помощью струи сжатого воздуха привести ротор в быстрое вращение. Проверить, что под действием нанесённого удара ось гироскопа не изменит заметным образом своего направления, то есть что быстрое вращение сообщает своеобразную устойчивость оси уравновешенного гироскопа. Чем быстрее собственное вращение, тем резче выявляется приобретаемая при этом устойчивость оси гироскопа.

5. Убедиться, что ось гироскопа устойчиво сохраняет неизменное направление в пространстве при произвольном движении основания.

6. Определить положение оси, при котором гироскоп теряет свойство устойчиво сохранять её направление.

7. Ударить по одному из колец гироскопа и наблюдать нутационные колебания. Убедиться, что они быстро затухают.

8. Расположить оси ротора и кардановых колец взаимно перпендикулярно. Наблюдать прецессию гироскопа под действием вертикальной силы, приложенной к внутреннему кольцу.

7.2. Модели для демонстрации прецессии гироскопа и гироскопического эффекта

1. На модели (рис. 7.7) для демонстрации прецессии гироскопа расположить ось ротора горизонтально. Убедиться, что под действием силы тяжести быстро вращающийся гироскоп не опускается, а прецессирует вокруг вертикали.

2. Пользуясь правилом прецессии, проверить направление движения оси гироскопа.

3. Вычислить собственный кинетический момент гироскопа \bar{H} по результатам измерения угловой скорости прецессии гироскопа вокруг вертикали при наличии дополнительных грузов массой m_1 и m_2 , укрепленных на расстоянии l от неподвижной точки ($m_1=40$ г, $m_2=120$ г, $l=63$ мм).

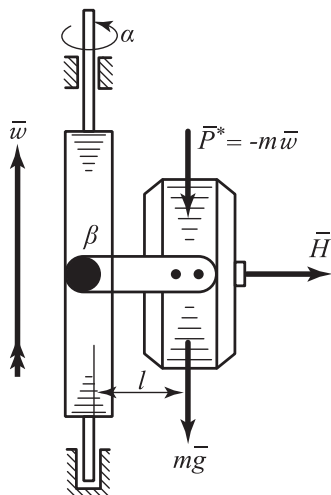


Рис. 7.7. Модель для демонстрации прецессии гироскопа

4. Изменив направление собственного вращения ротора на противоположное, наблюдать прецессию также противоположного направления.

5. Отключив питание гироскопа, наблюдать увеличение угловой скорости прецессии по мере падения угловой скорости собственного вращения.

6. Раскрутить ротор модели, используемой для демонстрации гироскопического эффекта. Резко изменяя направление оси вращения ротора, ощутить воздействие на руку со стороны быстро вращающегося ротора.

7.3. Датчик угловой скорости (гиротаксометр)

1. Включив стенд угловых скоростей, наблюдать реакцию гироскопа с двумя степенями свободы на различные угловые скорости платформы.

2. Определить границы чувствительности датчика угловых скоростей.

3. Построить графики зависимости напряжения, снимаемого с потенциометра, от угловой скорости вращения платформы для нескольких случаев:

(а) ось ротора и ось кожуха расположены в горизонтальной плоскости и перпендикулярны оси вращения платформы;

(б) ось кожуха расположена в горизонтальной плоскости, а угол между осью ротора и осью вращения платформы равен α (задаётся преподавателем);

(с) ось ротора расположена в горизонтальной плоскости, а ось кожуха образует с осью вращения платформы угол β (задаётся преподавателем).

7.4. Вопросы для самопроверки

1. Вывести формулу для кинетического момента твёрдого тела с неподвижной точкой.
2. Вывести динамические уравнения Эйлера.
3. Из теоремы об изменении кинетического момента получить модифицированные уравнения Эйлера.
4. Выразить проекции угловой скорости ротора через углы Крылова.
5. Найти аналитические выражения, связывающие углы Эйлера и Крылова.
6. Получить уравнение (3.6) непосредственно из теоремы об изменении кинетического момента.
7. Составить явное выражение для кинетической энергии гироскопа в кардановом подвесе и далее методом Лагранжа получить уравнения движения гироскопа.
8. Найти решение уравнения, описывающего движение гиротометра.
9. Как с помощью двух гироскопов в кардановом подвесе определить изменение ориентации объекта?
10. Найти направление гироскопического момента, приложенного к мотоциклу со стороны колёс при повороте.

7.5. Задачи

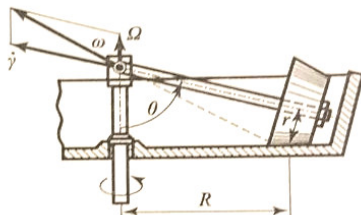
Задачи приведены в лекциях [3].

1. Турбовинтовой самолет совершает плоский разворот. Скорость самолета $V = 250 \text{ м/сек}$. Радиус кривизны траектории $R = 2000 \text{ м}$. Вектор угловой скорости турбины относительно самолета направлен к носу самолета. Угловая скорость вращения турбины $d\gamma/dt = 600 \text{ с}^{-1}$ ее момент инерции относительно оси вращения $C = 40 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Найти величину и направление момента при выполнении левого виража.
2. Велосипед движется прямолинейно со скоростью $V = 18 \text{ км/час}$. Радиус колес велосипеда $r = 0,5 \text{ м}$. Масса одного колеса $P = 3 \text{ кг}$. Предполагая, что масса колеса равномерно распределена вдоль его обода, найти величину и направление момента, приложенного к велосипеду со стороны осей колес в случае, когда велосипедист начинает наклоняться влево (вправо) с угловой скоростью $\omega = 0,3 \text{ с}^{-1}$.
3. Велосипедист движется по окружности постоянного радиуса $R = 20 \text{ м}$ линейной скоростью $V = 12 \text{ км/час}$. Радиус колеса

велосипеда $r = 0,5\text{ м}$, масса одного колеса $P = 3\text{ кг}$. Предполагая, что масса колеса равномерно распределена вдоль его обода, найти величину и направление момента, приложенного к велосипеду со стороны колес. Найти угол наклона велосипедиста к горизонту с учетом гироскопического момента и без него. Считать, что колеса велосипеда катятся без проскальзывая.

4. Мотоцикл с коляской движется по окружности постоянного радиуса. Найти величину и направление гироскопического момента, приложенного к мотоциклу со стороны колес коляски, если скорость мотоцикла $V = 54\text{ км/час}$, радиус окружности $R = 20\text{ м}$, радиус обода колеса $r = 0,5\text{ м}$, масса колеса $P = 6\text{ кг}$. Считать, что масса колеса равномерно распределена вдоль обода и качение колес происходит без проскальзывания.

5. Для размельчения руды, зерна и других твердых материалов применяются дробильные мельницы с бегунами. Бегуны катятся без проскальзывания по горизонтальной плоскости, а горизонтальный вал (водило) вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикали. Определить дополнительное давление бегуна на горизонтальную плоскость, возникающее если масса бегуна $P = 1000\text{ кг}$, радиус инерции относительно оси вращения $\rho = 40\text{ см}$, $\Omega = 60\text{ об/мин}$, $R = 75\text{ см}$, $r = 50\text{ см}$.



6. Тонкий диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно платформы. Платформа вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью Ω . Найти момент сил реакций, возникающий в подшипниках оси вращения диска, и сами реакции, если угол между осями вращения равен 90° , а расстояние между подшипниками равно a . Показать, что гироскопический момент, действующий со стороны диска на его подшипники, равен моменту сил Кориолиса в подвижной системе координат, связанной с платформой.

7. В условиях предыдущей задачи найти момент сил реакции возникающих в подшипниках оси вращения диска, если эта ось

образует с плоскостью горизонта угол α .

8. Показать, что гироскопический момент как бы стремится совместить кратчайшим путем вектор собственного кинетического момента с направлением вектора угловой скорости объекта — правило Н.Е. Жуковского.

Литература

1. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. Изд.3. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
2. Ишлинский А.Ю. Гироскоп. Физический энциклопедический словарь, т.I. М.: Изд-во МГУ, 1960.
3. Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П., Тихомиров В.В. Лекции по теории гироскопов. Учебное пособие. Издание второе, дополненное. МАКСПРЕСС Москва, 2013. – 292 с.
4. Магнус К. Гироскоп, теория и применение. М.: Мир, 1974.
5. Фридлиндер Г.О., Козлов М.С. Авиационные гироскопические приборы. М.: Оборонгиз, 1961.
6. Николай Е.Л. Гироскоп и некоторые его технические применения. М.: Гостехиздат, 1947.
7. Кукушкин Д.С., Гироскопический измеритель угловой скорости с жидким ферромагнитным ротором // Материалы XXI конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб.: 2019 г. — с. 158–161