《代数拓扑》学习论文

brocchyc

1 概述

本学期的代数拓扑课程的主要内容是同调论在拓扑学中的应用，也可以说是用同调的观点来看待拓扑学中对象之间的关系。代数与拓扑的结合之中体现出数学的美感。

2 同调

同调的结构在数学中是普遍的。

定义 2.1. 对于一系列 Abel 群 $\mathscr{C} = \{C_p\}$，若有群同态运算 $\partial_{p+1} : C_{p+1} \to C_p$ 满足 $\partial^2 = 0$ 就可以定义同调群 $H_p(\mathscr{C}) = \operatorname{Ker}\partial_p / \operatorname{Im}\partial_{p+1}$。此时，

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{p+1} \xrightarrow{\partial} C_p \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0$$

称为链复形

从而只要能够对研究的对象构造出这样的链复形，就能利用同调代数的结论来研究拓扑对象。

2.1 下同调

本学期中我们对拓扑空间 X 构造出体现出其性质的链复形 $\mathscr{C}(X)$，并且对于 $f : X \to Y$ 是两个拓扑空间之间的连续映射，我们构造出 $f_* : H_p(\mathscr{C}(X)) \to H_p(\mathscr{C}(Y))$ 是两空间同调之间的同态，并且证明了“*”满足函子性质，从而给出以下重要结论：

定理 2.1. 同调群是拓扑不变量。

在这个过程中最本质的思想是“逼近”和“重分”，而最体现代数和几何之间关系的（也是证明过程中最为关键的）就是零调承载子定理和代数重分定理，零调承载子定理说明了几何上满足条件的“逼近”在代数视角下看待是唯一的，从而是合理的。代数重分定理也就是几何上重分操作在链群上作用的体现。

我们定义并研究了以下三种拓扑中的同调：

1. 单纯同调论

2. 奇异同调论

3. CW 同调

并且证明了三者的等价性（对于单纯同调要在可三角剖分范畴内讨论）

从而我们可以把拓扑范畴中的对象和态射打到 Abel 范畴中去，用代数的方法来研究拓扑中的对象。

2.2 上同调

定义 2.2. G 为 Abel 群，$\mathrm{Hom}(\cdot,G)$ 函子将任一 Abel 群 A 映为 A 到 G 的全体群同态构成的集合 $\mathrm{Hom}(A,G)$

$\mathrm{Hom}(\cdot,G)$ 将群同态 $f:A\to B$ 映为

$$\tilde{f} = \mathrm{Hom}(\phi,G):\mathrm{Hom}(B,G)\to \mathrm{Hom}(A,G)$$
$$\phi\to\tilde{f}(\phi)=\phi\circ f$$

定义 2.3. 对于链复形 $\mathscr{C}=\{C_p\}$，Hom 函子将其映为相应的上链复形。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & C_p & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \xrightarrow{\partial} & 0 \\
 & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\cdot,\mathrm{G})} & & & & & & \\
\cdots & \xleftarrow[\delta]{} & C^{p+1} & \xleftarrow[\delta]{} & C^p & \xleftarrow[\delta]{} & \cdots & \xleftarrow[\delta]{} & C^0 & \xleftarrow[\delta]{} & 0
\end{array}$$

其中 $\delta=\mathrm{Hom}(\partial,G)$

由 Hom 函子的性质和 $\partial^2=0$ 可知 $\delta^2=0$，从而可以定义上同调群:

$$H^p(\mathscr{C}) = \mathrm{Ker}\,\delta_p/\,\mathrm{Im}\,\delta_{p-1}$$

评注. 定义上同调的意义在于对于上同调可以定义不同维数链群之间的乘法运算杯积（cup product）“$\bigcup$”，构成上同调环，一些用同调群无法区分的空间可以从上同调环的角度看见其差别。

3 同调的相关结论

Steenrod 给出了八条公理，即 Elienberg-Steenrod 公理，实现了代数拓扑的公理化。

其中第 1、2 条即“*”的函子性质，与第 5 条同伦公理一同导出同调的同伦不变性。

其中第 4 条给出了空间对的长正合列，第 3 条指出了两空间之间连续映射导出的同调之间的链映射具有自然性，这两条公理几乎完全是同调代数中结论的具体体现。

3.1 关于正合列

定理 3.1 (Zig-Zag Lemma)**.** 链复形构成的短正合列（其中 ϕ 和 ψ 为链映射）

$$0\longrightarrow\mathscr{C}\xrightarrow{\phi}\mathscr{D}\xrightarrow{\psi}\mathscr{E}\longrightarrow 0$$

可导出同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow H_p(\mathscr{C})\xrightarrow{\phi_*}H_p(\mathscr{D})\xrightarrow{\psi_*}H_p(\mathscr{E})\xrightarrow{\partial_*}H_{p-1}(\mathscr{C})\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0$$

由此可推知正合公理成立。

定理 3.2. 若链复形的短正合列之间的链映射可换，则导出长正合列之间的映射可换。即：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{C} & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{D} & \xrightarrow{\psi} & \mathscr{E} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{C}' & \xrightarrow{\phi'} & \mathscr{D}' & \xrightarrow{\psi'} & \mathscr{E}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

导出：

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathscr{C}) \xrightarrow{\phi'_*} H_p(\mathscr{D}) \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathscr{E}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathscr{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathscr{C}) \xrightarrow{\phi_*} H_p(\mathscr{D}) \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathscr{E}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathscr{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

是可换图。

由此可推知长正合列的自然性。

定理 3.3 (The Steenrod Five Lemma)**.** 对于以下交换图，其中 A_i,B_i 均为 Abel 群，之间映射为群同态

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

若 f_1,f_2,f_4,f_5 是同构，则 f_3 是同构。

Five 引理在运用长正合列证明一些同调的同构时起到了重要的作用。

3.2 关于上同调

上同调满足八条公理中除紧支持公理外的七条，通过 $\mathrm{Hom}(\cdot, G)$ 函子的一些性质得到。

定理 3.4. $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{G})$ 将正合列：

$$C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

映为正合列：

$$\mathrm{Hom}(C, \mathrm{G}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(D, \mathrm{G}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(E, \mathrm{G}) \longleftarrow 0$$

特别地，当

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

正合可裂

那么

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(C, \mathrm{G}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(D, \mathrm{G}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(E, \mathrm{G}) \longleftarrow 0$$

正合可裂

由此导出上同调的长正合列

定理 3.5. 若 $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ 是自由链复形，且 $H_p(\mathscr{C}) \cong H_p(\mathscr{D})$，那么 $H^p(\mathscr{C}) \cong H^p(\mathscr{D})$

由此可推出上同调的切除定理，以及单纯上同调、奇异上同调、CW 上同调之间是同构的。

3.3 Kronecker 积

Kronecker 积在链群层面的定义是自然的，经验证该运算可以导出同调层面的。下面关于 Kronecker 积的结论说明在链群及其同调是自由的条件下，上同调群可以看作下同调群的“对偶”。

定理 3.6. 若 $\mathscr{C}$ 是自由的，且 $\forall p \geq 1$，$H_p(\mathscr{C})$ 也自由
$\Rightarrow \quad H^p(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Hom}(H_p(\mathscr{C}), G)$

这为我们计算上同调群带来了极大的便利。

一些拓展

本学期我还修读了《微分流形》课程，其中全体外微分形式上的外微分运算 d 也满足条件 $d^2 = 0$，从而也可以考虑其同调，虽然目前的学习中还未明确其意义，至少说明同调的结构在数学中确实是普遍存在的，也期待在以后的学习中能对其有更深入的了解。