ANALISI MATEMATICA 1 - Formulario

Successioni

MONOTONIA
- CRESCENTE $a_n < a_{n+1}$
- NON CRESCENTE $a_n \leq a_{n+1}$
- DECRESCENTE $a_n > a_{n+1}$
- NON DECRESCENTE $a_n \geq a_{n+1}$

REGOLARI
- CONVERGE $\rightarrow \ell$
- DIVERGE $\rightarrow \pm\infty$

LIMITATA se è convergente

ESISTENZA LIMITE monotone $\rightarrow$ regolari
- crescente $a_n \rightarrow \sup(a_n)$
- decrescente $a_n \rightarrow \inf(a_n)$

CASI PARTICOLARI
- n^a: $+\infty$ $a>0$; 1 $a=0$; 0^+ $a<0$
- a^n: $+\infty$ $a>1$; 1 $a=1$; 0^+ $0<a<1$
- $\log_a n$: $+\infty$ $a>1$; $-\infty$ $0<a<1$

PER RICORRENZA
$$\{a_n\} = \begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = f(n, a_n) \end{cases}$$

ASINTOTICO $a_n \sim b_n = \dfrac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

O-PICCOLO $a_n = o(b_n) = \dfrac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

Serie

GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n =$
- $\frac{1}{1-q}$ $\quad -1 < q < 1$
- $+\infty$ $\quad q \geq 1$
- oscilla $\quad q \leq -1$

TELESCOPICA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

ARMONICA $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente

GENERALIZZATA $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^a} =$
- converge $a > 1$
- diverge $a \leq 1$

LEIBNIZ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$
- $a_n > 0$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

allora la serie converge

ASSOLUTAMENTE se anche il modulo converge

LOGARITMICA $\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{n^a \ln^\beta n} =$
- converge $a > 1 \ \forall \beta \ / \ a = 1 \ \beta = 1$
- diverge tutti gli altri casi

CRITERIO DEL CONFRONTO $a_n \leq b_n$:
- a_n diverge $\leftrightarrow$ b_n diverge
- b_n converge $\leftrightarrow$ a_n converge

CONFRONTO ASINTOTICO $\frac{a_n}{b_n} \to c$ le due serie hanno lo stesso carattere

CRITERIO DELLA RADICE $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$
- $\ell = 1$ niente
- $\ell < 1$ converge
- $\ell > 1$ diverge

CRITERIO DEL RAPPORTO $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

- $\ell < 1$ converge
- $\ell > 1$ diverge

WEIERSTRASS continua su $[a,b]$, allora f ha massimo e minimo

Derivate

RAPPORTO INCREMENTALE coef. angolare $= \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h}$

DERIVATA limite del rapporto incrementale

RETTA TANGENTE $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

CONTINUITÀ se è derivabile, allora è continua

- non è vero il contrario

DERIVATA DI FUNZIONE INVERSA $g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

FERMAT Se x_0 è punto di massimo o minimo

- allora $f'(x_0) = 0$

ROLLE sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che

- continua su $[a,b]$
- derivabile in (a,b)
- $f(a) = f(b)$

allora $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) = 0$

LAGRANGE sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in (a,b)

allora $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

CAUCHY f, g continue e derivabili

allora $\exists\, c \in (a,b) : f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$

TAYLOR $T_n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$

MCLAURIN Taylor in $x_0 = 0$

INTEGRALI Inverso della derivata

Calcolo integrale

LINEARE $\int (f+g) = \int f + \int g$

SCAMBIO $\int_a^b f = -\int_b^a f$

QUASI IMMEDIATI Cercare di ottenere la derivata

INTEGRAZIONE PER PARTI $\int f(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

- trovare $f(x)$ e $g'(x)$
- derivare f, integrare g

IMMEDIATI

- $\int 1 = x$
- $\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ $(a \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$
- $\int e^x = e^x$
- $\int a^x = a^x \log_a e = \frac{a^x}{\ln a}$
- $\int \sin x = -\cos x$
- $\int \cos x = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x$
- $\int (1 + \mathrm{tg}^2 x) = \mathrm{tg}\, x$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$

MEDIA INTEGRALE $m(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$ t.c. $m \leq m(f) \leq M$

Limiti Notevoli

- $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\frac{(1+x)^c - 1}{x} = c$
- $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
- $(1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$
- $\frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$
- $\frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\frac{\arctan(x)}{x} = 1$

Derivate Semplici

- $c = 0$
- $x = 1$
- $x^a = a x^{a-1}$
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$
- $\sin x = \cos x$
- $\cos x = -\sin x$
- $\tan = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $\ln x = \frac{1}{x}$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $e^x = e^x$
- $a^x = a^x \ln a$

- $\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\operatorname{arcotg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Punti di discontinuitá

ELIMINABILE / 3ª SPECIE $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito $\neq f(x)$

DI SALTO / 1ª SPECIE $\lim_{x \to x_0}$ dx e sx esistono e sono diversi

DI SECONDA SPECIE se almeno uno dei due limiti dx e sx non esistono oppure è infinito

Asintoti

ORIZZONTALE $y = l$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ [Se non esiste, provare l'obliquo]

VERTICALE $x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

OBLIQUO $y = mx + q$ se $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m - \{0\}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

Punti di non derivabilità

CUSPIDE derivata dx e sx sono ∞ di segno opposto

PUNTO ANGOLOSO derivata dx e sx diverse (una sola infinita)

FLESSO A TANGENTE VERTICALE derivata dx e sx entrambi $+\infty$ oppure $-\infty$