Riassunto di Ricerca Operativa

Andrea Broccoletti

Università degli studi di Milano-Bicocca

1 Problema di ottimizzazione

Definizione

Consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di **minimo** o **massimo**.

Regione ammissibile

La regione ammissibile è data dal soddisfacimento dei vari vincoli; geometricamente corrisponde ad un **poliedro convesso**.

Soluzione grafica

Ci possono essere quattro situazioni:

- unica soluzione ottima in un vertice
- infinite soluzioni ottime in un lato
- non ammette soluzioni se la regione ammissibile è illimitata
- non ammette soluzione se la regione ammissibile è vuota

Assunzioni

- **Proporzionalità** Il contributo di ogni variabile decisionale al valore della funzione obiettivo è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- **Additività** Ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- **Continuità** Qualunque valore delle variabili decisionali è accettabile
- **Certezza** Il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto e costante
- **Divisibilità** Le variabili decisionali sono libere di assumere qualsiasi valore, inclusi valori non interi

2 Metodo del simplesso

Vertici adiacenti

Se ci sono n variabili decisionali, due vertici sono adiacenti se condividono $n-1$ frontiere di vincoli.

Spigolo

Segmento che giace all'intersezione delle frontiere di vincoli.

Test di ottimalità

Se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertici a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.

Il metodo del simplesso valuta e compara i *tassi di miglioramento*: un tasso positivo significa che il vertice adiacente è una soluzione migliore della soluzione corrente, viceversa è peggiore. Il test consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento: se non è soddisfatta la ricerca, allora la soluzione corrente è quella ottimale.

Variabili slack

Bisogna tradurre i vincoli funzionali di diseguaglianza in vincoli funzionali di eguaglianza, introducendo una slack che serve a colmare la differenza che al membro sinistro mancherebbe nel verificare la diseguaglianza come uguaglianza. Può identificare tre casi:

- **Valore nullo**, la soluzione giace sulla frontiera del vincolo
- **Valore positivo**, giace sul lato ammissibile della frontiera del vincolo, ovvero appartiene alla regione ammissibile
- **Valore negativo**, giace sul lato non ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, ovvero non appartiene alla regione ammissibile

Algoritmo

- **Test di ottimalità** consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale
- **Determinazione della direzione di spostamento** aumentare il valore di una variabile non di base a partire da zero, equivale a spostarsi lungo uno degli spigoli che emanano dal corrente vertice ammissibile. L'incremento la fa diventare una variabile di base, ovvero la **variabile entrante**
- **Determinazione dell'incremento** determina di quanto aumentare il valore della variabile entrante in base, in modo da avere il massimo incremento senza abbondare

la regione ammissibile. Determina quale variabile di base diminuisce a zero per prima quando si incrementa il valore della variabile entrante in base, ovvero la **variabile uscente**. Si deve fare perché bisogna *mantenere inalterato il numero di variabili di base*

- **Determinazione della nuova soluzione di base** convertire in una forma più vantaggiosa, utilizzando l'*eliminazione gaussiana*. In questo modo ogni variabile di base viene eliminata da tutte le equazioni tranne una dove ha coefficiente 1

Casi speciali

- **Alternative multiple per la variabile entrante in base** si sceglie arbitrariamente, non ci sono metodi di scelta
- **Alternative multiple per la variabile uscente** detta *degenerazione*, fa differenza quale variabile viene scelta, portando anche al rischio di ottenere un *loop*
- **Mancanza di una variabile uscente** nessuna variabile di base si qualifica come variabile uscente di base, in questo caso si ha una funzione obiettivo illimitata.
- **Molteplici soluzioni ottimali** se ci sono soluzioni ottimali multipli, ci sono almeno due vertici ammissibili che sono ottimali e ogni soluzione ottimale è una **combinazione convessa**

Frontiere

Le soluzioni ottimali di un problema di programmazione lineare giacciono sulla frontiera della regione ammissibile.

La **frontiera della regione ammissibile** contiene solo quelle soluzioni ammissibili che soddisfano una o più equazioni di frontiera, in particolare è determinata dagli *spigoli*: ogni vertice ammissibile emana n spigoli che conducono a vertici a lui adiacenti.

Iperpiano

Ogni equazione definisce una figura geometrica *"piatta"*, che prende il nome di iperpiano nello spazio n-dimensionale. Ad esempio, la **retta** è l'iperpiano nello spazio a 2 dimensioni.

Vertice ammissibile

È una soluzione ammissibile che non giace su un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili.

Con n variabili di decisione, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n frontiere di altrettanti vincoli: ogni vertice è la soluzione simultanea di un *sistema di n equazioni*.

Interpretazione algebrica

Quando il metodo del simplesso sceglie la variabile entrante in base, l'interpretazione geometrica è che il metodo del simplesso stia scegliendo uno degli spigoli che emanano dal vertice ammissibile corrente.

Proprietà dei vertici ammissibili

1. Se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile, se esistono soluzioni ottime multiple, allora almeno due di queste sono vertici ammissibili tra lodo adiacenti. Tutte le soluzioni ottimali sono ottenibili come *media pesata* dei vertici ammissibili ottimali

2. Esiste un numero finito di vertici ammissibili, ed ogni vertice ammissibile è soluzione di un sistema lineare formato da n equazioni scelte tra $m + n$ vincoli

3. Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo Z, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame

Insieme convesso

Un insieme viene detto convesso se è una collezione di punti tali che, per ogni coppia di punti appartenenti alla collezione, l'intero segmento che collega la coppia di punti, appartiene anch'esso alla collezione.

3 Analisi di post-ottimalità

Viene condotta al termine della risoluzione del modello inizialmente proposto per risolvere un determinato problema formulabile in termini di programmazione lineare.

I modelli reali contengono centinaia di migliaia di vincoli e di variabili di decisione. Dopo aver trovato una soluzione ottimale per la versione iniziale del modello, si deve risolvere più e più volte sue versioni lievemente modificate.

Possibili soluzioni

- Riapplicare più volte il metodo del simplesso partendo da zero per ogni nuova versione lievemente modificata
- dedurre come i cambiamenti della formulazione iniziale ricadano dal tableaux iniziale a quello finale

4 Prezzo ombra

Un problema è spesso interpretabile come problema di *allocazione di risorse ad attività*. In particolare, quando i vincoli sono nella forma $\leq$, il termine noto b_i è interpretabile come quantità di risorsa corrispondente i disponibile per le attività.

È possibile aumentare la disponibilità di risorse resa disponibile solo se si valuta che tale aumento possa portare a migliorare significativamente la soluzione ottimale.

Nel simplesso

Il prezzo ombra per la risorsa i-ma misura il valore marginale della risorsa, cioè il tasso al quale la funzione obiettivo Z potrebbe essere incrementata aumentando la quantità di risorsa b_i disponibile.

Scarsità

Le variabili con prezzi ombra *positivi* vengono dette **risorse scarse**, mentre quelle con prezzo ombra *nullo* sono dette **risorse libere**.

5 Teoria della dualità

Ogni problema di programmazione lineare **primale** ha associato un altro problema di programmazione lineare chiamato **duale**.

Relazione primale-duale

Il problema duale può essere visto come una diversa formulazione, in termini di programmazione lineare, di quello che è l'obiettivo del metodo del simplesso, ovvero ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità.

In particolare si hanno:

- **Proprietà di dualità debole** se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale, allora vale che $cx \leq yb$
- **Proprietà di dualità forte** se x è una soluzione ottimale per il problema primale, e y è una soluzione ottimale per il corrispondente problema duale, allora vale che $cx = yb$
- **Proprietà delle soluzioni complementari** se x *non è ottimale* per il problema primale, allora y *non è ammissibile* per il problema duale
- **Proprietà delle soluzioni ottimali complementari** all'iterazione finale, il simplesso identifica una soluzione ottimale x e una y. Le componenti y sono i prezzi ombra del problema primale
- **Proprietà di simmetria** Per ogni problema primale e relativo duale, tutte le relazioni tra loro debbono essere simmetriche in quanto il problema duale del problema duale è il problema primale. Quindi, le proprietà sono *identicamente valide* per ognuno dei due problemi.
- **Proprietà delle soluzioni aumentate complementari** Ogni soluzione di base del primale ha una soluzione di base complementare nel problema duale, in modo tale che i rispettivi valori delle *funzioni obiettivo* siano uguali
- **Proprietà di complementary slackness** per ogni coppia di variabili associate, se una di loro ha *slack* nel suo vincolo di non negatività, allora l'altra non deve avere slack
- **Proprietà delle soluzioni ottimali complementari** una soluzione di base ottimale x ha una soluzione di base ottimale complementare del duale, tale che i valori delle rispettive funzioni obiettivo sono identici.

Teoremi di dualità

Le sole relazioni possibili tra problema primale e duale sono:

1. Se un problema ha *soluzioni ammissibili* e *funzione obiettivo limitata*, allora la stessa cosa vale per l'altro problema, per cui sia la proprietà debole della dualità che quella forte sono applicabili

2. Se un problema ha *soluzioni ammissibili* e *funzione obiettivo illimitata*, allora l'altro problema non ha *soluzioni ammissibili*

3. Se un problema *non ha soluzioni ammissibili*, allora l'altro problema o *non ha soluzioni ammissibili* o ha una *funzione obiettivo illimitata*

Vedere file "cheatsheet" per le definizioni teoriche che sono utili nella risoluzione dei problemi pratici. Tale teoria non è presente su questo riassunto.