Algebra lineare e Geometria

Teoria

Andrea Broccoletti

INDICE DEI CONTENUTI

STRUTTURE ALGEBRICHE

Formate da un insieme e da un operazione interna all'insieme

Hanno nomi diversi in base alle proprietá:

associativitá $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ → semigruppo

+ **elemento neutro** $\exists n \in S : a \cdot n = n \cdot a = n$ → monoide

+ **inversi** $\forall a \in S \; \exists b \in S : a \cdot b = b \cdot a = n$ → gruppo

+ **commutativitá** $a \cdot b = b \cdot a$ abeliano

CAMPO un insieme non vuoto e due operazioni binarie interne che godono di proprietà assimilabili a quelle verificate di somma e prodotto

e.g. campo dei numeri reali $\mathbb{R}$

SPAZI VETTORIALI

È una struttura algebrica definita come (insieme, campo, Op1, Op2)

$(V, K, +, \cdot)$

Valgono le seguenti proprietá:

- (insieme, Op_1) deve essere gruppo abeliano
- (insieme, $Op_2 - \{n\}$) deve essere gruppo abeliano
- Op_2 deve essere distributiva rispetto a Op_1

VETTORE un elemento di uno spazio vettoriale

e.g. numeri reali, polinomi...

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Partendo da uno spazio vettoriale V, definiamo S-sottospazio vettoriale come:

- tutti i vettori di S sono anche vettori di V
- $\underline{0} \in S$
- $\underline{v} + \underline{w} \in S$ con $\underline{v}, \underline{w} \in S$
- $\lambda \cdot \underline{v} \in S \quad \forall \lambda \in K$

} Op1 e Op2 interne a S

COMBINAZIONI LINEARI

Siano $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ dei vettori e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ degli scalari.

Chiameremo $\lambda_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v_n}$ una combinazione lineare, quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v_i}$

e.g. $2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\-14\end{pmatrix} \rightarrow$ è comb. lineare degli altri due vettori

$\langle S \rangle$ è il più piccolo spazio vettoriale di V-sv che contiene S-sv e viene chiamato sottospazio vettoriale generato da S

DIPENDENZA / INDIPENDENZA LINEARE Siano $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ dei vettori, riesco ad ottenere il vettore nullo $\underline{0}$, con una combinazione lineare, dove **almeno uno** degli scalari è diverso da 0?

SÌ sono linearmente dipendenti

NO sono linearmente indipendenti

AGG. OSS. DI DVB [illegible]

DIMENSIONE FINITA lo è un V-sv se esistono dei vettori che **generano** tutto V, cioè tali che ogni elemento di V sia una combinazione lineare di quei vettori

e.g. $\mathbb{R}^n$ lo è

BASE

Un insieme di vettori di V sono detti base di V se sono il più piccolo **sistema di generatori** di V e sono **linearmente indipendenti** tra loro

OSS ogni spazio vettoriale che ammette un sistema finito di generatori, ammette anche una base

e.g. $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è la base di tutti i vettori nella forma $\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}$

BASE CANONICA $\mathbb{R}^n$ ha **sempre** una base banale di n elementi strutturata come negli esempi

e.g. $\mathbb{R}^2$ ha base $\{(1,0),(0,1)\}$

e.g. $\mathbb{R}^3$ ha base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

TEOREMA DI ESTENSIONE A UNA BASE Sia I-vettore lin.ind. in V-sv. Supponiamo che G sia un insieme di generatori di V, allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V.

DIMENSIONE DI UNO SV numero di elementi di una base qualunque di V.

MATRICI

È un modello matematico di K n-uple di scalari, cioè K vettori di $\mathbb{R}^n$

Essendo elementi di uno spazio vettoriale, valgono le stesse proprietà e operazioni, aggiungendo a queste la seguente:

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI non è sempre effettuabile, infatti deve valere la proprietà:

$$\text{A di } m \cdot n \quad \text{e} \quad \text{B di } n \cdot h$$

righe di A = colonne di B

e viene effettuata come da esempio.

e.g. $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $1 \cdot 0 + (-1)(-1)$

Ci sono alcune particolari tipi di matrici:

- **quadrata** $n \cdot n$
- **identità** $n \cdot n$ nella forma $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$
- **nulla** tutti i valori a 0
- **triangolare** di tipo superiore $\begin{pmatrix} a & & * \\ & b & \\ & & c & \\ 0 & & & d \end{pmatrix}$

  di tipo inferiore $\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ & & c & \\ * & & & d \end{pmatrix}$

  se entrambi, diagonale $\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ & & c & \\ 0 & & & d \end{pmatrix}$
- **trasposta** $A \to A^T$ scambiando le righe con le colonne

  e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

RANGO misura quante informazioni contiene una matrice, e può essere visto come:

- massimo numero di righe linearmente indipendenti
- massimo numero di colonne linearmente indipendenti

metodi equivalenti

OSS il rango è sempre compreso tra $0 \leq rg(A) \leq \max(n,m)$, $n \times m$ dimensione della matrice

OSS il rango della matrice scala o diagonale è uguale al numero di righe diverse da 0

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE Sia A una matrice. Abbiamo 3 trasformazioni:

- scambiare due righe di A
- moltiplicare una riga per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\neq 0$
- Siano r_i e r_j due righe diverse di A. Rimpiazzare r_i con $r_i + \lambda r_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Le trasformazioni lineari vengono usate per trovare più facilmente il rango di una matrice, trasformandola in matrice a scala.

MATRICE A SCALA se il numero di zeri a sinistra in r_i > del numero di zeri a sinistra in r_{i-1}, $\forall i \geq 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

OSS sia A una matrice a scala, allora $rg A = \#$ righe $\neq 0$

TEOREMA DI TRASFORMAZIONE A SCALA Sia A una matrice qualunque, allora esistono una serie di trasformazioni elementari sulle righe che trasformano A in una matrice a scala.

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

È un sistema di h equazioni lineari in n incognite.
→ tutte variabili di primo grado

$$h \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$

Associamo due matrici al sistema:

MATRICE ASSOCIATA COMPLETA formata solo dai coefficienti

MATRICE ASSOCIATA INCOMPLETA formata anche dai termini noti, e chiamiamo vettore colonna dei termini noti il vettore $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Notazione il sistema può essere scritto come: $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{b}$

SOLUZIONE di $A\underline{x} = \underline{b}$ è una n-upla di scalari $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot \underline{c} = \underline{b}$

DIM sia $A\underline{x} = b$ con A invertibile. Allora essa ha un'unica soluzione, che è $\underline{c} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$$A\underline{x} = b$$
$$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$
$$Id_n \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$
$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

unica soluzione, infatti $A(A^{-1} \cdot \underline{b}) = \underline{b}$

$$Id_n \cdot \underline{b} = \underline{b}$$
$$\underline{b} = \underline{b}$$ verificata

OMOGENEO se $A\underline{x} = b$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, il sistema è detto omogeneo

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Un sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$, quindi se matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango.
Nel caso ci sia soluzione, l'insieme di tutte le soluzioni è $\underline{c} + W$, dove $\underline{c}$ è una soluzione qualsiasi e W l'insieme delle soluzioni $A\underline{x} = 0$. In particolare, V è un sottospazio lineare affine di dimensione $n - rg(A)$ con $n = \#$ incognite.

OSS Ha soluzioni di numero pari a ∞^{n-r} con n numero di variabili (uguali alle colonne della matrice coefficienti e r rango della matrice.

O Sia A una matrice $h \times n$: le prime n colonne di $S(A\text{-}\underline{b})$-ridotta a scala è uguale, come matrice, a $S(A)$.

e.g.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{2} \; 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; 2$$

$2 = 2$

ha soluzione

∞^0

determinata

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{2} \; 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \; 1$$

$1 = 1$

ha soluzione

∞^1

indeterminata

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2} \; 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \; 2$$

$1 \neq 2$

non ha soluzione

e.g. $\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ x - y + w = -1 \end{cases}$ Stabilire se esistono soluzioni e, in tal caso, determinarle.

$$A|\underline{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Concludiamo che la matrice ha rango 3, e considerando il teorema, il sistema ammette soluzione, tali soluzioni sono un iperpiano affine di dim $4-3=1$, le soluzioni formano una retta in $\mathbb{R}^4$.

Determiniamo le soluzioni. Riutilizziamo $S(A|\underline{b})$: $\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 2z - w = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 - z \\ y = 2 + z \\ w = 2z + 2 \end{cases}$ esprimiamo in funzione di z

Soluzioni: $\left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x = -1 - z \\ y = 2 + z \\ w = 2z + 2 \end{cases} \right\} = \left\{ (-1-z, 2+z, z, 2z+2) \in \mathbb{R}^4 : z \in \mathbb{R} \right\}$

Il teorema ci dice che le soluzioni sono $\underline{c} + W$, dove W è lo spazio vettoriale delle soluzioni di $A\underline{x} = 0$ e $\underline{c}$ una soluzione qualunque.

traslato delle soluzioni nell'origine

$$(-1-z, 2+z, z, 2+2z) = (-z, z, z, 2z) + (-1, 2, 0, 2)$$

Quindi $\text{Sol} = \left\{ (-z,z,z,2z) + (-1,2,0,2) : z \in \mathbb{R} \right\} \overset{def}{=}$

$= \left\{ (-z,z,z,2z) : z \in \mathbb{R} \right\} + (-1,2,0,2) =$

$= \left\{ (-1,1,1,2) \cdot z : z \in \mathbb{R} \right\} + (-1,2,0,2) =$

$= \langle (-1,1,1,2) \rangle + (-1,2,0,2) \leftarrow c \quad = \underline{c} + W$

spazio vettoriale generato W

ALGORITMO DI GAUSS

Ci permette di ottenere una matrice ridotta a scala attraverso le mosse di Gauss, ovvero attraverso le trasformazioni lineari.

I passi per applicarlo sono:

1. prendere in considerazione la prima riga:
   - se il primo elemento è diverso da zero, andare al passo 2
   - altrimenti si scambia con una riga che ha il pivot diverso da 0, se esiste
2. Per ogni riga sotto la prima, sottraggo $\frac{a_{1,1}}{a_{r,1}}$ volte r
3. Si eliminano prima riga e prima colonna, e si ripete sulla sottomatrice ottenuta

e.g.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \frac{9}{3} = 3\text{, tolgo tre volte la prima riga} \\ \to \frac{6}{3} = 2\text{, tolgo due volte la prima riga} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -13 & -18 \\ 0 & \boxed{-10} & -13 \end{pmatrix} = \to$$

azzerare questi elementi

ripetere l'algoritmo sulla sottomatrice =

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -13 & -18 \\ 0 & 0 & \frac{11}{13} \end{pmatrix} \to \text{ridotta a scala}$$

IL DETERMINANTE

Come oggetto matematico, il determinante di una matrice è uno scalare.

Sia $M(n,n)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n, è una funzione **Det**: $M(n,n) \to \mathbb{R}$, è utile vedere la matrice anche come $(\mathbb{R}^n)^n$

Ha delle proprietà caratterizzanti:

- **linearità rispetto alla somma** dato $(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \underline{a+b}, \dots, \underline{c_n})$ il suo determinante è uguale alla somma $\det(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \underline{a}, \dots, \underline{c_n}) + \det(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \underline{b}, \dots, \underline{c_n})$
- **linearità rispetto alla moltiplicazione** $\det(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \lambda\underline{c}, \dots, c_n) = \lambda \cdot \det(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \underline{c}, \dots, \underline{c_n})$
- **Vettori uguali** $\det(\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots, \underline{c}, \underline{c}, \dots, \underline{c_n}) = 0$, ovvero bastano due vettori uguali affinche il determinante sia 0.
- **Matrice identità** ha sempre determinante pari a 1 (valido anche per le basi canoniche).

Le prime due proprietà sono dette di muti-linearità, la terza è detta di alternanza.

OSS l'alternanza è valida anche con vettori non consecutivi.

OSS invertendo due vettori, il determinante cambia di segno.

UNICITÀ esiste un'unica funzione che soddisfi le proprietà precedenti

DETERMINANTE DI UNA MATRICE 2x2 ovvero la matrice quadrata più piccola, è dato dalla formula $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

FORMULA DI LAPLACE Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$. Denotiamo con A_{ij} la sottomatrice che si ottiene cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna. Allora:

$$Det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A_{ij})$$ sviluppo lungo l'i-esima riga

$$Det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A_{ij})$$ sviluppo lungo la j-esima colonna

OSS per ridurre i calcoli, si sceglie una riga o colonna con il massimo numero di coefficenti nulli.

DETERMINANTI MATRICE DIAGONALE e TRIANGOLARE hanno entrambe come determinante il prodotto dei valori sulla diagonale.

DETERMINANTE MATRICE TRASPOSTA Sia A una matrice quadrata e ${}^tA$ la matrice trasposta di A, cioè la matrice che ha, come righe, le colonne di A. Allora $\det(A) = \det({}^tA)$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI e DETERMINANTE le trasformazioni elementari modificano il determinante come segue:

- **permutazione di due righe** se $\underline{r_i} \leftrightarrow \underline{r_j} \Rightarrow \det(A) = -\det(\tilde{A})$
- **sostituzione di una riga** se $\underline{r_i} \to \lambda \cdot \underline{r_i} \Rightarrow \det(A) = \frac{1}{\lambda} \det(\tilde{A})$
- **sostituzione con una riga** se $\underline{r_i} \to \underline{r_i} + \lambda \cdot \underline{r_j} \Rightarrow \det(A) = \det(\tilde{A})$

TEOREMA DI BINET il $\det(A \cdot B)$ è uguale a $\det(A) \cdot \det(B)$

OSS Non esistono formule che legano $\det(A+B)$ a $\det(A)$ e $\det(B)$

OSS se A è invertibile, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

DETERMINANTE ZERO Tutti e soli i casi in cui $\det(A) = 0$:

- le righe di A sono un insieme di vettori linearmente dipendenti
- le colonne di A sono un insieme di vettori linearmente dipendenti
- i due punti precedenti implicano quando il rango della matrice non è massimo

FORMULA DI CRAMER relazione tra determinante e sistema di equazioni lineari:

a) il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un unica soluzione se e solo se $\det(A) \neq$

b) in tal caso, la soluzione $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ è data da $c_i = \dfrac{\det(A_1 | A_2 | \dots | b | \dots | A_n)}{\det(A)}$

SOTTOMATRICE Sia A una matrice. Una sottomatrice di A è una matrice ottenuta da A rimuovendo righe o colonne.

MINORE un minore di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A, e il suo ordine è il numero di righe o colonne.

RELAZIONI TRA IL DETERMINANTE E IL RANGO Sia A una matrice. Il rango di A è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di A.

COMPLEMENTO ALGEBRICO O COFATTORE di un elemento $A_{i,j}$ di una matrice quadrata, si ottiene con:

1. considerare l'elemento $A_{i,j}$
2. eliminare la relativa riga e colonna
3. calcolare il rango della matrice ottenuta
4. moltiplicare il determinante per $(-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

MATRICI INVERSE

Una matrice quadrata A è invertibile se, per definizione, $\exists B : AB = BA = Id$ con $B = A^{-1}$

DETERMINANTE E MATRICI INVERSE una matrice A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.
In tal caso, $A^{-1} = (x_{ij})$ è data da $x_{ij} = \dfrac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$, dove A_{ji} è la sottomatrice ottenuta da A togliendo la riga j e la colonna i.

Operativamente, si compone di:

1. trasporre A
2. completare la matrice dei complementi algebrici
3. aggiustare i segni
4. dividere per il $\det(A)$, cioè applicare la formula

MATRICI INVERSE E TRASFORMAZIONI LINEARI sia A una matrice quadrata. Supponiamo che abbia rango max=n. Per il teorema sulla riduzione a scala, esiste una successione di trasformazioni elementari applicata ad A tali che è ridotta a scala.
Quindi, se A è quadrata e di rango massimo, esiste una successione di trasformazioni sulle righe $T_1 \dots T_h$ tali che $T_h(T_{h-1}(\dots T_1(A))) = Id$, sviluppando $Id = \underbrace{(C_h \dots C_1)}_{A^{-1}} \cdot A$

Operativamente, per determinare A^{-1} è sufficiente che si applichi a $T_1(Id) = C_1$ le stesse trasformazioni T_1 che si applicano ad A per ridurla a matrice identità.

$$\text{e.g. } (Id_3 | A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{=}{\underline{v_3 = \frac{1}{2}v_1 + v_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{=}{\underline{v_3 = v_3 - \frac{3}{2}v_2}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \underset{=}{\underline{v_3 = -\frac{2}{3}v_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{=}{\underline{v_2 = v_2 - v_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{=}{\underline{v_1 = v_1 - v_2}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{=}{v_1 = \frac{1}{2}v_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{6} & 0 & -\frac{2}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A sinistra ottenuta la matrice inversa