FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

INSIEMI

estensionalmente $\{x, y, z\}$
intensionalmente $\{x \in I : P\}$

$S \subseteq T$ tutti gli elementi di S sono elementi di T
$S \subset T$ sottoinsieme proprio, sse $S \neq T$

$\emptyset$ è sottoinsieme di ogni insieme

$P(S)$ è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di S

$S \cup T = \{x : x \in S \vee x \in T\}$
$S \cap T = \{x : x \in S \wedge x \in T\}$

$S \cup \emptyset = S$ elemento neutro
$S \cap \emptyset = \emptyset$ annichilazione

$S' = \{x : x \in U \wedge x \notin S\}$

$S \setminus T = \{x : x \in S \wedge x \notin T\}$

$S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ in uno o nell'altro, no entrambi

PARTIZIONE sottoinsiemi di S:
- non vuoti
- senza elementi in comune
- la loro unione dà S

$S \times T = \{\langle x, y \rangle : x \in S, y \in T\}$
con S e T non vuoti, se vuoto il prodotto è vuoto

MULTI-INSIEME elementi ripetuti più volte

RELAZIONI

Ogni sottoinsieme di $S \times T$, esplicitato da una proprietà

S dominio
T codominio
$S \cup T$ campo o estensione
$I_A = \{\langle a, a\rangle : a \in A\}$ è l'identità

RIFLESSIVA $\langle a, a\rangle \in R \ \forall a \in A$
ogni nodo ha un cappio
diagonale matrice piena

IRRIFLESSIVA $\langle a, a\rangle \notin R \ \forall a \in A$
nessun nodo ha un cappio
diagonale matrice vuota

SIMMETRICA se $\langle x, y\rangle \in R$ allora $\langle y, x\rangle \in R$
per ogni freccia c'è l'inverso
simmetria risp. diagonale

ASIMMETRICA se $\langle x, y\rangle \in R$ allora $\langle y, x\rangle \notin R$
nessun inverso, nessun cappio
nessuna simmetria

implica

ANTISIMMETRICA se $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in R$ allora $x = y$
nessun inverso, qualche cappio
nessuna simmetria, diagonale occupabile

TRANSITIVA se $\langle a, b\rangle \in R$ e $\langle b, c\rangle \in R$ allora $\langle a, c\rangle \in R$
strada corta
metodo dell'incrocio

CONNESSA se $\forall x, y \in S \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R$

COMPOSIZIONE $R_1 = S \times T$, $R_2 = T \times Q$
$\langle a, c\rangle \in R_2 \circ R_1$ sse $\exists b \in T : \langle a, b\rangle \in R_1$ e $\langle b, c\rangle \in R_2$

INVERSA $\langle x, y\rangle$ diventa $\langle y, x\rangle$

FUNZIONI

R è f se $\forall x \in S$ esiste al massimo un $y \in T$: $\langle x,y \rangle \in R$

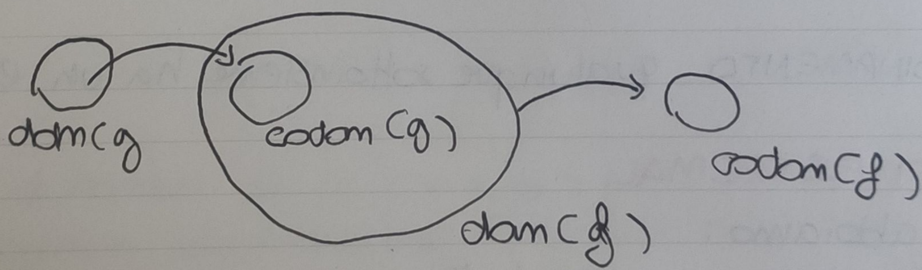
INIETTIVA righe orizzontali in un solo punto
SURIETTIVA schiaccia sull'asse y
=
BIIETTIVA se parziale
BIUNIVOCA se totale

TOTALE schiaccia sull'asse x
PARZIALE tutte e se non è totale

IMMAGINE insieme dei valori assunti

INVERTIBILE se iniettiva
inverti x e y

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI $f \circ g$:



CARATTERISTICA $A \subseteq S$, è $f: S \to \{0,1\}$ che sull'elemento $x \in S$ vale 1 se x appartiene ad A, 0 in caso contrario.

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

elementi alcuni degli insiemi si equivalgono in base ad una caratteristica comune.

EQUIVALENZA riflessiva, transitiva e simmetrica

$[x] = \{y \in A \mid xRy\}$

$A \setminus R = \{[x] \mid x \in A\}$

CHIUSURA SIMMETRICA, TRANSITIVA ... rendere vera la proprietà

ORDINAMENTI

POSET / ORDINE LARGO / ORDINE PARZIALE / SEMIORDINAMENTO
transitiva, riflessiva, antisimmetrica

ORDINE TOTALE / ORDINE LINEARE tutti elementi confrontabili
$\forall x, y : xRy \vee yRx$

BUON ORDINAMENTO qualunque sottoinsieme ha un elemento minimo

ELEMENTI ESTREMALI

Dato S abbiamo:
MASSIMALI stanno sopra tutti
MINIMALI stanno sotto tutti
↓
Dato S e $x \subseteq S$ abbiamo:
MINORANTI sta sotto tutte le x (x comprese)
MAGGIORANTI sta sopra tutte le x (x comprese)
↓
MASSIMO MINORANTE $\sqcap$ minorante più alto $\xrightarrow{x}$ MINIMO (sorgente)
MINIMO MAGGIORANTE $\sqcup$ maggiorante più basso $\xrightarrow{x}$ MASSIMO (pozzo)

GRAFI

CAMMINO SEMPLICE: vertici tutti distinti
LUNGHEZZA archi che lo compongono
CAPPIO cammino lungo 1

CONNESSO ogni coppia di vertici è connessa da un semicammino
FORTEMENTE CONNESSO ogni coppia di vertici è connessa da un cammino
no sorgenti, no pozzi, ciclo che visita tutti

DISTANZA cammino più corto
DIS (v, v) = ∅
se non raggiungibili, è ∞

MATRICE DI ADIACENZA esplicita le adiacenze

COMPLETO ogni nodo è collegato con tutti gli altri nodi, ma non con se stesso (tutti 1 tranne la diagonale)

DAG grafo diretto senza cicli

ALBERI

PROFONDITÀ: distanza da r (r a ∅)
ALTEZZA massima profondità

ALBERO BINARIO al massimo due figli
PIENO ogni nodo interno ha 2 figli   TUTTO ($2^{h+1}-1$ nodi)
COMPLETO tutti hanno 2 figli, ma possono mancare sotto NO ULTIMO

BST sinistra < radice < destra
COMPLETO $2^{h+1}-1$ nodi (tutto pieno)
QUASI COMPLETO nell'ultimo possono mancare foglie
BILANCIATO nodo: sinistro - destro al massimo = 1

PREORDER radice -> sx -> dx (copia)
INORDER sx -> radice -> dx (legge in ordine)
POSTORDER sx -> dx -> radice (elimina)
AMPIEZZA livello dopo livello

RETICOLI

POSET con $\forall x,y$: JOIN $x \sqcup y$ (min. maggiorante) } confronta elementi non collegati
MEET $x \sqcap y$ (max. minorante)

COMPLETO lo sono tutti } FINITO
LIMITATO esistono minimo e massimo
DISTRIBUTIVO se valgono le proprietà distributive

COMPLEMENTO a' di a: $a \sqcap a' = 0$
$a \sqcup a' = 1$

può essere + di 1

COMPLEMENTATO: se è limitato e ogni elemento ha un complemento

RELAZIONE DI COPERTURA tutti gli elementi sono coperti
COPRE se è successivo nel grafo

PATTERN DISTRIBUTIVO NO: (se un elemento ha più di un complemento)

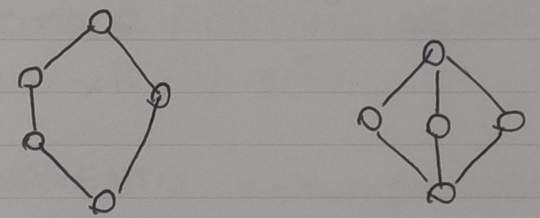


DIAGRAMMA DI HASSE

POSET: · xRy, allora x è sotto y
· segmento sse y è copertura di x
· no cappi, no archi transitivi

y COPERTURA di x se non si frappongono elementi

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} xRy <=> x divide y

↳ 8 è copertura di 4
↳ 4 è copertura di 2
↳ 8 NON è copertura di 2 (c'è il 4 in mezzo)

ALGEBRA DI BOOLE: complementato + distributivo + limitato

LOGICA PROPOSIZIONALE

PROPOSIZIONE ATOMICA non semplificabile

FBF $A \subseteq F$

$F \in F$, $* \in Op1$, $(*F) \in F$

$F, G \in F$, $\circ \in Op2$, $(F \circ G) \in F$

PRECEDENZE $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (si associa da destra)

ALBERO SINTATTICO formula attraverso connettivi principali
(si inizia dai meno importanti, PRECEDENZE al contrario)

EQUIVALENTI se hanno la stessa tavola di verità

NEGAZIONE ! inverte
CONGIUNZIONE se entrambe vere
DISGIUNZIONE vera se almeno una vera
IMPLICAZIONE $\leq$ $10 \rightarrow 0$ falsa solo se 1 e 0
DOPPIA IMPLICAZIONE = vera se uguali

COMPLETEZZA (cong. lit. veri) $\vee$ (...)

$$\begin{array}{cccc|l} A & B & C & F & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & (\neg A \wedge B \wedge C) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & (A \wedge \neg B \wedge C) \end{array} \Bigg\} \vee$$

MODELLO risultati veri
CONTROMODELLO risultati falsi

TAUTOLOGIA sempre vera
CONTRADDIZIONE sempre falsa
SODDISFACIBILE NON TAUTOLOGICA misto

TAVOLA DI VERITÁ riga $\forall$ assegnazione
colonna $\forall$ sottoformula

FUNZIONE f associa ad ogni assegnazione V il valore $I_V(F) \in \{0,1\}$
vedi COMPLETEZZA per costruzione

EQUIVALENZE E PROPRIETÀ OVVIE

INVOLUZIONE $A \equiv \neg\neg A$
IDEMPOTENZA $A \equiv A \wedge A$, $A \equiv A \vee A$
COMMUTATIVITÀ $A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$
DISTRIBUTIVITÀ $A \wedge B \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
ASSOCIATIVITÀ ordine non importante
DE MORGAN $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
ASSORBIMENTO $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
IMPLICAZIONI $A \to B \equiv \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
CONTRAPPOSIZIONE $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

$A \vee \neg A$ è tautologia
$F \equiv G$, $F \leftrightarrow G$ è tautologia
$A \wedge \neg A$ è contraddizione
F è tautologia se $\neg F$ è contraddizione
$F \to G$ è tautologia se $F \wedge \neg G$ è contraddizione

VERIFICHE SU RETICOLI

RETICOLO MEET e JOIN per elementi non confrontabili

NON DISTRIBUTIVO: - verifica piccoli reticoli non distributivi
- ognuno ha un solo complemento

FINITO: limitato + completo

TABLEAUX

F è tautologia sse ¬F è una contraddizione

TAUTOLOGIA negare F
provare a costruire un modello di ¬F
se esiste un modello, F non è tautologica

CONTRADDIZIONE provare a costruire un modello di F
se esiste un modello, F non è una contraddizione

SCELTE basta che una possibilità produca un modello

NEGAZIONE $\dfrac{T : \neg a}{F : a}$ $\dfrac{F : \neg a}{T : a}$

CONGIUNZIONE $\dfrac{T : a \wedge b}{T : a, T : b}$ $\dfrac{F : a \wedge b}{F : a \mid F : b}$

DISGIUNZIONE $\dfrac{T : a \vee b}{T : a \mid T : b}$ $\dfrac{F : a \vee b}{F : a, F : b}$

IMPLICAZIONE $\dfrac{T : a \rightarrow b}{F : a \mid T : b}$ $\dfrac{F : a \rightarrow b}{T : a, F : b}$

DOPPIA IMPLICAZIONE $\dfrac{T : a \leftrightarrow b}{T : a, T : b \mid F : a, F : b}$ $\dfrac{F : a \leftrightarrow b}{T : a, F : b \mid F : a, T : b}$

LOGICA PREDICATIVA

COSTANTI entità
RELAZIONI tra tuple
FUNZIONI ritornano una nuova entità

REGOLE DI TABLEAUX
tutti i predicati senza variabili sono atomiche

ESISTENZIALI POSITIVI

$T: \exists x . \phi(x)$ $\quad$ $T: \phi(a)$ con a nuova costante

UNIVERSALI NEGATIVI

$F: \forall x . \phi(x)$ $\quad$ $F: \phi(a)$ con a nuova costante

UNIVERSALI POSITIVI

$T: \forall x . \phi(x)$ $\quad$ $T: \phi(a), T: \forall x \phi(x)$ dove a è una costante del tableaux, va ripetuta per ogni costante

ESISTENZIALI NEGATIVI

$F: \exists x . \phi(x)$ $\quad$ $F: \phi(a), F: \exists x . \phi(x)$ dove a è una costante del tableaux, va ripetuto per ogni costante