GAL CHEATSHEET

Made with ❤ by Quelli di DS:
@Brock @Koalas @Sburbo
@Quack @Emre

Sistemi di equazioni lineari

- Le soluzioni sono: parte fissa + parte variabile
  ↳ ottenuta dai termini noti ⇒ se non ci sono, non esiste
- Soluzioni $A\underline{x}=\underline{b}$ con Gauss:
  - **esiste** ⇒ non ci sono pivot nei termini noti
  - **unica** ⇒ ogni riga ha un pivot
  - **infinite** ⇒ ci sono condizioni da rispettare
    ↳ dipende da **parametri** = numero di colonne senza pivot

  [ha sempre soluzione banale $\underline{x}=0$]
- Le soluzioni si trovano riducendo a scala sotto e sopra i pivot: $(A|b) \rightsquigarrow (I\,|\,\text{Soluzione})$

Spazi e sottospazi vettoriali

- tutti e soli i sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
  - l'origine
  - retta per l'origine
  - tutto $\mathbb{R}^2$
- **Span** $\{v_1 \dots v_n\}$ tutte le combinazioni lineari possibili dei vettori generatori
  ↳ con Gauss si ottiene il più piccolo
- **BASE** span di vettori linearmente indipendenti
- **DA SPAN A BASE**
  - costruire la matrice con colonne i generatori e ridurla a scala
  - le colonne che hanno pivot sono indipendenti, e generano le colonne parametro
  - una colonna parametro è generata dalle colonne sulla sinistra
- **RANGO** è il numero di colonne con pivot
- **NUCLEO DI UNA MATRICE** Ker A = porre il sistema con $\underline{b}=0$ (sono le soluzioni)
- **DETERMINANTI** $\det A \neq 0$ comporta:
  - ⇒ A è invertibile
  - ⇒ rango A = n
  - ⇒ tutte le colonne/righe sono lin. ind.
  - ⇒ dopo Gauss, trovo pivot su ogni colonna / riga
  - ⇒ $Ax=b$ ha una e una sola soluzione $\forall b$
  - ⇒ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 0$
  - ⇒ $\operatorname{Ker} A = \{\underline{0}\}$

Il determinante

- **diagonale e triangolare** prodotto dei valori sulla diagonale
- $\det(A) = \det(A^t)$
- **TRASFORMAZIONI**
  - permutazione di due righe $\det(A) = -\det(\tilde{A})$
  - sostituzione di una riga $\det(A) = \lambda \cdot \det(A)$
  - sostituzione con una riga non cambia
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- **det = 0** se il rango non è massimo oppure se ci sono due vettori uguali

Teorema di Rouché-Capelli

- $Ax = b$ ha soluzione $\iff rg A = rg(A|b)$
- ha soluzioni di numero pari a ∞^{n-r}

I Minori

- Minore di ordine K = det. di una sottomatrice $K \times K$
  - $rg A \geq K \iff \exists$ un minore di ordine K non nullo
  - $rg A < K \iff$ tutti i minori di ordine K sono nulli

Matrici inverse

- è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$

Applicazioni lineari

- $f: V \to W$ lo è se:
  - $f(v + v') = f(v) + f(v')$
  - $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  - $f(0) = \underline{0}$ => passa per l'origine
- conserva le relazioni di dipendenza lineare
- **rank-nullity** $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$ $\begin{cases} \textbf{Ker } f = \text{dim. dei vettori che rendono nullo il dominio} \neq 0 \\ \textbf{Im } f = \text{dim. di arrivo} \end{cases}$
- $f: V \to W$, con $\dim V = n$ e $\dim W = K$:
  - $n > K$ => non iniettiva
  - $n < K$ => non suriettiva
  - $n = K$ => iniettiva $\iff$ suriettiva
- $\operatorname{Im}(f) = rK(f)$ = autospazi della matrice

Matrici simili, autovalori, autovettori

- **POLINOMIO CARATTERISTICO** $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ => $-\lambda$ sulla diagonale
- **AUTOVALORI DI A** radici di $P_A(\lambda)$ => det della matrice del polinomio caratteristico
  - ↳ **AUTOVETTORI** vettori $\neq 0$ appartenenti a $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$
- A è diagonalizzabile se $A = \lambda I$, ovvero se già diagonale:
  - $\Delta > 0$ 2 radici reali distinte, diagonalizzabile
  - $\Delta = 0$ 1 autovalore, diagonalizzabile sse tutto nullo il polinomio caratteristico (già diagonale)
  - $\Delta < 0$ non diagonalizzabile
- **TEOREMA SPETTRALE** simmetrica => diagonalizzabile
- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** n° di volte che si ripete un autovalore (operativamente l'esponente)
- **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA**
  - se $ma = 1$ => $mg = 1$ sempre
  - data A, $\dim(A) - rg(A - \lambda I)$ con λ valore dell'autovettore
- se $ma \neq mg$, allora la matrice non è diagonalizzabile
- se c'è un'esponente pari nella ma => non diagonalizzabile
- **MATRICI SIMILI** A e B sono simili se esiste $P_{n \times n}$ invertibile t.c. $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$

Geometria formulario

- **AREA DEL QUADRILATERO** A,B,C,D è $\frac{\|(B-A) \wedge (D-A)\|}{2} + \frac{\|(B-C) \wedge (D-C)\|}{2}$
- **PROIEZIONE SU V_1 DI V_2** $P_{\vec{V_1}}(\vec{V_2}) = \frac{V_2 \cdot V_1}{\|V_1\|^2} \cdot V_1$ e restituisce un vettore
- **LUNGHEZZA DELLA PROIEZIONE** norma della proiezione
- **AREA DEL TRIANGOLO** dati tre punti A, B, C : $\frac{\|(B-A) \wedge (C-B)\|}{2}$
- **NORMA** $\|v\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta)$
- $\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\theta)$
- **VETTORI ORTOGONALI** v e w se $v \cdot w = 0$
- **VETTORI ORTONORMALI** v e w se ortogonali e $\|v\| = \|w\| = 1$
- se $v \cdot w = 0$ <=> i vettori sono perpendicolari tra di loro
- se $v \wedge w = \underline{0}$ <=> i vettori sono paralleli
- **DISCUSSIONE DELLA POSIZIONE RECIPROCA** di 2 vettori $a + tv$ e $b + tw$:

	$(v \mid w \mid b-a)$	$(v \mid w)$	
det $\neq 0$ ⟶	rg 3	rg 2	=> sghembe
	rg 2	rg 2	=> incidenti
	rg 2	rg 1	=> parallele
	rg 1	rg 1	=> coincidenti

mnemonicamente l'ordine è SI, PC!

Coniche

- sono nel formato $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

$$\det\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} = \det(A)$$

- $= 0$ CONICA DEGENERE
  - $rg(A)=2$ SEMPLICEMENTE DEGENERE
    - $\det(B)$ DUE RETTE IMMAGINARIE CONIUGATE E NON PARALLELE
    - $\det(B)$ DUE RETTE PARALLELE
    - $\det(B)$ DUE RETTE REALI E NON PARALLELE
  - $rg(A)=1$ DOPPIAMENTE DEGENERE
- $\neq 0$ CONICA GENERALE

$$\det\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \det(B)$$

  - >0 ellisse
  - $=0$ parabola
  - <0 iperbole