

Analytische Lösung zum Infiltrationstestfall

Andreas Nicolai

August 25, 2020

1 Ausgangsgleichung

Energiebilanz des Raumes mit zusätzlicher Wärmekapazität und Luftaustausch mit konstanter Außenlufttemperatur:

$$(V \varrho_a c_a + C) \frac{dT}{dt} = n_L V \varrho_a c_a (T_a - T)$$

mit		
V	m^3	Raumluftvolumen
ϱ_a	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte der Luft
c_a	$\frac{J}{kgK}$	spez. Wärmekapazität der Luft
C	$\frac{J}{K}$	zusätzliche Wärmekapazität im Raum
T	K	Raumlufttemperatur
T_a	K	Außentemperatur
n_L	$\frac{1}{h}$	Luftwechsel

2 Bedingungen

Anfangsbedingung: $T(t=0) = T_0 = 5^\circ C$

Außenlufttemperatur: $T_a = 20^\circ C$

3 Lösung

Substitutionen zur kompakteren Darstellung:

$$K = V \varrho_a c_a + C$$

$$a = n_L V \varrho_a c_a$$

Umformen:

$$(V \varrho_a c_a + C) \frac{dT}{dt} = n_L V \varrho_a c_a T_a - n_L V \varrho_a c_a T$$

$$K \frac{dT}{dt} = a T_a - a T$$

Trennen der Variablen und Integration (Vorzeichen beachten!):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{aT - aT_a} &= -\frac{dt}{K} \\ \int \frac{1}{aT - aT_a} dT &= \frac{1}{K} \int -dt \\ &= -\frac{1}{K}t + X\end{aligned}$$

mit Integrationskonstanten X .

Substitution:

$$\begin{aligned}z &= aT - aT_a \\ T &= \frac{z + aT_a}{a} \\ &= \frac{z}{a} + T_a\end{aligned}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \frac{1}{a} \\ dT &= \frac{1}{a}dz\end{aligned}$$

Einsetzen in Originalintegral und Lösen des Integrals:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{aT - aT_a} dT &= -\frac{1}{K}t + X \\ \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a} dz &= -\frac{1}{K}t + X \\ \frac{1}{a} \ln z &= -\frac{1}{K}t + X\end{aligned}$$

Rücksubstitution und Einsetzen in die Originalgleichung (beachte: X oder aX ist bei der noch unbestimmten Integrationskonstante egal):

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \ln(aT - aT_a) &= -\frac{1}{K}t + X \\ \ln(aT - aT_a) &= -\frac{a}{K}t + X \\ aT - aT_a &= e^{-\frac{a}{K}t} X\end{aligned}$$

Einsetzen in Anfangsbedingung und Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$aT_0 - aT_a = e^{-\frac{a}{K}0}X$$

$$X = a(T_0 - T_a)$$

Endgültige Gleichung:

$$aT - aT_a = a(T_0 - T_a)e^{-\frac{a}{K}t}$$

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\frac{a}{K}t}$$

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\frac{nL V_{\varrho_a} c_a}{V_{\varrho_a} c_a + C}t}$$

4 Referenzergebnisse zu ausgewählten Zeitpunkten

Zeitpunkt [h]	T
0	5.00
6	15.76
12	18.80
24	19.90
48	19.9994
72	19.9999