23/02/22

Estabilidade Absoluta

→ Tds os polos no semiplano esquerdo aberto no plano S

→ Tds os polos c/ parte real negativa

Considere um sistema representado pela FT: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m+1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n+1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$

$(n \geq m)$

O polinomio do denominador da função de transferência é chamado "polinômio caracteristico".

Os polos do sistema podem determinados fatorando esse polinômio

Existem métodos (criterios) p/ saber se existem polos no semiplano direito do plano s sem fatorar o polinomio

Por exemplo, o critério de Routh-Hurwitz → Análise de Estabilidade.

Fim da Lista 6

Critério de Routh-Hurwitz

Considerações iniciais:

Polinomio característico é composto por fatores de 1° e 2° ordem

fator $(s+a)$ fator (s^2+bs+c)

→ P/ raizes c/ parte real negativa, as cte a, b e c têm que ser positivas

Portanto, uma condição necessária p/ que tds as raízes da equação caracteristica tenham parte real negativa é que todos os coeficientes da equação sejam positivos

. Note que essa cond. não é suficiente

→ Aplica-se o criterio de Routh-Hurwits

Considere a seguinte eq. caracteristica de ordem n:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

1°) Construir a tabela:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	} Equação
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$\vdots$	
s^{n-2}	b_1	b_2			
s^{n-3}	c_1				
$\vdots$					
s^1	d_1	d_2			
s^0	e_1				

$$b_1 = \frac{(a_1 \cdot a_2) - (a_0 a_3)}{a_1} \qquad b_2 = \frac{(a_1 \cdot a_4) - (a_0 \cdot a_5)}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 \cdot a_3) - (a_1 \cdot b_2)}{b_1}$$

Obs.: Uma linha inteira pode ser multiplica por uma cte positiva p/ simplificar

2°) Análise.

A quantidade de raízes c/ parte real positi é igual à quantidade de trocas de sinais dos elementos da 1ª coluna

Ex.: Analise a estabilidade de um sistema q tem a seguinte equação característica

$$s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$$

→ Pode ser estavel pq tds os coef são posit

s^4	1	35	24
s^3	10	50	
s^2	30	24	
s^1	42		
s^0	24		

Analise: Como ñ houve trocas de sinais nos ele da 1ª coluna, ñ há polos c/ parte real positiva. o sistema é estavel

2 - 1° Caso Particular

Existe um elemento nulo na 1ª coluna
→ Substitui o elemento nulo por um nº ε positivo mt pequeno.
↳ continua a construção da tabela

Analise: • se o sinal do elemento acima de ε for diferente do sinal do elemento abaixo de ε então houve uma troca de sinal
• Se o sinal do elemento acima for igual o sinal do elemento abaixo, então ñ houve troca de sinal. Existe então um par de raízes com parte real nula → polos imaginarios puros.

Ex.: $s^3+2s^2+s+2=0$

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	ε	
s^0	2	

Análise: Como o sinal do elemento acima e abaixo são iguais, então há um par de raízes com parte real nula.
Note que a terceira raiz tem parte real negativa.
Sistema marginalmente estável.

- 2° Caso Particular

Quando uma linha inteira é nula
→ Utiliza-se um "polinomio auxiliar" $P(s)$, formado pelos elementos da linha acima da linha nula. Esse polinomio sempre de grau par.
→ Significa que existem x pares de raízes radialmente opostas.
→ P/ continuar a tabela utiliza-se a 1ª derivada de $P(s)$. E substitui a linha nula.

Ex.: $s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	
s^2	24	-50	
s^1	112,67		
s^0	-50		

Polinomio Auxiliar: (linha s^4)
$P(s) = 2s^4+48s^2-50$
$\frac{d(P(s))}{dt} = 8s^3+96s$

Analise: houve 1 troca de sinal ⇒ 1 raiz c/ parte real positiva/ um polo instável ⇒ sistema INSTÁVEL

Obs.: existem dois pares de raízes radialmente opostas. Essas raízes podem ser determinadas resolvendo a eq. $P(s)=0$

25/02/2022

Criterio de Routh-Hurwitz: Aplicação em Controle

O critério tbm pode ser aplicado quando existe um parâmetro, normalmente um ganho, na equação característica
→ Nesse caso é possível analisar a influencia desse parametro na estabilidade do sistema.

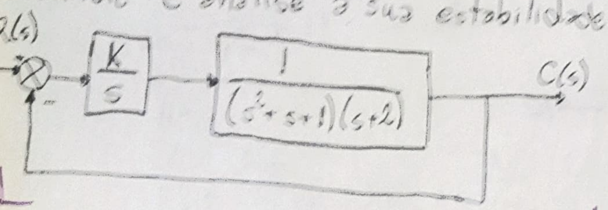
Ganho Crítico:

É o valor do ganho para a qual o sistema atinge o limite da estabilidade
→ Estabilidade critica
→ Polos no eixo imaginário (além de polos no semiplano esquerdo aberto do plano S)

Geralmente, quando aumenta-se o ganho, a estabilidade relativa é reduzida, podendo atingir a instabilidade.

O ganho Crítico K_{cr} pode ser determinado usando o critério de Routh-Hurwitz → Calcular o valor do ganho de modo que um elemento da primeira coluna da tabela seja nulo (e sinais iguais acima e abaixo)

Ex.: Considere o seguinte sistema de controle e analise a sua estabilidade



FT de malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^4+3s^3+3s^2+2s+K}$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	
s^2	7/3	K	
s^1	$(14-9K)/7$		
s^0	K		

"Analise" = determine todos os valores de K p/ os quais o sistema é estável

P/ estabilidade, $\frac{(14-9K)}{7} > 0 \rightarrow K < \frac{14}{9}$

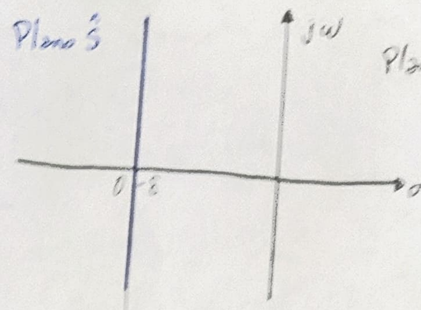
$$0 < K < 14/9$$

Note que o ganho crítico é $K_{cr} = \frac{14}{9}$

Fim da lista

Estabilidade Relativa

O critério de Routh-Hurwitz pode ser usado indiretamente p/ avaliar a estabilidade relativa, usando uma troca de variáveis (plano



Substituição: $s = \hat{s} - \delta$

Aplica-se o critério p/ a eq. em $\hat{s}$.

Precisão de Sistemas de Controle

- Sistema estável

A precisão é dada pelo erro em regime estacionário ($t \to \infty$) (estamos considerando sistemas estáveis)

Note que, o erro transitório é inevitável!

Lembrando: $e(t) = r(t) - c(t)$

onde: $e(t)$ é o erro (ou desvio)
$r(t)$ é a entrada (referência)
$c(t)$ é a saída (variável controlada)

Erro estacionário: $e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$

O erro em regime estacionário depende do tipo da entrada.

→ Um mesmo sistema pode ter erro nulo p/ um degrau de referência e erro infinito p/ uma rampa.

A especificação do erro é dada p/ um tipo de entrada.

Geralmente, quando aumenta-se o ganho do sistema melhora-se a precisão.

→ Conflito com a estabilidade

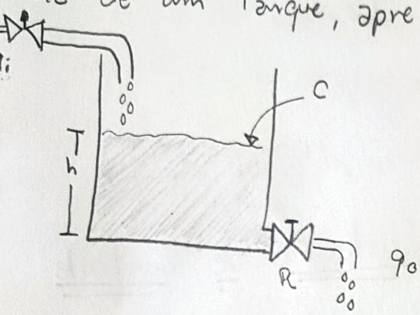
→ Ganho do sistema tem que ser menor q

o seu ganho crítico

Se o sistema apresenta um erro ∞, os parâmetros do sistema podem ser alterados p/ reduzi-lo (dentro do limite de estabilidade)

Por outro lado, para eliminar o erro, é necessário alterar a estrutura do sistema (dinâmica do controlador)

Ex.: Considere um sistema de controle de um tanque, apresentado abaixo

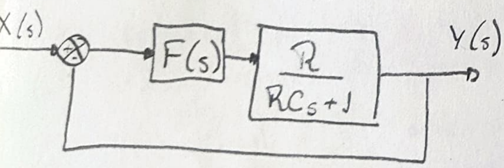


A FT do tanque é:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

R é a resistencia e C a capacitancia

O sistema de controle pode ser representado pelo diagrama



Onde $X(s)$ é a entrada e $Y(s)$ a saída

Considerando que o controlador é apenas um ganho: $F(s) = k$. Determine o erro em regime estacionário para uma entrada em degrau de magnitude A $(e(t) = x(t) - y(t))$

Calculando o erro

$$E(s) = X(s) - Y(s) \qquad Y(s) = k \cdot \frac{R}{RCs+1} \cdot E(s)$$

$$E(s)\left[\frac{RCs+1+KR}{RCs+1}\right] = X(s)$$

$$E(s) = \frac{RCs+1}{RCs+1+KR} \cdot X(s)$$

como $X(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow E(s) = \dfrac{s+\frac{1}{RC}}{s+\frac{1+KR}{RC}} \cdot \frac{A}{s}$

$$= \frac{\frac{KRA}{1+KR}}{s+\frac{1+KC}{RC}} + \frac{\frac{A}{1+kR}}{s}$$

Obs.: malha fechada $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs+1+KR}$

Um ponto real no semiplano esquerdo aberto (k, R e C positivos!) $\Rightarrow$ ESTÁVEL

No tempo:

$$e(t) = \frac{A}{1+kR}\left(KR\, e^{-\frac{1+kR}{RC}} + 1\right)$$

Erro estacionário:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \boxed{\frac{A}{1+KR}} \rightarrow \text{Valor finito}$$

Quanto maior o ganho K, menor será o erro estacionário

02/03

$\rightarrow$ Conclusões:

- Erro finito, é possível reduzi-lo, mas não eliminá-lo
- P/ eliminar (zerar) o erro é necessário alterar o controlador
- Os cálculos e análises são válidos p/ qualquer sistema de 1ª ordem (ex. dado)
- Existe várias formas de resolver o problema...

Alternativa: - obter a saída no domínio s; $Y(s) = \frac{KR}{RCs+1+KR}$

- Obter a saída no tempo $y(t)$, calcular o valor de regime estacionário, $y(\infty)$

- Calcular o erro estacionário

$$e(\infty) = x(\infty) - y(\infty)$$

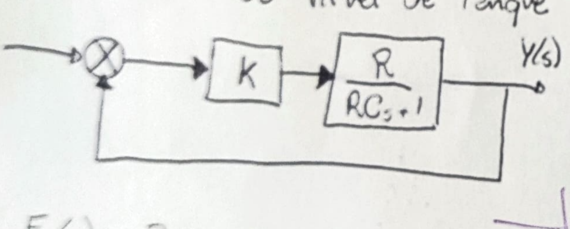
Alternativa:

- Erro em regime estacionário, de sistemas estáveis, pode ser calculado usando o teorema do "valor final"

↳ Considere uma função no tempo contínuo $f(t)$, com transformada de Laplace $F(s)$. Se o valor de $f(t)$ existe p/ t tendendo ao ∞, ele pode ser relacionado com $F(s)$ por:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)}$$

Ex.: Controle de nível de tanque



$$E(s) = \frac{RCs + 1}{RCs + 1 + KR} X(s)$$

P/ um degrau $X(s) = A/s$

$$E(s) = \frac{RCs+1}{RCs+1+KR} \cdot \frac{A}{s}$$

Como o sistema é estável, o valor de $e(t)$ quando $t \to \infty$, para um degrau de referência existe. Assim, o teorema do valor final pode ser aplicado.

Obs.: O teorema pode ser aplicado quando $sF(s)$ tem todos os polos no semiplano esquerdo aberto do plano S.

Assim $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) =$

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{(RCs+1) \cdot A}{(RCs+1+KR)\cancel{s}} = \boxed{\frac{A}{1+KR}}$$

Outra solução: Usando a Saída

$$Y(s) = \frac{KR}{RCs+1+KR} X(s) \quad \text{e} \quad X(s) = \frac{A}{s}$$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{KR}{RCs+1+KR} \cdot \frac{A}{\cancel{s}}$$

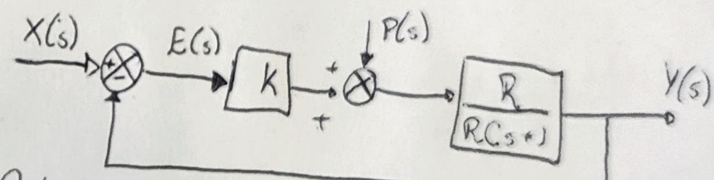
$$y_{ss} = \frac{KRA}{1+KR}$$ ↑K saída tende a A

Erro estacionário

$$e(\infty) = x(\infty) - y(\infty) = A - \frac{KRA}{1+KR} =$$

$$= \frac{A + KRA - KRA}{1+KR} = \boxed{\frac{A}{1+KR}}$$

Ex.:



Calcule o erro estacionário p/ uma pertubação em degrau de magnitude A: $P(s) = \frac{A}{s}$

Nesse caso, considera-se que $X(s) = 0$

O erro no domínio s é: $E(s) = -Y(s)$

Como: $\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{R}{RCs+1+KR} \Rightarrow Y(s) = \frac{R}{RCs+1+KR} \cdot \frac{A}{s}$

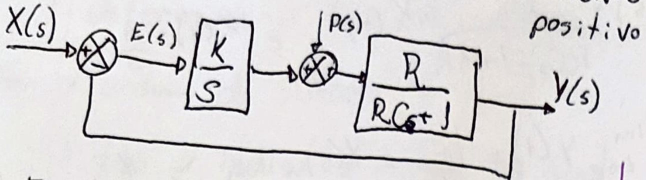
$$E(s) = \frac{-R}{RCs+1+KR} \cdot \frac{A}{s}$$ Obs.: sistema estável

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{-RA}{(RCs+1+KR)\cancel{s}} = \frac{-RA}{1+KR}$$

Quanto maior a magnitude da pertubação, maior será o erro

O, Quanto maior o ganho K, menor será o erro (não é possível eliminato)

Considere o mesmo problema, mas agora usando um controlador integrativo: K/s, K é um ganho estritamente positivo



Em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2+s+KR}$$

Note que, o sistema agora é de 2ª ordem. O sistema em malha fechada é estável! todos os coef. são (+)

O erro no domínio s é dado por:

$$E(s) = X(s) - Y(s) \qquad Y(s) = \frac{KR}{RCs^2+s} \cdot E(s)$$

$$E(s)\left[1 + \frac{KR}{RCs^2+s}\right] = X(s)$$

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{RCs^2+s}{RCs^2+s+KR}$$

P/ um degrau $\left(X(s) = \frac{A}{s}\right)$ de referência: $E(s) = \frac{(RCs+1)A}{RCs^2+s+KR}$

Como o sistema é estável e a ref. é um degrau, podemos aplicar o teorema do valor final.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s\cdot(RCs+1)\cdot A}{RCs^2+s+KR} = 0$$

Erro nulo p/ qualquer ganho K

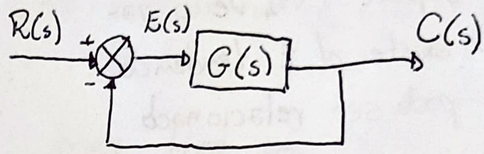
O ganho K pode ser utilizado p/ obter a dinâmica desejada do sistema (ω_n e ξ) → M_p, t_r, t_p, t_s

04/03/2022

Precisão → Erro Estacionário

Coeficientes de Erros estáticos

Considere um sistema de controle com realimentação unitária:



M.F. $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$; MA $G(s)$

A função do erro no domínio s é:

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow \boxed{E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)}$$

O erro em regime estacionário e_{ss} pode ser calculado utilizando o teorema do valor final (supondo que o valor final existe!)

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

A função de transferência $G(s)$ pode ser escrita de modo a facilitar o cálculo do limite

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\dots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\dots(T_x s+1)}$$

7

Onde: T_i ($i = a, b, \ldots, n$) e T_i ($i = 1, 2, \ldots, x$) são de

- K é o ganho estitamente positivo
- λ é a quantidade de polos na origem do plano s, ou seja, a quantidade de integradores puros em $G(s)$
- λ determina o "tipo" do sistema

Obs.: A ordem do sistema é $x + \lambda$

- O tipo λ indica a ordem do sinal de entrada (grau de s no denominador) que o sistema consegue seguir com erro nulo

Os erros também podem ser denominados:

→ Erro de posição: saída do sistema
↳ Degrau

→ Erro de velocidade: taxa de variação da saída ↳ Rampa

→ Erro de aceleração: taxa de variação da velocidade ↳ Parábola

Os erros de posição, velocidade e aceleração não estão associados à grandeza física.

Eles indicam desvios da saída com relação à referência

Coeficiente de Erro Estático de Posição

Entrada de referência em degrau unitário. $R(s) = 1/s$

O erro estático é dado por (considerando o sistema estável!):

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)}$$

Definindo o "coeficiente de erro estático de posição" $\boxed{K_p = \lim_{s \to 0} G(s)} \rightarrow \boxed{e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}}$

Sistema tipo Zero ($\lambda = 0$)

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\ldots(T_n s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ldots(T_x s + 1)}$$

$$\hookrightarrow = K$$

Erro estacionário $e_{ss} = \dfrac{1}{1 + K_p} = \dfrac{1}{1 + K}$ ↳ erro finito

Sistema tipo um ($\lambda \geq 1$)
ou maior

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\ldots(T_n s + 1)}{s^{\lambda}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ldots(T_x s + 1)}$$

$$\hookrightarrow = \infty$$

Erro: $e_{ss} = \dfrac{1}{1 + K_p} = 0$ (Erro Nulo)

Coeficiente de Erro Estático de Velocidade

Entrada de referência é uma rampa unitária
$R(s) = 1/s^2$

O erro estático é dado por (considerando o sistema estável!):

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s\,G(s)}$$

Definindo o "coeficiente de erro estático de velocidade" $\boxed{K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)} \rightarrow \boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v}}$