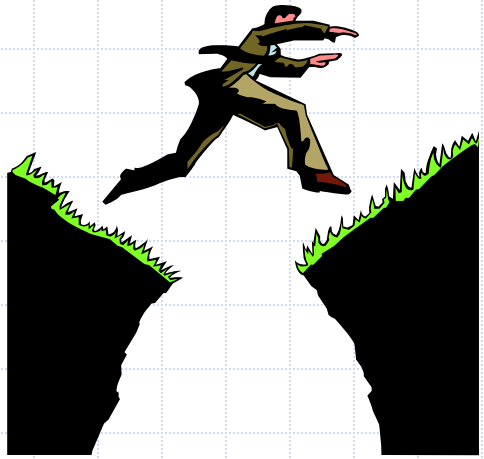
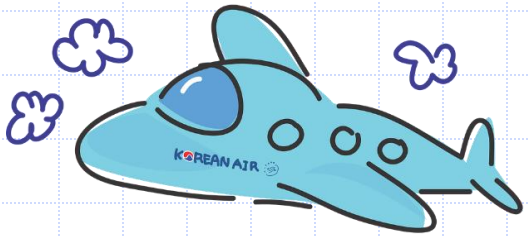
최단경로



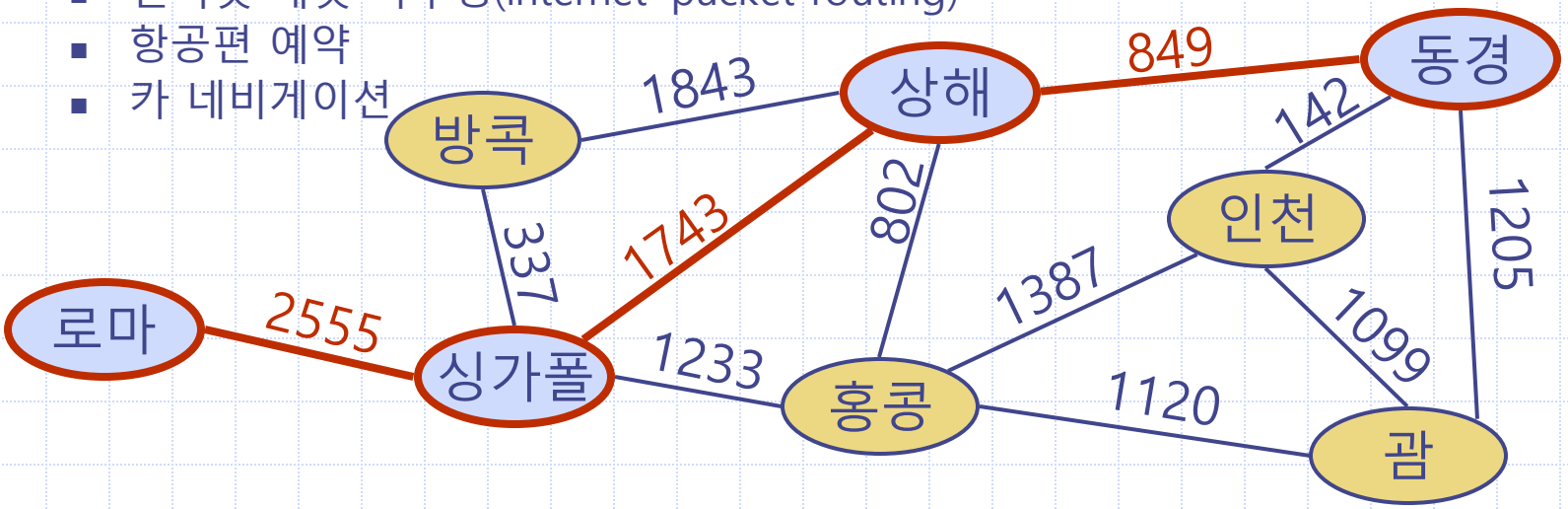
Outline

- 17.1 최단경로
- 17.2 최단경로 알고리즘
- 17.3 모든 쌍 최단경로
- 17.4 응용문제

최단경로 문제



- **최단경로 문제**(shortest path problem): 가중그래프와 두 개의 정점 u와 v가 주어졌을 때, u와 v 사이의 무게의 합이 최소인 경로를 구하는 문제
  - 최단경로길이: 간선들의 무게 합
- **예**
  - 동경과 로마 사이의 최단경로
- **응용**
  - 인터넷 패킷 라우팅(internet packet routing)
  - 항공편 예약
  - 카 네비게이션



최단경로 속성

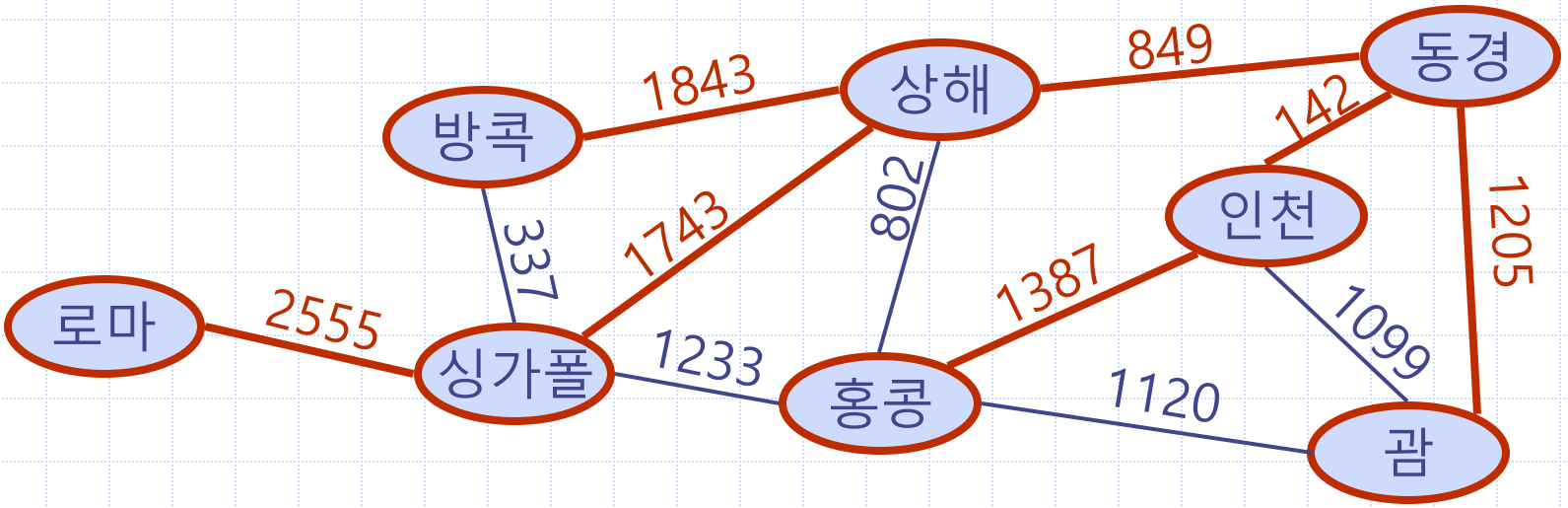
속성 1

최단경로의 **부분경로**(subpath) 역시 최단경로다

속성 2

출발정점으로부터 다른 모든 정점에 이르는 최단경로들의 트리가 존재 – **단일점 최단경로**(single-source shortest paths)

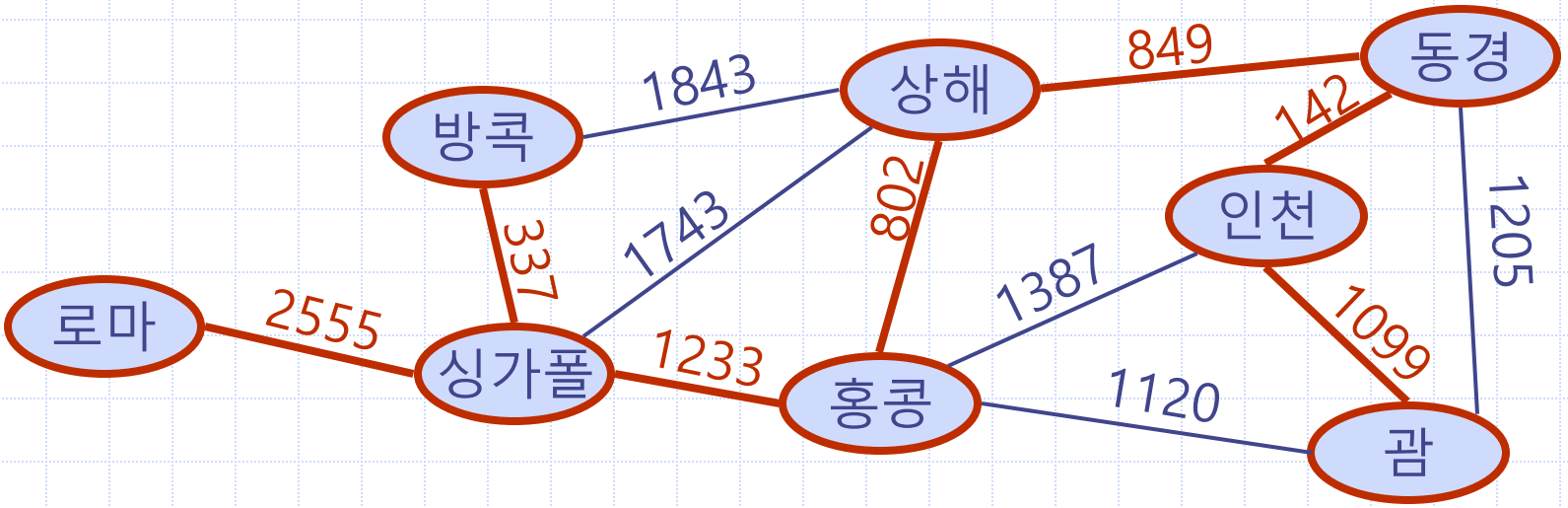
예: 동경으로부터의 **최단경로**



최소신장트리와 비교

- **최단경로**는 **최소신장트리**와 달리:
  - **무방향**뿐만 아니라 **방향그래프**에서도 정의
  - 그래프에 **음**의 무게를 가진 싸이클이 있거나,
    무방향그래프에 **음**의 무게를 가진 간선이 있으면 부정
  - **최단경로트리**(shortest path tree)는 **루트트리**

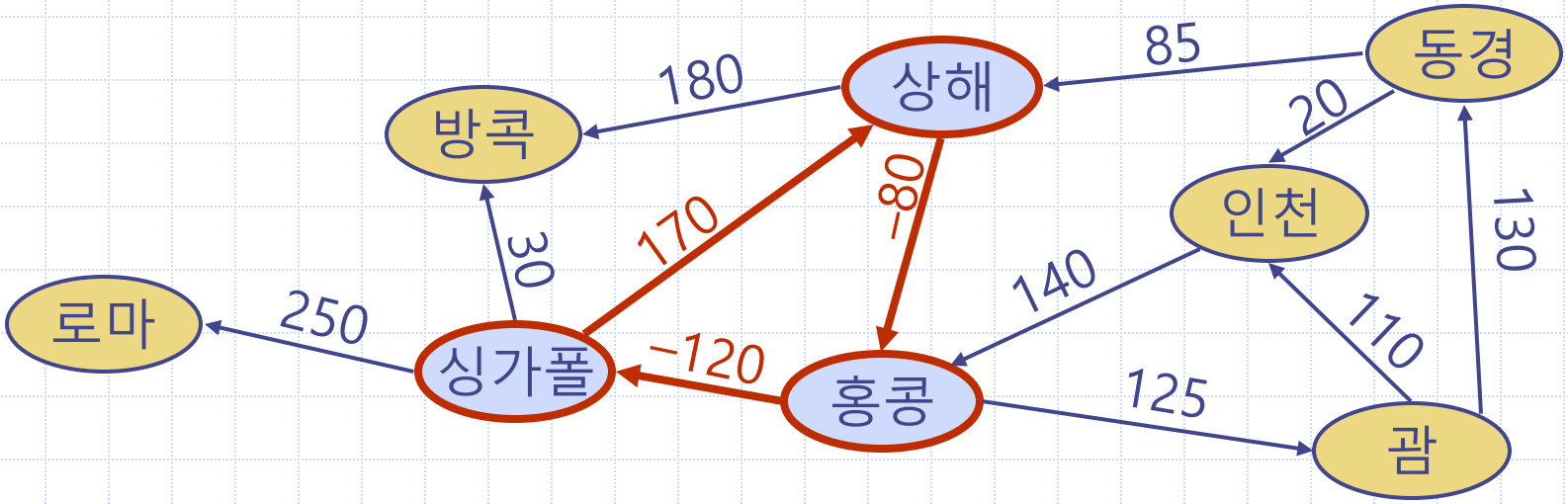
참고: 최소신장트리 예



음의 무게를 가지는 간선과 싸이클

- 가중 방향그래프에 **음의 무게를 가진 싸이클**이 존재한다면, 최단경로는 존재하지 않는다
- 가중 무방향그래프에 **음의 무게를 가진 간선**이 존재한다면, 최단경로는 존재하지 않는다

예: "항공요금 할인 전쟁이 도를 넘다!!"



최단경로 알고리즘

그래프	알고리즘	시간
음의 무게를 가진 간선이 없는 그래프	Dijkstra	$O(m \log n)$ or $O(n^2)$
음의 무게를 가진 간선이 있는 방향 그래프	Bellman-Ford	$O(nm)$
비가중그래프	BFS	$O(n + m)$
DAG	Topological Ordering	$O(n + m)$

Dijkstra 알고리즘

- 정점 s로부터 정점 v의 거리: s와 v 사이의 최단경로의 길이
- Dijkstra 알고리즘은 출발정점 s로부터 다른 모든 정점까지의 거리를 계산
- **전제**
  - 그래프가 연결됨
  - 간선들은 무방향
  - 간선의 무게는 **음수가 아님**
- s로부터 시작하여 정점들을 차례로 **배낭**에 넣다가 결국엔 모든 정점을 배낭에 넣는다
- 각 정점 v에 라벨 $d(v)$를 저장하여 배낭과 인접 정점들을 구성하는 부그래프에서 s로부터 v까지의 거리를 표현
- 반복의 각 회전에서:
  1. 배낭 밖의 정점 가운데 거리 라벨 d가 **최소**인 정점 u를 배낭에 넣는다
  2. u에 인접한 정점들의 라벨을 **갱신**

Dijkstra 알고리즘을 위한 기본 구성

- **배낭:** 가상이므로 구현하지 않음
- **우선순위 큐**가 배낭 밖의 정점들을 보관
  - **키:** 거리
  - **원소:** 정점
- 각 정점 v에 두 개의 라벨을 저장
  - **거리**(distance): $d(v)$
  - **위치자**(locator): 우선순위 큐에서 v의 위치

- 보조 메쏘드
  - Q.replaceKey(e, k): 원소 e의 키를 k로 변경하고 e의 우선순위 큐 Q에서의 위치를 갱신

Dijkstra 알고리즘

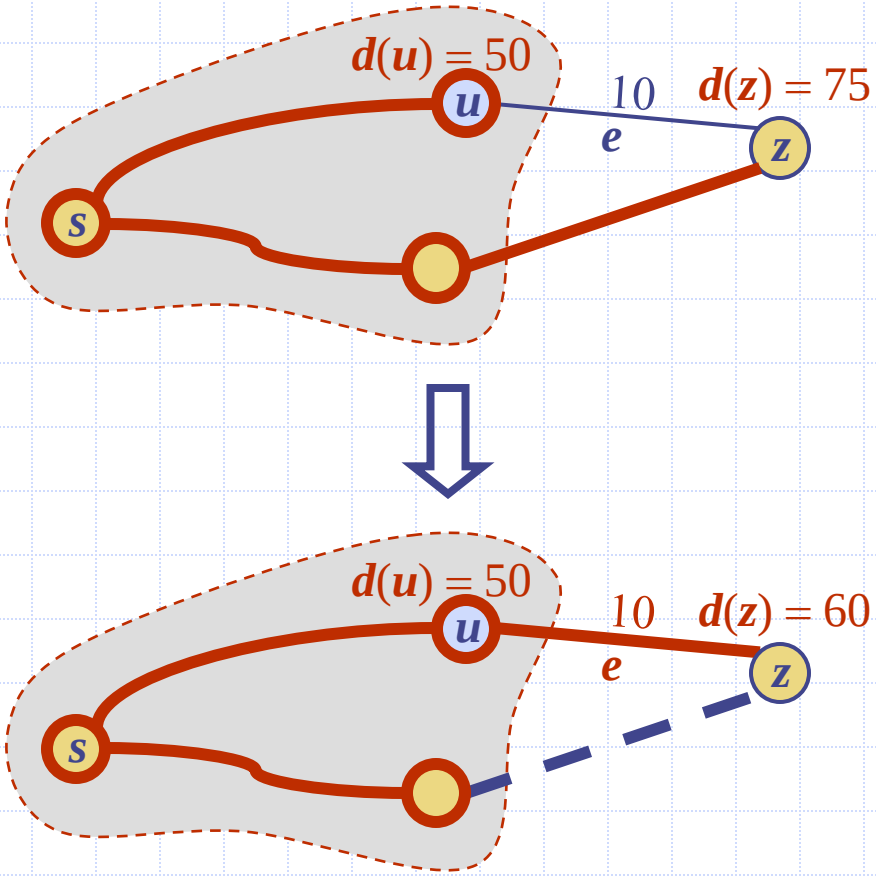
Alg ***DijkstraShortestPaths*(*G*, *s*)**
  input a simple undirected weighted graph G with nonnegative edge weights, a vertex s of G
  output label $d(u)$, for each vertex u of G, s.t. $d(u)$ is the distance from s to u in G

1. **for each** $v \in G.vertices()$
   $d(v) \leftarrow \infty$
2. $d(s) \leftarrow 0$
3. $Q \leftarrow$ *a priority queue containing all the vertices of* G *using* d *labels as keys*
4. **while** $(!Q.isEmpty())$
   $u \leftarrow Q.removeMin()$
   {pull a vertex into the sack}
   for each $e \in G.incidentEdges(u)$
   $z \leftarrow G.opposite(u, e)$
   if $(z \in Q.elements())$
   if $(d(u) + w(u, z) < d(z))$
   {relax edge e}
   $d(z) \leftarrow d(u) + w(u, z)$
   $Q.replaceKey(z, d(z))$

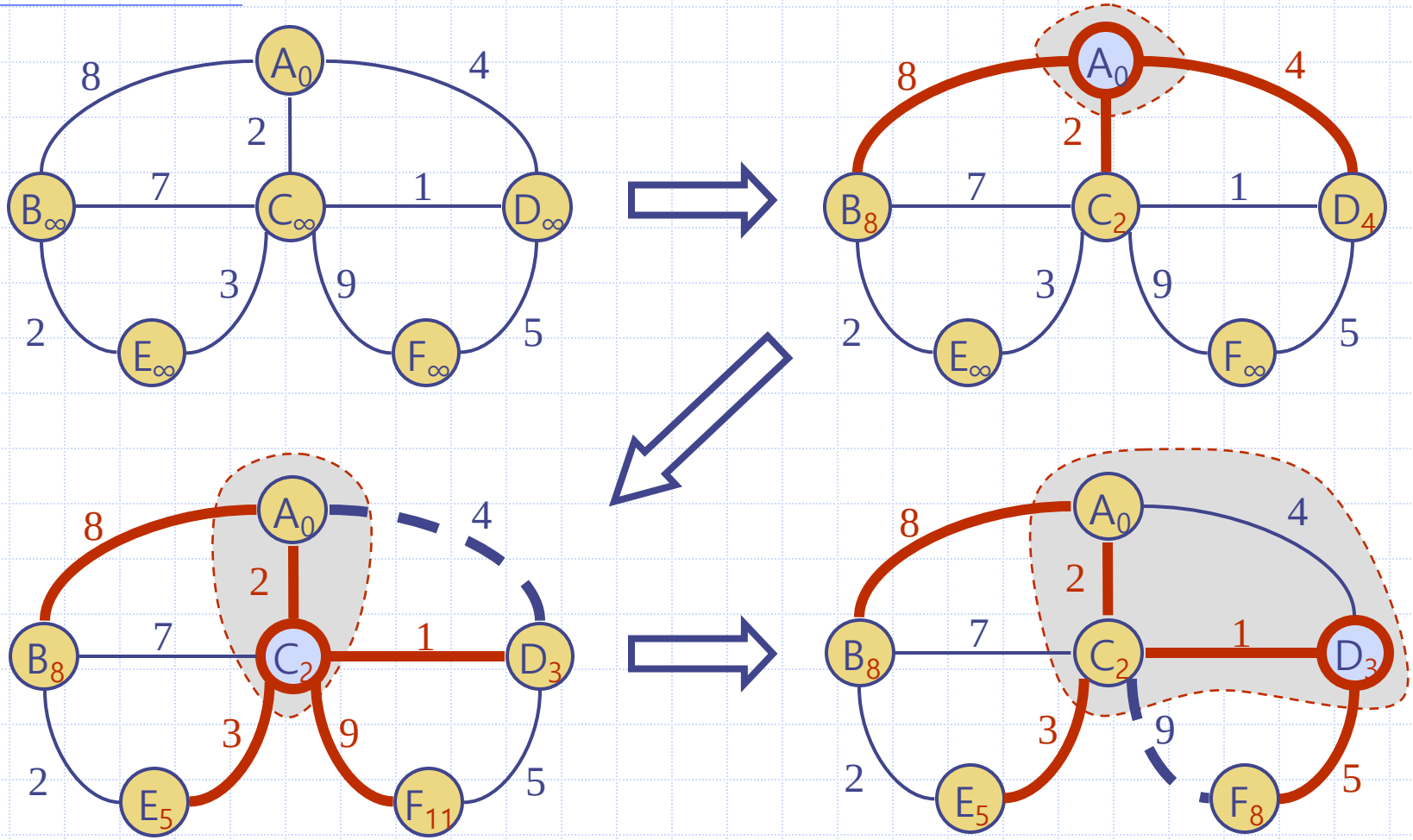
간선완화

- 간선 $e = (u, z)$에 대해 고려하자 – 여기서:
  - u는 가장 최근에 배낭에 들어간 정점
  - z는 배낭 밖에 존재
- 간선 e의 **완화**(relaxation)를 통해 거리 $d(z)$를 갱신 – 즉,

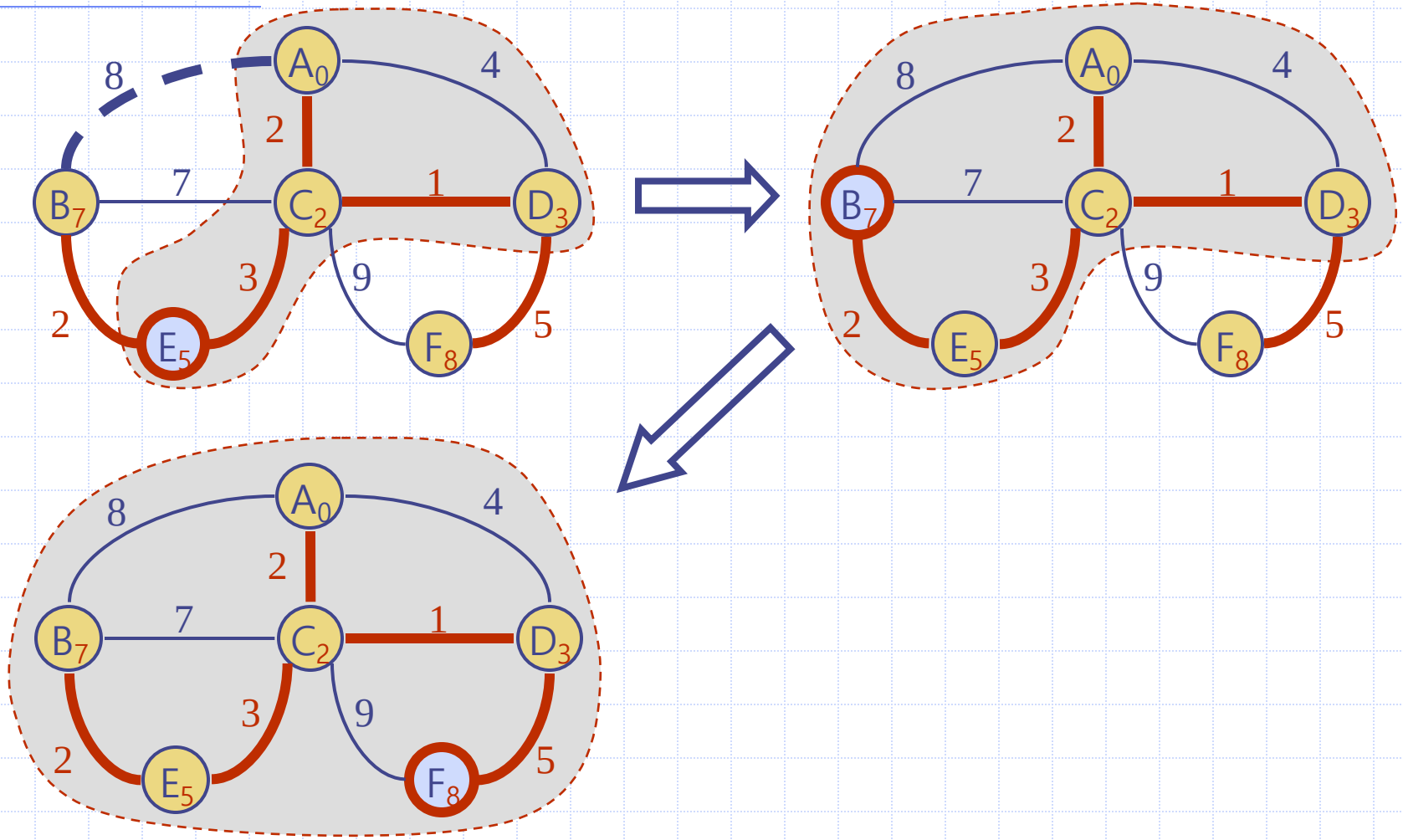
$$d(z) \leftarrow min(d(z), d(u) + w(u, z))$$



Dijkstra 알고리즘 수행 예

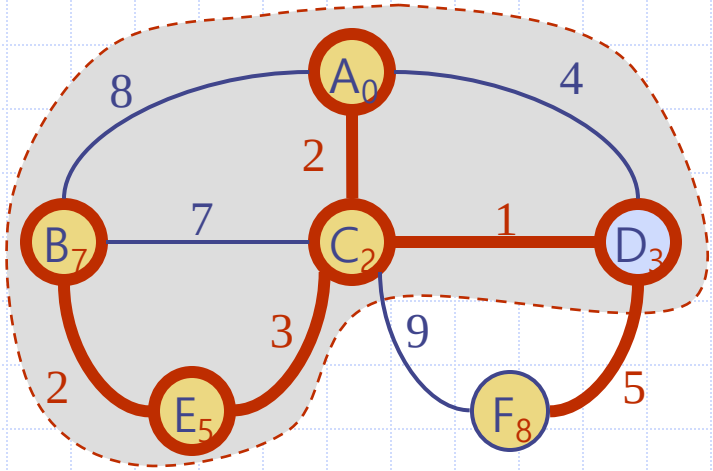


Dijkstra 알고리즘 수행 예 (conti.)



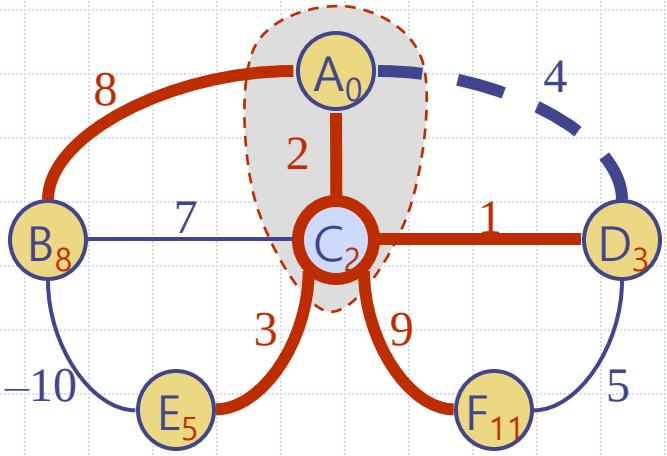
Dijkstra 알고리즘이 정확한 이유

- Dijkstra 알고리즘은 **탐욕법**에 기초한다 – 따라서 거리가 늘어나는 순서로 정점을 배낭에 삽입
  - **(모순법)** 알고리즘이 모든 정점에 대한 최단경로를 찾지는 못했다고 가정하고, F를 알고리즘이 잘못 처리한 첫 번째 정점이라고 하자
  - 올바른 최단경로 상의 이전 노드 D가 고려될 때, D의 거리는 정확했으며 이 값에 기초하여 간선 (D, F)가 완화되었다
  - 그러므로, $d(F) \geq d(D)$가 성립하는 한 F의 거리는 틀릴 수가 없다 – 즉, 거리가 잘못 계산된 정점은 있을 수 없다!



음의 무게를 가진 간선에 대해 정확하게 작동하지 않는 이유

- Dijkstra 알고리즘은 **탐욕법**에 기초한다 – 따라서 거리가 늘어나는 순서로 정점을 배낭에 삽입
- 음의 부착간선을 가진 노드를 배낭에 넣으면, 이미 배낭 속에 있는 정점들의 거리를 혼란케 한다
  - **그림 예:** C의 올바른 거리는 1이지만, $d(C) = 2$를 가지고 이미 배낭 속에 있다!
- 그럴싸한 해법: 이러면 될까?
  1. 모든 간선의 무게에 상수 k를 더하여 음의 무게를 없앤다
  2. 그렇게 해서 생성된 새로운 그래프에 대해 최단경로를 구한다
  3. 원래 그래프에 맞게 결과를 보정한다 – 즉, 모든 정점의 거리 라벨 값에서 해당 정점에 이르는 최단경로 상의 간선 수만큼 k를 뺀다

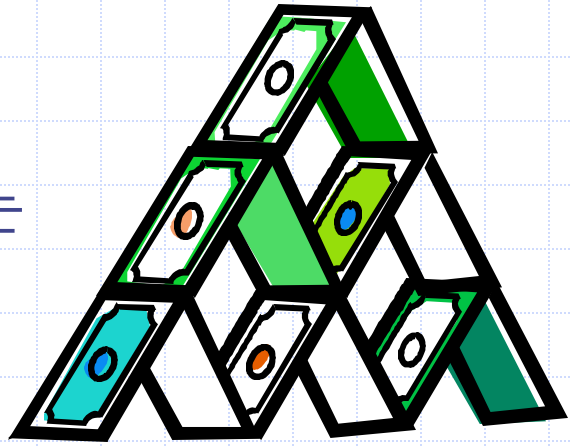


Dijkstra 알고리즘 분석

- 그래프 작업
  - 메쏘드 incidentEdges는 각 정점에 대해 한번씩만 호출
- 라벨 작업
  - 정점 z의 거리와 위치자 라벨을 $O(deg(z))$번 읽고 쓴다
  - 라벨을 읽고 쓰는데 $O(1)$ 시간
- 우선순위 큐의 구현에, 두 가지 선택 가능
  - **힙** 구현
  - **무순리스트** 구현

Dijkstra 알고리즘 분석 (conti.)

- **힙에 기초한 우선순위 큐**를 사용할 경우:
  - 각 정점은 우선순위 큐에 한번 삽입되고 한번 삭제되며, 각각의 삽입과 삭제에 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 우선순위 큐 내의 정점 z의 키는 최대 $deg(z)$번 갱신되며 각각의 키 갱신에 $O(\log n)$ 시간 소요
- 그래프가 **인접리스트** 구조로 표현된 경우, Dijkstra 알고리즘은 $O((n+m)\log n)$ 시간에 수행
  - **참고:** $\Sigma_v deg(v) = 2m$
- 그래프가 연결되었으므로, 실행시간은 $O(m \log n)$으로 표시 가능
- 그래프가 **단순**하다고 전제하므로, 이는 최악의 경우 $O(n^2 \log n)$



Dijkstra 알고리즘 분석 (conti.)

- **무순리스트에 기초한 우선순위 큐**를 사용할 경우:
  - 각 정점은 우선순위 큐에 한번 삽입되고 한번 삭제되며, 삽입과 삭제에 각각 $O(1)$ 및 $O(n)$ 시간 소요
  - 우선순위 큐 내의 정점 z의 키는 최대 $deg(z)$번 갱신되며 각각의 키 갱신에 $O(1)$ 시간 소요
- 그래프가 **인접리스트** 구조로 표현된 경우, Dijkstra 알고리즘은 $O(n^2 + m)$ 시간에 수행
  - **참고:** $\Sigma_v deg(v) = 2m$
- 그래프가 **단순**하다고 전제하므로, 이를 $O(n^2)$로 단순화 가능

두 가지 우선순위 큐 구현 비교

- Dijkstra 알고리즘의 **우선순위 큐**를 구현하는데 두 가지 선택 가능
  - **힙**으로 구현하면 $\mathbf{O}(m \log n)$ 시간
  - **무순리스트**로 구현하면 $\mathbf{O}(n^2)$ 시간
- 두 구현은:
  - 모두 코딩하기 쉽다
  - 상수적 요소로 보면 비슷하다
- 최악의 경우만을 생각하면 다음과 같이 선택이 달라진다
  - 희소그래프(즉, $m < n^2/\log n$)에 대해서는 **힙** 구현이 유리
  - 밀집그래프(즉, $m > n^2/\log n$)에 대해서는 **리스트** 구현이 유리

Bellman-Ford 알고리즘

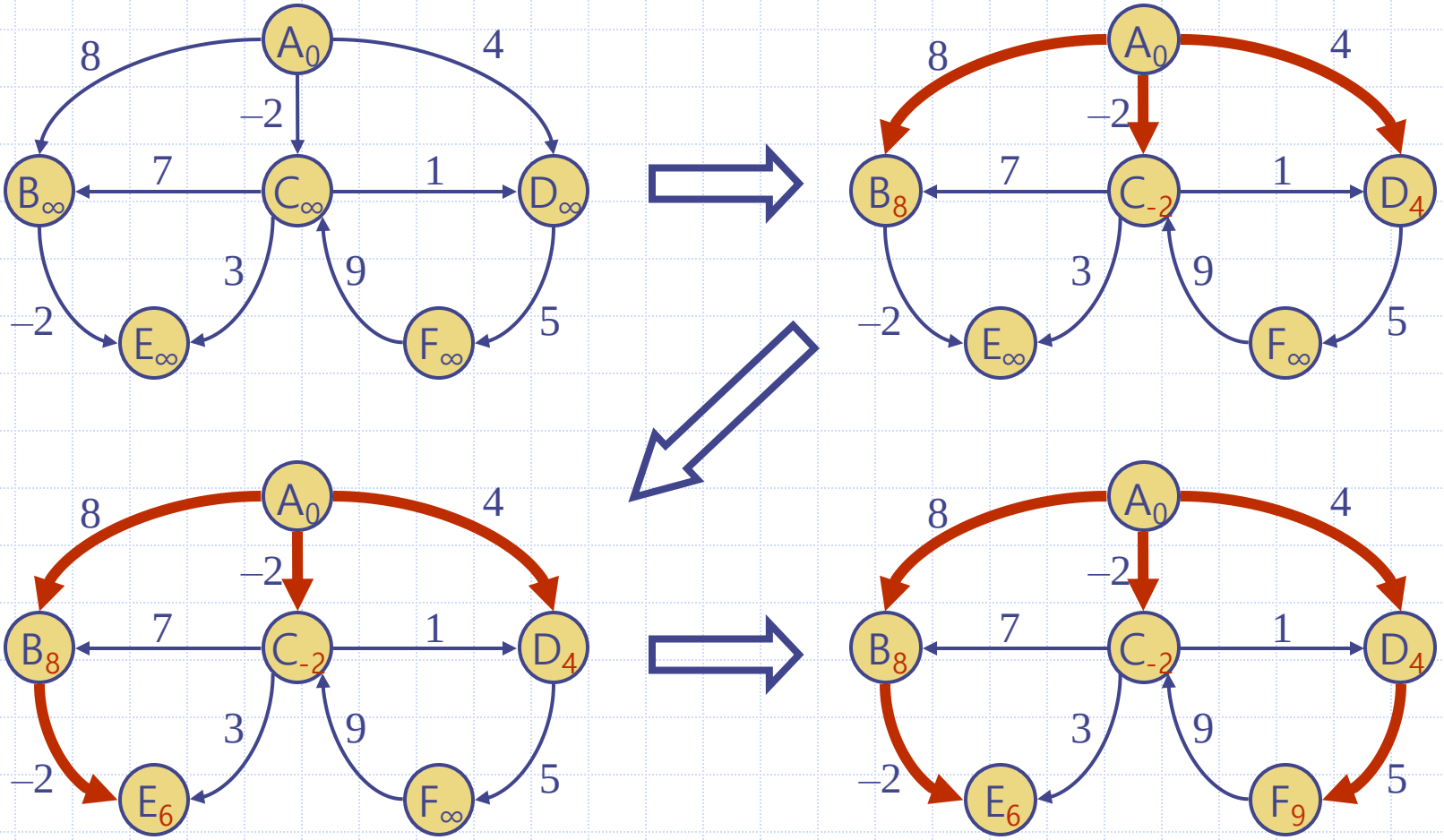
- **음의 무게를 가진 간선**이 있더라도 작동
- **방향간선**으로 전제 – 그렇지 않으면 음의 무게를 가진 싸이클이 있게 되기 때문
- 총 n – 1회의 반복을 수행하며 반복 라운드마다 모든 간선을 완화시도
- i-번째 반복 라운드에서 i개의 간선을 사용하는 최단경로를 찾는다
- **실행시간: O(nm)**
- 알고리즘을 확장하면, **음의 무게를 가지는 싸이클**이 있는 경우 이를 발견 가능
- **인접정보**를 사용하지 않으므로 **간선리스트** 구조 그래프에서 수행 가능

Alg ***Bellman-FordShortestPaths***(G, s)
  input a weighted digraph G with n vertices, and a vertex s of G
  output label $d(u)$, for each vertex u of G, s.t. $d(u)$ is the distance from s to u in G

1. **for each** $v \in G.vertices()$
   $d(v) \leftarrow \infty$
2. $d(s) \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$
   for each $e \in G.edges()$
   {relax edge e}
   $u \leftarrow G.origin(e)$
   $z \leftarrow G.opposite(u, e)$
   $d(z) \leftarrow min(d(z), d(u) + w(u, z))$

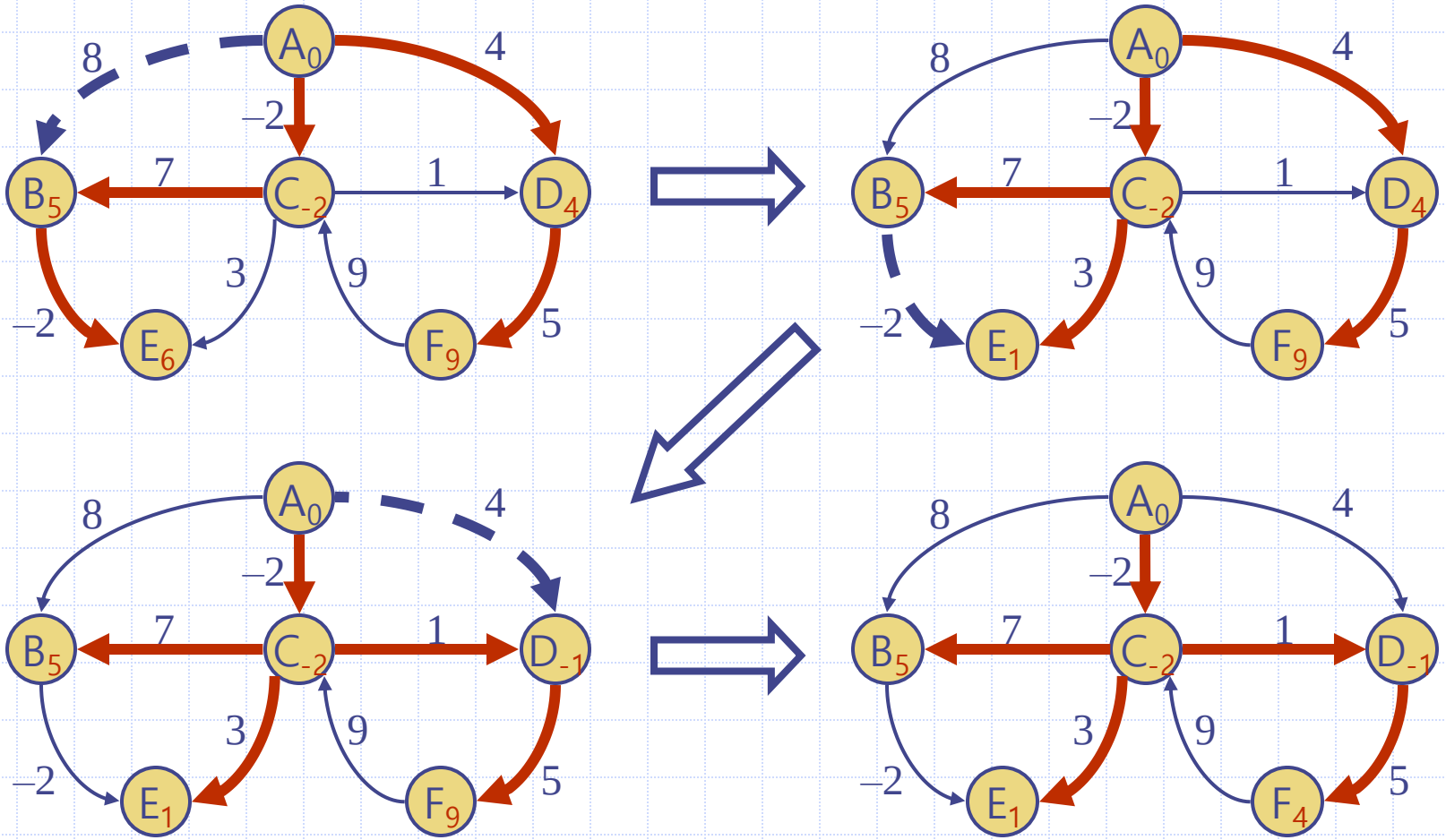
Bellman-Ford 알고리즘 수행 예

전제: 간선조사 순서 FC → BE → DF → CB → CE → CD → AB → AC → AD



Bellman-Ford 알고리즘 수행 예 (conti.)

전제: 간선조사 순서 FC → BE → DF → CB → CE → CD → AB → AC → AD



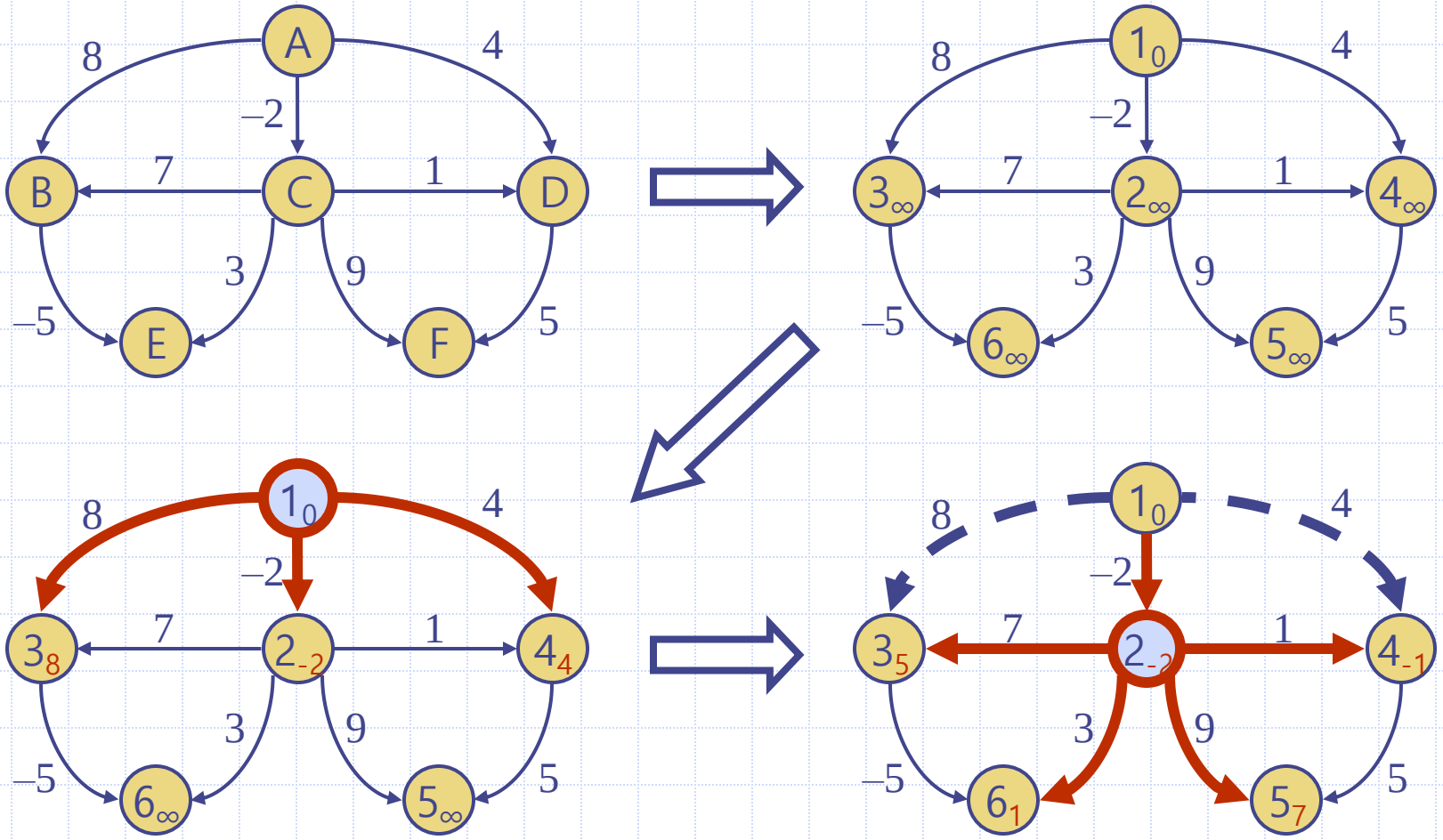
DAG에서의 최단경로

- 음의 무게를 가진 간선이 있더라도 작동
- **위상순서**를 이용
- 별다른 데이터구조를 사용하지 않음
- Dijkstra 알고리즘 보다 훨씬 빠르다
- **실행시간:**
  $O(n + m)$

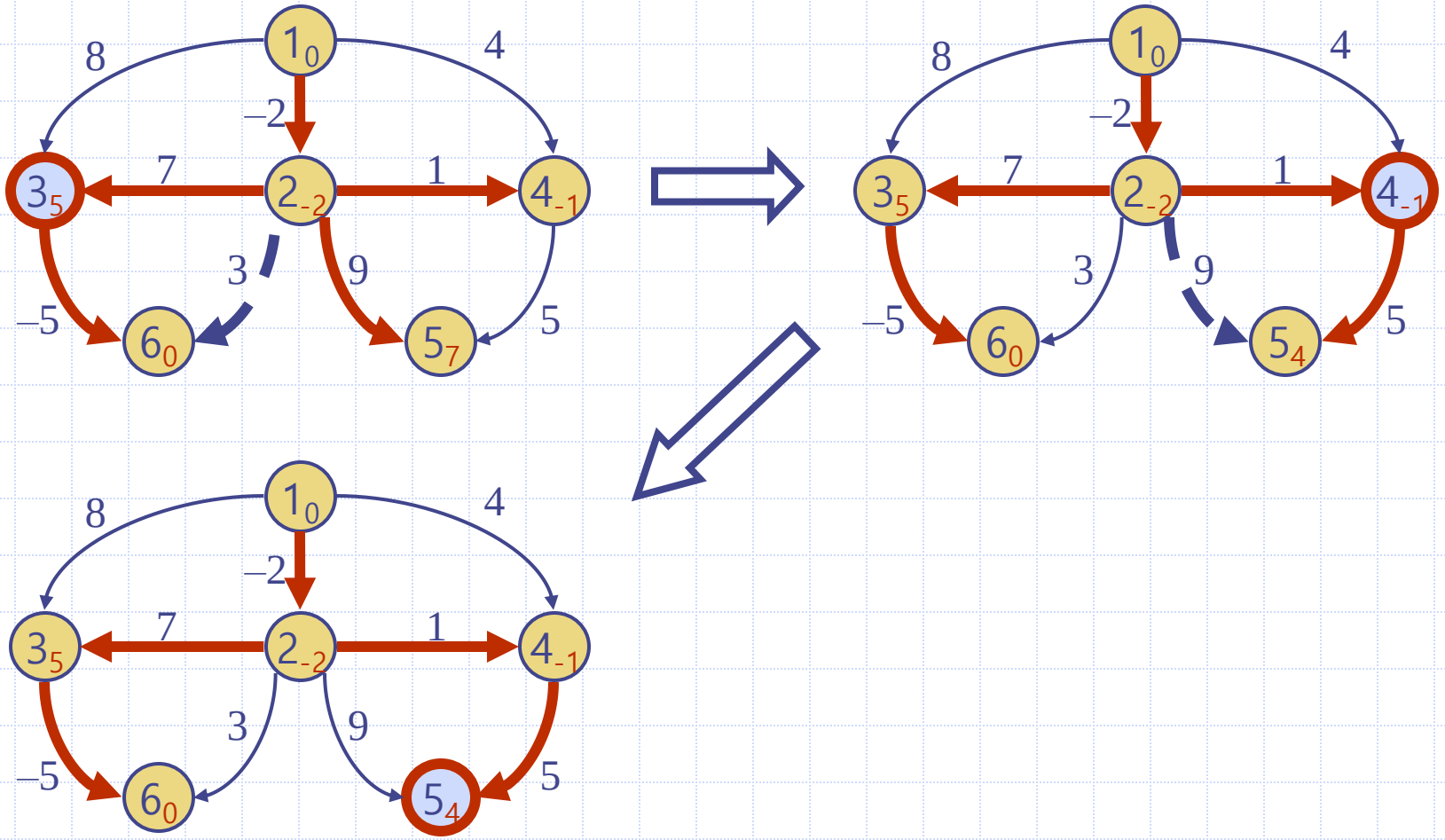
Alg ***DAGShortestPaths(G, s)***
input a weighted DAG G with n vertices and m edges, and a vertex s of G
output label $d(u)$, for each vertex u of G, s.t. $d(u)$ is the distance from s to u in G

1. *Compute a topological ordering* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *of* G
2. **for each** $v \in G.vertices()$
   $d(v) \leftarrow \infty$
3. $d(s) \leftarrow 0$
4. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$
   for each $e \in G.outIncidentEdges(v_i)$
   {relax edge e}
   $z \leftarrow G.opposite(v_i, e)$
   $d(z) \leftarrow min(d(z), d(v_i) + w(v_i, z))$

DAG에서의 최단경로 수행 예

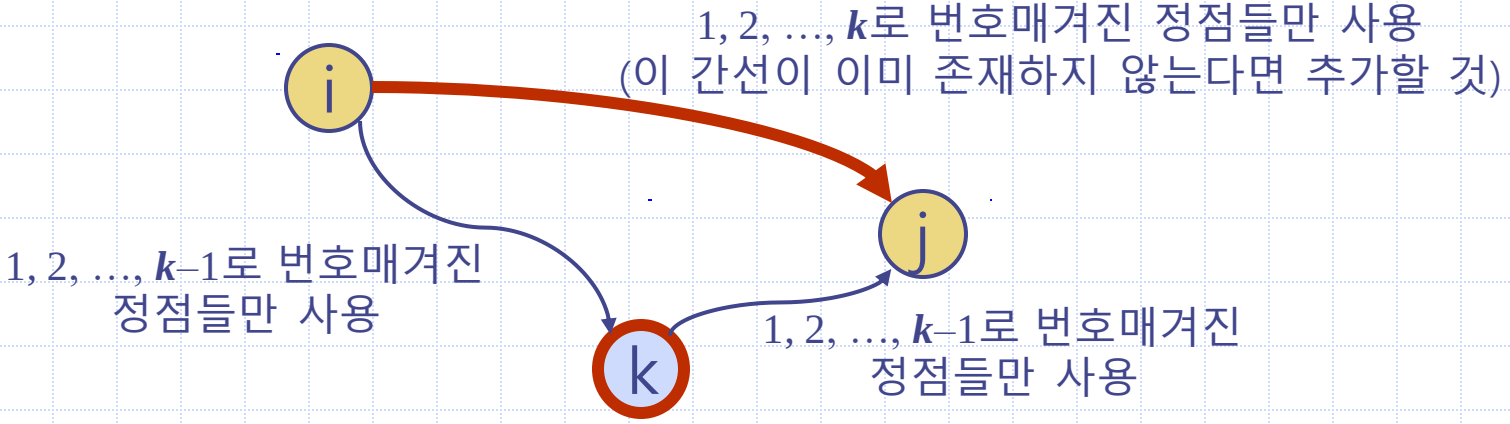


DAG에서의 최단경로 수행 예 (conti.)



모든 쌍 최단경로

- **모든 쌍 최단경로**(all-pairs shortest paths) 문제: 가중 방향그래프 G의 모든 정점쌍 간의 거리를 찾는 문제
- 그래프에 음의 무게를 가진 간선이 없다면, Dijkstra 알고리즘을 n번 호출할 수도 있다 – 실행시간: $O(nm \log n)$
- 그래프에 음의 무게를 가진 간선이 있다면, Bellman-Ford 알고리즘을 n번 호출할 수도 있다 – 실행시간: $O(n^2m)$
- **대안: 동적프로그래밍**을 사용하면 $O(n^3)$ 시간에 수행 가능 (Floyd-Warshall 알고리즘과 유사한 방식으로 수행)

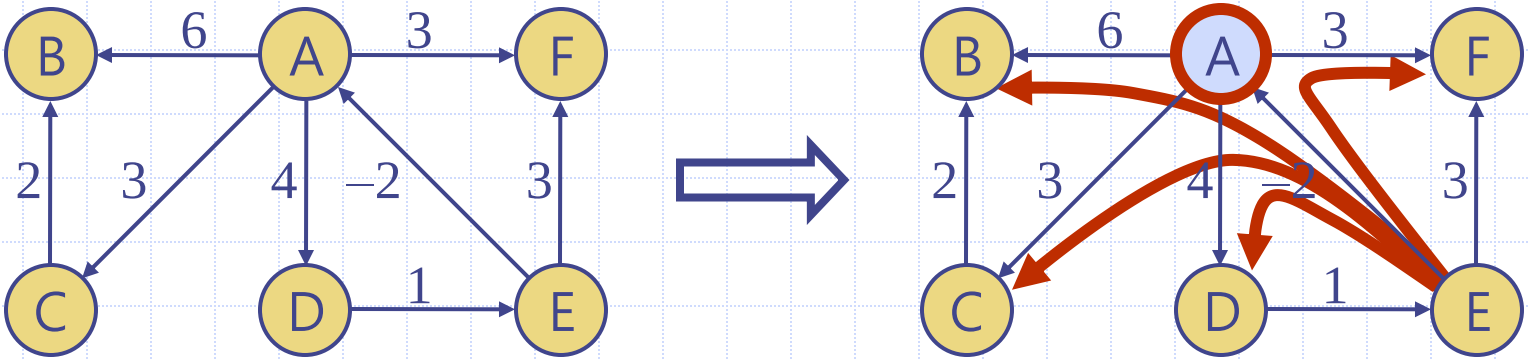


모든 쌍 최단경로

Alg ***allPairsShortestPaths***(*G*)
input a simple weighted digraph *G* without negative-weight cycles
output a numbering $v_1, v_2, \ldots, v_n$ of the vertices of *G* and a matrix *D*, s.t. *D*[*i*, *j*] is the distance from v_i to v_j in *G*

1. *Let* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *be an arbitrary numbering of the vertices of* *G*
2. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
   for $j \leftarrow 1$ **to** n
   if $(i = j)$
   $D[i, j] \leftarrow 0$
   elseif $((v_i, v_j) \in G.edges())$
   $D[i, j] \leftarrow w(v_i, v_j)$
   else
   $D[i, j] \leftarrow \infty$
3. **for** $k \leftarrow 1$ **to** n
   for $i \leftarrow 1$ **to** n
   for $j \leftarrow 1$ **to** n
   $D[i, j] \leftarrow min(D[i, j], D[i, k] + D[k, j])$

모든 쌍 최단경로 수행 예



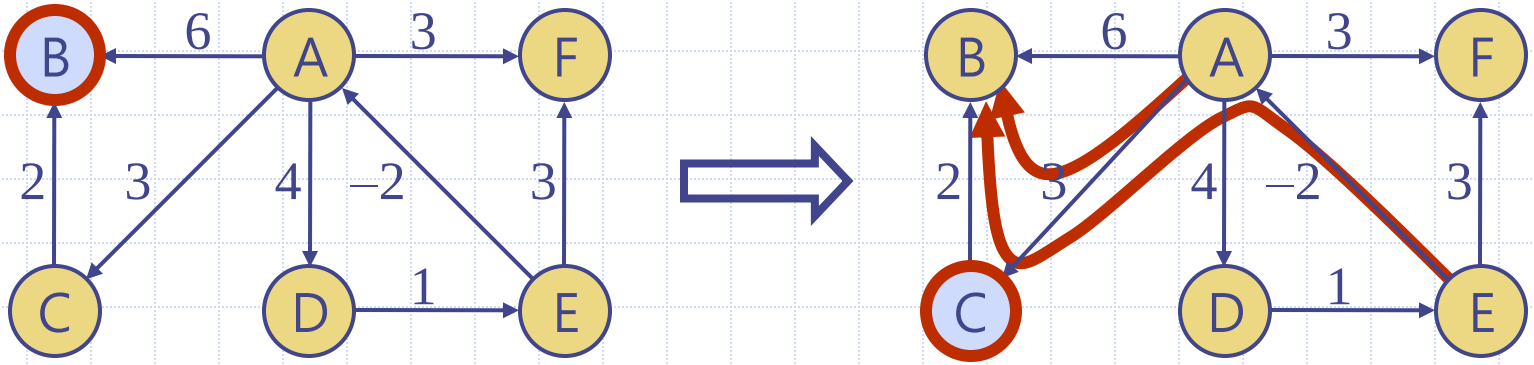
	1	2	3	4	5	6
1	0	6	3	4	∞	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	–2	∞	∞	∞	0	3
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	3	4	∞	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	–2	**4**	**1**	**2**	0	**1**
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

모든 쌍 최단경로 수행 예 (conti.)



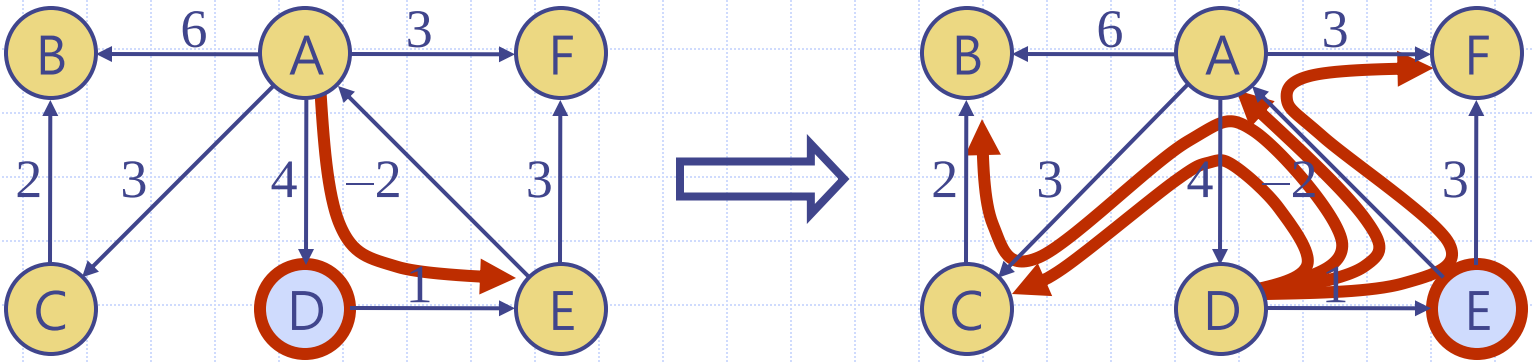
	1	2	3	4	5	6
1	0	6	3	4	∞	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	–2	4	1	2	0	1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

	1	2	3	4	5	6
1	0	**5**	3	4	∞	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	–2	**3**	1	2	0	1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

모든 쌍 최단경로 수행 예 (conti.)



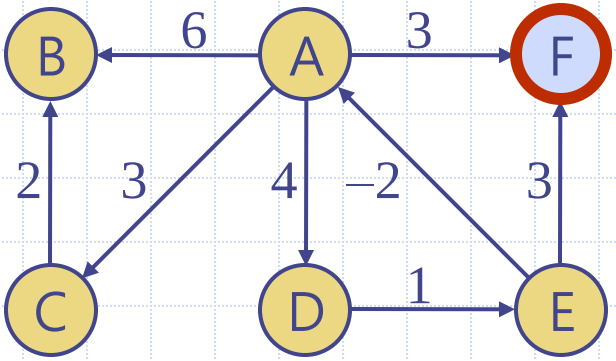
	1	2	3	4	5	6
1	0	5	3	4	**5**	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	–2	3	1	2	0	1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	3	4	5	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	**–1**	**4**	**2**	0	1	**2**
5	–2	3	1	2	0	1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

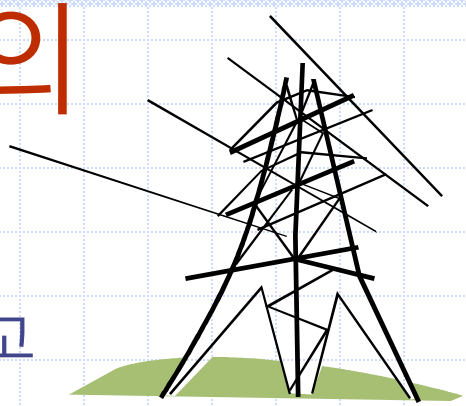
모든 쌍 최단경로 수행 예 (conti.)



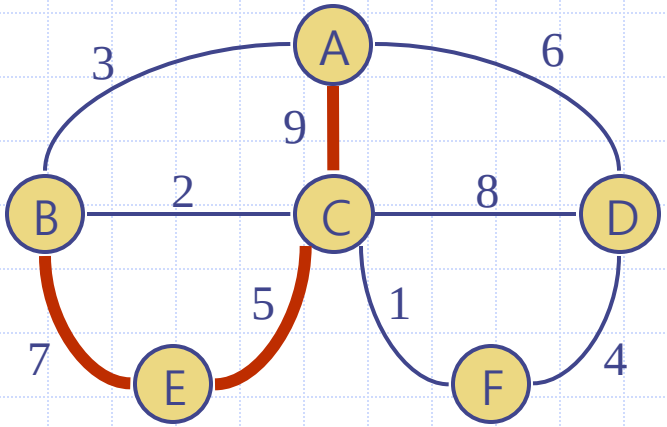
	1	2	3	4	5	6
1	0	5	3	4	5	3
2	∞	0	∞	∞	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	∞
4	–1	4	2	0	1	2
5	–2	3	1	2	0	1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D

응용문제: 두 지국 사이의 최대 대역폭



- **전화망**의 다이어그램이 그래프로 주어졌다고 가정하자
  - **정점:** 지국
  - **간선:** 지국 간의 통신선로
    (각 간선은 **대역폭**(bandwidth)과 함께 표시됨)
- **경로의 대역폭:** 경로 내 **최소**의 대역폭을 가지는 간선(즉, 병목)의 대역폭
  - **예:** A, B 간 **최대대역폭** = 5
- **문제:** 다이어그램과 두 개의 지국 x, y가 주어졌을 때, x, y 사이의 경로 가운데 **최대대역폭**을 구하는 알고리즘을 작성하라
- **힌트:** Dijkstra 알고리즘의 확장



해결: Dijkstra 알고리즘 확장

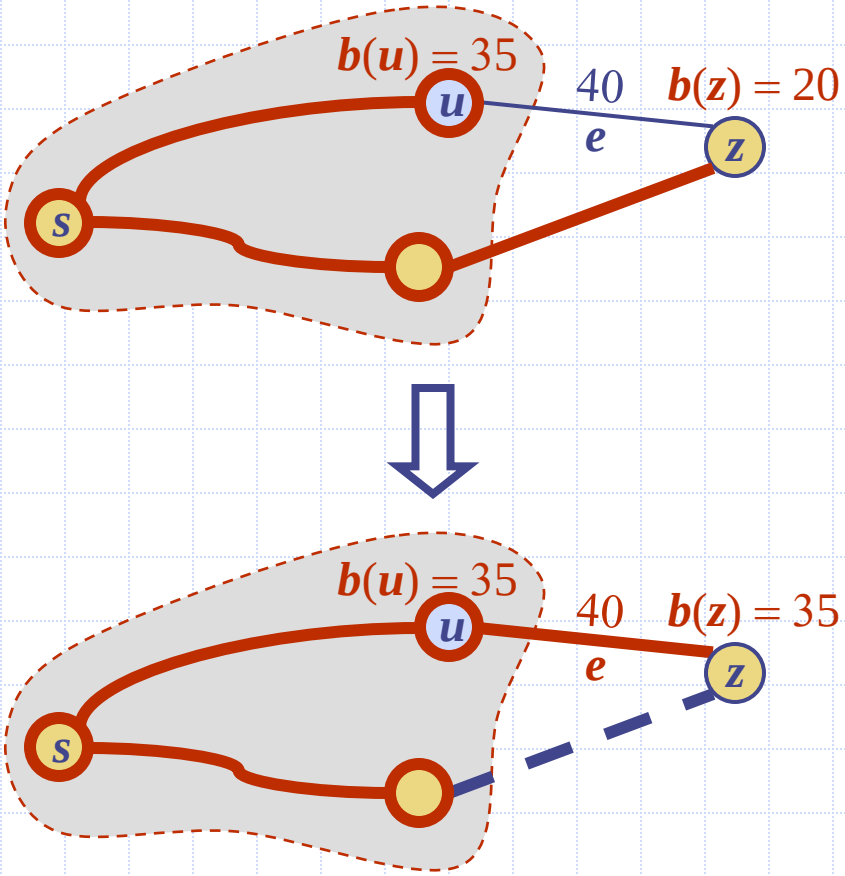
- Dijkstra 알고리즘에서와 동일한 아이디어를 사용
- 각 정점 v에 새로운 라벨 b를 유지
  - **bandwidth:** $b(v)$, x로부터 v까지 경로의 대역폭
- 모든 정점에 대해 b 라벨 값을 0으로 초기화
  - 단, 출발점 x의 b 값은 무한대로 초기화
- 작업 removeMin은 우선순위 큐로부터 **최대** b 값을 가지는 노드를 삭제
- **실행시간:** (힙에 기초한 우선순위 큐를 사용할 경우) $O((n+m)\log n)$

Alg *DijkstraMaxBandwidth*(G, x, y)
1. **for each** $v \in G.vertices()$
   $b(v) \leftarrow 0$
2. $b(x) \leftarrow \infty$
3. $Q \leftarrow$ *a priority queue containing all the vertices of* G *using the* b *labels as keys*
4. **while** $(!Q.isEmpty())$
   $u \leftarrow Q.removeMin()$
   for each $e \in G.incidentEdges(u)$
   $z \leftarrow G.opposite(u, e)$
   if $(z \in Q.elements())$
   if $(min(b(u), w(u, z)) > b(z))$
   $b(z) \leftarrow min(b(u), w(u, z))$
   $Q.replaceKey(z, b(z))$
5. **return** $b(y)$

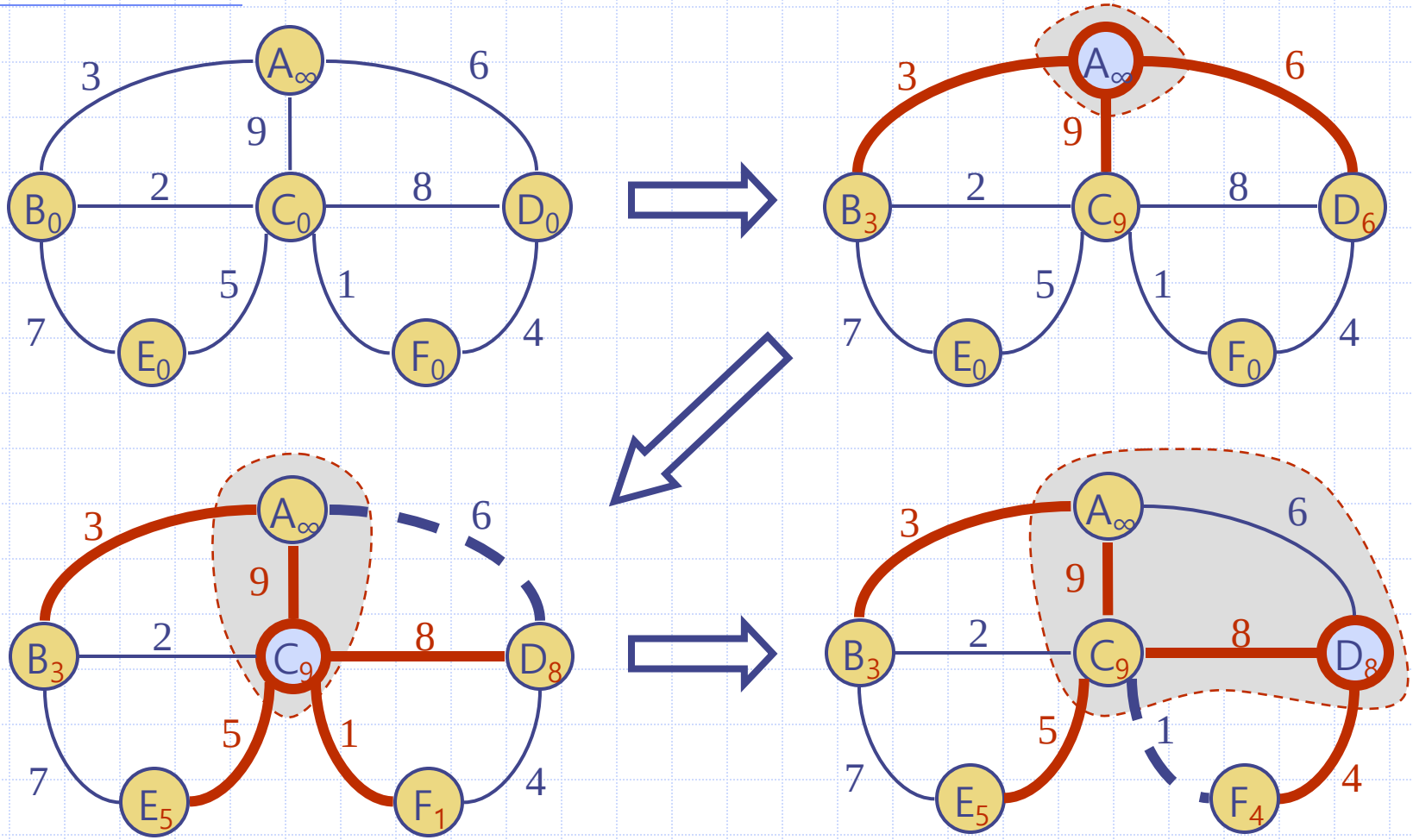
해결: 간선완화

- **간선완화** 단계는 Dijkstra에서와 매우 유사
- 다음과 같은 간선 $e = (u, z)$을 고려해보자
  - u는 배낭에 최근에 추가된 정점
  - z은 배낭에 존재하지 않는다
- 간선 e의 완화는 $b(z)$, 즉, z에 대한 대역폭을 다음과 같이 갱신

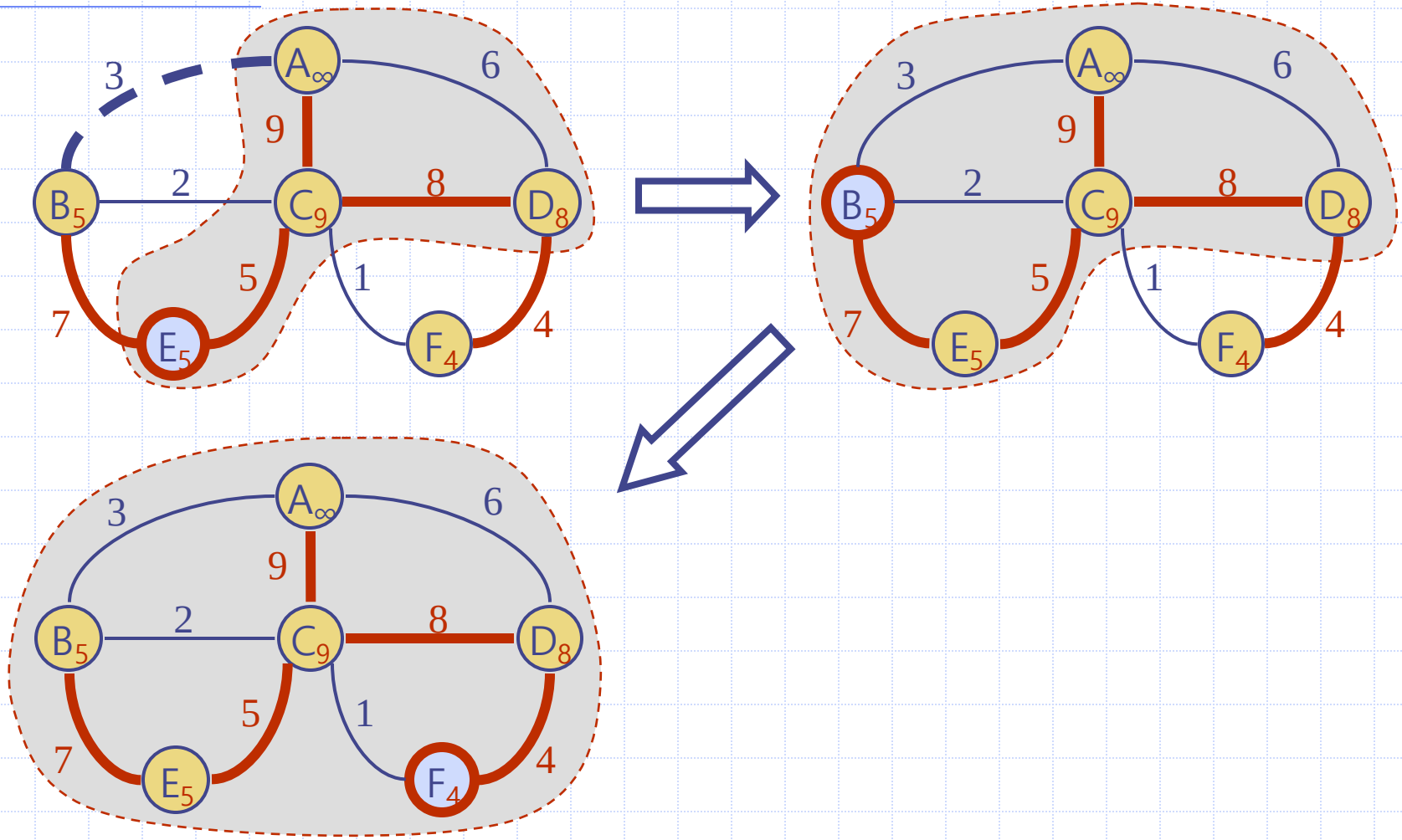
$$b(z) \leftarrow max(b(z), min(b(u), weight(e)))$$



해결: 수행 예

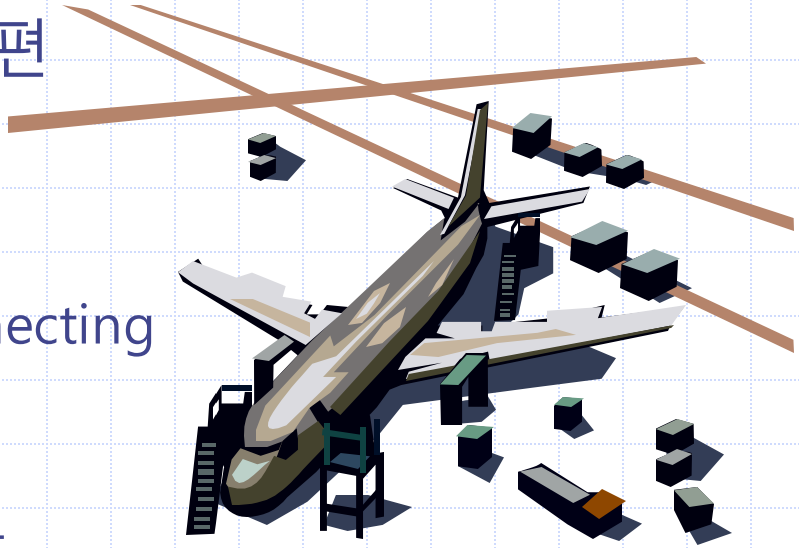


해결: 수행 예 (conti.)



응용문제: 항공편 스케줄링

- 다음 내용으로 구성된 항공편 시간표가 있다고 가정하자
  - n개의 공항 집합: A
  - 각 공항 $a \in A$ 에 대한 **최소연결시간**(minimum connecting time): $c(a)$
  - m개의 항공편 집합: F
  - 각 항공편 $f \in F$ 에 대한 정보
    - 출발공항: $a_1(f) \in A$
    - 도착공항: $a_2(f) \in A$
    - 출발시각: $t_1(f)$
    - 도착시각: $t_2(f)$



응용문제: 항공편 스케줄링 (conti.)

- **문제:** 주어진 두 개의 공항 a, b와 시각 t에 대해 a에서 시각 t 정시 혹은 이후에 출발할 경우 가장 이른 시각에 b에 도착할 수 있도록 하는 **연결항공편**을 계산하고 알고리즘의 실행시간을 n과의 m의 함수로 구하라
- **주의:** 환승공항에서의 최소연결시간은 반드시 준수되어야 한다

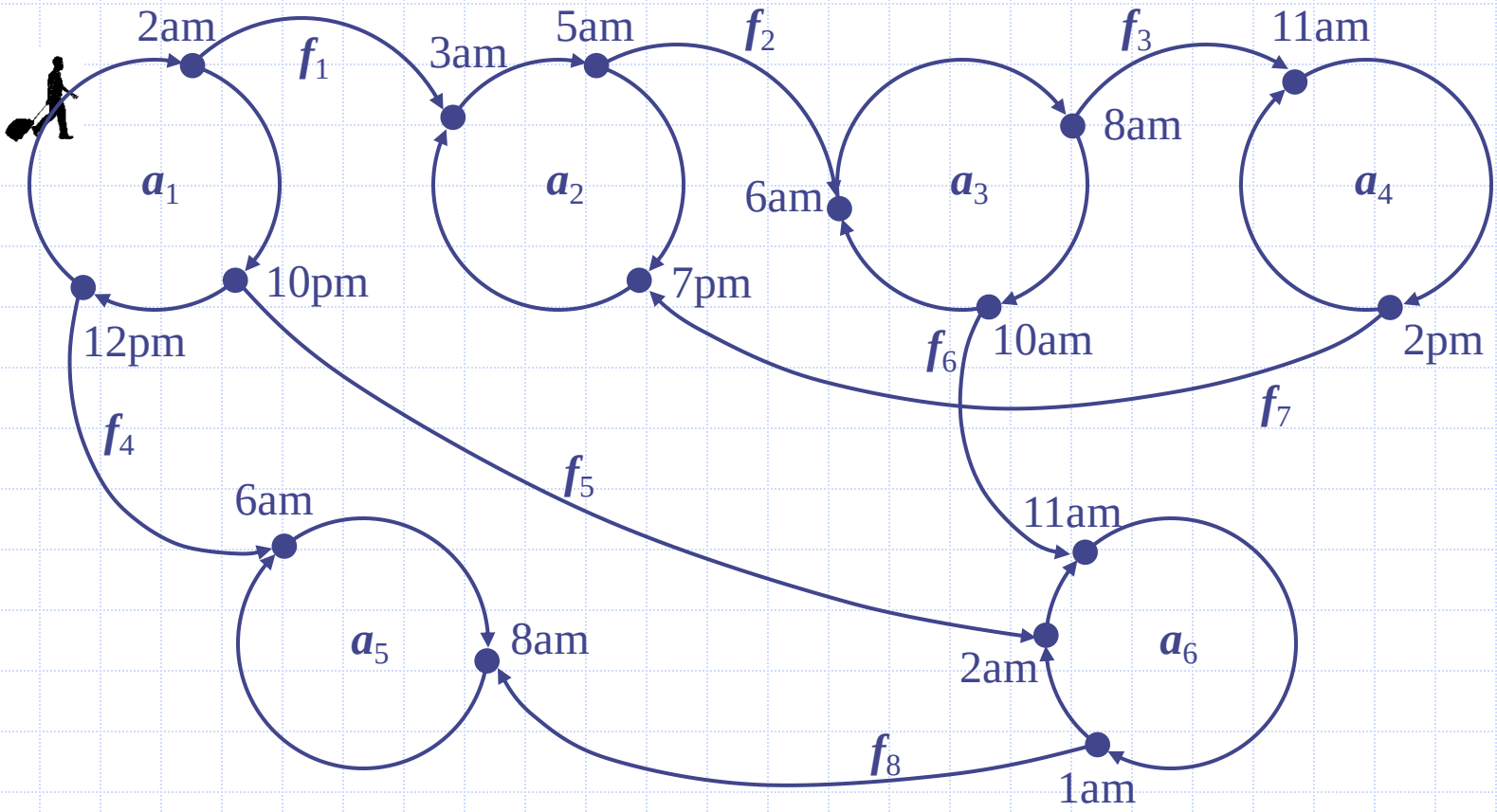
해결: 문제해결 개요

- 공항 $a \in A$ 에서 출발하여 공항 $b \in A$ 에 도착하는 최소 여행시간 경로를 찾는 항공편 스케줄링 문제를 **최단경로 문제**로 전환
- 즉, 최단경로 문제의 한 경우로 문제를 재구성하고 이를 해결함으로써 항공편 스케줄링 문제에 대한 해를 구한다

해결: 최단경로 문제로 재구성

- 주어진 공항 집합 A와 항공편 집합 F에 대해 다음과 같이 **가중 방향그래프** G를 구축
  - 각 공항 $a \in A$ 의 24시간을 표현하는 $circle_i$를 그린다
  - 각 항공편 $f_i \in F$ 의 출발공항 a_o, 도착공항 a_d, 출발시각 t_d, 도착시각 t_a를 찾는다
  - $circle_o$의 시간 t_d 위치에 정점 v_1을 그려 넣고, $circle_d$의 시간 $t_a + c(a_d)$ 위치에 정점 v_2를 그려 넣는다
  - v_1에서 v_2로 향하며 무게 $t_a + c(a_d) - t_d$를 가지는 방향간선을 그려 넣는다
    - **주의:** 자정을 지나가는 항공편도 정확한 무게를 계산
  - $circle_i$에 놓인 간선들의 방향은 모두 **시계방향**이어야 한다.

해결: 완성된 가중 방향그래프



해결: 최단경로 문제해결

- 항공편 스케줄링 문제해결: 그래프 G에서 $circle_a$의 시각 t 혹은 t 이후를 나타내는 **첫 정점**으로부터 $circle_b$의 **아무 정점**까지의 **최단경로**만 찾으면 된다
  - a는 최초 출발공항, b는 목표공항
  - **연결항공편**: 출발지로부터 도착지까지의 최단경로로부터 회수
- **해결:** (양의 무게를 가진 간선으로만 이루어진 그래프이므로) Dijkstra 알고리즘을 확장하여 적용
  - **방향그래프**에 적용하도록 확장: 간선완화 과정에서 가장 최근에 배낭에 들어온 정점의 **진출 부착간선**들만 고려 (**참고:** 메쏘드 outIncidentEdges)
  - **최단경로**를 **회수**하도록 확장: 방문한 정점들에 대해 완화된 간선들의 부모–자식 관계를 포함

해결: 알고리즘 성능

- **그래프 구축: $O(n + m)$** 시간
- **최단경로 찾기:** Dijkstra 알고리즘의 실행시간과 동일
  - 우선순위 큐에 **힙**을 사용하면 총 수행시간: $O((n + m)\log n)$
  - 일반적으로 항공스케줄링 문제는 단순그래프로 구축되므로 $n = O(m)$
  - 따라서 **실행시간: $O(m \log n)$**

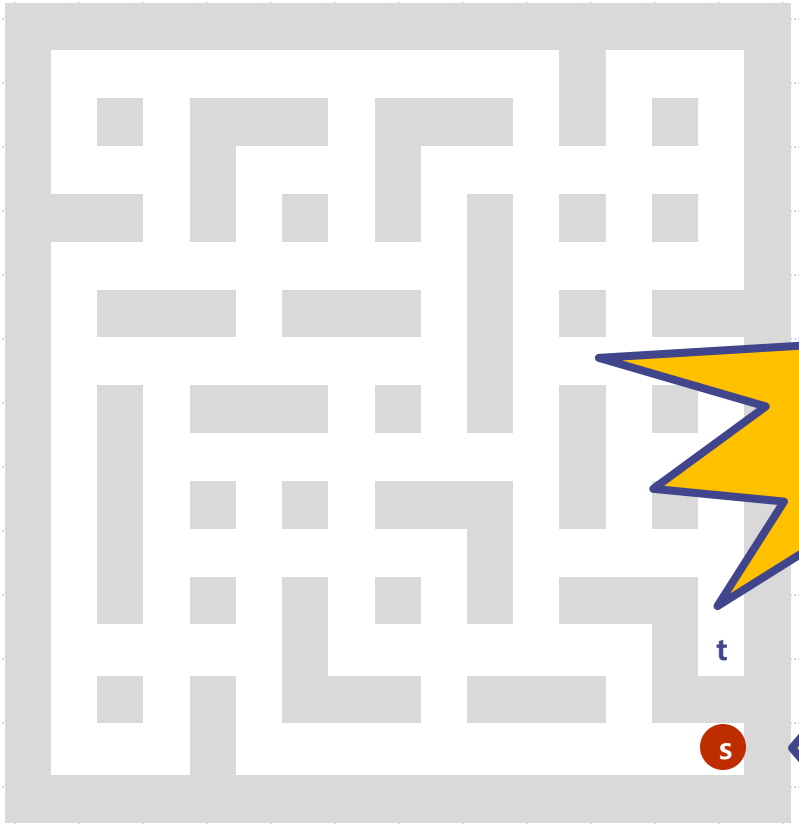
Alg *flightScheduling*(G, a, b, t)
1. $v \leftarrow$ *first vertex on* $\mathbf{circle}_a$ *representing time* t *or after* t
2. **for each** $u \in G.\mathbf{vertices}()$
   $d(u) \leftarrow \infty$
   $p(v) \leftarrow \varnothing$
3. $d(v) \leftarrow 0$
4. $Q \leftarrow$ *a priority queue containing all the vertices of* G *using* d *labels as keys*
5. **while** $(!Q.\mathbf{isEmpty}())$
   $u \leftarrow Q.\mathbf{removeMin}()$
   for each $e \in G.\mathbf{outIncidentEdges}(u)$
   $z \leftarrow G.\mathbf{opposite}(u, e)$
   if $(z \in Q.\mathbf{elements}())$
   if $(d(u) + w(u, z) < d(z))$
   $d(z) \leftarrow d(u) + w(u, z)$
   $p(z) \leftarrow e$
   $Q.\mathbf{replaceKey}(z, d(z))$
6. $w \leftarrow$ *vertex on* $\mathbf{circle}_b$ *with minimum* d *label*
7. **return** *reversed path from* w *to* v

응용문제: 좌회전을 못하는 차

- **배경:** 스포츠카를 훔치려는 온달의 계획
- **제약**
  - 좌회전 불가능(따라서 유턴도 불가능)
  - 우회전을 최소화할 필요성(경보음 때문)
- **문제:** 다음을 수행할 효율적인 메쏘드
  - 출발지 s에서 목적지 t까지 **우회전**을 최소화한 경로 찾기
  - 만약 두 개 이상의 경로가 우회전 수가 같다면 **총주행거리**가 짧은 경로 찾기
- **도움:** 디지털 도로지도
  - 전체 도시가 $m \times n$ 격자형의 셀로 표시됨
  - 각 셀은 비어 있거나(운행 가능), 막혀 있거나(운행 불가) 둘 중 하나

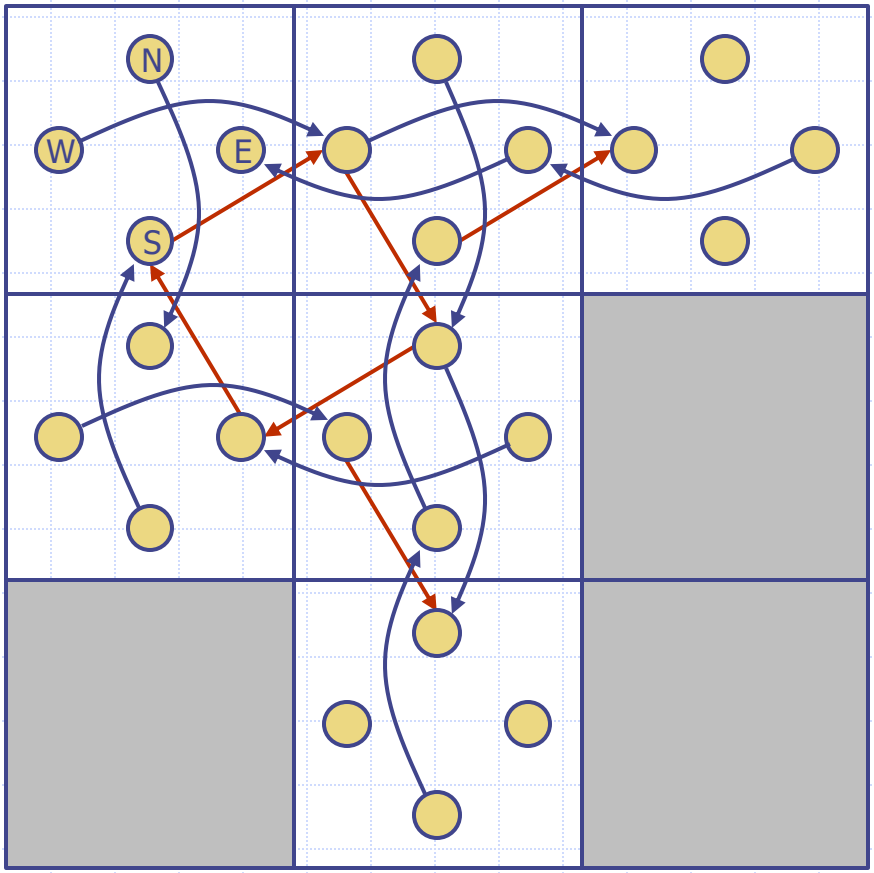
응용문제: 좌회전을 못하는 차 (conti.)

- 도로지도 예: **Sin City**



해결: 최단경로 문제로 재구성

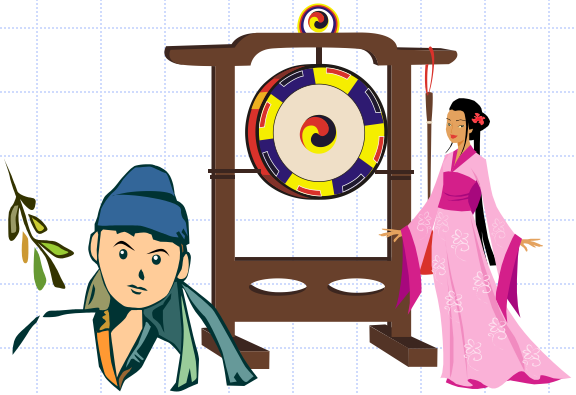
- 도로지도를 **가중 방향그래프**로 전환
- **정점**
  - mn개의 셀 각각에 대해 E, W, S, N, 4개의 **방위 정점**을 생성
- **간선**
  - **직진:** 셀의 o 정점에서 인접 셀의 o 정점으로 진행: **무게** = 1
  - **우회전:** 어떤 셀의 방위 o_1에서 o_2로 진행($o_1 \neq o_2$): **무게** = $4mn + 1$
  - **좌회전, U-턴**: 없음



해결: 최단경로 문제해결

- Dijkstra 알고리즘
  - 모든 간선의 무게가 **양수**
  - 최소의 우회전 경로, 그런 경로가 여럿이면 그 중 총주행거리가 최소인 경로를 구함
- 성능
  - **그래프 구축:** $O(mn)$ 시간
  - **최단경로 찾기:** 우선순위 큐에 **힙**을 사용하면 $O(mn \log mn)$ 시간

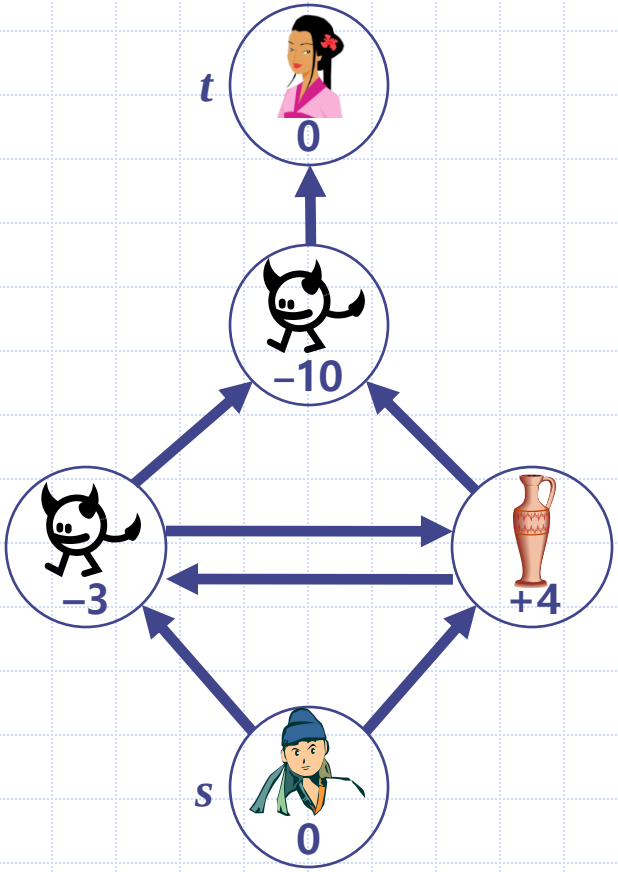
응용문제: 괴물성에 갇힌 낙랑



- **배경**
  - 호동이 **괴물성**에 갇힌 낙랑을 구출
  - 괴물성의 구조: 방과 복도로 구성된 미로
- **미로:** 방향그래프 $G = (V, E)$
  - **정점: 방**, 각 정점 v마다 라벨 f가 정의되어 있다
    - $f(v) = 0$ 이면 v가 비어 있다
    - $f(v) > 0$ 이면 v에 **생명수**가 있다 – v에 들어가면 **에너지** L이 $f(v)$ 만큼 올라간다.
    - $f(v) < 0$ 이면 v에 **괴물**이 있다 – v에 들어가면 **에너지** L이 $|f(v)|$ 만큼 떨어진다
  - **간선:** 방과 방을 연결하는 **일방통로**
- **제약:** 에너지 레벨 L을 0 이상으로 유지 – $L \leq 0$ 이 되는 순간 호동이 죽는다

응용문제: 괴물성에 갇힌 낙랑

- **목표:** 초기 에너지 L을 가지고 미로의 입구 방 $s \in V$ 에서 출발하여 여러 개의 방을 뒤져 낙랑이 있는 방 $t \in V$을 찾기 $(s \neq t)$
- **전제**
  - s로부터 다른 모든 정점 $v \in V$ 에 이르는 경로가 존재
  - 모든 정점 $v \in V$ 로부터 t에 이르는 경로가 존재
  - 호동은 에너지 $L = L_0 > 0$ 인 상태로 입구 s에서 출발
  - 문제 단순화를 위해 입구 방은 비어 있다고 전제 – 즉, $f(s) = 0$



응용문제: 괴물성에 갇힌 낙랑

- 당신은 미로에 괴물과 생명수를 **무작위**로 배치하는 프로그램을 완성했다
- 프로그램에 의해 생성된 미로 가운데 어떤 것은 충분한 에너지 $L_0 > 0$ 로 미로에서 출발하지 않으면 s에서 t까지 안전한 여행이 불가능한 경우도 있다
- s에서 t까지의 경로는 호동이 살아서 통과한다면, 즉 중간에 에너지가 0 이하로 떨어지는 일이 없다면 **안전**하다고 말한다
- 호동이 에너지 $L_0 = r$ 로 시작할 때 안전한 경로가 존재한다면 그 미로를 **레벨-r**이라고 정의하자

응용문제: 괴물성에 갇힌 낙랑

- 문제

A. 현재처럼 **정점**이 아니라 **간선**에 무게가 실린, 그렇지만 동일한 문제로 재구성하라

B. 에너지의 증가를 가져오는 **싸이클이 없다**는 전제 하에, 주어진 r에 대해 어떤 미로가 레벨-r인지 검사할 방법을 설명하라

C. 이번엔 반대로, 에너지의 증가를 가져오는 **싸이클이 있을 수 있다**는 전제 하에, 주어진 r에 대해 어떤 미로가 레벨-r인지 검사할 방법을 설명하라

D. 주어진 미로가 레벨-r이 되는 **최소**의 r을 찾아내거나 그런 r이 없으면 없다고 보고하는 효율적인 메쏘드를 설명하라

해결 (개요)

- **문제해결 개요:** 그래프에 대한 통찰력과 Bellman-Ford 최단경로 알고리즘에 대한 이해를 바탕으로 해결 가능

해결 A

- **간선**에 무게가 실린 그래프로 변환
  - 입구 정점에 무게가 있다면, 무게 0의 새로운 입구 정점을 만들고 이 정점에서 원래 입구 정점으로 향하는 간선 추가
  - 다음과 같은 절차로 정점들의 무게를 간선으로 이동

    절차: 정점 v가 무게 $f(v)$를 가진다면, 모든 간선 $(u, v) \in E$ 에 대해 $w(u, v) = f(v)$ 를 저장
- 이제 간선에 무게가 가중되도록 변경된 그래프, 즉 가중그래프에 대해 모든 **부분경로**(subpath)의 무게가 양수가 되는 경로를 찾는, 동일한 문제로 재구성되었다

해결 B

- **레벨-r인지 검사할 방법:** 에너지 증가 **싸이클이 없는** 경우, 다음과 같이 Bellman-Ford 알고리즘의 수정 버전을 사용
- 주어진 r에 대해 모든 정점 u에 대해 호동이 u에 도달하면 얻을 수 있는 최대 (양의) 에너지 $e(u)$를 구한다
  - 만약 $e(u)$가 양수면 그래프는 레벨-r임
  - 각 정점 $u \in V$ 에 대해 $e(u)$의 하한 $d(u)$를 유지
  - 모든 $d(u)$ 값을 입구에 대해서는 r로, 다른 모든 정점들에 대해서는 $-\infty$로 초기화

해결 B (conti.)

- Bellman-Ford 알고리즘을 수행하면서 간선을 완화하는 동안 (양의 무게를 가진 **싸이클이 없다면**) $d(u)$는 $e(u)$에 수렴할 때까지 증가
  - **음**의 에너지로 어떤 정점에 도달할 바엔 차라리 그 곳에 가지 않는 편이 낫다
  - 따라서 수정 결과가 **양수**일 때만 $d(u)$를 수정
  - 그렇지 않으면 $d(u)$를 $-\infty$인 채로 놔둔다
  - 이를 위해 **간선완화** 부분을 다음과 같이 수정

```
{relax edge (u, v)}
if ((u, v) ∈ E)
    if ((d(v) > d(u) + w(u, v)) & (d(u) + w(u, v) > 0))
        d(v) ← d(u) + w(u, v)
        p(v) ← u                                {parent vertex}
```

- 모든 간선이 n번 완화된 후 (양의 무게를 가진 싸이클이 없다면) 모든 $d(u)$는 해당 $e(u)$에 수렴한다(즉, 정점 u에 도달하면 얻을 수 있는 최대 에너지) – 이 시점에 $e(t)$가 양수면 호동이 이곳에 양의 점수로 도달할 수 있는 것이므로 그래프는 레벨-r이 된다.

해결 C

- **레벨-r인지 검사할 방법:** 에너지 증가 **싸이클이 있는** 경우, 모든 간선을 $n-1$ 번 완화한 후에도 $d(t)$가 양수가 아니면, (Bellman-Ford 알고리즘에서 **싸이클**을 찾을 때처럼) 모든 간선을 **한 번 더 완화**한다
- 이때 어느 정점의 $d(u)$가 변화하면
  - s에서 에너지 r로 출발하여 도달 가능한 양의 무게를 가진 **싸이클**을 찾은 것이다
  - 따라서 호동은 t에 도달하기 위해 필요한 에너지를 모으기 위해 충분한 횟수만큼 이 싸이클을 돌면 된다
  - 그러므로 그래프는 레벨-r이 된다
- 만약 도달 가능한 양의 무게를 가진 **싸이클**을 찾지 못하고 $d(t) = -\infty$ 라면
  - 그래프는 레벨-r이 아니다
- 이 알고리즘의 정확성은 Bellman-Ford 알고리즘의 정확성에 기초하며 실행시간은 $O(mn)$이다

해결 D

- **미로가 레벨-r이 되는 최소의 r 찾기:** 앞서 수정된 간선완화 부분을 이용하여 최소 r을 찾을 수 있다
- 먼저 그래프가 레벨-1인지 검사하여 맞다면 1을 답으로 반환
- 그렇지 않으면 그래프가 레벨-2인지 검사하고, 다시 그래프가 레벨-4인지, 다시 그래프가 레벨-8인지, ... 이런 식으로 계속 검사 – 즉, i번째 단계에서 그래프가 레벨-2^{i-1}인지 검사
  - 결국엔 그래프가 레벨-2^{k-1}이 아니지만 레벨-2^k인 k를 찾을 수 있다
  - r의 최소값은 이 두 값 사이에 있다
  - r 값을 찾기 위해 $r = 2^{k-1}$과 $r = 2^k$ 사이 구간에서 **이진탐색** 수행
  - 반복 횟수 $k = \lfloor \log r \rfloor$ 이므로 $k + \mathbf{O}(\log r) = \mathbf{O}(\log r)$
  - 따라서 Bellman-Ford를 $\mathbf{O}(\log r)$ 번 수행해야 하므로 총 실행시간은 $\mathbf{O}(mn \log r)$