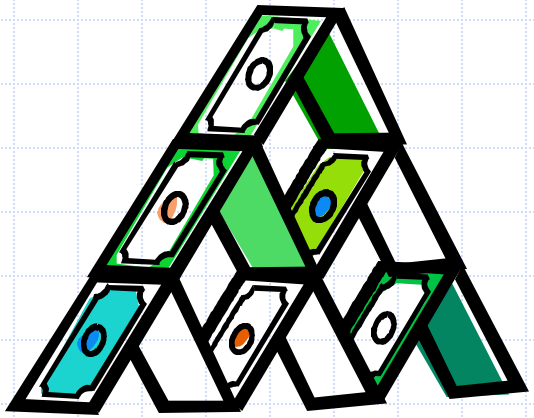
# 힙과 힙 정렬

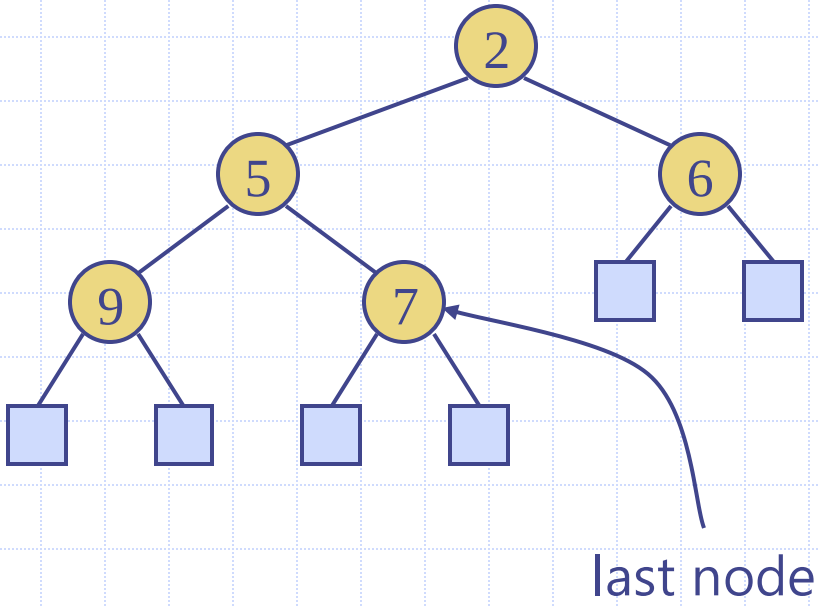


# Outline

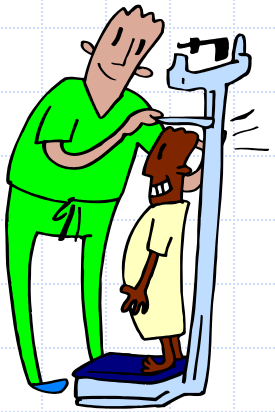
- 6.1 힙
- 6.2 힙을 이용한 우선순위 큐 구현
- 6.3 힙 구현과 성능
- 6.4 힙 정렬
- 6.5 제자리 힙 정렬
- 6.6 상향식 힙생성
- 6.7 응용문제

# 힙

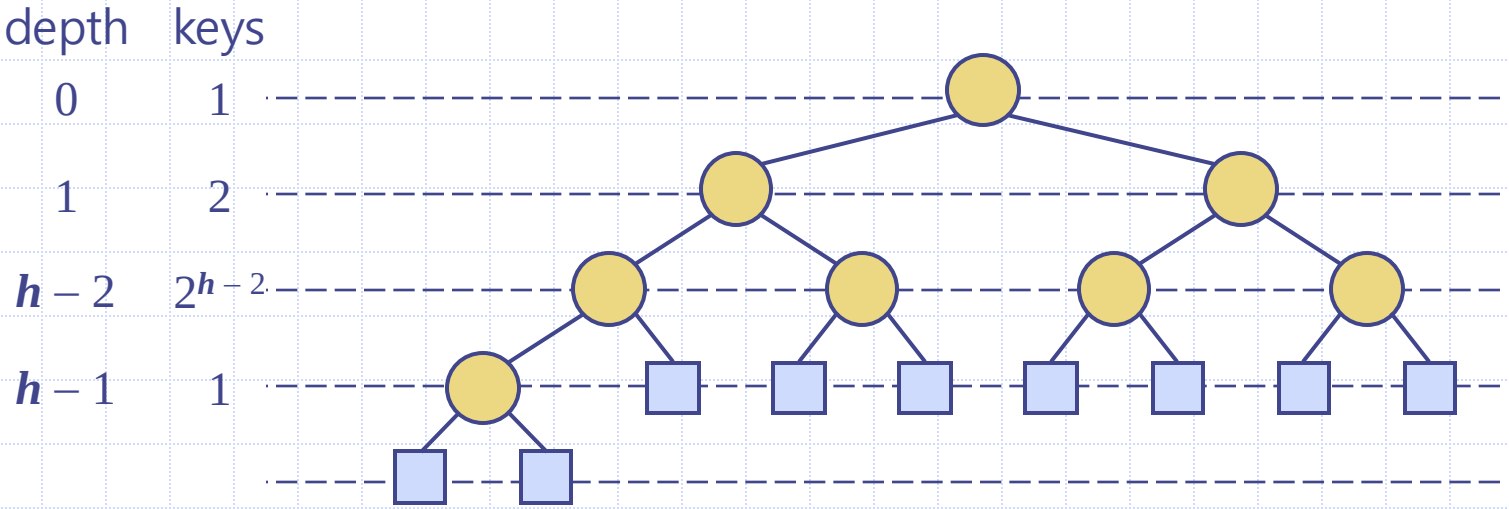
- **힙**(heap): 내부노드에 키를 저장하며 다음 두 가지 속성을 만족하는 이진트리
  - **힙순서**(heap-order): 루트를 제외한 모든 내부노드 $v$에 대해, $key(v) \geq key(parent(v))$
  - **완전이진트리**(complete binary tree): 힙의 높이를 $h$라 하면
    - $i = 0, \ldots, h-1$에 대해, 깊이 $i$인 노드가 $2^i$개 존재
    - 깊이 $h-1$에서, 내부노드들은 외부노드들의 왼쪽에 존재
- 힙의 **마지막 노드**(last node): 깊이 $h-1$의 가장 오른쪽 내부노드



# 힙의 높이

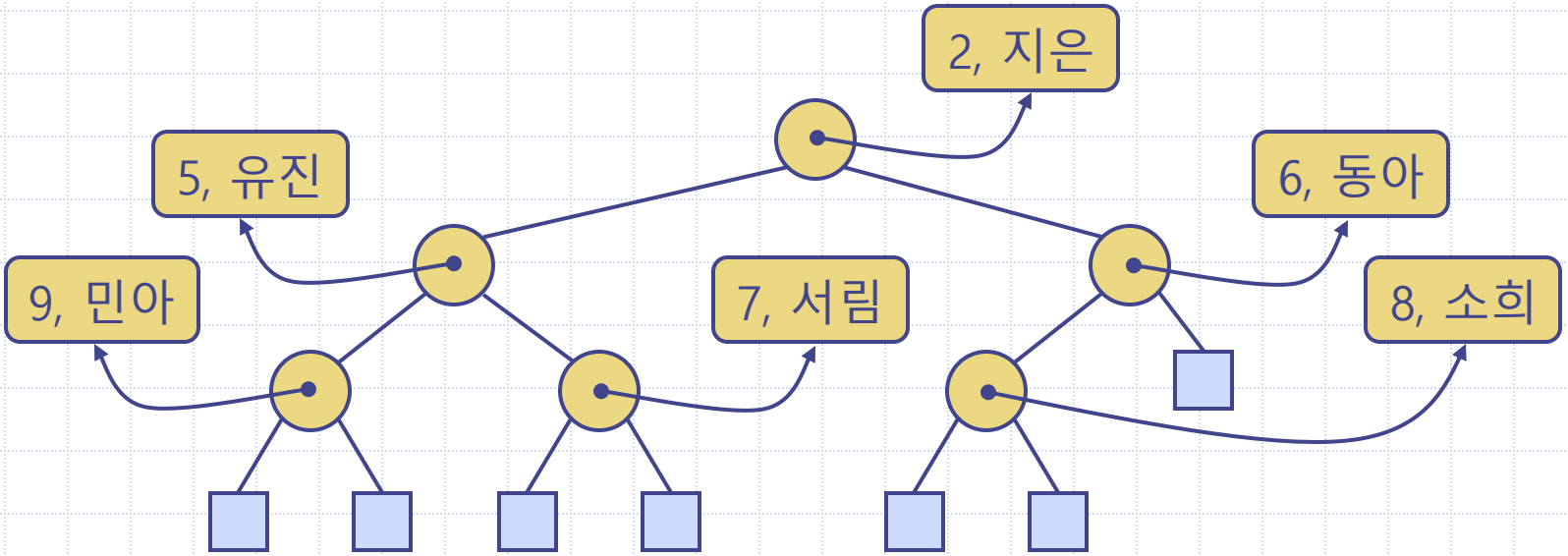


- **정리:** $n$개의 키를 저장한 힙의 높이는 $O(\log n)$이다
  **증명:** (**완전이진트리**의 성질을 이용)
  - $n$개의 키를 저장한 힙의 높이를 $h$라 하자
  - 깊이 $i = 0, \ldots, h-2$ 에 $2^i$개의 키, 그리고 깊이 $h-1$ 에 적어도 한 개의 키가 존재하므로, $n \geq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{h-2} + 1$
  - 따라서, $n \geq 2^{h-1}$, 즉 $h \leq \log n + 1$



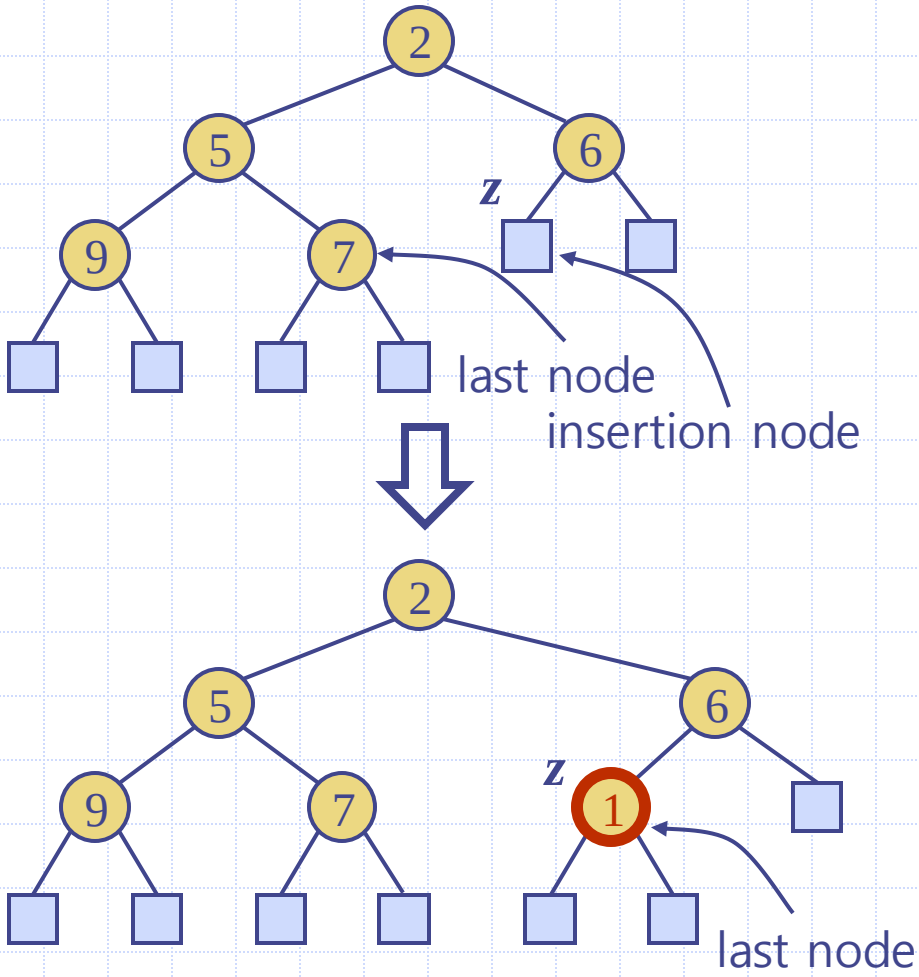
# 힙과 우선순위 큐

- 힙을 사용하여 **우선순위 큐**(priority queue) 구현 가능
- **전제: 적정이진트리**로 구현
- **마지막 노드**의 위치를 관리
- **그림 표기:** 내부노드 내에 간단히 키만 표시



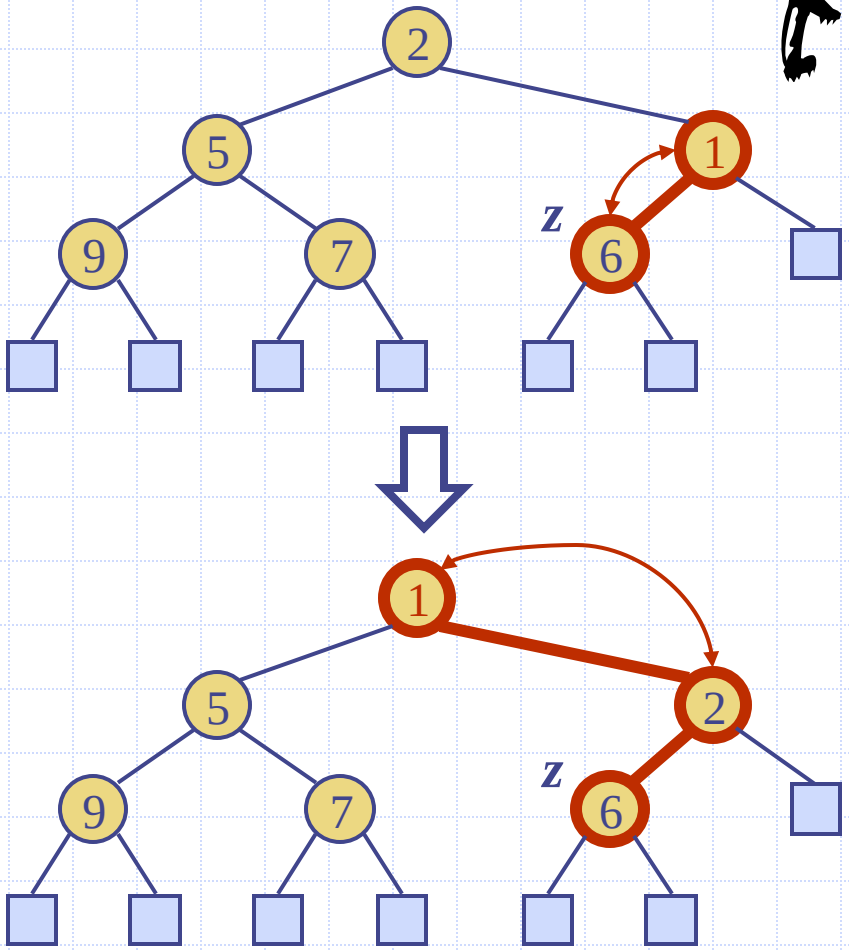
# 힙에 삽입

- 우선순위 큐 ADT의 메쏘드 insertItem은 힙에 키 $k$를 **삽입**하는 것에 해당
- 삽입 알고리즘의 세 단계
  1. 삽입 노드 $z$, 즉 새로운 마지막 노드를 찾는다
  2. $k$를 $z$에 저장한 후 expandExternal(z) 작업을 사용하여 $z$을 내부노드로 확장
  3. **힙순서 속성**을 복구



# Upheap

- 새로운 키 $k$가 삽입된 후, **힙순서 속성**이 위배될 수 있다
- 알고리즘 upheap은 삽입노드로부터 상향 경로를 따라가며 키 $k$를 교환함으로써 힙순서 속성을 복구
- upheap은 키 $k$가 루트에, 또는 부모의 키가 $k$보다 작거나 같은 노드에 도달하면 정지
- 힙의 높이는 $O(\log n)$이므로 upheap은 $O(\log n)$ 시간에 수행



# 힙 삽입 알고리즘

**Alg** ***insertItem*(*k*)**
  **input** key ***k***, node ***last***
  **output** none

1. ***advanceLast*()**
2. ***z*** ← ***last***
3. *Set node* ***z*** *to* ***k***
4. ***expandExternal*(*z*)**
5. ***upHeap*(*z*)**
6. **return**

**Alg** ***upHeap*(*v*)**
  **input** node ***v***
  **output** none

1. **if (*isRoot*(*v*))**
   **return**
2. **if (*key*(*v*) ≥ *key*(*parent*(*v*)))**
   **return**
3. ***swapElements*(*v*, *parent*(*v*))**
4. ***upHeap*(*parent*(*v*))**

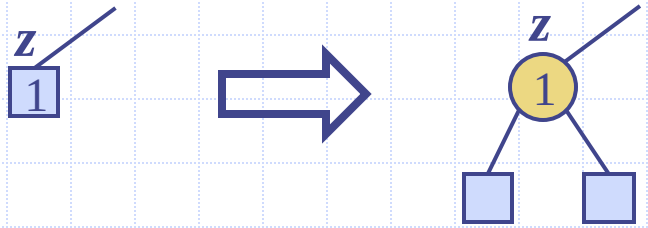
- 알고리즘 insertItem과 upHeap의 작업 대상 힙은 **일반**(generic) 힙

# 삽입 (conti.)

**Alg** ***expandExternal*(*z*)** {linked}
**input** external node ***z***
**output** none

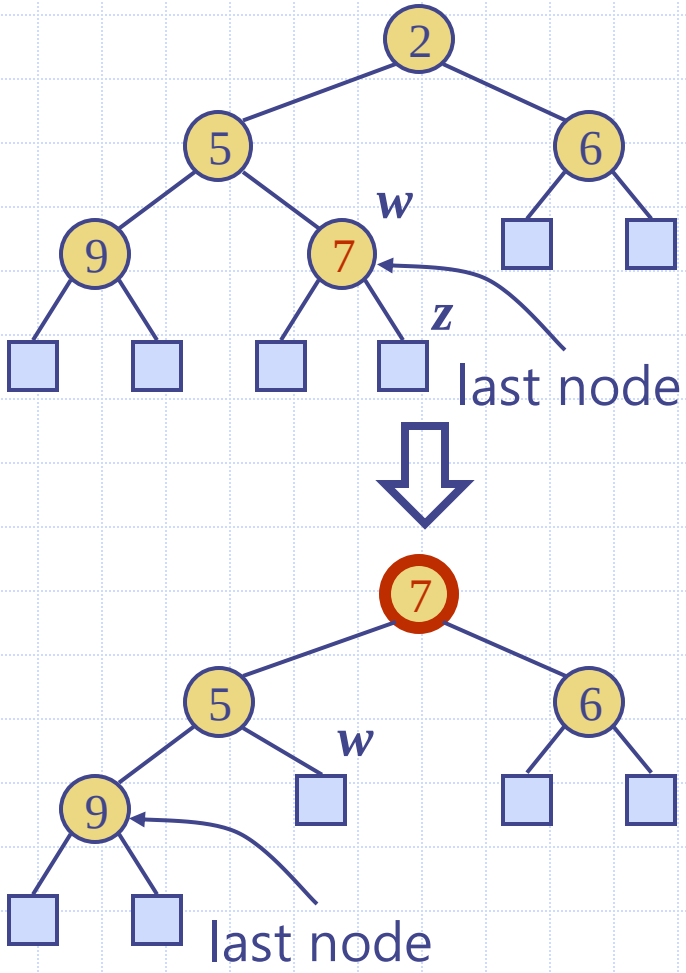
1. ***l*** ← ***getnode***()
2. ***r*** ← ***getnode***()
3. ***l*.left** ← ∅
4. ***l*.right** ← ∅
5. ***l*.parent** ← ***z***
6. ***r*.left** ← ∅
7. ***r*.right** ← ∅
8. ***r*.parent** ← ***z***
9. ***z*.left** ← ***l***
10. ***z*.right** ← ***r***
11. **return**

- **예:** expandExternal(z)



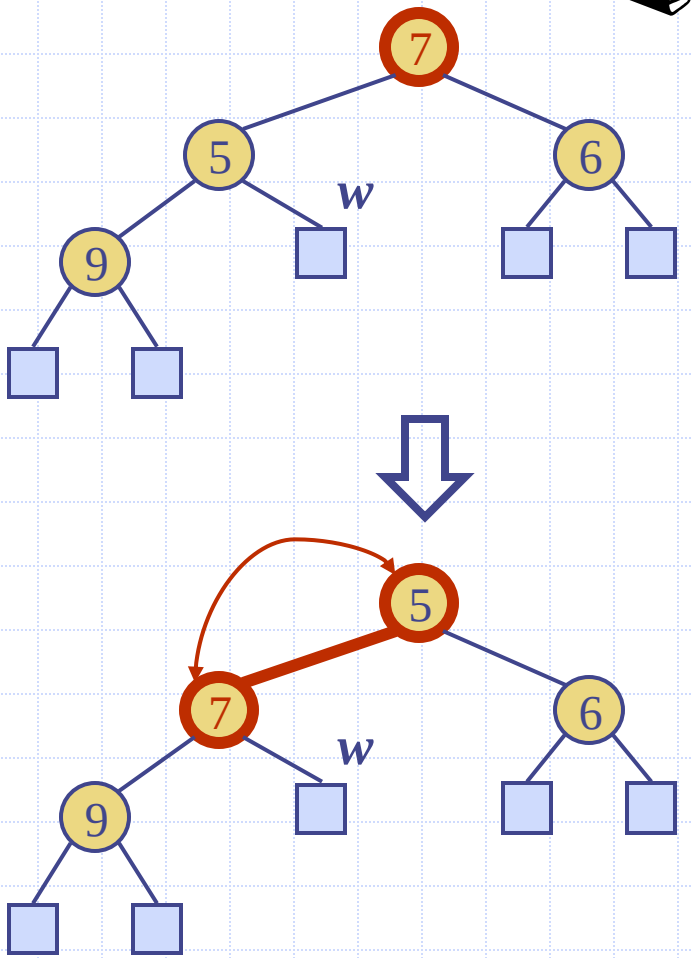
# 힙으로부터 삭제

- 우선순위 큐 ADT의 메쏘드 removeMin은 힙으로부터 루트 키를 **삭제**하는 것에 해당
- 삭제 알고리즘의 세 단계
  1. 루트 키를 마지막 노드 $w$의 키로 대체
  2. reduceExternal(z) 작업을 사용하여 $w$와 그의 자식들을 외부노드로 축소
  3. **힙순서 속성**을 복구



# Downheap

- 루트 키를 마지막 노드의 키로 대체한 후, **힙순서 속성**이 위배될 수 있다
- 알고리즘 downheap은 루트로부터 하향 경로를 따라가며 키 $k$를 교환함으로써 힙순서 속성을 복구
- downheap은 키 $k$가 잎에, 또는 자식의 키가 $k$보다 크거나 같은 노드에 도달하면 정지
- 힙의 높이는 $\mathbf{O}(\log n)$이므로 downheap은 $\mathbf{O}(\log n)$ 시간에 수행



# 힙 삭제 알고리즘

**Alg** ***removeMin***()
  **input** node ***last***
  **output** key

1. $k \leftarrow key(root())$
2. $w \leftarrow last$
3. *Set root to* $key(w)$
4. ***retreatLast***()
5. $z \leftarrow rightChild(w)$
6. ***reduceExternal***$(z)$
7. ***downHeap***$(root())$
8. **return** $k$

**Alg** ***downHeap***$(v)$
  **input** node $v$ whose left and right subtrees are heaps
  **output** a heap with root $v$

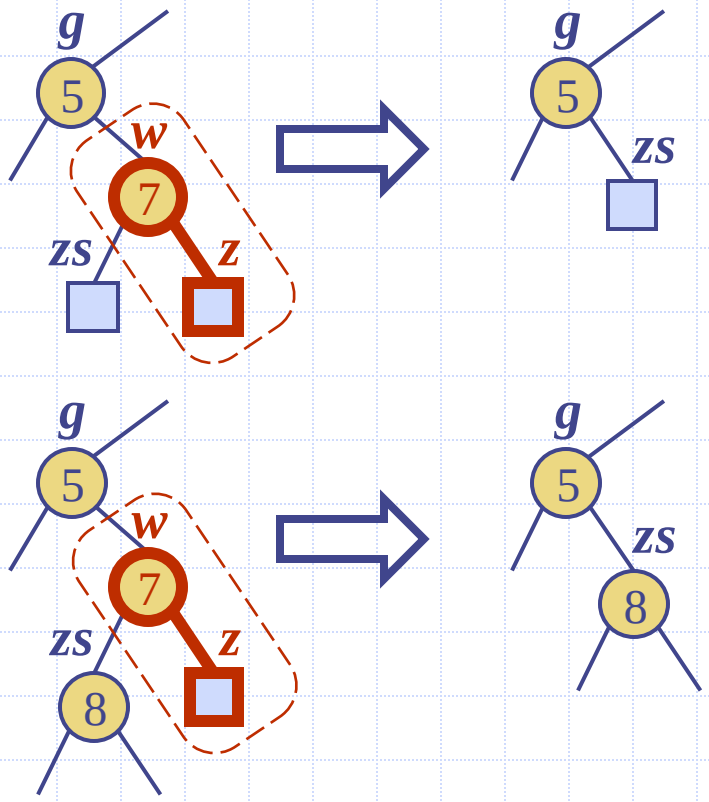
1. **if** ($isExternal(leftChild(v))$ & $isExternal(rightChild(v))$)
     **return**
2. $smaller \leftarrow leftChild(v)$  {internal node}
3. **if** ($isInternal(rightChild(v))$)
     **if** ($key(rightChild(v)) < key(smaller)$)
       $smaller \leftarrow rightChild(v)$
4. **if** ($key(v) \leq key(smaller)$)
     **return**
5. ***swapElements***$(v, smaller)$
6. ***downHeap***$(smaller)$

# 삭제 (conti.)

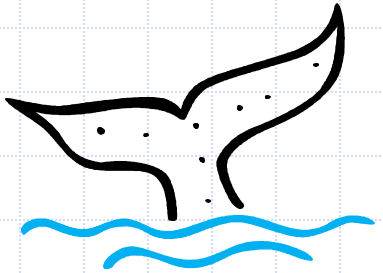
```
Alg reduceExternal(z)  {linked}
    input external node z
    output the node replacing the parent
           node of the removed node z

1. w ← z.parent
2. zs ← sibling(z)
3. if (isRoot(w))
        root ← zs                {renew root}
        zs.parent ← ∅
   else
        g ← w.parent
        zs.parent ← g
        if (w = g.left)
            g.left ← zs
        else {w = g.right}
            g.right ← zs
4. putnode(z)                    {deallocate node z}
5. putnode(w)                    {deallocate node w}
6. return zs
```

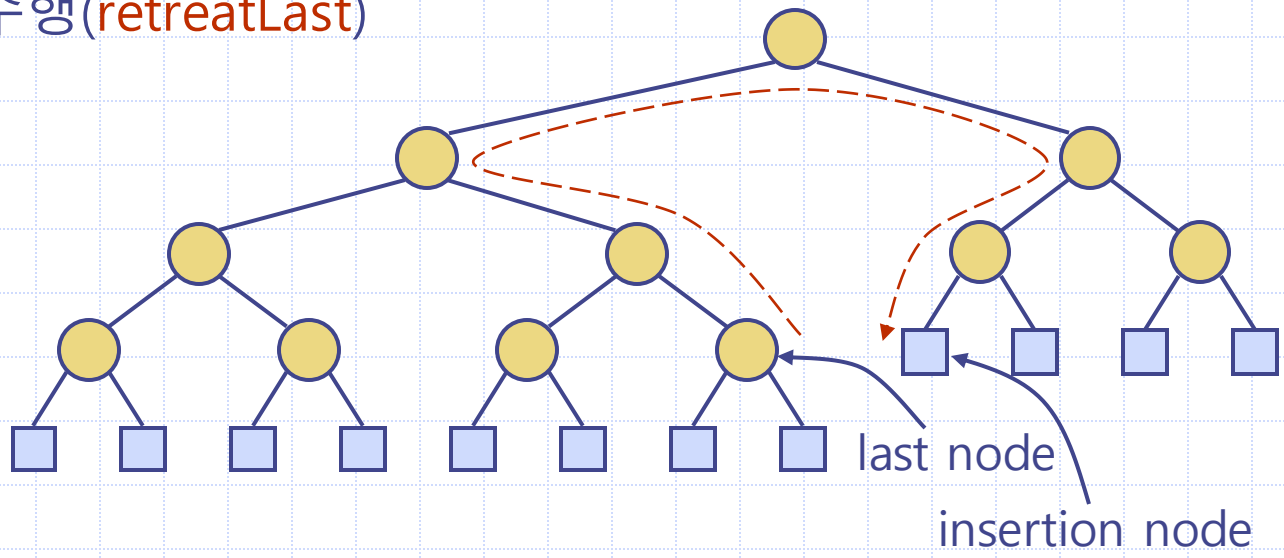
- 예: reduceExternal(z)



# 마지막 노드 갱신

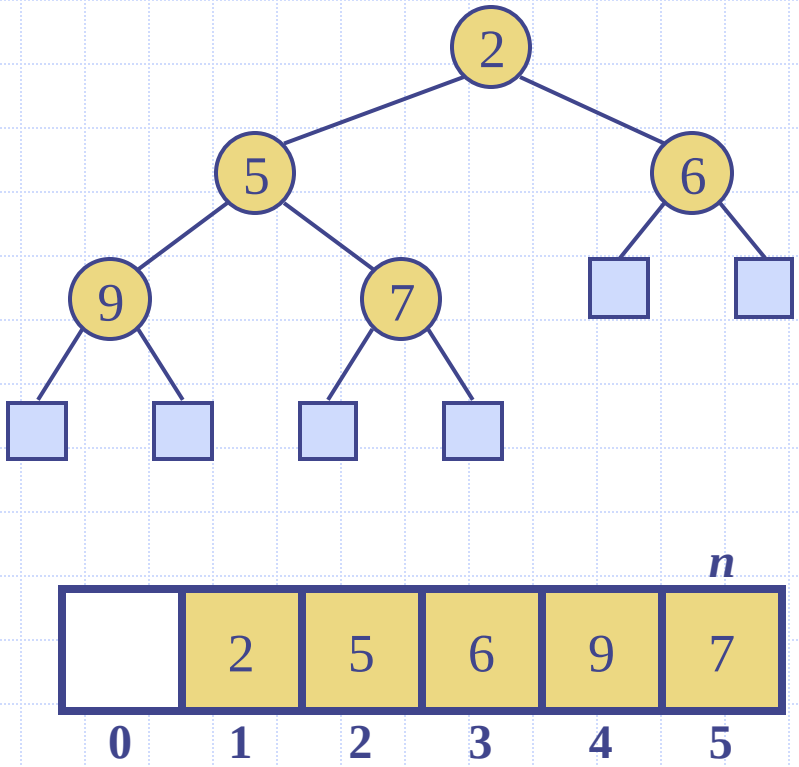


- $O(\log n)$개의 노드를 순회함으로써 **삽입** 노드를 찾을 수 있다(advanceLast)
  - 현재 노드가 오른쪽 자식인 동안, 부모 노드로 이동
  - 현재 노드가 왼쪽 자식이면, 형제 노드로 이동
  - 현재 노드가 내부노드인 동안, 왼쪽 자식으로 이동
- **삭제** 후 마지막 노드를 갱신하는 작업은 위와 반대 방향으로 수행(retreatLast)



# 배열에 기초한 힙 구현

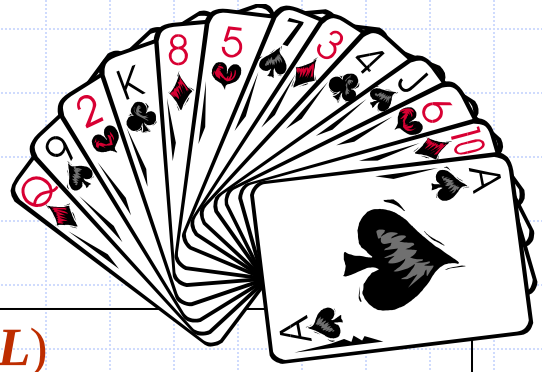
- $n$개의 키를 가진 힙을 크기 $n$의 **배열**을 사용하여 표현 가능
- 첨자 $i$에 존재하는 노드에 대해
  - **왼쪽 자식**은 첨자 $2i$에 존재
  - **오른쪽 자식**은 첨자 $2i+1$에 존재
  - **부모**는 첨자 $i/2$에 존재
- 노드 사이의 **링크**는 명시적으로 저장할 필요가 없다
- **외부노드**들은 표현할 필요 없다
- 첨자 $0$ 셀은 사용하지 않는다
- **마지막 노드**의 첨자: 항상 $n$
  - insertItem 작업은 첨자 $n+1$ 위치에 삽입하는 것에 해당
  - removeMin 작업은 첨자 $n$ 위치에서 삭제하는 것에 해당



# 성능 요약

| 힙 구현 | 작업 | | | | 공간 소요 |
|---|---|---|---|---|---|
| | size, isEmpty | insertItem, removeMin | minKey, minElement | advanceLast, retreatLast | |
| 연결 | $O(1)$ | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(\log n)$ | $O(n)$ |
| 순차 | $O(1)$ | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |

# 힙 정렬



- 힙을 사용하여 구현된 $n$-항목 **우선순위 큐**를 고려하면,
  - 공간 사용량은 $O(n)$
  - insertItem 메쏘드와 removeMin 메쏘드는 $O(\log n)$ 시간에 수행
  - size, isEmpty, minKey, minElement 메쏘드는 $O(1)$ 시간에 수행
- 힙에 기초한 우선순위 큐를 사용함으로써, $n$개의 원소로 이루어진 리스트를 $O(n \log n)$ 시간에 정렬할 수 있다
  - **선택 정렬**이나 **삽입 정렬**과 같은 2차 정렬 알고리즘보다 훨씬 빠르다

**Alg** ***heapSort(L)***
  **input** list $L$
  **output** sorted list $L$

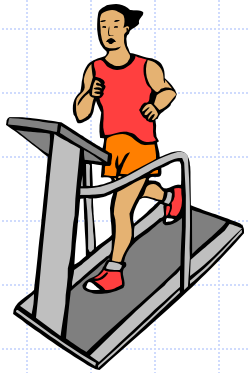
1. $H \leftarrow$ *empty heap*
2. **while** (!$L$.***isEmpty***()) {phase 1}
   $k \leftarrow L$.***removeFirst***()
   $H$.***insertItem***($k$)
3. **while** (!$H$.***isEmpty***()) {phase 2}
   $k \leftarrow H$.***removeMin***()
   $L$.***addLast***($k$)
4. **return**

- 이 알고리즘을 **힙 정렬**(heap sort) 알고리즘이라고 부른다

# 힙 정렬 개선

- Heap sort의 성능 향상을 위한 두 가지 개선점
  - **제자리 힙 정렬**은 heap sort의 공간 사용을 줄인다
  - **상향식 힙생성**은 heap sort의 속도를 높힌다

# 제자리 힙 정렬



- 이 방식은 정렬되어야 할 리스트가 **배열**로 주어진 경우에만 적용
- 힙을 저장하는데 리스트 $L$의 일부를 사용함으로써 외부 힙 사용을 피한다
- 지금까지 사용했던 **최소힙**(min-heap) 대신, 최대 원소가 맨위에 오게 되는 **최대힙**(max-heap)을 사용

# 제자리 힙 정렬 알고리즘

**Alg** ***inPlaceHeapSort***(***A***)
  **input** array ***A*** of ***n*** keys
  **output** sorted array ***A***

1. ***buildHeap***(***A***) {phase 1}
2. **for** ***i*** ← ***n*** **downto** 2 {phase 2}
    ***A***[1] ↔ ***A***[***i***]
    ***downHeap***(1, ***i*** – 1)
3. **return**

**Alg** ***buildHeap***(***A***)
  **input** array ***A*** of ***n*** keys
  **output** heap ***A*** of size ***n***

1. **for** ***i*** ← 1 **to** ***n***
    ***insertItem***(***A***[***i***])
2. **return**

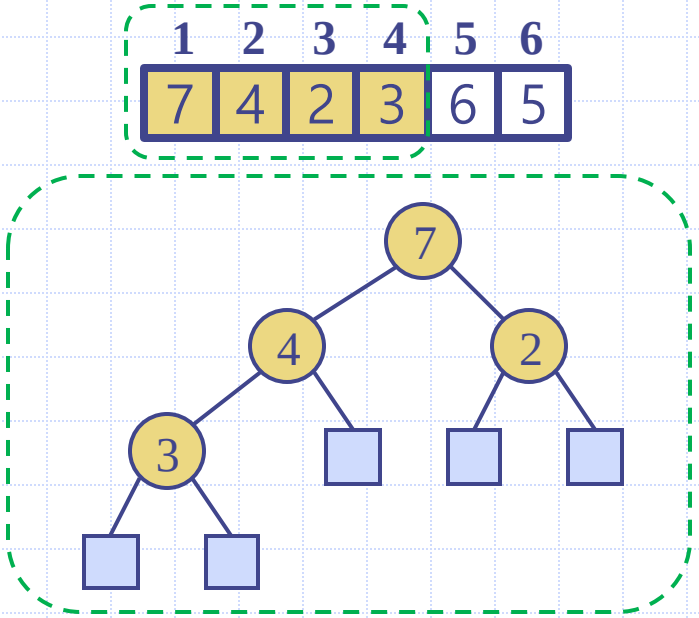
**Alg** ***downHeap***(***i***, ***last***)
  **input** index ***i*** of array ***A*** representing a *maxheap* of size ***last***
  **output** none

1. ***left*** ← 2***i***
2. ***right*** ← 2***i*** + 1
3. **if** (***left*** > ***last***) {external node}
    **return**
4. ***greater*** ← ***left***
5. **if** (***right*** ≤ ***last***)
    **if** (***key***(***A***[***right***]) > ***key***(***A***[***greater***]))
      ***greater*** ← ***right***
6. **if** (***key***(***A***[***i***]) ≥ ***key***(***A***[***greater***]))
    **return**
7. ***A***[***i***] ↔ ***A***[***greater***]
8. ***downHeap***(***greater***, ***last***)

# 제자리 힙 정렬 (conti.)

- 알고리즘 수행의 어떤 시점에서든,
  - $L$의 첨자 1부터 $i$까지의 왼쪽 부분은 힙의 원소들을 저장하는데 사용
  - 그리고 첨자 $i+1$부터 $n$까지의 오른쪽 부분은 리스트의 원소들을 저장하는데 사용
- 그러므로, $L$의 (첨자 $1, \ldots,$ $i$에 있는) 첫 $i$개의 원소들은 힙의 **배열** 표현 – 즉, 첨자 $k$의 원소는 첨자 $2k$ 및 $2k+1$의 자식들보다 크거나 같다

- **예:** $i = 4$

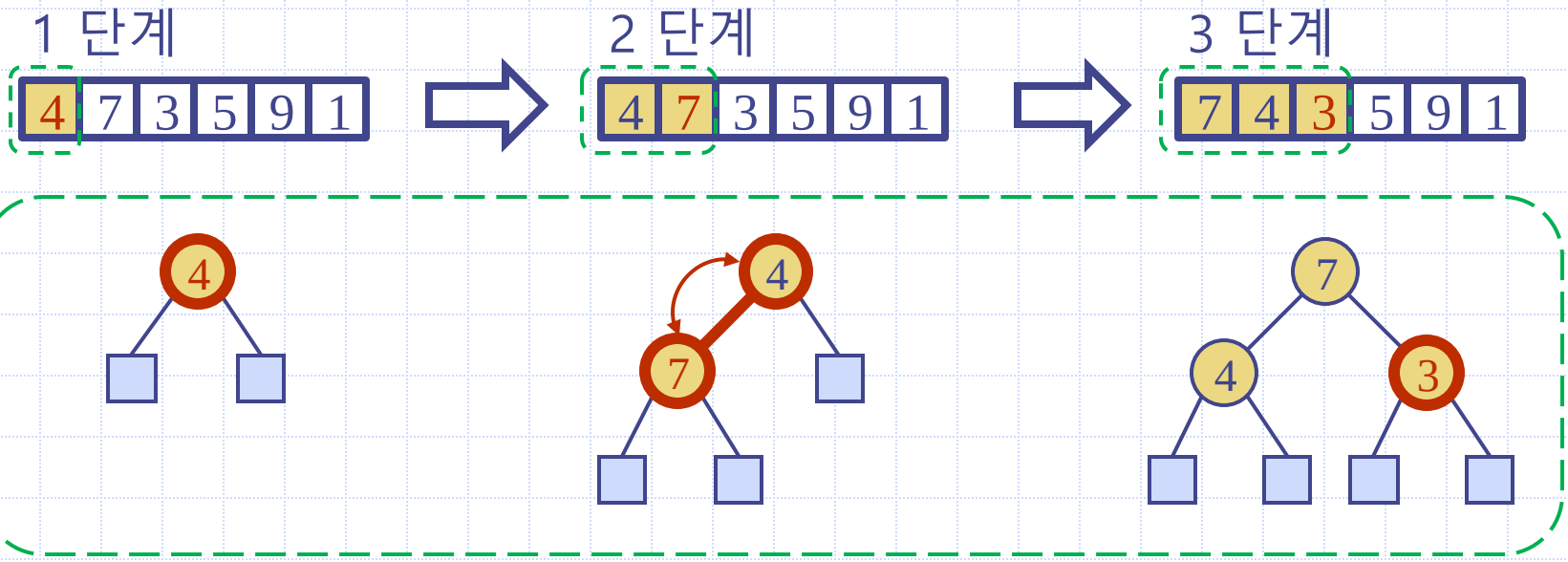


# 제자리 힙 정렬 (conti.)

- 1기
  - 비어 있는 힙으로부터 출발하여 힙과 리스트의 경계를 **왼쪽에서 오른쪽으로** 한 번에 한 칸씩 이동
  - 단계 $i(i = 1, \ldots, n)$에서, 첨자 $i$에 있는 원소를 힙에 추가함으로써 힙을 확장
- 2기
  - 비어 있는 리스트로부터 출발하여 힙과 리스트의 경계를 **오른쪽에서 왼쪽으로** 한 번에 한 칸씩 이동
  - 단계 $i(i = n, \ldots, 2)$에서, 힙의 최대 원소를 삭제하여 리스트의 첨자 $i$에 저장함으로써 리스트를 확장

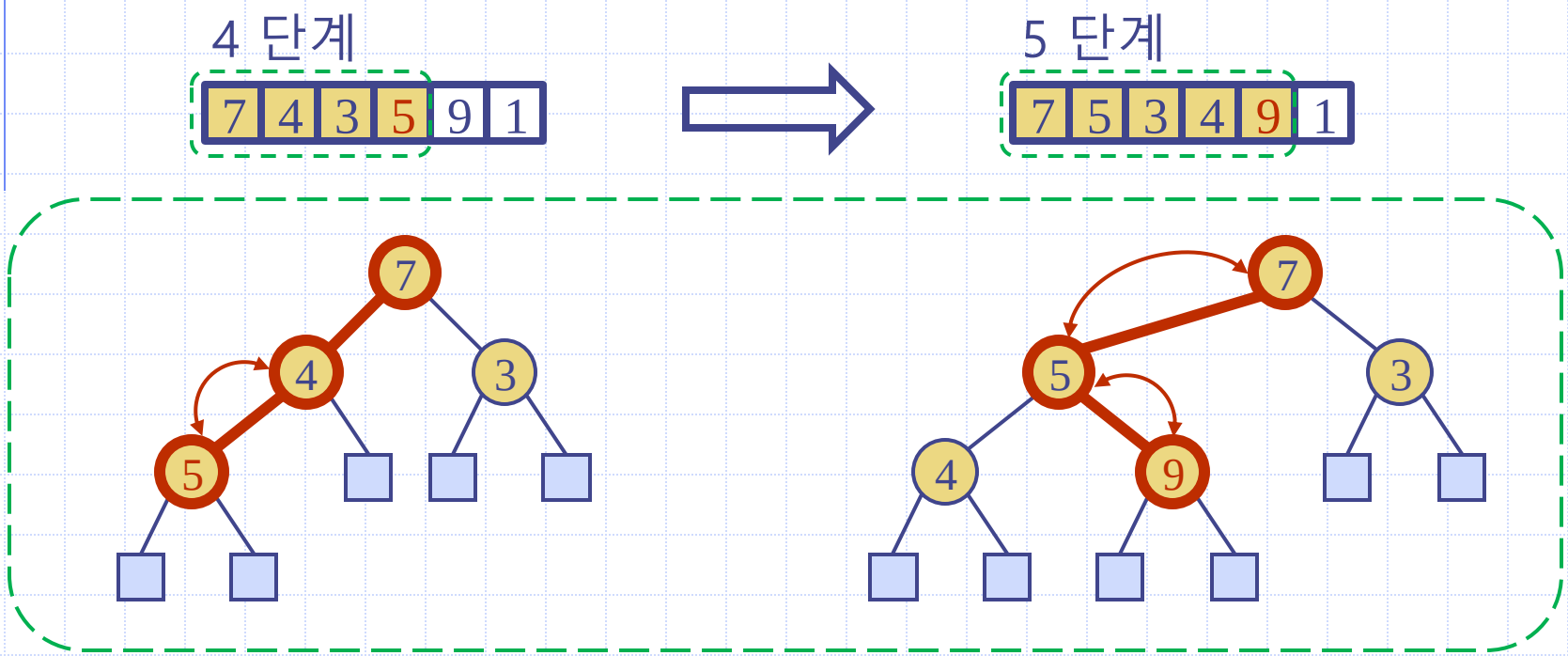
# 제자리 힙 정렬 예

- 1기와 2기의 **각 단계**에서, 배열 가운데 **힙**에 쓰인 부분을 파란색 원소로 표시
- 아래 점선 내에 보인 **이진트리** 관점의 **힙**은 가상적일 뿐, 제자리 알고리즘에 의해 실제 생성되지는 않음에 유의
- 1기 작업 시작



# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

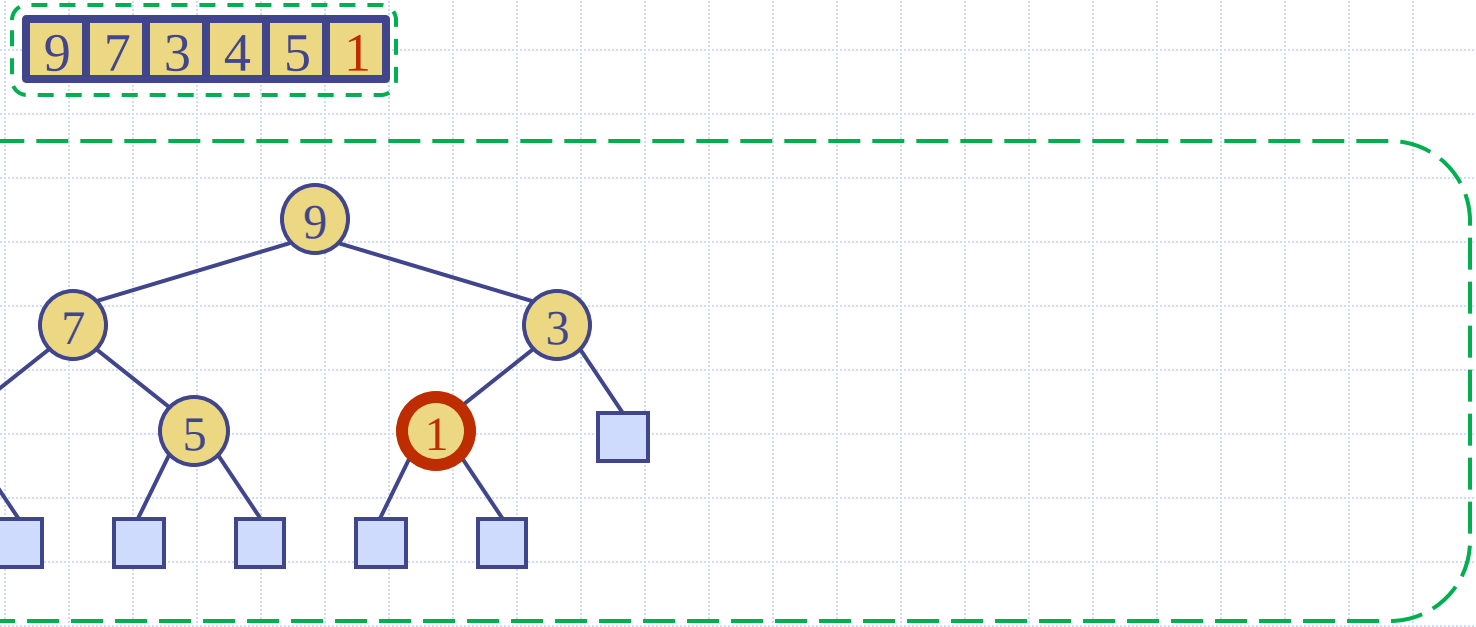
- 1기 작업 계속



# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

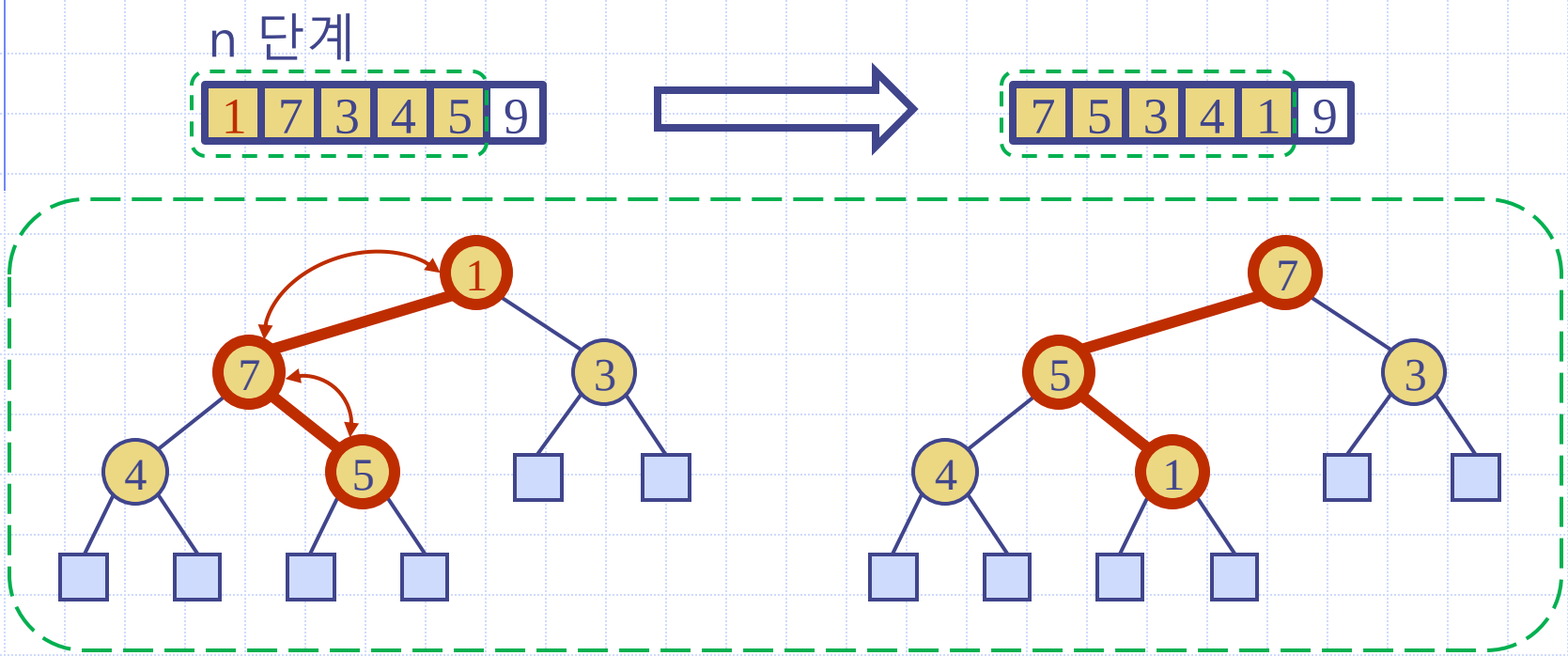
- 1기 작업 완료
- 리스트가 **최대힙**으로 변환됨

6 단계



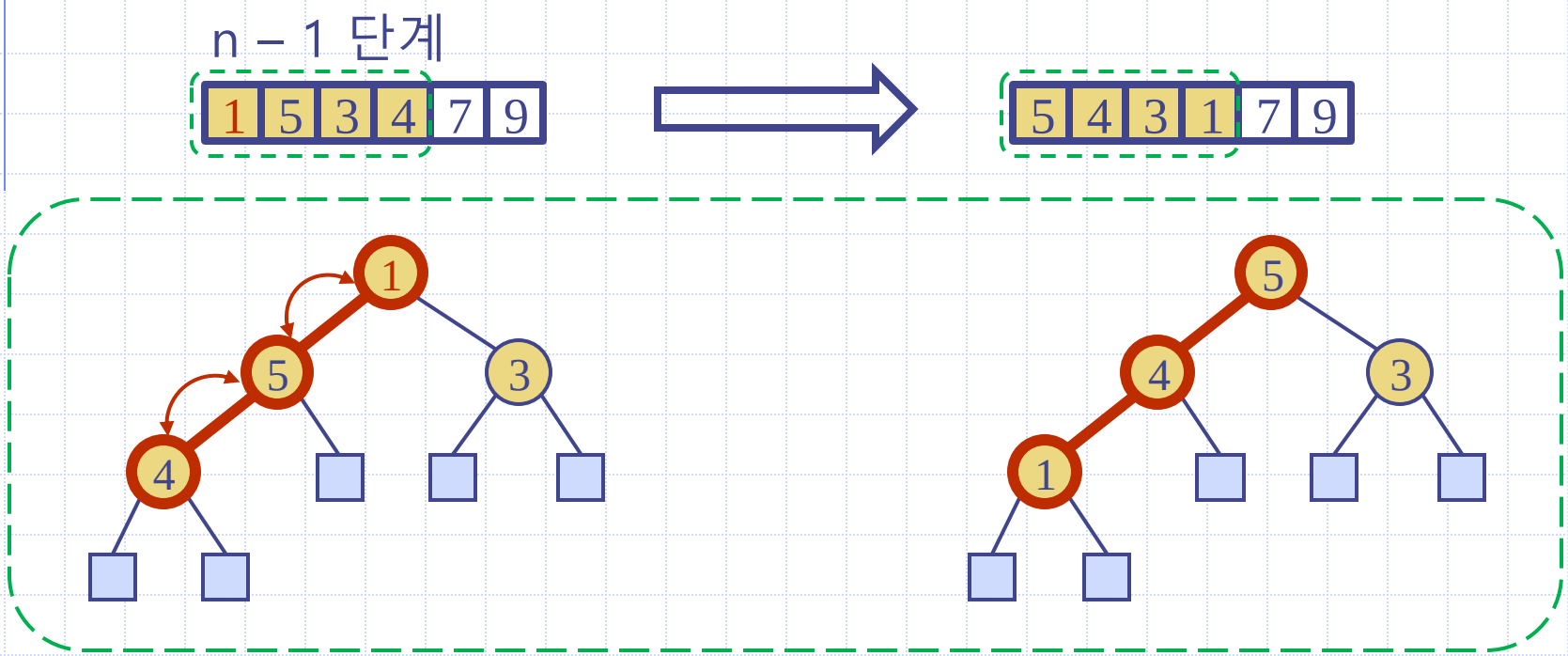
# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 시작



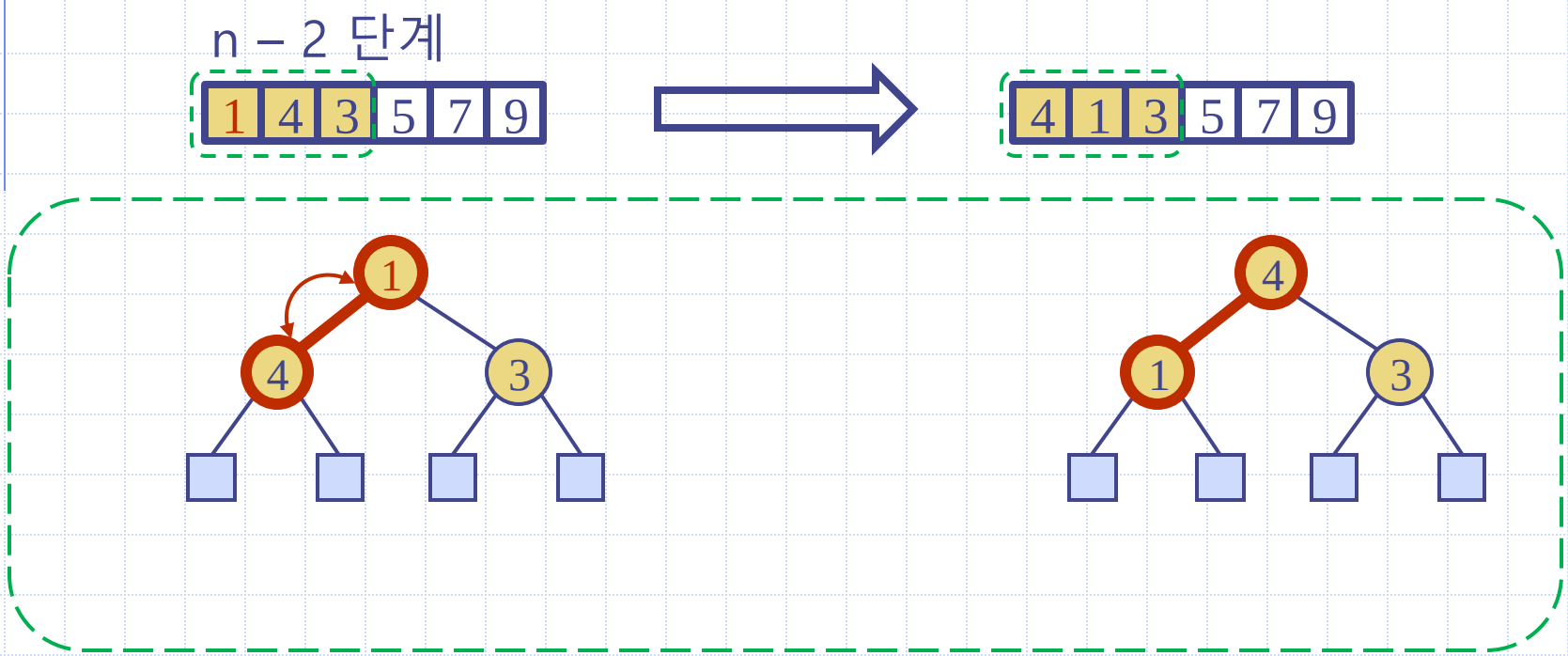
# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속



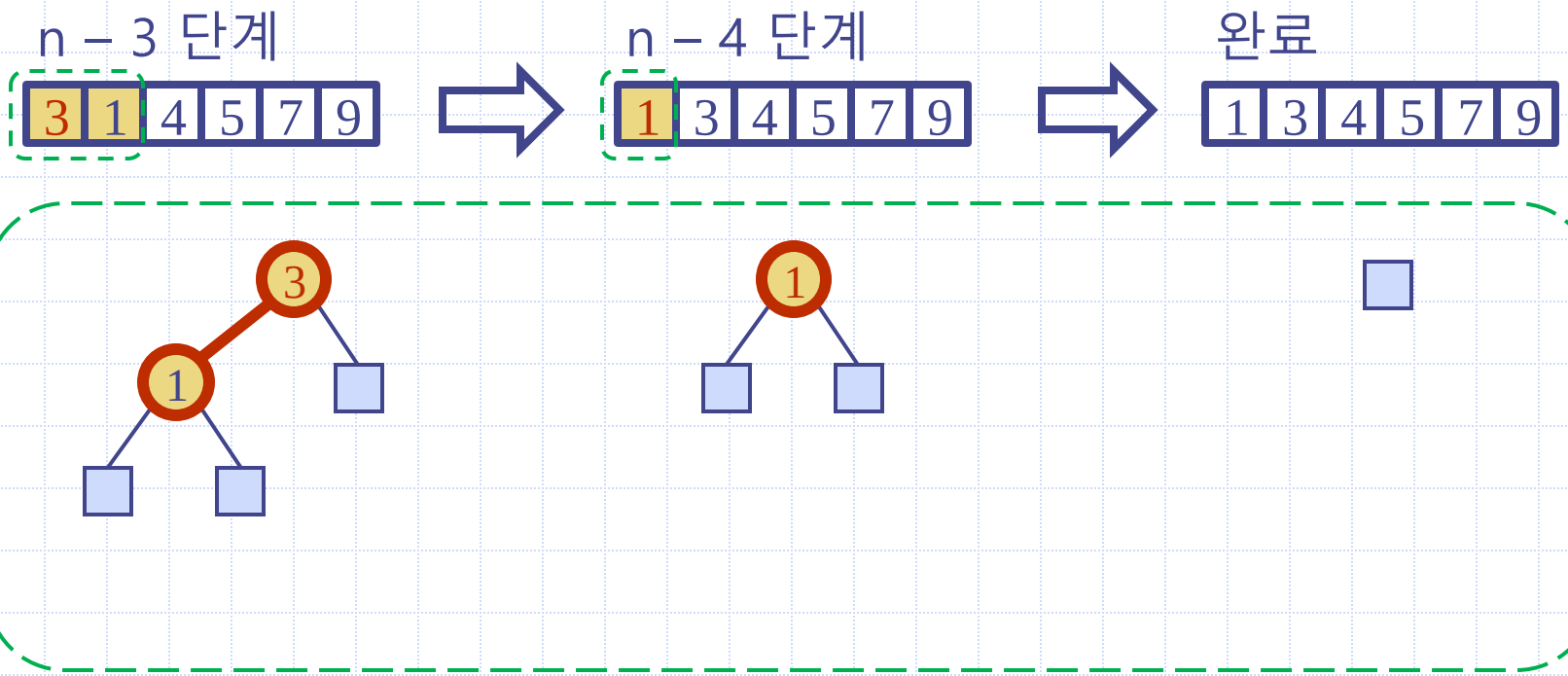
# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속

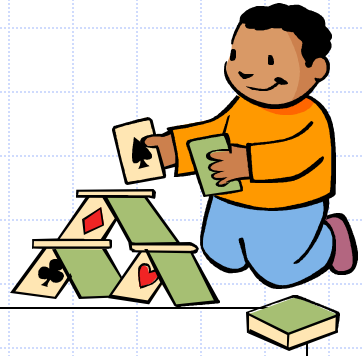


# 제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속
- 리스트 정렬 완료



# 상향식 힙생성



- heap-sort의 1기에서, $n$회의 연속적인 insertItem 작업을 사용하여 $O(n \log n)$ 시간에 힙을 생성했다
- 대안으로, 만약 힙에 저장되어야 할 모든 키들이 **미리** 주어진다면, $O(n)$ 시간에 수행하는 **상향식 생성** 방식이 있다

**Alg** ***buildHeap***(***L***)
  **input** list ***L*** storing ***n*** keys
  **output** heap ***T*** storing the keys in ***L***

1. ***T*** ← ***convertToCompleteBinaryTree***(***L***)
2. ***rBuildHeap***(***T***.***root***())
3. **return** ***T***

**Alg** ***rBuildHeap***(***v***)  {recursive}
  **input** node ***v***
  **output** a heap with root ***v***

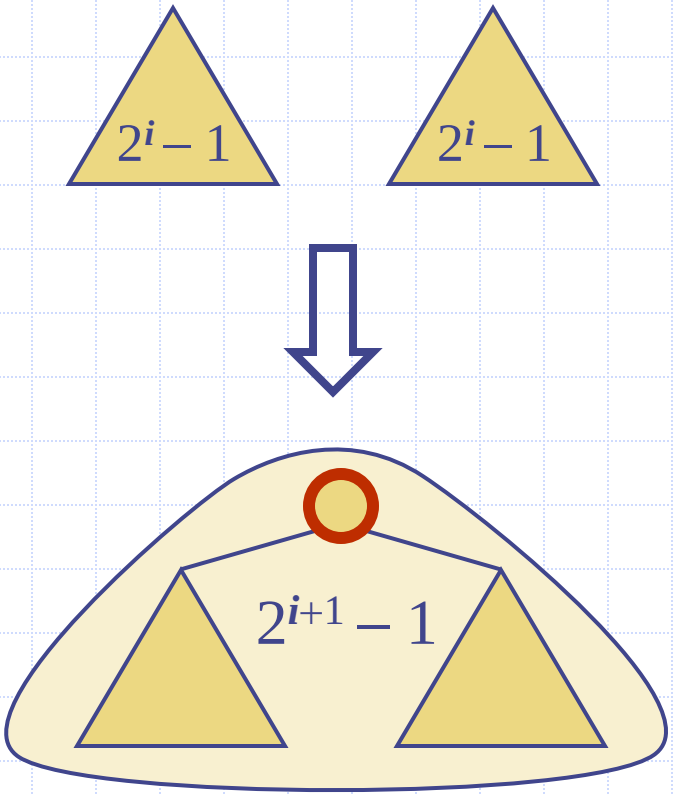
1. **if** (***isInternal***(***v***))
    ***rBuildHeap***(***leftChild***(***v***))
    ***rBuildHeap***(***rightChild***(***v***))
    ***downHeap***(***v***)
2. **return**

# convertToCompleteBinaryTree

- 리스트 $L$을 **완전이진트리** $T$로 전환
  - $L$이 **배열**로 주어졌다면, 첫번째 셀을 비운 배열에 복사
  - $L$이 **연결리스트**로 주어졌다면, 전환 작업에 선형시간 소요

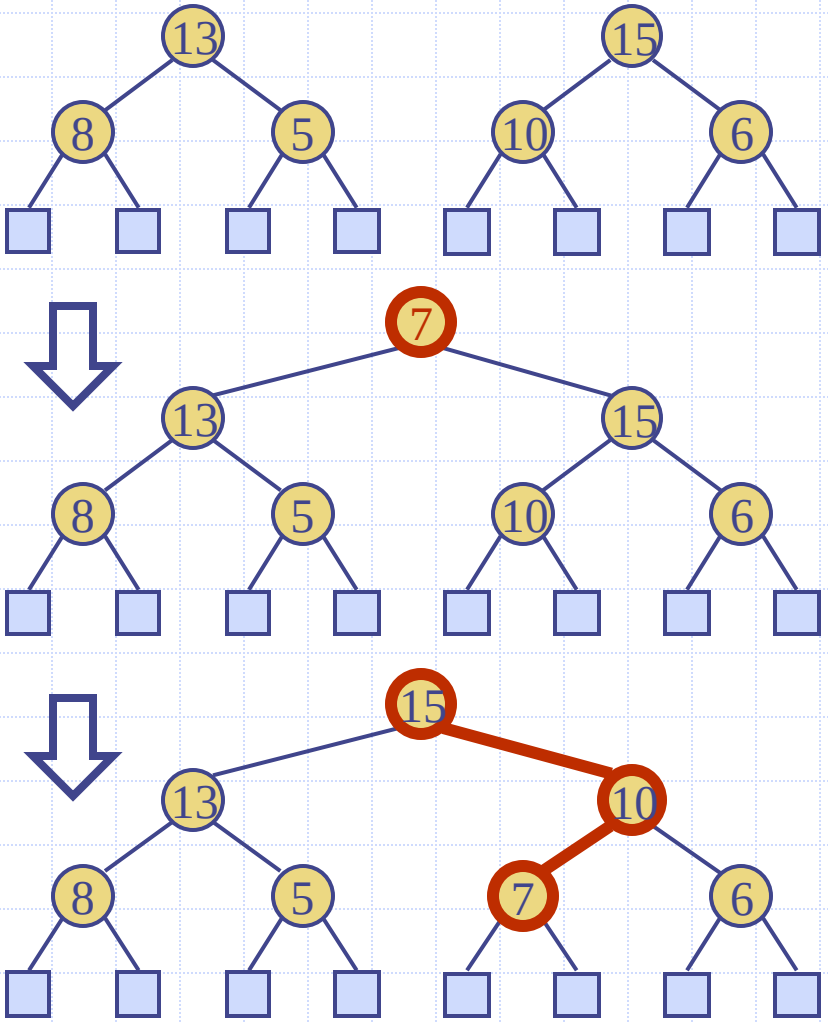
# 상향식 힙생성 (conti.)

- $\log n$ 단계만을 사용하여 주어진 $n$개의 키를 저장하는 힙 생성 가능
- 단계 $i$에서, 각각 $2^i - 1$개의 키를 가진 두 개의 힙을 $2^{i+1} - 1$개의 키를 가진 힙으로 **합병**



# 두 개의 힙을 합병

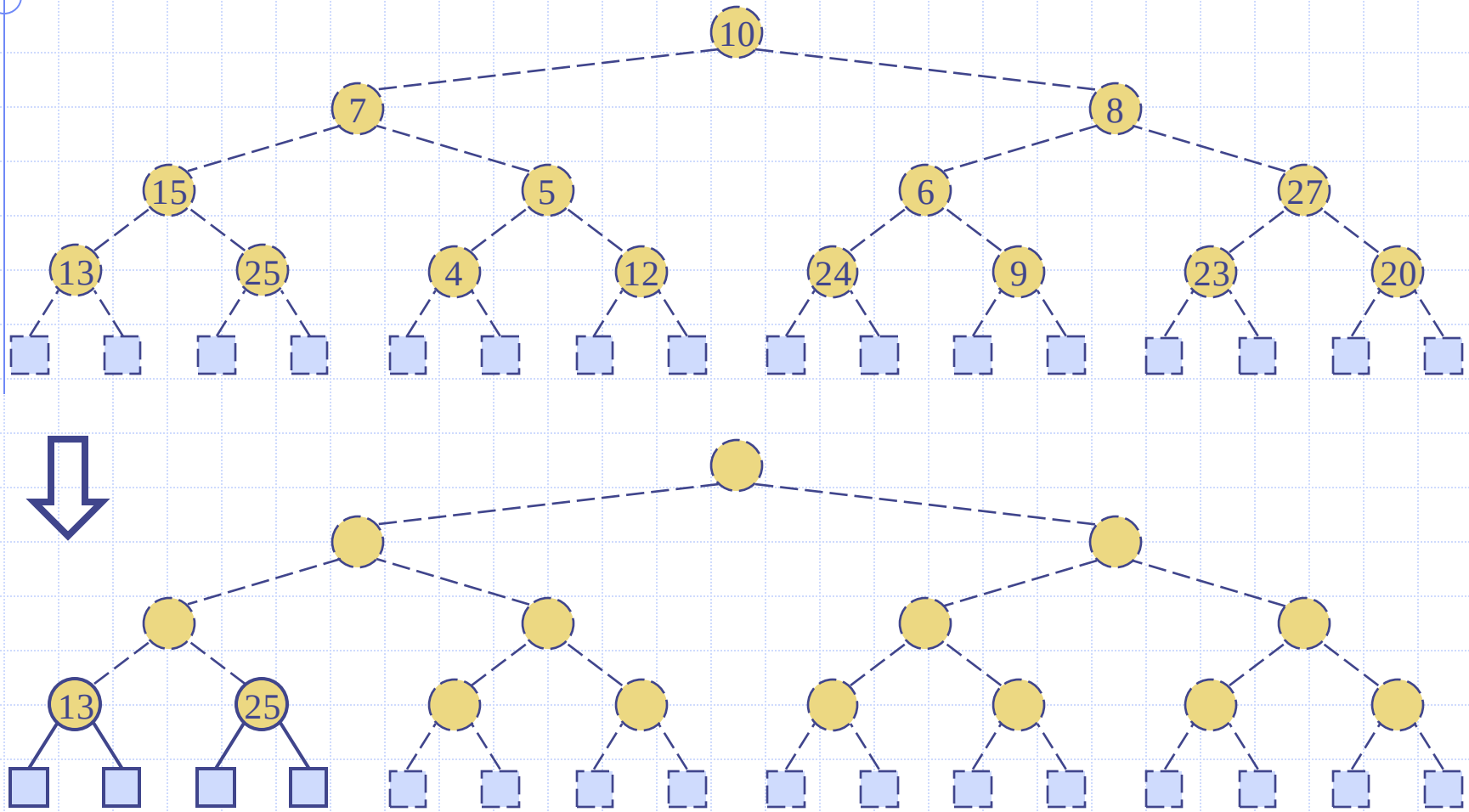
- 두 개의 힙과 키 $k$가 주어졌을 때,
- $k$를 저장한 노드를 루트로, 두 개의 힙을 부트리로 하는 새 힙을 생성
- **힙순서 속성**을 복구하기 위해 downheap을 수행



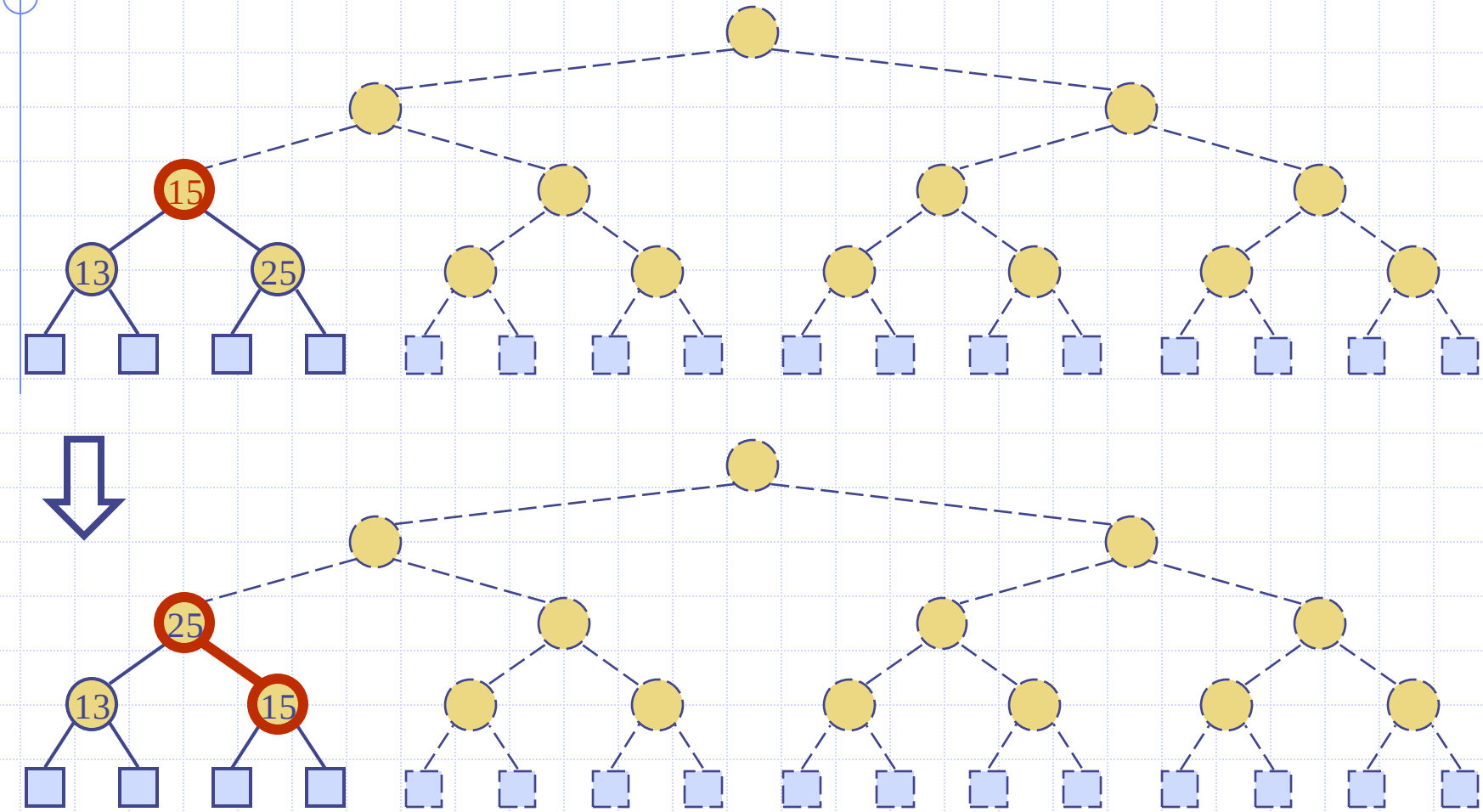
# "상향식"이라 불리는 이유?

- 이 버전은 각 재귀호출이 힙인 부트리를 반환하는 방식 때문에 **상향식**이라 불린다
- 다시 말해, $T$의 **힙화**(heapification)는 외부노드에서 시작하여, 각 재귀호출이 반환함에 따라 트리 위쪽으로 진행
- 이 때문에 종종 **힙화한다**(heapify)고 말하기도 한다

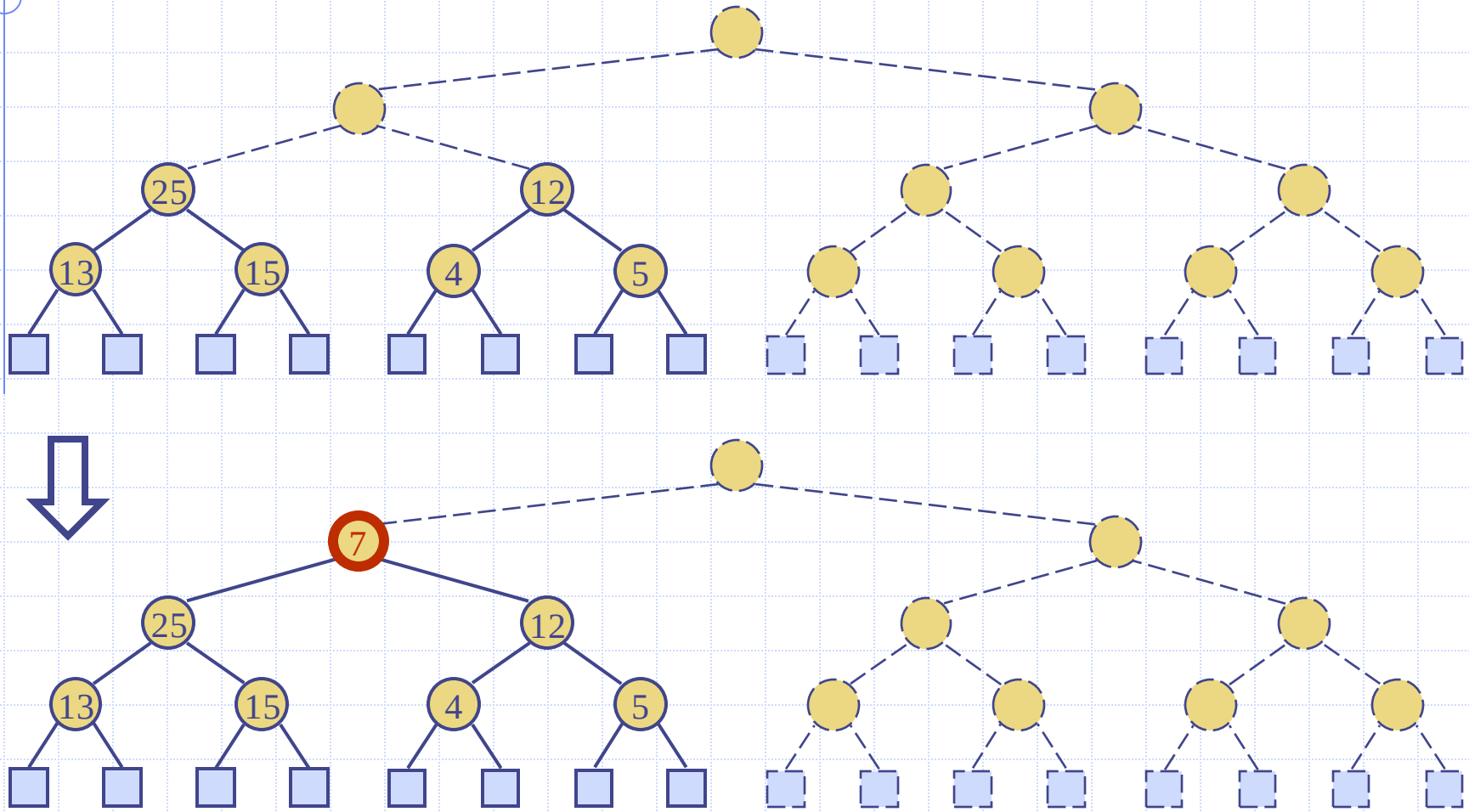
# 상향식 힙생성 예



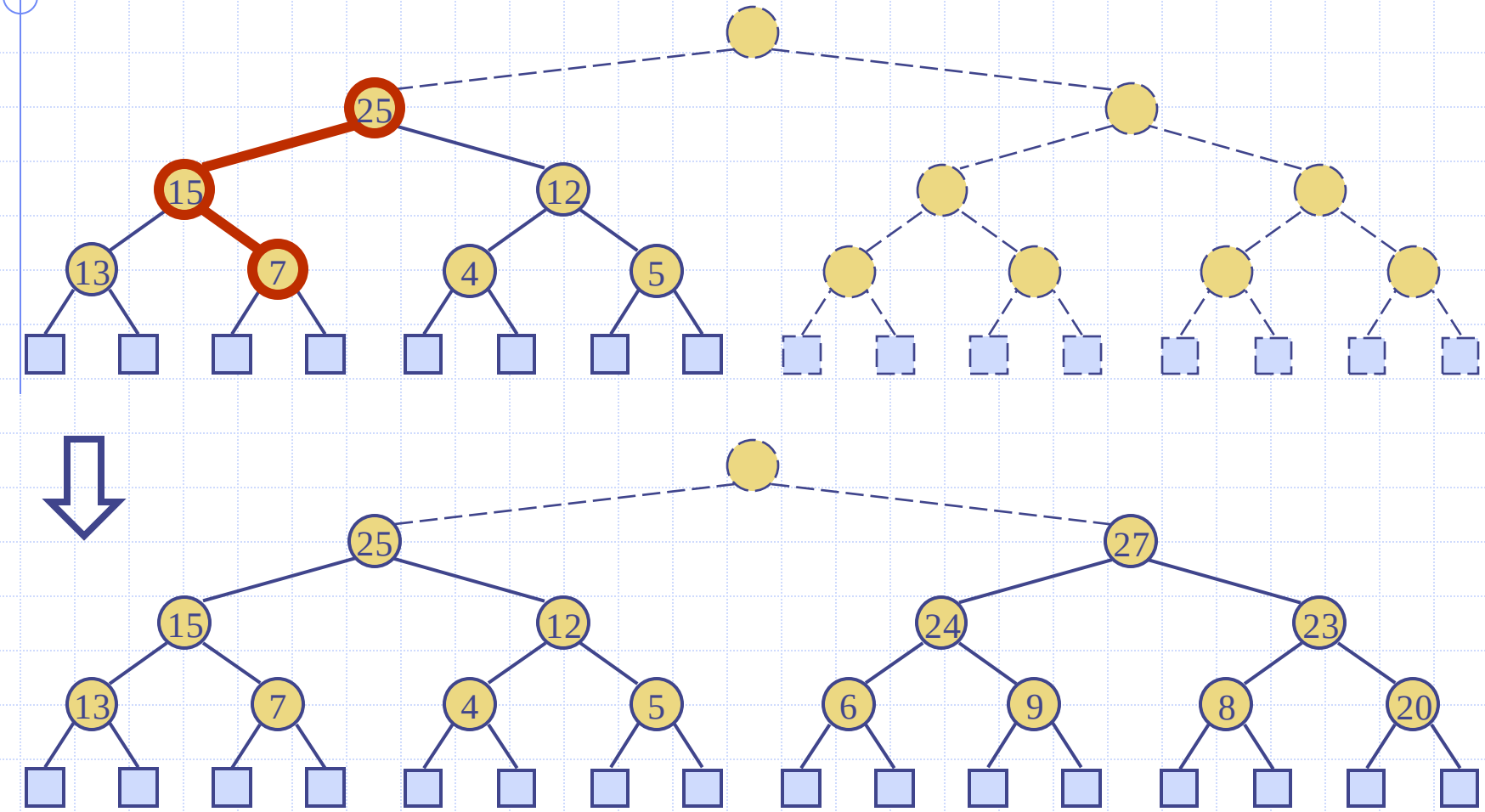
# 상향식 힙생성 예 (conti.)



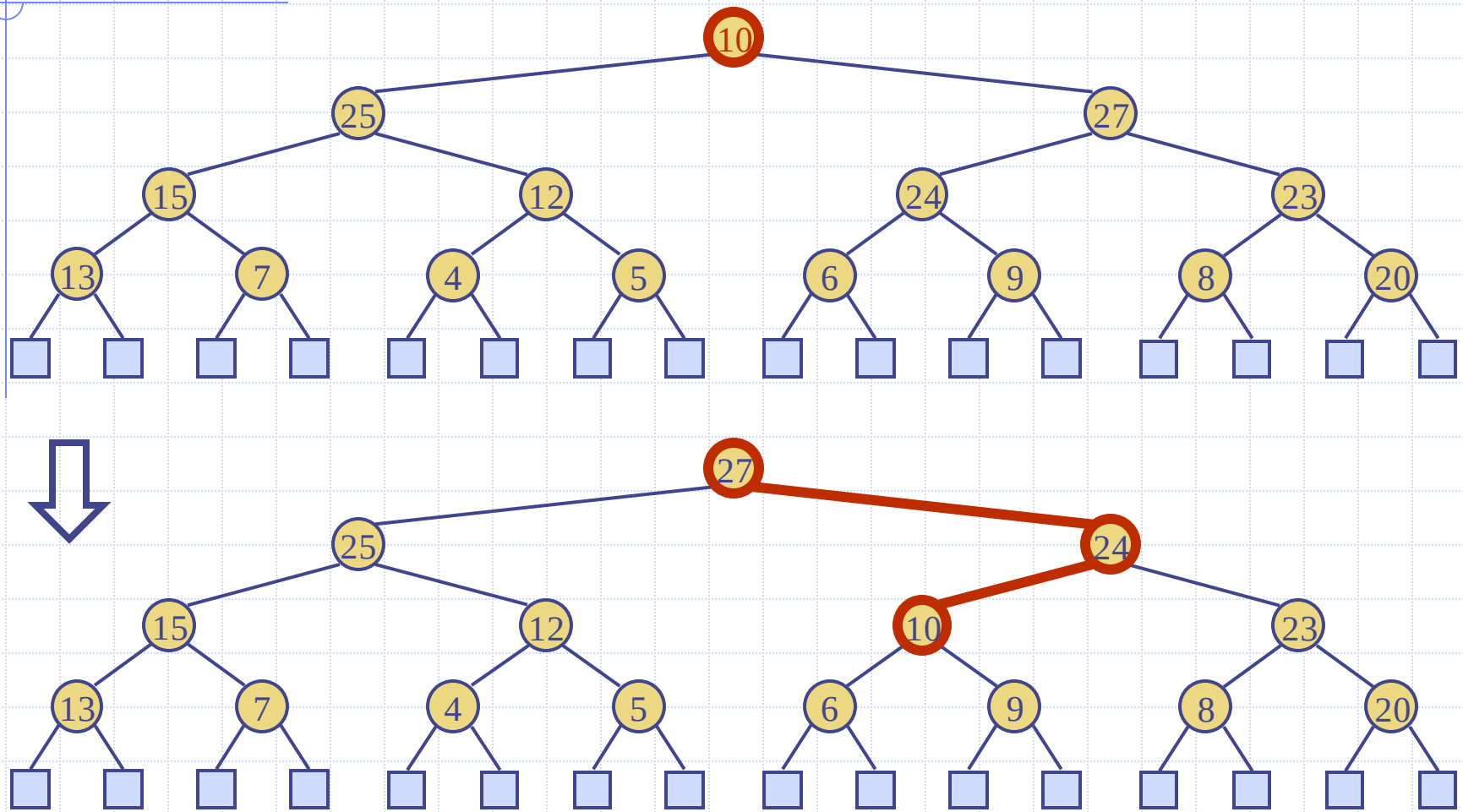
# 상향식 힙생성 예 (conti.)



# 상향식 힙생성 예 (conti.)



# 상향식 힙생성 예 (conti.)

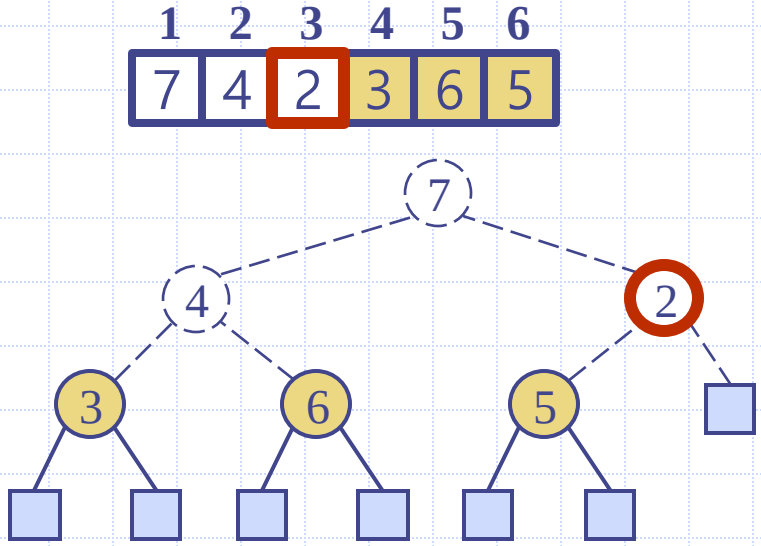


# 비재귀적 상향식 힙생성

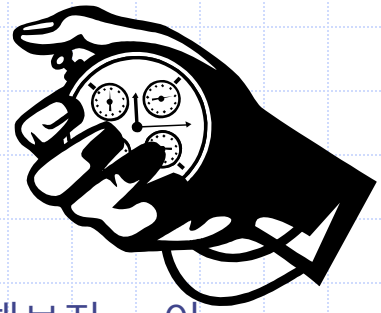
- 상향식 힙생성의 **비재귀** 버전
- 정렬되어야 할 리스트가 **배열**로 주어진 경우에만 적용
- 이 방식은 힙생성 절차가 "내부노드를 왼쪽 자식으로 가지는 가장 깊은 내부노드 가운데 가장 오른쪽 노드"에서 **시작**하여 루트로 향하는 후진방향으로 반복 수행
- **시작 노드**: 첨자 $\lfloor n/2 \rfloor$인 노드
- **예:** $n = 6$

**Alg** ***buildHeap***(***A***)
**input** array ***A*** of ***n*** keys
**output** heap ***A*** of size ***n***

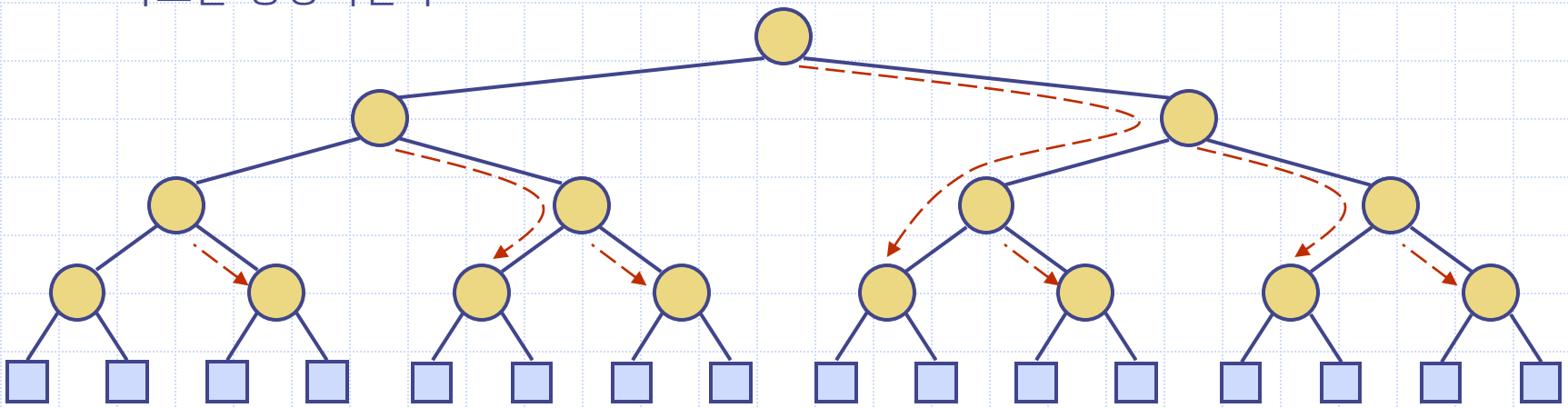
1. **for** $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
   ***downHeap***(***i***, ***n***)
2. **return**



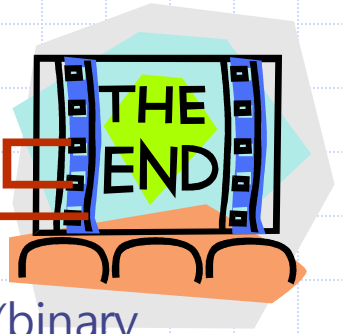
# 분석



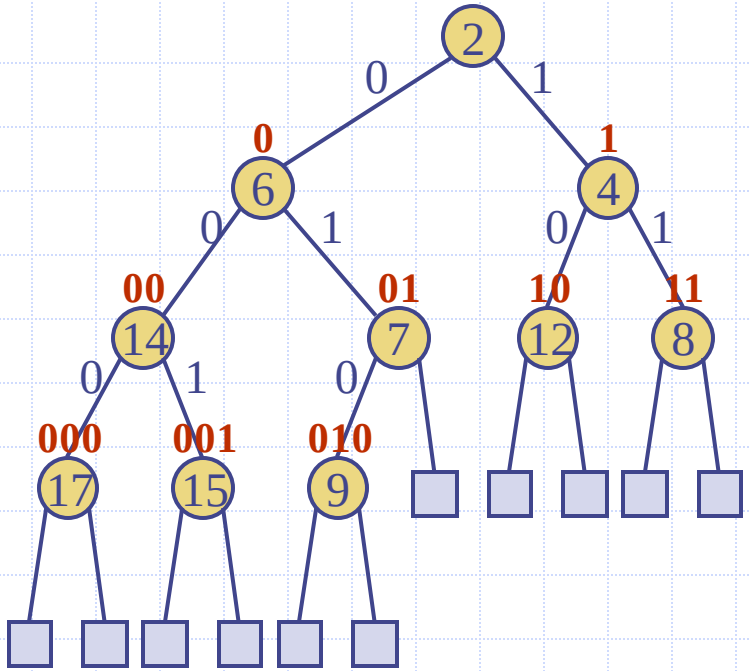
- downheap의 최악의 경우 시간을 **대리경로**를 사용하여 시각화해보자 – 이 대리경로는 먼저 오른쪽 자식노드로 이동한 후 힙의 바닥까지 반복적으로 왼쪽 자식노드를 따라 이동 – 이 경로는 대리경로일 뿐 실제의 downheap 경로와는 다를 수 있다
- 각 노드는 최대 두 개의 대리경로에 의해 순회되므로, 대리경로들의 전체 노드 수는 $O(n)$
- 따라서, 상향식 힙생성은 $O(n)$ 시간에 수행
- 하지만, heap-sort 2기의 최악실행시간은 $\Omega(n \log n)$
- 그래도, 상향식 힙생성은 $n$회의 연속적인 삽입보다 빠르므로 heap-sort 1기의 속도를 향상시킨다



# 응용문제: 힙의 마지막 노드




- 이진트리의 루트로부터 어떤 노드까지의 경로를 **이진수열**(binary string)로 표현할 수 있다 – 여기서 0은 "왼쪽으로 이동"을, 1은 "오른쪽으로 이동"을 의미
- 예를 들어, 이진수열 "010"은 루트로부터 시작하는 다음의 경로를 의미
  - 왼쪽자식으로 이동,
  - 오른쪽 자식으로 이동,
  - 마지막으로, 왼쪽 자식으로 이동
- 이 표현법에 기초하여, $n$개의 원소를 가지는 힙의 **마지막** 노드를 찾기 위한 **로그시간**(logarithmic-time) 알고리즘을 **의사코드**로 작성하라
  - findLastNode(v, n): 루트가 $v$며 $n$개의 원소로 이루어진 힙의 마지막 노드를 반환



# 해결

- 힙의 마지막 노드에 이르는 경로는 $n$의 이진수 표기에서 최상위 비트를 제거하여 얻은 경로로 주어진다
  - **예:** $n = 10$인 경우, 경로는 "010"

# 해결 (conti.)

**Alg** *findLastNode*(*v*, *n*)
  **input** root *v* of a heap, integer *n*
  **output** last node of the heap with root *v*

1. *S* ← *empty stack*
2. ***binaryExpansion***(*n*, *S*)
3. *S*.***pop***() {remove highest-order bit}
4. **while** (!*S*.***isEmpty***())
    ***bit*** ← *S*.***pop***()
    **if** (***bit*** = 0)
      *v* ← ***leftChild***(*v*)
    **else** {***bit*** = 1}
      *v* ← ***rightChild***(*v*)
5. **return** *v*

**Alg** *binaryExpansion*(*i*, *S*)
  **input**, integer *i*, empty stack *S*
  **output** binary representation of *i* in stack *S*

1. **while** (*i* ≥ 2)
    *S*.***push***(*i* % 2)
    *i* ← *i*/2
2. *S*.***push***(*i*)
3. **return**