

우선순위 큐

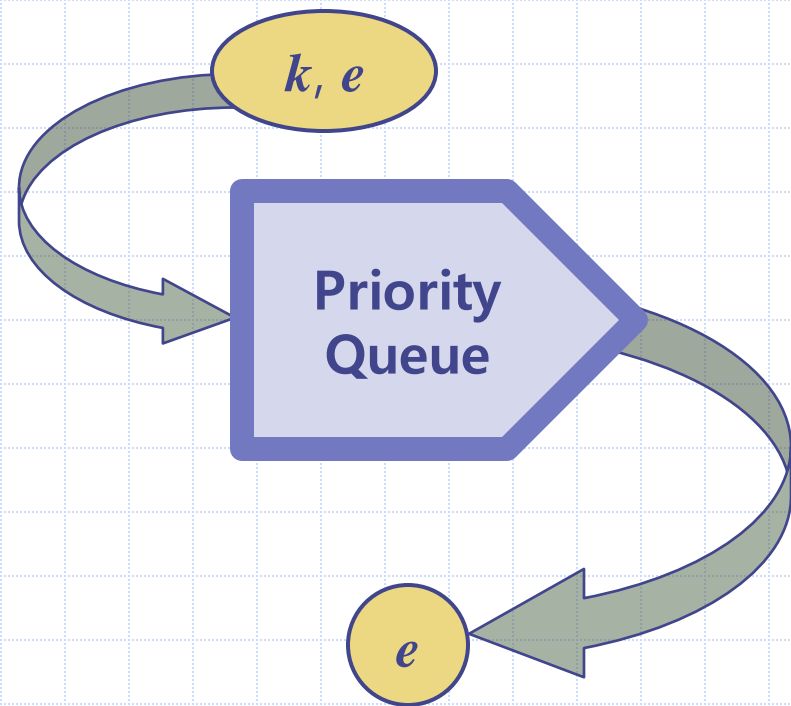


Outline

- ◆ 5.1 우선순위 큐 ADT
- ◆ 5.2 우선순위 큐를 이용한 정렬
- ◆ 5.3 제자리 정렬
- ◆ 5.4 선택 정렬과 삽입 정렬 비교
- ◆ 5.5 응용문제

우선순위 큐 ADT

- ◆ 우선순위 큐 ADT는 항목들을 저장
- ◆ 각 항목: (키, 원소) 쌍
- ◆ 응용
 - 탑승 대기자
 - 옥션
 - 주식시장



우선순위 큐 ADT 메 소드

Priority
Queue

◆ 주요 메소드

- `insertItem(k, e)`: 키 k 인 원소 e 를 큐에 삽입
- `element removeMin()`: 큐로부터 최소 키를 가진 원소를 삭제하여 반환

◆ 일반 메소드

- `integer size()`: 큐의 항목 수를 반환
- `boolean isEmpty()`: 큐가 비어 있는지 여부를 반환

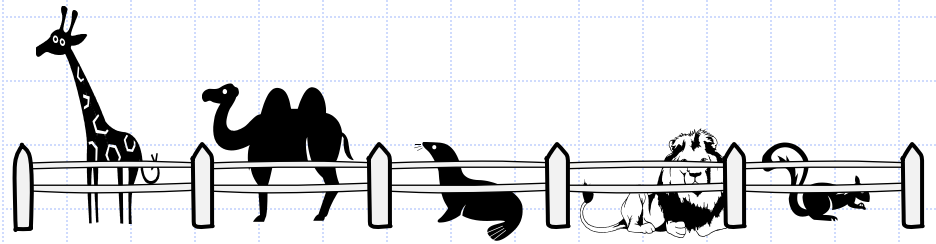
◆ 접근 메소드

- `element minElement()`: 큐에서 최소 키를 가진 원소를 반환
- `element minKey()`: 큐에서 최소 키를 반환

◆ 예외

- `emptyQueueException()`: 비어 있는 큐에 대해 삭제나 원소 접근을 시도할 경우 발령
- `fullQueueException()`: 만원 큐에 대해 삽입을 시도할 경우 발령

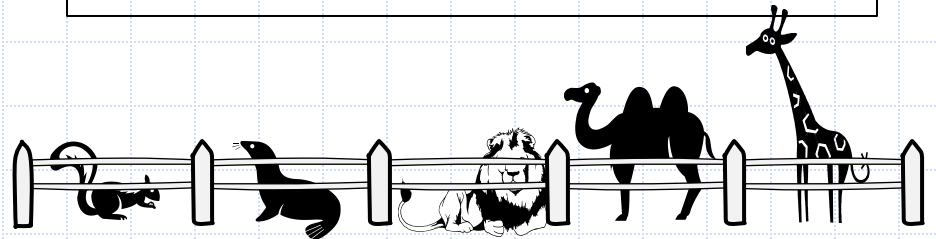
우선순위 큐를 이용한 정렬



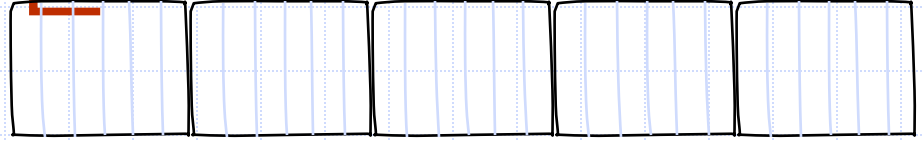
- ◆ 비교 가능한 원소 집합을 정렬하는데 우선순위 큐 이용 가능
 1. 연속적인 **insertItem**(e, e) 작업을 통해 원소들을 하나씩 삽입 (key = e로 전제)
 2. 연속적인 **removeMin**() 작업을 통해 원소들을 정렬 순서로 삭제
- ◆ 실행시간: 우선순위 큐의 구현에 따라 다르다
- ◆ L, P : 일반(generic)

Alg *PQ-Sort*(L)
input list L
output sorted list L

1. $P \leftarrow \text{empty priority queue}$
2. **while** ($\neg L.\text{isEmpty}()$)
 $e \leftarrow L.\text{removeFirst}()$
 $P.\text{insertItem}(e)$
3. **while** ($\neg P.\text{isEmpty}()$)
 $e \leftarrow P.\text{removeMin}()$
 $L.\text{addLast}(e)$
4. **return**



리스트에 기초한 우선순위 큐



◆ 무순리스트로 구현

- 우선순위 큐의 항목들을 리스트에 임의 순서로 저장

◆ 성능

- **insertItem**: $O(1)$ 시간 소요
– 항목을 리스트의 맨앞 또는 맨뒤에 삽입할 수 있으므로
- **removeMin, minKey, minElement**: $O(n)$ 시간 소요 – 최소 키를 찾기 위해 전체 리스트를 순회해야 하므로

◆ 순서리스트로 구현

- 우선순위 큐의 항목들을 리스트에 키 정렬 순서로 저장

◆ 성능

- **insertItem**: $O(n)$ 시간 소요
– 항목을 삽입할 곳을 찾아야 하므로
- **removeMin, minKey, minElement**: $O(1)$ 시간 소요 – 최소 키가 리스트의 맨앞에 있으므로

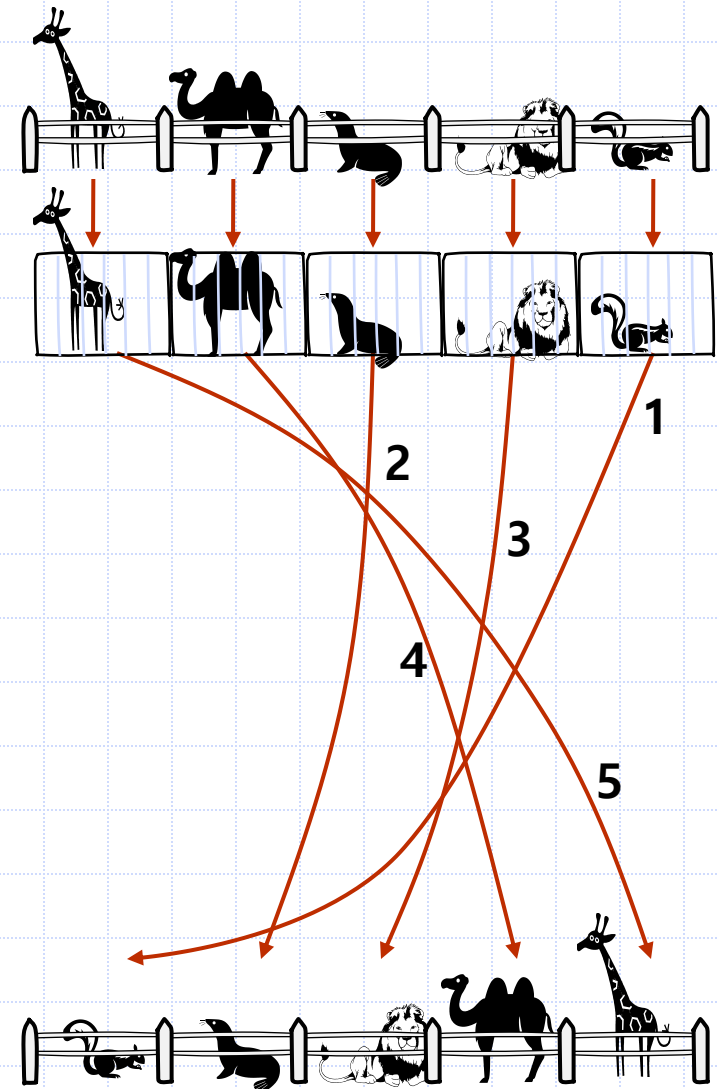
선택 정렬

◆ 선택 정렬(selection-sort)

- PQ-Sort의 일종
- 우선순위 큐를 무순리스트로 구현

◆ 실행시간

- n 회의 insertItem 작업을 사용하여 원소들을 우선순위 큐에 삽입하는데 $O(n)$ 시간 소요
- n 회의 removeMin 작업을 사용하여 원소들을 우선순위 큐로부터 정렬 순서로 삭제하는데 다음에 비례하는 시간 소요
$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$$
- Total: $O(n^2)$



삽입 정렬

◆ 삽입 정렬(insertion-sort)

- PQ-Sort의 일종
- 우선순위 큐를 순서리스트로 구현

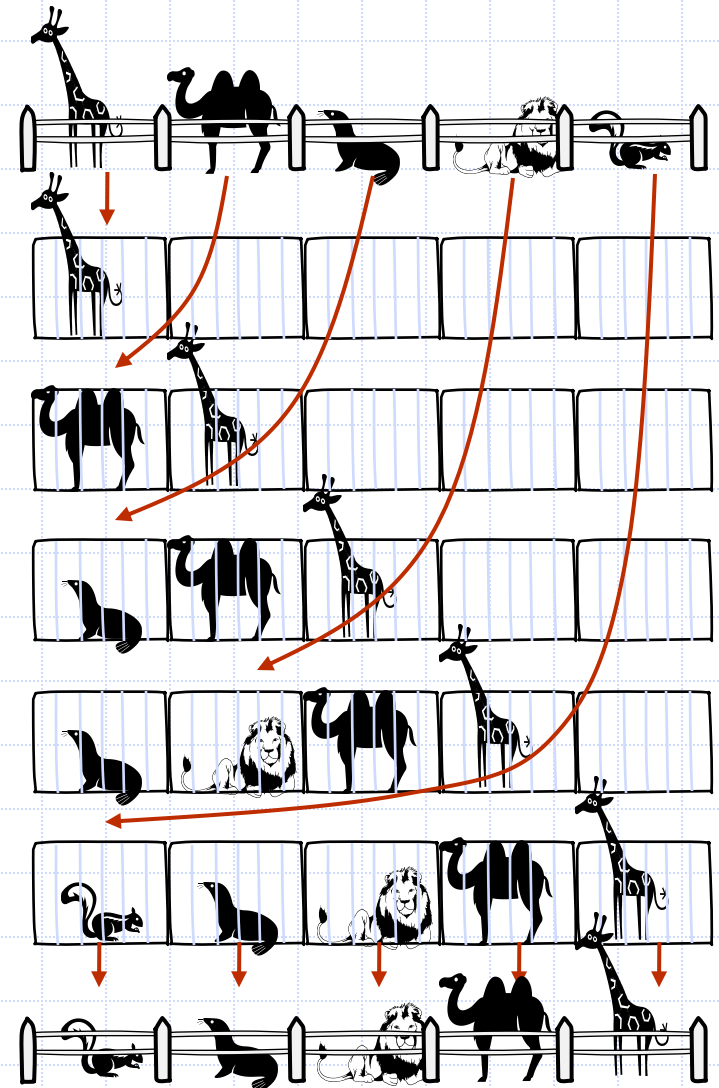
◆ 실행시간

- n 회의 insertItem 작업을 사용하여 원소들을 우선순위 큐에 삽입하는데 다음에 비례하는 시간 소요

$$1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

- n 회의 removeMin 작업을 사용하여 원소들을 우선순위 큐로부터 정렬 순서로 삭제하는데 $O(n)$ 시간 소요

- Total: $O(n^2)$



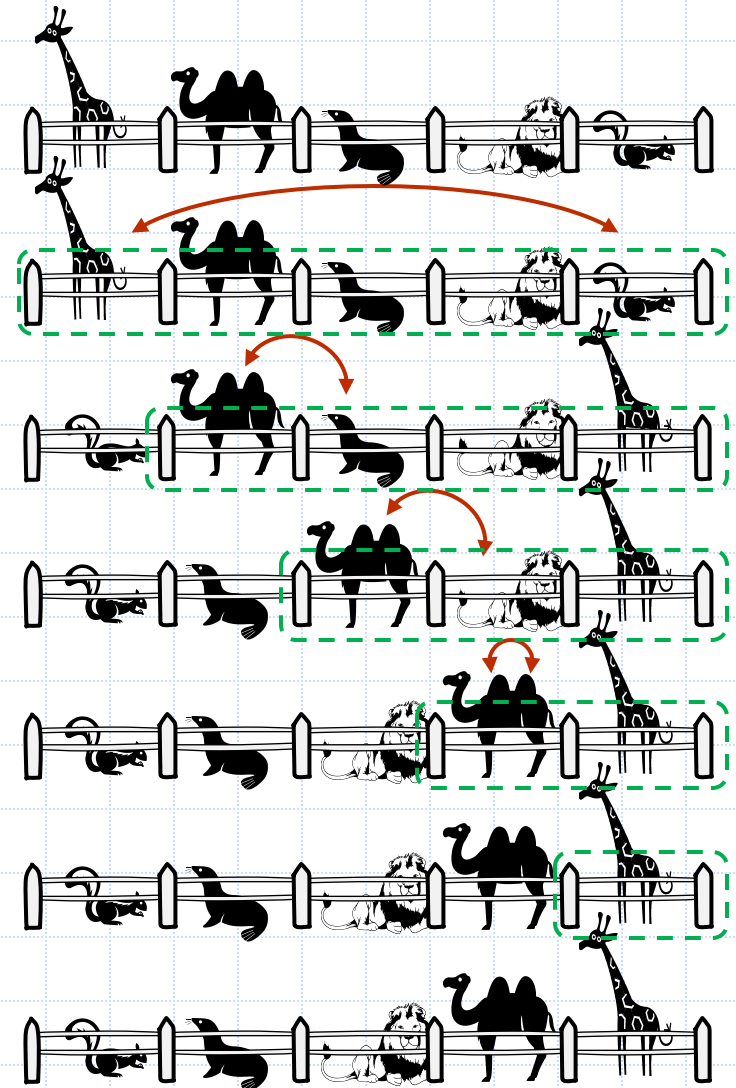
“제자리”에서 할 수 있나?

- ◆ selection-sort, insertion-sort 모두 $\Theta(n)$ 공간을 차지하는 **외부의** 우선순위 큐를 사용하여 리스트를 정렬
- ◆ 만약, 원래 리스트 자체를 위한 공간 이외에 $O(1)$ 공간만을 사용한다면, 이를 “**제자리**(in-place)”에서 수행한다고 말한다
- ◆ 일반적으로, 어떤 정렬 알고리즘이 정렬 대상 개체를 위해 필요한 메모리에 추가하여 오직 상수 메모리만을 사용한다면, 해당 정렬 알고리즘이 **제자리**에서 수행한다고 말한다



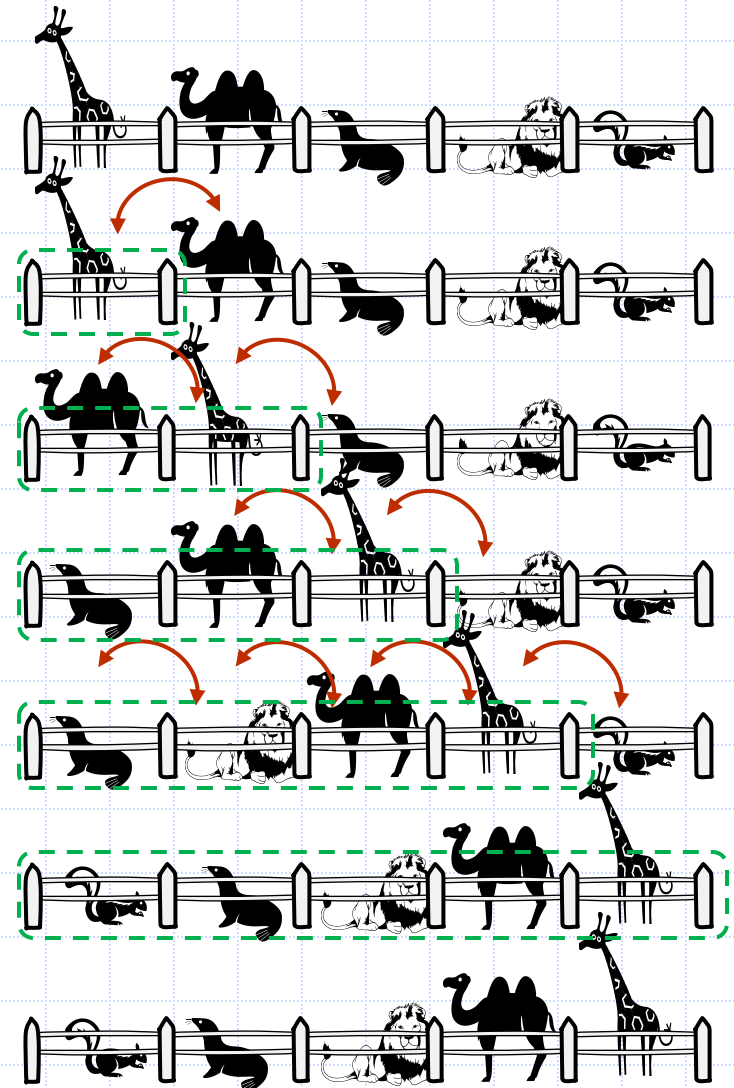
제자리 선택 정렬

- ◆ selection-sort가 외부 데이터구조를 사용하는 대신, **제자리**에서 수행하도록 구현 가능
- ◆ 우선순위 큐: 입력 리스트의 일부(점선 부분)
- ◆ In-place selection-sort를 위해서는:
 - 리스트의 앞부분을 정렬 상태로 유지
 - 리스트를 변경하는 대신 **swapElements**를 사용



제자리 삽입 정렬

- ◆ insertion-sort가 외부 데이터구조를 사용하는 대신, **제자리**에서 수행하도록 구현 가능
- ◆ 우선순위 큐: 입력 리스트의 일부(점선 부분)
- ◆ in-place insertion-sort를 위해서는:
 - 리스트의 앞부분을 정렬 상태로 유지
 - 리스트를 변경하는 대신 **swapElements**를 사용



제자리 정렬 알고리즘

Alg *inPlaceSelectionSort*(*A*)

input array *A* of *n* keys

output sorted array *A*

```
1. for pass ← 0 to n - 2
    minLoc ← pass
    for j ← (pass + 1) to n - 1
        if (A[j] < A[minLoc])
            minLoc ← j
    A[pass] ↔ A[minLoc]
2. return
```

Alg *inPlaceInsertionSort*(*A*)

input array *A* of *n* keys

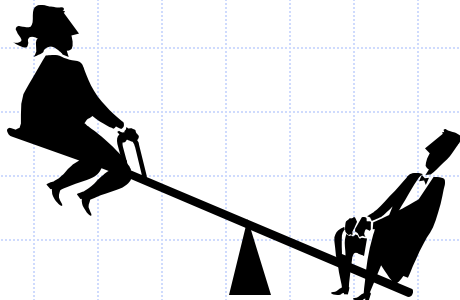
output sorted array *A*

```
1. for pass ← 1 to n - 1
    save ← A[pass]
    j ← pass - 1
    while ((j ≥ 0) & (A[j] > save))
        A[j + 1] ← A[j]
        j ← j - 1
    A[j + 1] ← save
2. return
```

선택 정렬 vs. 삽입 정렬

◆ 공통점

- 전체적으로 $O(n^2)$ 시간
 - ◆ 내부 반복문: $O(n)$ 선형 탐색
 - ◆ 외부 반복문: $O(n)$ 패스
- 제자리 버전은 $O(1)$ 공간 소요
- 구현이 단순
- 작은 n 에 대해 유용

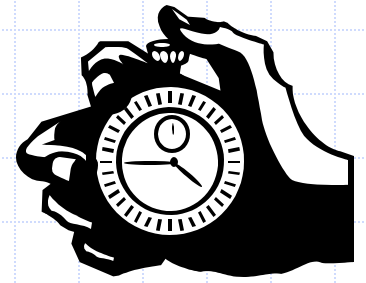


◆ 초기 리스트가 완전히 또는 거의 정렬된 경우

- in-place insertion-sort가 더 빠르다
- 내부 반복문이 $O(1)$ 시간 소요 – 따라서 전체적으로 $O(n)$ 시간에 수행되므로

◆ swapElements 작업이 비싼 경우

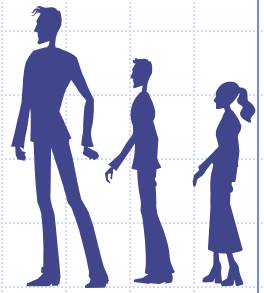
- in-place selection-sort가 더 빠르다
- swapElements 작업이 패스마다 $O(1)$ 시간 수행되는데 반해, in-place insertion-sort에서는 동일 작업이 패스마다 최악의 경우 $O(n)$ 시간 수행되므로



성능 요약

우선순위 큐	작업 수행시간			정렬 방식
	insertItem	removeMin	minKey, minElement	
무순리스트	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	선택 정렬
순서리스트	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	삽입 정렬

응용문제: 역치와 삽입 정렬



- ◆ L 을 n 개의 원소로 이루어진, 전체순서 관계가 정의된 리스트로 가정
 - ◆ L 내의 **역치**(inversion)란 x 가 y 앞에 나타나지만 $x > y$ 인 원소 쌍 x, y 를 말한다
- A. 정수 $[0, n - 1]$ 범위의 유일한 원소로 이루어진 크기 n 의 리스트 L 내에 **최대 가능한 역치의 수**와 이때의 L 의 원소 배치를 구하라
- B. 만약 모든 원소가 바른 자리(즉, 정렬 시점에 있어야 할 자리)에서 k 칸 이내에 위치한다면, L 에 대한 **삽입 정렬** 수행에 $O(nk)$ 시간이 소요됨을 설명하라
- **힌트:** 삽입 정렬 알고리즘을 검토하여 우선, I 가 리스트 L 내의 총 역치의 수라고 할 때 삽입 정렬이 $O(n + I)$ 시간에 수행함을 설명하라

해결

- ◆ $L = (n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$ 처럼 역정렬 상태인 경우며, 이때 역치의 수는 $n(n-1)/2$ 개다
- ◆ 리스트에 대한 삽입 정렬의 수행을 검토함으로써, 우선, I 가 리스트 L 내의 총 역치의 수라고 할 때 삽입 정렬이 $O(n+I)$ 시간에 수행함을 설명하자
 - 외부 반복문에 대해 $O(n)$ 작업을 수행한다
 - 내부 반복문의 한 회전은 한 칸씩 왼쪽으로 진행하면서 딱 한 개의 역치를 교정한다
 - 알고리즘이 종료하면 역치는 남지 않는다
 - 그러므로 I 가 리스트 L 내 역치의 수라고 할 때, 내부 반복문은 정확히 총 I 회전을 수행해야 한다
 - 따라서 내부 반복문에 $O(I)$ 시간이 소요된다
 - 그러므로 알고리즘은 합계 $O(n+I)$ 시간에 수행한다

해결 (conti.)

- ◆ 이제 모든 원소가 바른 자리에서 k 칸 이내에 위치하는 경우 총 역치의 수를 계산해보자
 - 총 역치의 수에 대해 상한을 설정하기로 한다
 - 리스트의 특정 원소 i 에 대해, 리스트 내 최대 $4k$ 개의 원소들이 원소 i 와 역치 상태에 있을 수 있다
 - 이들은 $i - 2k$ 에서 $i + 2k$ 범위에 있는 원소들이다
 - 따라서 최대 총 $4nk$ 개의 역치가 있을 수 있다
 - 그러므로 알고리즘은 전체적으로 $O(nk)$ 시간에 수행한다

