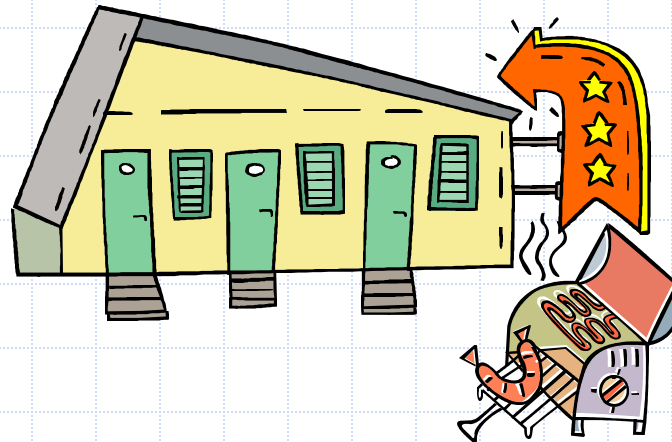
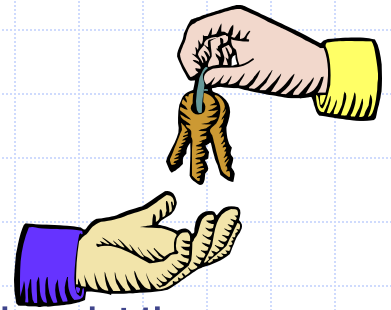


해시테이블



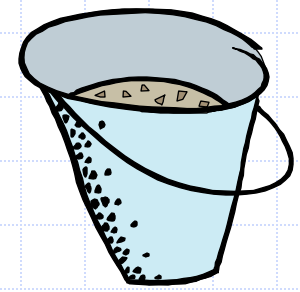
Outline

- ◆ 12.1 해시테이블
- ◆ 12.2 버킷 배열
- ◆ 12.3 해시함수
- ◆ 12.4 충돌 해결
- ◆ 12.5 해시테이블 성능
- ◆ 12.6 응용문제



해시테이블

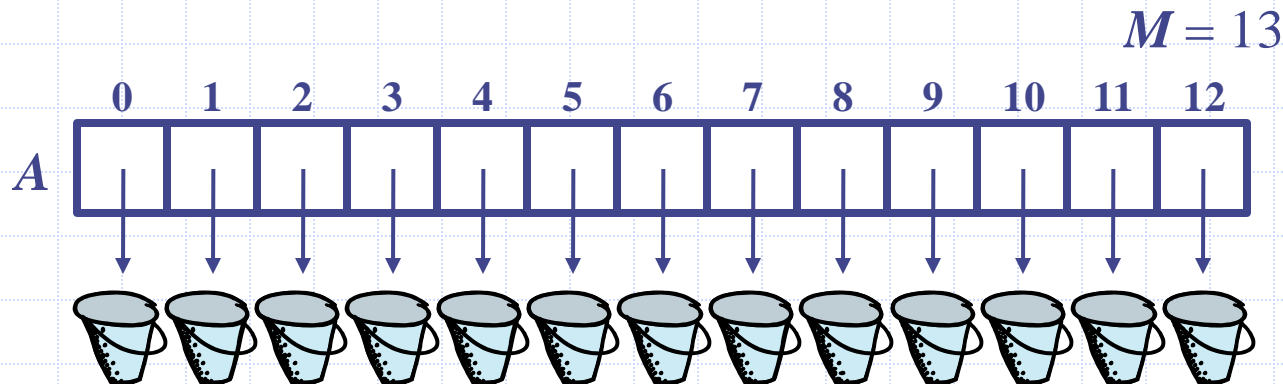
- ◆ **해시테이블**(hash table): 은 **키-주소** 매핑에 의해 구현된 **사전** ADT
 - 예: 컴파일러의 심볼 테이블, 환경변수들의 레지스트리
- ◆ **해시테이블 = 버킷 배열 + 해시함수**
 - 항목들의 **키**를 **주소**(즉, 배열 첨자)로 매핑함으로써 1차원 배열에 사전 항목들을 저장
- ◆ **성능**
 - 탐색, 삽입, 삭제: $O(n)$ 최악시간, 그러나 $O(1)$ 기대시간



버킷 배열

◆ 해시테이블을 위한 **버킷 배열**(bucket array)은 크기 M 의 배열 A 로서:

- A 의 각 셀을 **버킷**(즉, 키-원소 쌍을 담는 그릇)으로 본다 - 슬롯(slot)이라고도 함
- 정수 M 은 배열의 **용량**을 정의
- 키 k 를 가진 원소 e 는 버킷 $A[k]$ 에 삽입
- 사전에 존재하지 않는 키에 속하는 버킷 셀들은 *NoSuchKey*라는 특별한 개체를 담는 것으로 가정



버킷 배열 분석

- ◆ 키가 유일한 정수며 $[0, M-1]$ 범위에 잘 분포되어 있다면, 해시테이블에서의 탐색, 삽입, 삭제에 $O(1)$ 최악의 시간 소요
- ◆ 두 가지 중요한 결함
 - $\Theta(n)$ 공간을 사용하므로, M 이 n 에 비해 매우 크다면 공간 낭비
 - 키들이 $[0, M-1]$ 범위내의 유일한 정수여야 하지만, 이는 종종 비현실적
- ◆ 설계 목표
 - 그러므로 해시테이블 데이터구조를 정의할 때는, 키를 $[0, M-1]$ 범위내의 정수로 매핑하는 **좋은** 방식과 함께 버킷 배열을 구성해야 한다

해시함수 및 해시테이블

◆ 해시함수(hash function) h : 주어진 형의 키를 고정 범위 $[0, M-1]$ 로 매핑

◆ 예

$$h(x) = x \% M$$

■ h 는 정수 키 x 에 대한 해시함수

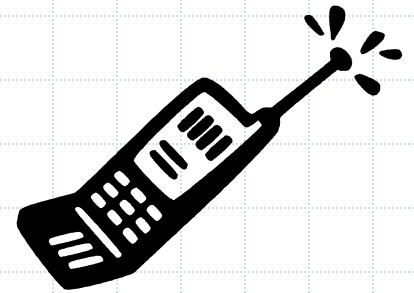
◆ 정수 $h(x)$: 키 x 의 해시값(hash value)

◆ 주어진 키 형의 해시테이블은 다음 두 가지로 구성

■ 해시함수 h

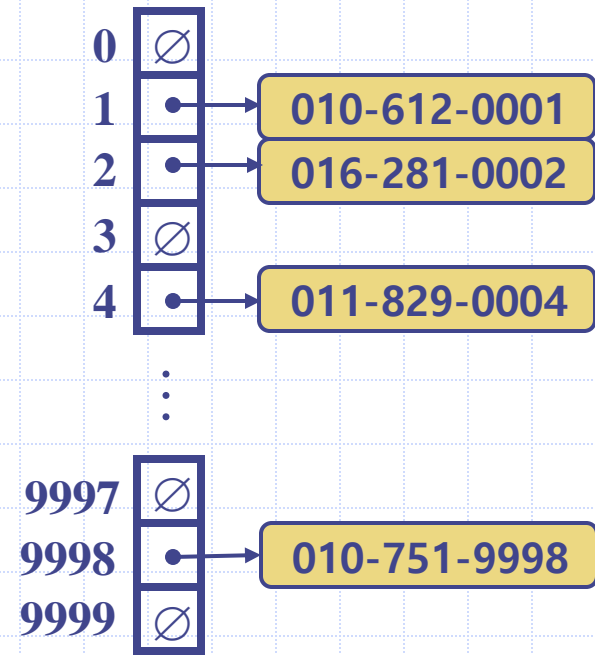
■ 크기 M 의 배열(테이블이라 불림)

◆ 사전을 해시테이블로 구현할 때, 목표는 항목 (k, e) 를 첨자 $i = h(k)$ 에 저장하는 것



간단한 예

- ◆ (전화번호, 이름) 항목들을 저장하는 사전을 위한 해시테이블을 설계하자 - 여기서 전화번호는 10자리수의 양의 정수로 가정
- ◆ 설계된 해시테이블은 크기 $M = 10,000$ 의 배열과 아래 해시함수를 사용 $h(x) = x$ 의 마지막 네 자리



해시함수

◆ 해시함수(hash function)는 보통 두 함수의 복합체로 명세

- 해시코드맵(hash code map) $h_1: \text{keys} \rightarrow \text{integers}$
- 압축맵(compression map) $h_2: \text{integers} \rightarrow [0, M-1]$

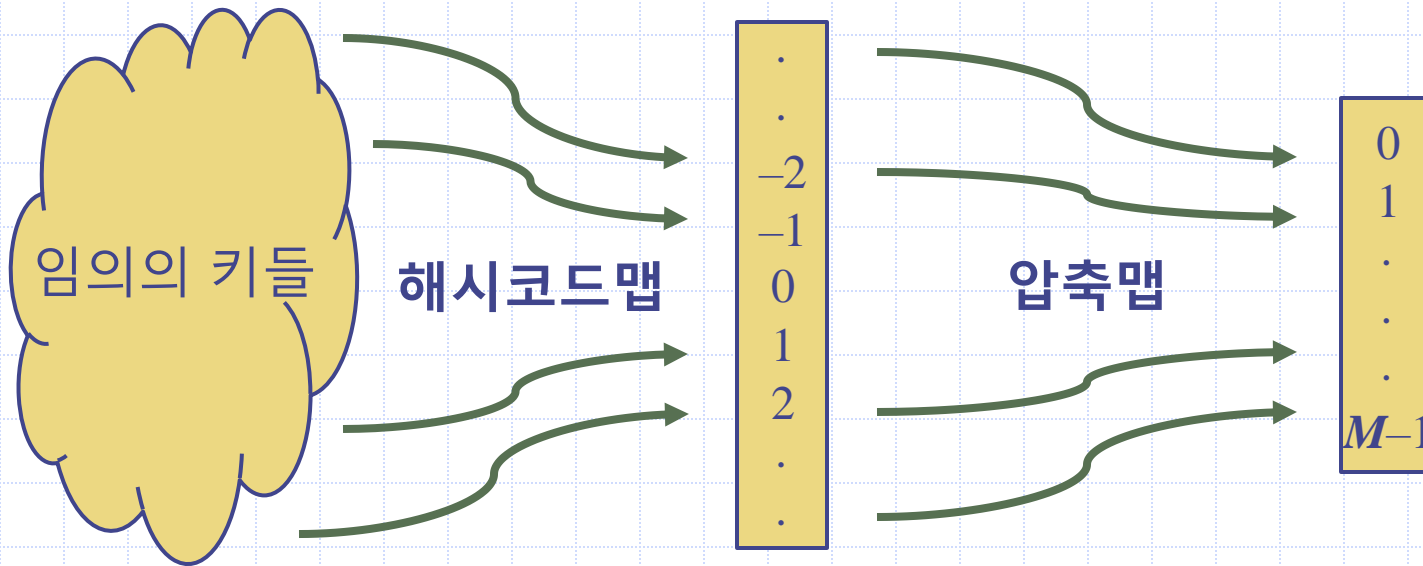
◆ 먼저 해시코드맵을 적용하고 그 결과에 압축맵을 적용 - 즉,

$$h(k) = h_2(h_1(k))$$

◆ 좋은 해시함수가 되기 위한 조건

- 키들을 외견상 무작위하게(random) 분산시켜야 한다
- 계산이 빠르고 쉬워야 한다(가능하면 상수시간)

해시함수 예



◆ 예

- 학번 \rightarrow 마지막 4 자리 수 \rightarrow 방번호 $[0, 2]$
- 식별자 \rightarrow 문자합 \rightarrow 심볼 테이블 행번호 $[0, 27]$



해시코드맵

- ◆ 메모리 주소(memory address)
 - 키 개체의 메모리 주소를 정수로 재해석(모든 Java 객체들의 기본 해시코드)
 - 일반적으로 만족스러우나 수치 또는 문자열 키에는 적용 곤란

- ◆ 정수 캐스트(integer cast)
 - 키의 비트값을 정수로 재해석
 - 정수형에 할당된 비트 수를 초과하지 않는 길이의 키에는 적당
 - ◆ 예: Java의 byte, short, int, float



해시코드맵 (conti.)

◆ 요소합(component sum)

- 키의 비트들을 고정길이(예: 16 또는 32bits)의 요소들로 분할한 후 각 요소를 합한다(overflow는 무시)
- 정수형에 할당된 비트 수 이상의 고정길이의 수치 키에 적당
 - ◆ 예: Java의 long, double
- 문자의 순서에 의미가 있는 문자열 키에는 부적당
 - ◆ 예: temp01-temp10, stop-tops-spot-pots



해시코드맵 (conti.)

◆ 다항 누적(polynomial accumulation)

- 요소합과 마찬가지로, 키의 비트들을 고정길이(예: 8, 16, 32bits)의 요소들로 분할

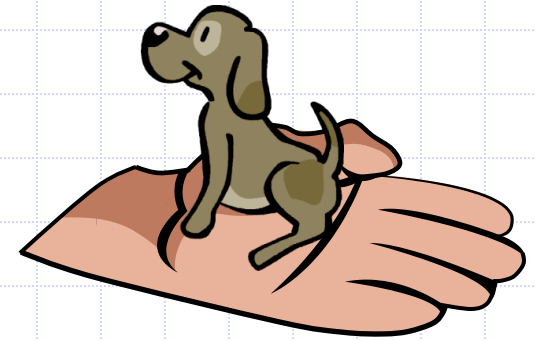
$$a_0 a_1 \dots a_{n-1}$$

- 고정값 z 를 사용하여 각 요소의 위치에 따른 별도 계산을 부과한 다항식 $p(z)$ 를 계산(overflow는 무시)

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$$

- 문자열에 특히 적당
 - ◆ 예: 고정값 $z = 33$ 을 선택할 경우, 50,000개의 영단어에 대해 단지 6회의 충돌 발생

압축 맵



◆ 나누기 (division)

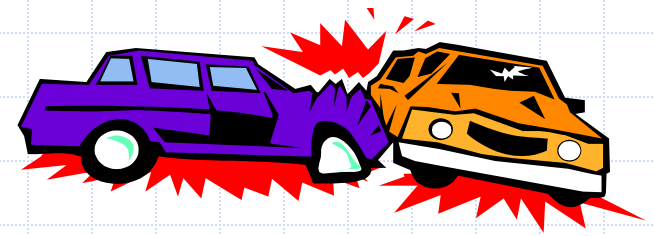
- $h_2(k) = |k| \% M$
- 해시테이블의 크기 M 은 일반적으로 소수(prime)로 선택

◆ 승합제 (multiply, add and divide, **MAD**)

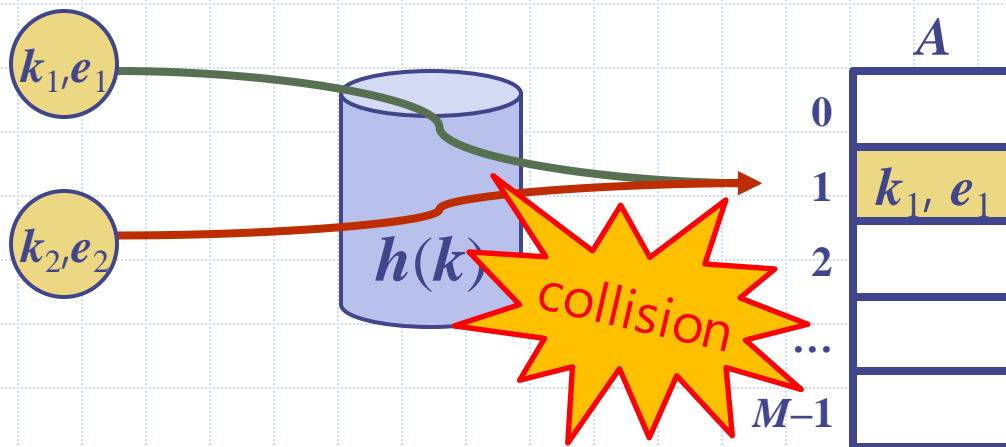
- $h_2(k) = |ak + b| \% M$
- a 와 b 는 음이 아닌 정수로서
 $a \% M \neq 0$

그렇지 않으면, 모든 정수가 동일한 값 b 로 매핑됨

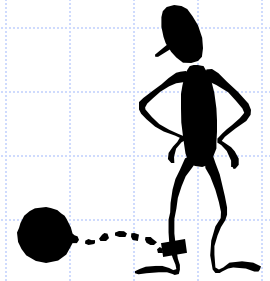
충돌 해결



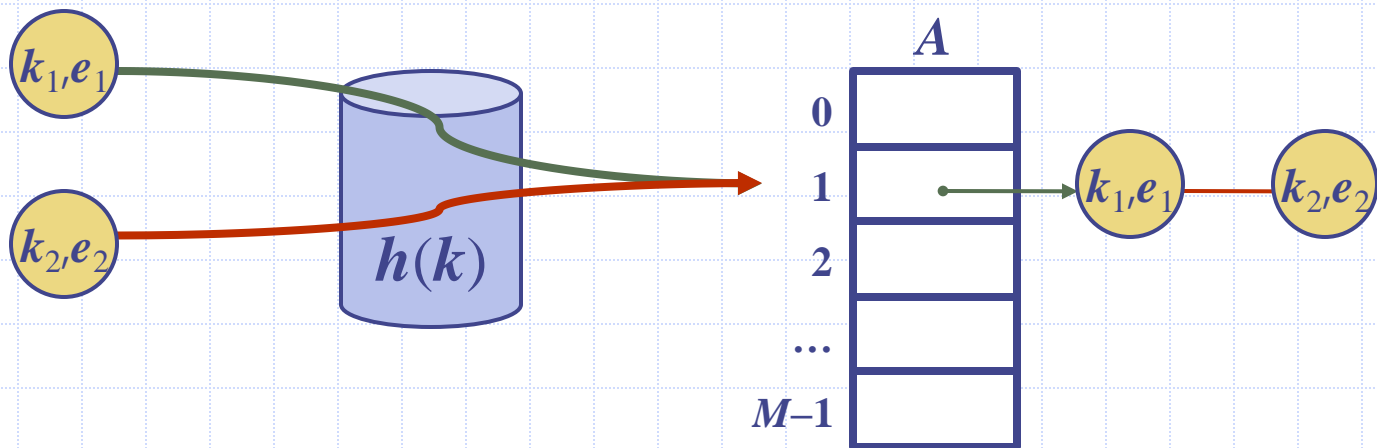
- ◆ 충돌(collision): 두 개 이상의 원소들이 동일한 셀로 매핑
- ◆ 즉, 상이한 키, k_1 과 k_2 에 대해 $h(k_1) = h(k_2)$ 면 "충돌이 일어났다"고 말한다
- ◆ 충돌 해결(collision resolution)을 위한 일관된 전략 필요



분리연쇄법



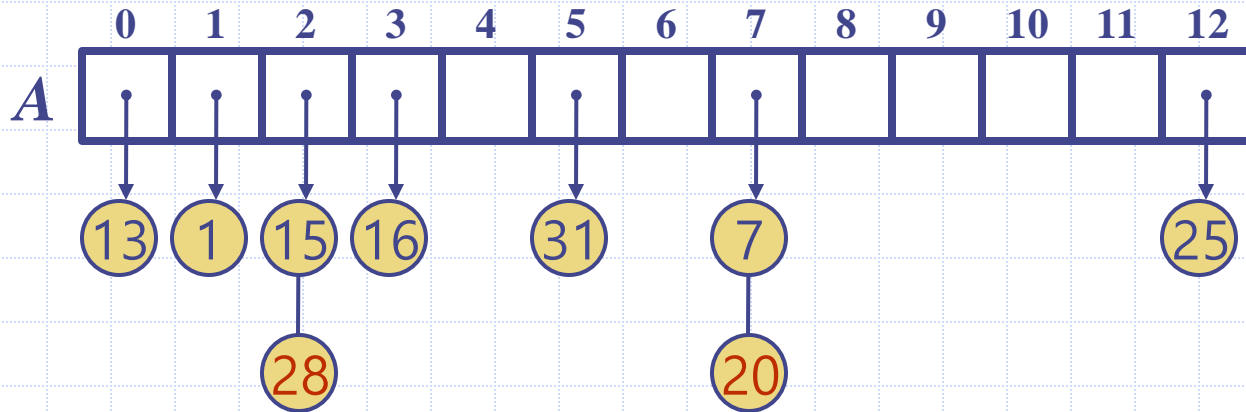
- ◆ 분리연쇄법(separate chaining) 또는 연쇄법에서는 각 버킷 $A[i]$ 는 리스트 L_i 에 대한 참조를 저장 – 여기서 L_i 는:
 - 해시함수가 버킷 $A[i]$ 로 매핑한 모든 항목들을 저장
 - 무순리스트 또는 기록파일 방식을 사용하여 구현된 미니 사전이라 볼 수 있다
- ◆ 장단점: 단순하고 빠르다는 장점이 있으나 테이블 외부에 추가적인 저장공간을 요구



분리연쇄법 예

◆ 예

- $h(k) = k \% M$
- 키(주어진 순서대로 삽입): 25, 13, 16, 15, 7, 28, 31, 20, 1



참고: 리스트에 추가되는 항목들의 위치는, 리스트의 테일 포인터를 별도로 유지하지 않는 경우라면 리스트의 맨 앞에 삽입하는 것이 유리

분리연쇄법 알고리즘

Alg *findElement(k)*

input bucket array $A[0..M-1]$,
hash function h , key k
output element with key k

1. $v \leftarrow h(k)$
2. **return** $A[v].findElement(k)$

Alg *insertItem(k, e)*

1. $v \leftarrow h(k)$
2. $A[v].insertItem(k, e)$
3. **return**

Alg *removeElement(k)*

1. $v \leftarrow h(k)$
2. **return** $A[v].removeElement(k)$

Alg *initBucketArray()*

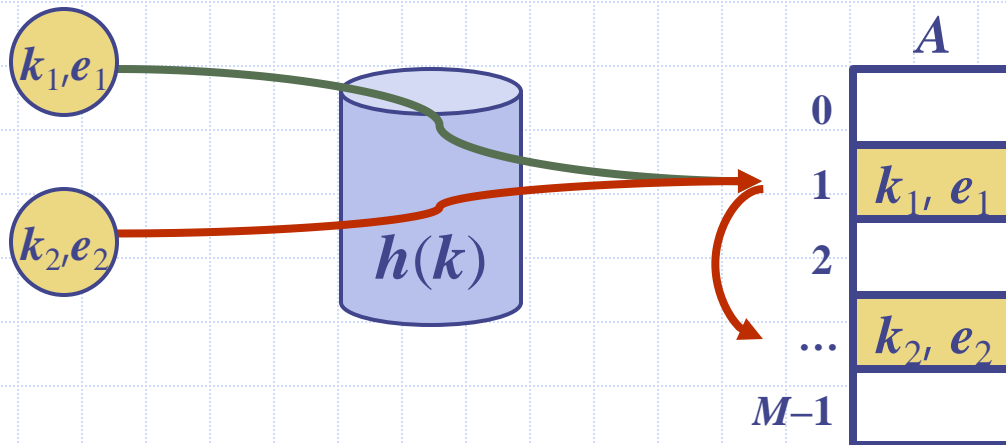
input bucket array $A[0..M-1]$
output bucket array $A[0..M-1]$
initialized with null buckets

1. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $M - 1$
 $A[i] \leftarrow \text{empty list}$
2. **return**

개방주소법



- ◆ 개방주소법(open addressing): 충돌 항목을 테이블의 다른 셀에 저장
- ◆ 장단점: 분리연쇄법에 비해 공간 사용을 절약하지만, 삭제가 어렵다는 것과 사전 항목들이 연이어 군집화(clustering)





선형조사법

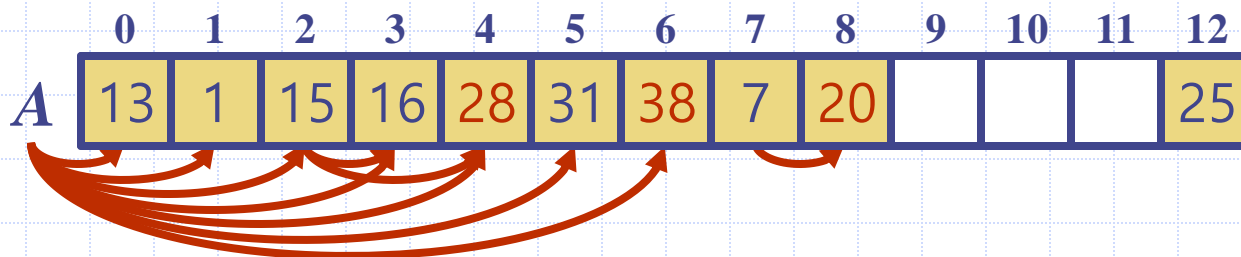
- ◆ 선형조사법(linear probing): 충돌 항목을 (원형으로) 바로 다음의 비어 있는 테이블 셀에 저장함으로써 충돌을 처리 - 즉, 다음 순서에 의해 버킷을 조사

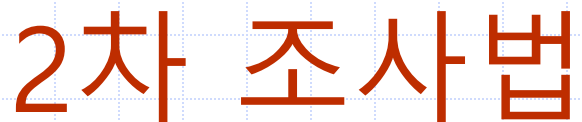
$$A[(h(k) + f(i)) \% M], f(i) = i, i = 0, 1, 2, \dots$$

(즉, $A[h(k)]$, $A[h(k) + 1]$, $A[h(k) + 2]$, $A[h(k) + 3]$, ...의 순서)

- ◆ 검사되는 각 테이블 셀은 조사(probe)라 불린다
- ◆ 충돌 항목들은 군집화하며, 이후의 충돌에 의해 더욱 긴 조사열(probe sequence)로 군집 - "1차 군집화(primary clustering)"
- ◆ 예

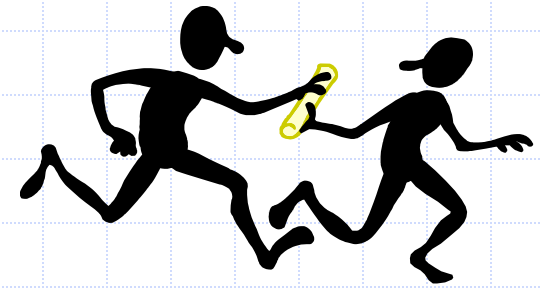
- $h(k) = k \% M$
- 키(주어진 순서대로 삽입): 25, 13, 16, 15, 7, 28, 31, 20, 1, 38





-
- Diagram illustrating an array A with 13 elements. The array is labeled A on the left. The elements are: 13, 1, 15, 16, (empty), 31, 28, 7, 20, (empty), (empty), 38, 25. The indices 0 through 12 are shown above the array. Red arrows indicate comparisons between elements: from index 0 to 1, 2, 3, 5, 6, 8, 11; from index 1 to 2, 3, 5, 6, 8, 11; from index 2 to 3, 5, 6, 8, 11; from index 3 to 5, 6, 8, 11; from index 5 to 6, 8, 11; from index 6 to 8, 11; from index 8 to 11; and from index 11 to 12.

이중해싱

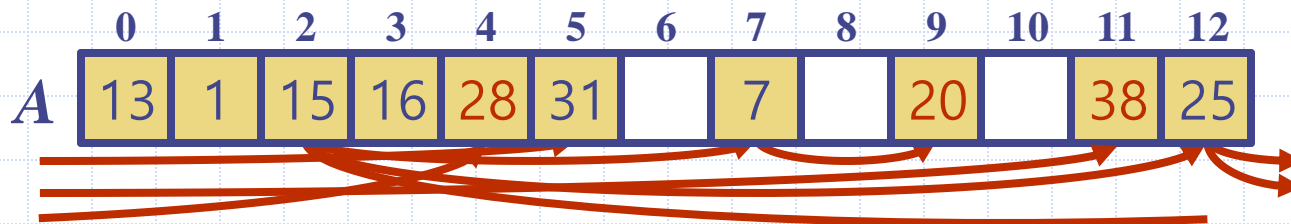


- ◆ 이중해싱(double hashing): 두번째의 해시함수 h' 를 사용하여 다음 순서에 의해 버킷을 조사

$$A[(h(k) + f(i)) \% M], f(i) = i \cdot h'(k), i = 0, 1, 2, \dots$$

(즉, $A[h(k)], A[h(k) + h'(k)], A[h(k) + 2h'(k)], A[h(k) + 3h'(k)], \dots$ 의 순서)

- ◆ 동일한 해시값을 가지는 키들도 상이한 조사를 수반할 수 있기 때문에 군집화를 최소화
- ◆ h' 는 계산 결과가 0이 되면 안 된다
- ◆ 최선의 결과를 위해, $h'(k)$ 와 M 은 서로소(relative prime)여야 한다
 - $d_1 \cdot M = d_2 \cdot h'(k)$ 이면, d_2 개의 조사만 시도 - 즉, 버킷들 중 d_2/M 만 검사
 - $h'(k) = q - (k \% q)$ 또는 $1 + (k \% q)$ 를 사용 - 단, $q < M$ 은 소수며 M 역시 소수
- ◆ 예
 - $h(k) = k \% M, h'(k) = 11 - (k \% 11)$
 - 키(주어진 순서대로 삽입): 25, 13, 16, 15, 7, 28, 31, 20, 1, 38



개방주소법 알고리즘

Alg *findElement*(k)

input bucket array $A[0..M-1]$,
hash function h , key k

output element with key k

```
1.  $v \leftarrow h(k)$ 
2.  $i \leftarrow 0$ 
3. while ( $i < M$ )
     $b \leftarrow getNextBucket(v, i)$ 
    if ( $isEmpty(A[b])$ )
        return NoSuchKey
    elseif ( $k = key(A[b])$ )
        return  $element(A[b])$ 
    else
         $i \leftarrow i + 1$ 
4. return NoSuchKey
```

Alg *insertItem*(k, e)

```
1.  $v \leftarrow h(k)$ 
2.  $i \leftarrow 0$ 
3. while ( $i < M$ )
     $b \leftarrow getNextBucket(v, i)$ 
    if ( $isEmpty(A[b])$ )
        Set bucket  $A[b]$  to ( $k, e$ )
        return
    else
         $i \leftarrow i + 1$ 
4. overflowException()
5. return
```

개방주소법 알고리즘 (conti.)

Alg *getNextBucket*(v, i)
 {linear probing}

1. **return** $(v + i) \% M$

Alg *getNextBucket*(v, i)
 {quadratic probing}

1. **return** $(v + i^2) \% M$

Alg *getNextBucket*(v, i)
 {double hashing}

1. **return** $(v + i \cdot h'(k)) \% M$

Alg *initBucketArray*() {example}

input bucket array $A[0..M-1]$

output bucket array $A[0..M-1]$

initialized with null buckets

1. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $M - 1$

$A[i].\text{empty} \leftarrow 1$ {set empty}

2. **return**

Alg *isEmpty*(b)

input bucket b

output boolean

1. **return** $b.\text{empty}$

개방주소법에서의 갱신



◆ 비활성화 전략

- 기존 태그
 - ◆ **empty**: 비어 있는 셀
 - ◆ **active**: 사용 중인 셀(활성)
- 추가 태그
 - ◆ **inactive**: 삭제된 셀(비활성)

◆ findElement(k)

1. 셀 $h(k)$ 에서 출발하여, 다음 가운데 하나일 때까지 조사
 - ◆ 비어 있는 셀을 만나면 탐색 실패
 - ◆ 활성 셀의 항목 (k, e) 를 만나면 e 를 반환
 - ◆ M 개의 셀을 검사
2. 탐색 실패

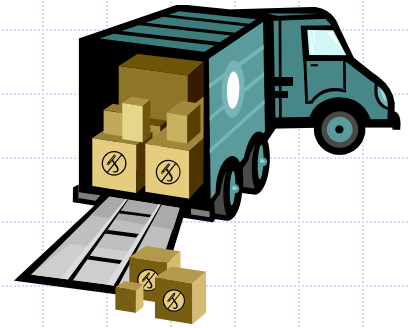
◆ insertItem(k, e)

1. 셀 $h(k)$ 에서 출발하여, 다음 가운데 하나일 때까지 조사
 - ◆ 비어 있거나 비활성인 셀을 만나면 항목 (k, e) 를 셀에 저장한 후 **활성화**
 - ◆ M 개의 셀을 검사
2. 테이블 만원 예외를 발령

◆ removeElement(k)

1. 셀 $h(k)$ 에서 출발하여, 다음 가운데 하나일 때까지 조사
 - ◆ 비어 있는 셀을 만나면 탐색 실패
 - ◆ 활성 셀의 항목 (k, e) 를 만나면 **비활성화**하고 e 를 반환
 - ◆ M 개의 셀을 검사
2. 탐색 실패

적재율



◆ 해시테이블의 **적재율**(load factor), $\alpha = n/M$

- 즉, 좋은 해시함수를 사용할 경우의 각 버킷의 **기대 크기**

◆ 적재율은 낮게 유지되어야 한다(가능하면 1 아래로)

◆ **좋은** 해시함수가 주어졌다면, **findElement**, **insertItem**, **removeElement** 각 작업의 **기대실행시간**(expected running time): $O(\alpha)$

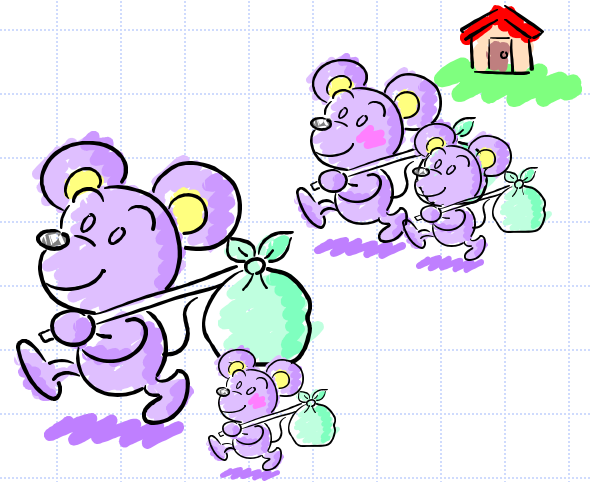
◆ 분리연쇄법

- $\alpha > 1$ 이면, 작동은 하지만 비효율적
- $\alpha \leq 1$ 이면(기왕이면 0.75 미만이면), $O(\alpha) = O(1)$ 의 **기대실행시간** 성취 가능

◆ 개방주소법

- 항상 $\alpha \leq 1$
- $\alpha > 0.5$ 면, 선형 및 2차 조사법인 경우 군집화 가능성 높음
- $\alpha \leq 0.5$ 면, $O(\alpha) = O(1)$ **기대실행시간**

재해싱



- ◆ 해시테이블의 적재율을 상수(보통 0.75) 이하로 유지하기 위해서는, 원소를 삽입할 때마다 이 한계를 넘기지 않기 위해 추가적인 작업 필요
- ◆ 언제 **재해싱**(rehashing) 하는가?
 - 적재율의 최적치를 초과했을 때
 - 삽입이 실패한 경우
 - 너무 많은 비활성 셀들로 포화되어 성능이 저하되었을 때

◆ 재해싱의 단계

1. 버킷 배열의 크기를 증가시킨다(원래 배열의 대략 두 배 크기로 - 이때 새 배열의 크기를 소수로 설정하는 것에 유의)
2. 새 크기에 대응하도록 압축맵을 수정
3. 새 압축맵을 사용하여, 기존 해시테이블의 모든 원소들을 새 테이블에 삽입

해싱의 성능

- ◆ 해시테이블에 대한 탐색, 삽입, 삭제: 최악의 경우 $O(n)$ 시간 소요
- ◆ 최악의 경우: 사전에 삽입된 모든 키가 충돌할 경우
- ◆ **적재율**(load factor), $\alpha = n/N$ 은 해시테이블의 성능을 좌우
- ◆ 해시값들을 난수(random numbers)와 같다고 가정하면, 개방주소법에 의한 삽입을 위한 기대 조사 횟수는 $1/(1 - \alpha)$ 라고 알려짐
- ◆ 해시테이블에서 모든 **사전** ADT 작업들의 **기대실행시간**: $O(1)$
- ◆ 실전에서, 적재율이 1(즉, 100%)에 가깝지만 **않다면** 해싱은 매우 빠르다
- ◆ **응용**
 - 소규모 데이터베이스
 - 컴파일러
 - 브라우저 캐시

응용문제: 연결리스트 동일성



- ◆ S 와 T 는 각각 수들의 집합이며, 무순의 (집합이므로 당연히) 유일한 수들의 단일연결리스트로 구현되어 있다
- ◆ 각 리스트의 헤드노드로만 접근 가능하며 각각의 길이는 모른다
- ◆ $S = T$ 인지 결정하는 $O(\min(|S|, |T|))$ -기대시간 알고리즘을 의사코드로 작성하라

해결

- ◆ 먼저, 두 집합의 크기가 같은지 검사하여, 크기가 다르면 둘이 동일하지 않다고 반환 – $O(\min(|S|, |T|))$ 시간 소요
- ◆ 다음, 두 집합의 크기가 같으면, 원소들도 같은지 검사
- ◆ 크기 $\Theta(|S|)$ 의 분리연쇄법에 의한 **해시테이블**을 만들고, 반복적으로 S 의 각 원소를 해시테이블에 삽입
- ◆ 그 다음엔, T 의 각 원소들에 대해 해시테이블에 존재하는지 탐색
- ◆ T 의 어떤 원소라도 해시테이블에 존재하지 않으면 두 집합이 동일하지 않다고 반환하고, T 의 마지막 원소까지 존재하면 두 집합이 동일하다고 반환
- ◆ $|S| = |T|$ 인 상황에서, 해시테이블에 대한 삽입과 탐색 작업들은 총 $O(|S|)$ **기대시간** 소요
- ◆ 따라서 전체 실행시간: $O(\min(|S|, |T|))$ -**기대시간**

해결: (conti.)

Alg *areEquivalent*(S, T)

input singly linked list S, T of distinct numbers

output boolean indicating $S = T$

```
1.  $s \leftarrow S$ 
2.  $t \leftarrow T$ 
3. while  $((s \neq \emptyset) \ \& \ (t \neq \emptyset)) \{ \mathbf{O}(\min(|S|, |T|)) \}$ 
     $s \leftarrow s.\text{next}$ 
     $t \leftarrow t.\text{next}$ 
4. if  $((s \neq \emptyset) \ || \ (t \neq \emptyset))$ 
    return False
```

```
5.  $H \leftarrow$  create a hash table
6.  $s \leftarrow S$ 
7. while  $(s \neq \emptyset) \quad \{ \mathbf{O}(|S|) \}$ 
     $H.\text{insertItem}(s.\text{elem}, s.\text{elem})$ 
     $s \leftarrow s.\text{next}$ 
8.  $t \leftarrow T$ 
9. while  $(t \neq \emptyset) \quad \{ \mathbf{O}(|T|) \}$ 
     $e \leftarrow H.\text{findElement}(t.\text{elem})$ 
    if  $(e = \text{NoSuchKey})$ 
        return False
     $t \leftarrow t.\text{next}$ 
10. return True
     $\{ \text{Total } \mathbf{O}(\min(|S|, |T|)) \}$ 
```

응용문제: 비활성화 방식 삭제



◆ 비활성화 방식의 삭제를 구사하는 개방주소법의 관련 알고리즘을 의사코드로 작성하라

- `findElement(k)`
- `insertItem(k, e)`
- `removeElement(k)`

◆ 사용 가능

- `deactivate(b)`: 버킷 b 를 비활성으로 표시
- `activate(b)`: 버킷 b 를 활성으로 표시
- `inactive(b)`: 버킷 b 가 비활성인지 여부를 반환
- `active(b)`: 버킷 b 가 활성인지 여부를 반환

해결

Alg *findElement*(*k*)

```
1.  $v \leftarrow h(k)$ 
2.  $i \leftarrow 0$ 
3. while ( $i < M$ )
     $b \leftarrow getNextBucket(v, i)$ 
    if (isEmpty(A[b]))
        return NoSuchKey
    elseif (active(A[b])
        & ( $k = key(A[b])$ ))
        return element(A[b])
    else
         $i \leftarrow i + 1$ 
4. return NoSuchKey
```

Alg *insertItem*(*k*, *e*)

```
1.  $v \leftarrow h(k)$ 
2.  $i \leftarrow 0$ 
3. while ( $i < M$ )
     $b \leftarrow getNextBucket(v, i)$ 
    if (isEmpty(A[b]) || inactive(A[b]))
         $A[b] \leftarrow (k, e)$ 
        activate(A[b])
        return
    else
         $i \leftarrow i + 1$ 
4. overflowException()
5. return
```


해결

Alg *removeElement*(k)

1. $v \leftarrow h(k)$

2. $i \leftarrow 0$

3. **while** ($i < M$)

$b \leftarrow getNextBucket(v, i)$

if (*isEmpty*($A[b]$))

return *NoSuchKey*

elseif (*active*($A[b]$) & ($k = key(A[b])$))

$e \leftarrow element(A[b])$

deactivate($A[b]$)

return e

else

$i \leftarrow i + 1$

4. **return** *NoSuchKey*