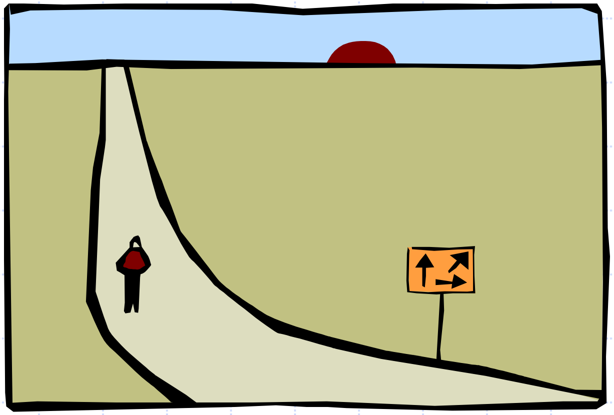
그래프 순회

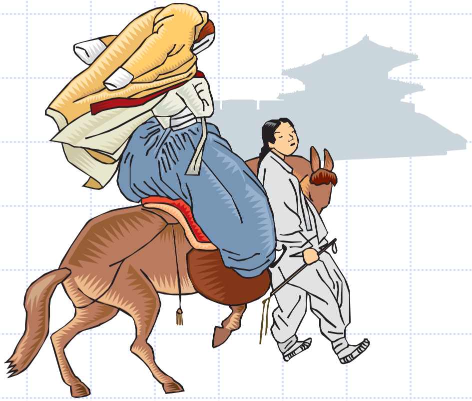


Outline

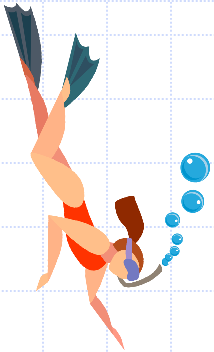
- 14.1 그래프 순회
- 14.2 깊이우선탐색
- 14.3 너비우선탐색
- 14.4 응용문제

그래프 순회

- **순회**(traversal): 모든 정점과 간선을 검사함으로써 그래프를 탐험하는 체계적인 절차
- 순회 예
  - 수도권 전철망의 모든 역(정점)의 위치를 출력
  - 항공사의 모든 항공편(간선)에 대한 노선 정보를 수집
  - 웹 검색엔진의 데이터 수집 부문은 웹의 하이퍼텍스트 문서(정점)와 문서 내 링크(간선)를 검사함으로써 써핑
- 주요 전략
  - 깊이우선탐색
  - 너비우선탐색



깊이우선탐색



- **깊이우선탐색**(depth-first search, **DFS**): 그래프를 순회하기 위한 일반적 기법
- 그래프 G에 대한 DFS 순회로 가능한 것들
  - G의 모든 정점과 간선을 방문
  - G가 연결그래프인지 결정
  - G의 연결요소들을 계산
  - G의 신장숲을 계산
- n개의 정점과 m개의 간선을 가진 그래프에 대한 DFS는 $O(n + m)$ 시간 소요
- DFS를 **확장**하면 해결 가능한 그래프 문제들
  - 두 개의 주어진 정점 사이의 경로를 찾아 보고하기
  - 그래프 내 싸이클 찾기
- 그래프에 대한 **깊이우선탐색**은 이진트리에 대한 **선위순회**와 유사

DFS

Alg ***DFS*(*G*)**
input graph ***G***
output labeling of the edges of ***G*** as tree edges and back edges

{The algorithm uses a mechanism for setting and getting "labels" of vertices and edges}

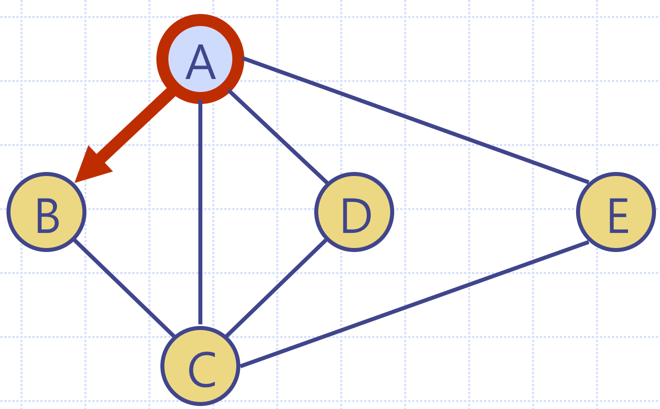
1. **for each** $u \in G.vertices()$
   $l(u) \leftarrow Fresh$
2. **for each** $e \in G.edges()$
   $l(e) \leftarrow Fresh$
3. **for each** $v \in G.vertices()$
   if $(l(v) = Fresh)$
   $rDFS(G, v)$

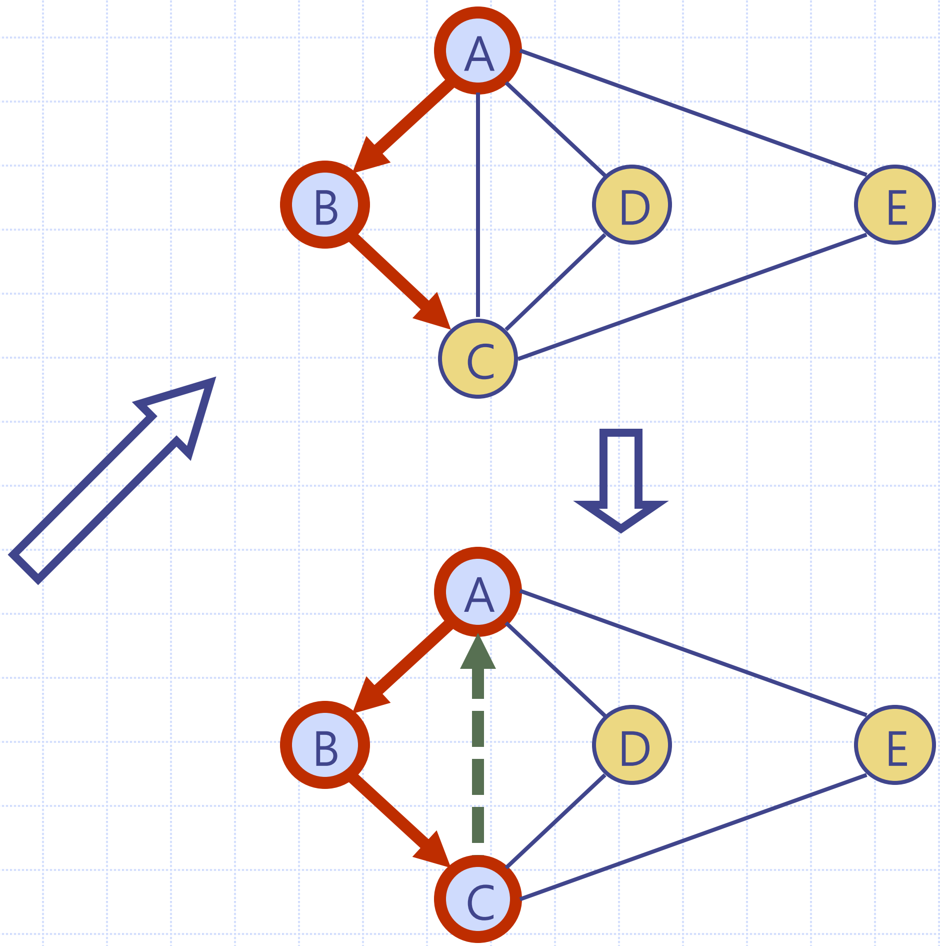
Alg ***rDFS*(*G*, *v*)**
input graph ***G*** and a start vertex ***v*** of ***G***
output labeling of the edges of ***G*** in the connected component of ***v*** as tree edges and back edges

1. $l(v) \leftarrow Visited$
2. **for each** $e \in G.incidentEdges(v)$
   if $(l(e) = Fresh)$
   $w \leftarrow G.opposite(v, e)$
   if $(l(w) = Fresh)$
   $l(e) \leftarrow Tree$
   $rDFS(G, w)$
   else
   $l(e) \leftarrow Back$

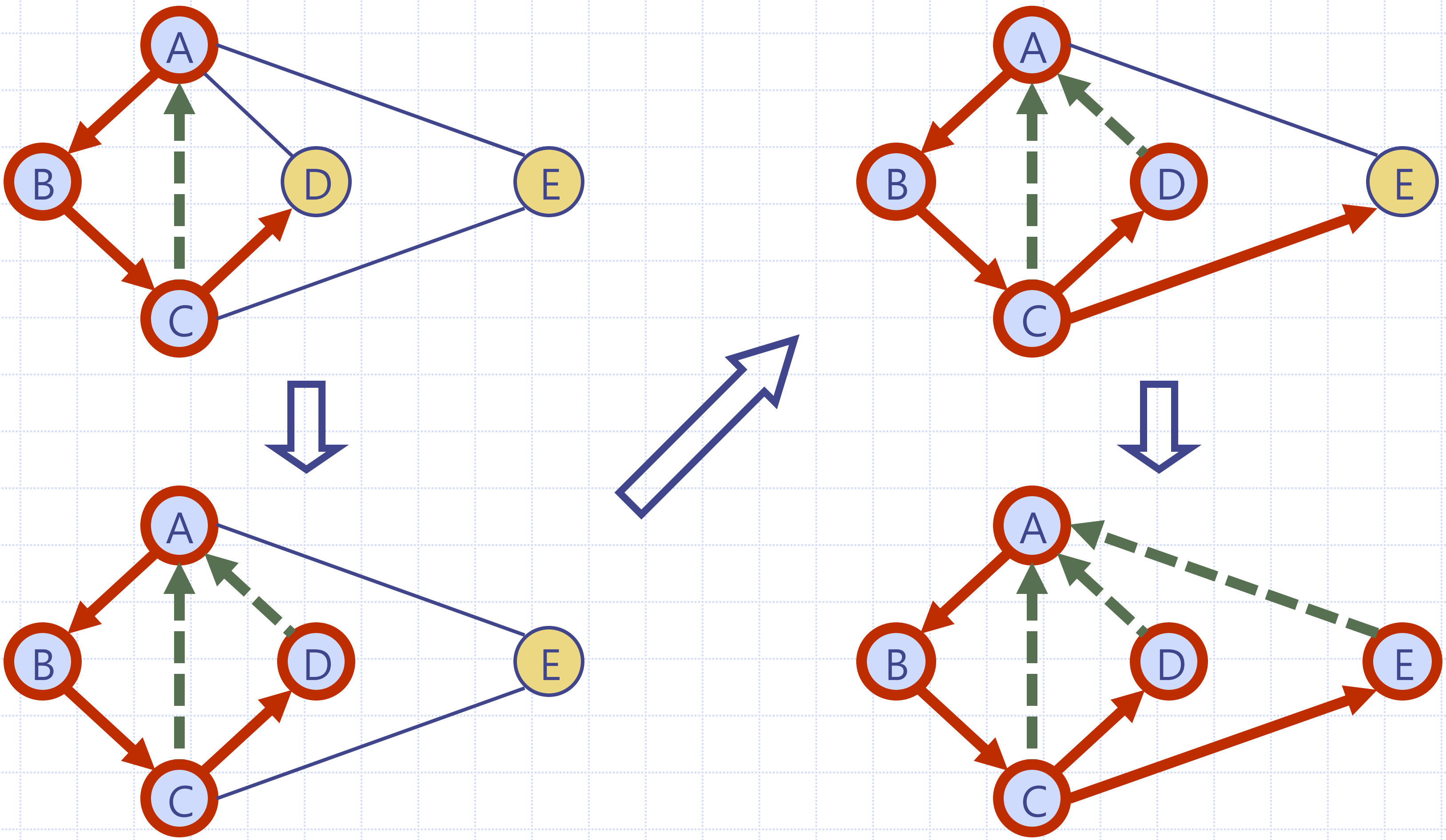
DFS 수행 예

- A 새로운 정점
- A 방문한 정점
- 새로운 간선
- 트리간선
- 후향간선



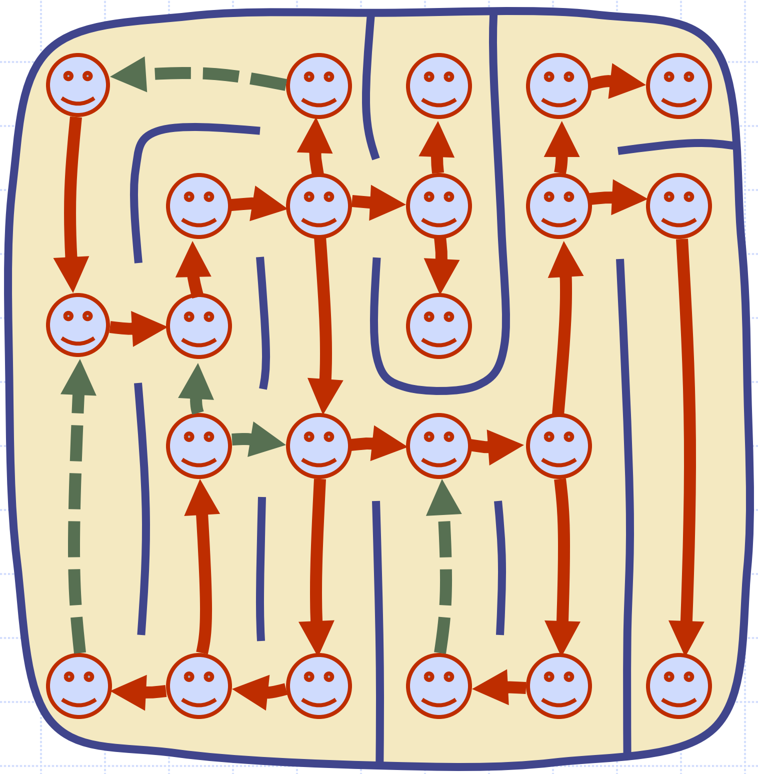


DFS 수행 예 (conti.)



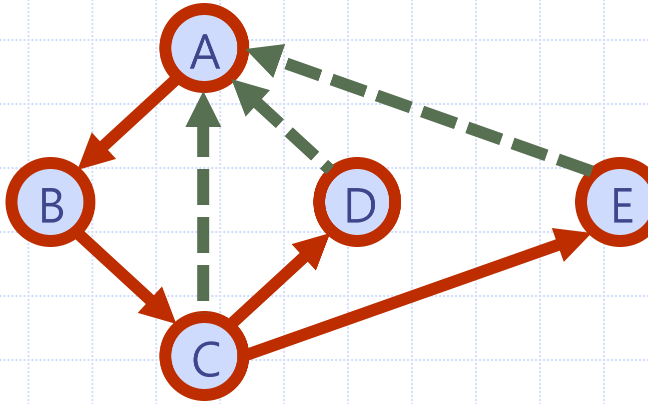
DFS와 미로 순회

- DFS 알고리즘은 **미로**를 탐험하는데 있어서의 고전적이고 **모험적**인 전략과 유사
  - 방문한 **교차로, 모퉁이, 막힌 복도**(모두 **정점**)를 표시
  - 순회한 **복도**(모두 **간선**)를 표시
  - 입구(출발정점)로 되돌아가는 경로를 끈(재귀 스택)을 사용하여 추적



DFS 속성

- **속성 1**
  - rDFS(G, v)는 v의 연결요소내의 모든 정점과 간선을 방문
- **속성 2**
  - rDFS(G, v)에 의해 라벨된 트리 간선들은 v의 연결요소의 **신장트리**(**DFS tree**라 불림)를 형성

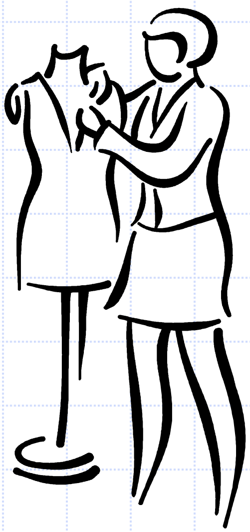


DFS 분석

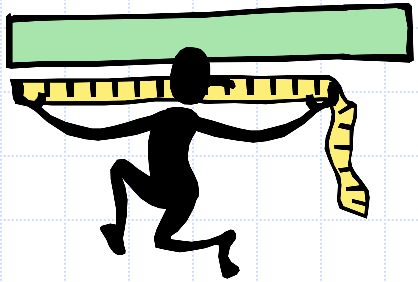
- 정점과 간선의 **라벨**을 쓰고 읽는데 **O**(1) 시간 소요
  - **참고:** 정점이나 간선을 구현하는 노드 위치의 기능성에 *"Visited"* 플래그를 포함하도록 확장 가능
- 각 **정점**은 두 번 라벨
  - 한 번은 ***Fresh***로, 또 한 번은 ***Visited***로
- 각 **간선**은 두 번 라벨
  - 한 번은 ***Fresh***로, 또 한 번은 ***Tree*** 또는 ***Back***으로
- 메쏘드 incidentEdges는 각 **정점**에 대해 한 번 호출
- 그래프가 **인접리스트 구조**로 표현된 경우, DFS는 $\mathbf{O}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})$ 시간에 수행
  - **참고:** $\Sigma_v deg(v) = 2m$

DFS 템플릿 활용

- DFS 순회로 더욱 흥미있는 작업을 수행코자 한다면, DFS 알고리즘을 확장해야 한다
- 이를 DFS 순회 원형 메쏘드의 **특화**(specialization)라 부른다
- DFS를 확장하여 해결할 수 있는 문제의 예
  - 연결성 검사
  - 경로 찾기
  - 싸이클 찾기



너비우선탐색



- **너비우선탐색**(breadth-first search, **BFS**): 그래프를 순회하기 위한 일반적 기법
- 그래프 G에 대한 BFS 순회로 가능한 것들
  - G의 모든 정점과 간선을 방문
  - G가 연결그래프인지 결정
  - G의 연결요소들을 계산
  - G의 신장숲을 계산
- n개의 정점과 m개의 간선을 가진 그래프에 대한 BFS는 $\mathbf{O}(n + m)$ 시간 소요
- BFS를 **확장**하면 해결 가능한 그래프 문제들
  - 두 개의 주어진 정점 사이의 최소 간선을 사용하는 경로를 찾아 보고하기
  - 그래프 내 단순싸이클 찾기
- 그래프에 대한 **너비우선탐색**은 이진트리에 대한 **레벨순회**와 유사

BFS

Alg ***BFS*(*G*)**
input graph ***G***
output labeling of the edges of ***G*** as tree edges and cross edges

{The algorithm uses a mechanism for setting and getting "labels" of vertices and edges}

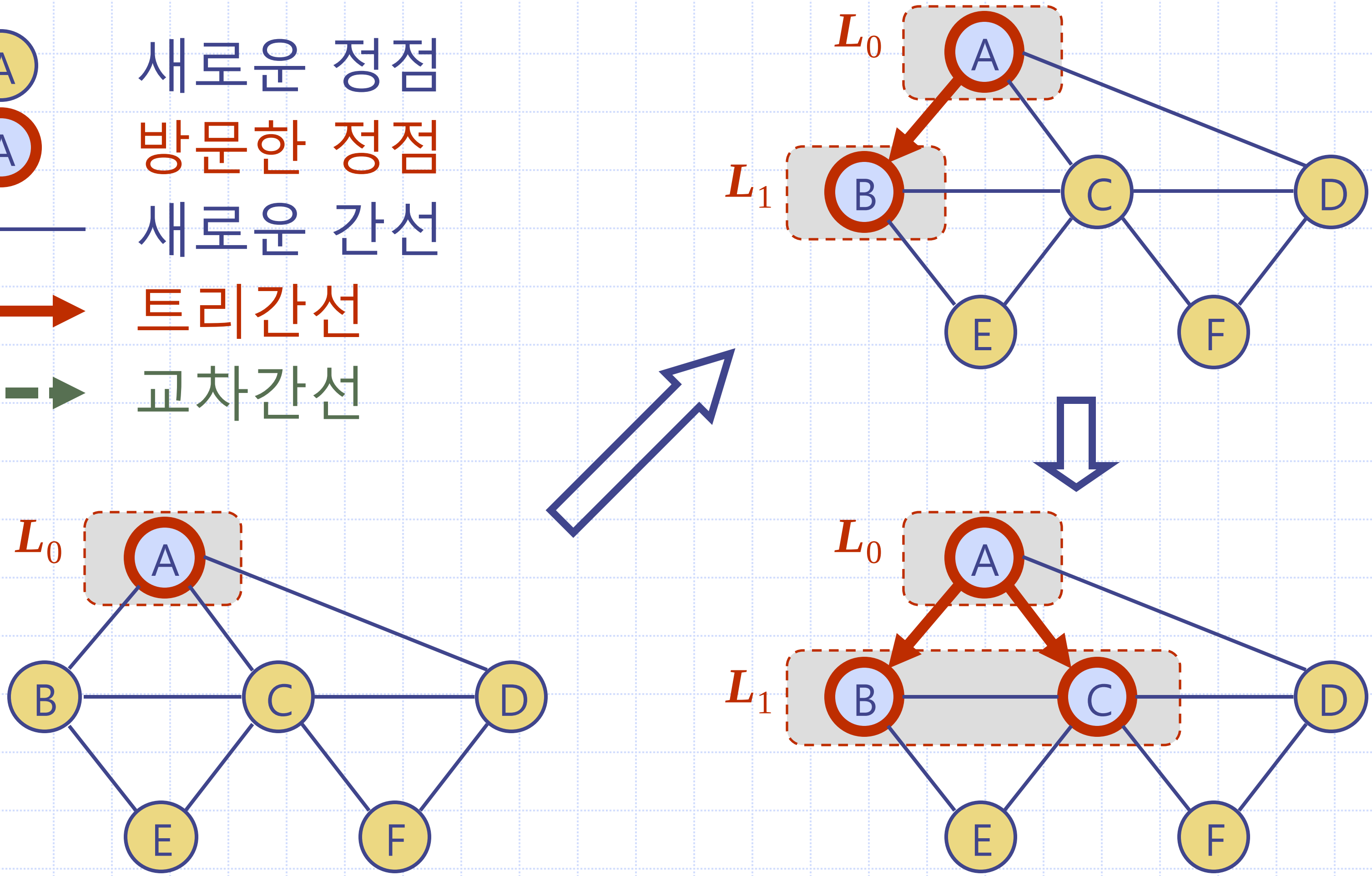
1. **for each** $u \in G.vertices()$
   $l(u) \leftarrow Fresh$
2. **for each** $e \in G.edges()$
   $l(e) \leftarrow Fresh$
3. **for each** $v \in G.vertices()$
   if $(l(v) = Fresh)$
      $BFS1(G, v)$

Alg ***BFS1*(*G*, *v*)**
input graph ***G*** and a start vertex ***v*** of ***G***
output labeling of the edges of ***G*** in the connected component of ***v*** as tree edges and cross edges

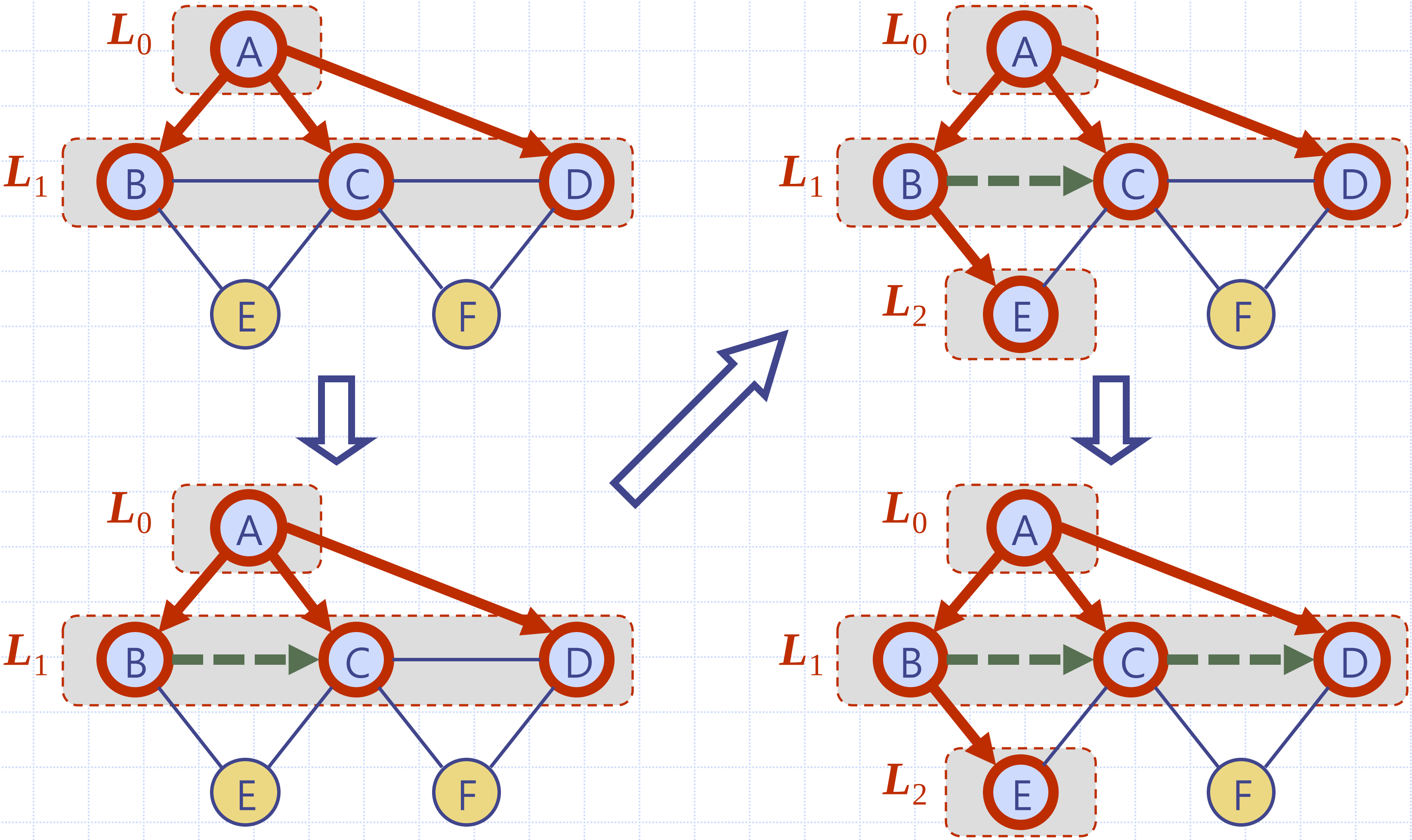
1. $L_0 \leftarrow$ *empty list* {level container}
2. $L_0.addLast(v)$
3. $l(v) \leftarrow Visited$
4. $i \leftarrow 0$
5. **while** $(!L_i.isEmpty())$
   $L_{i+1} \leftarrow$ *empty list*
   for each $v \in L_i.elements()$
      for each $e \in G.incidentEdges(v)$
         if $(l(e) = Fresh)$
            $w \leftarrow G.opposite(v, e)$
            if $(l(w) = Fresh)$
               $l(e) \leftarrow Tree$
               $l(w) \leftarrow Visited$
               $L_{i+1}.addLast(w)$
            else
               $l(e) \leftarrow Cross$
   $i \leftarrow i + 1$

BFS 수행 예

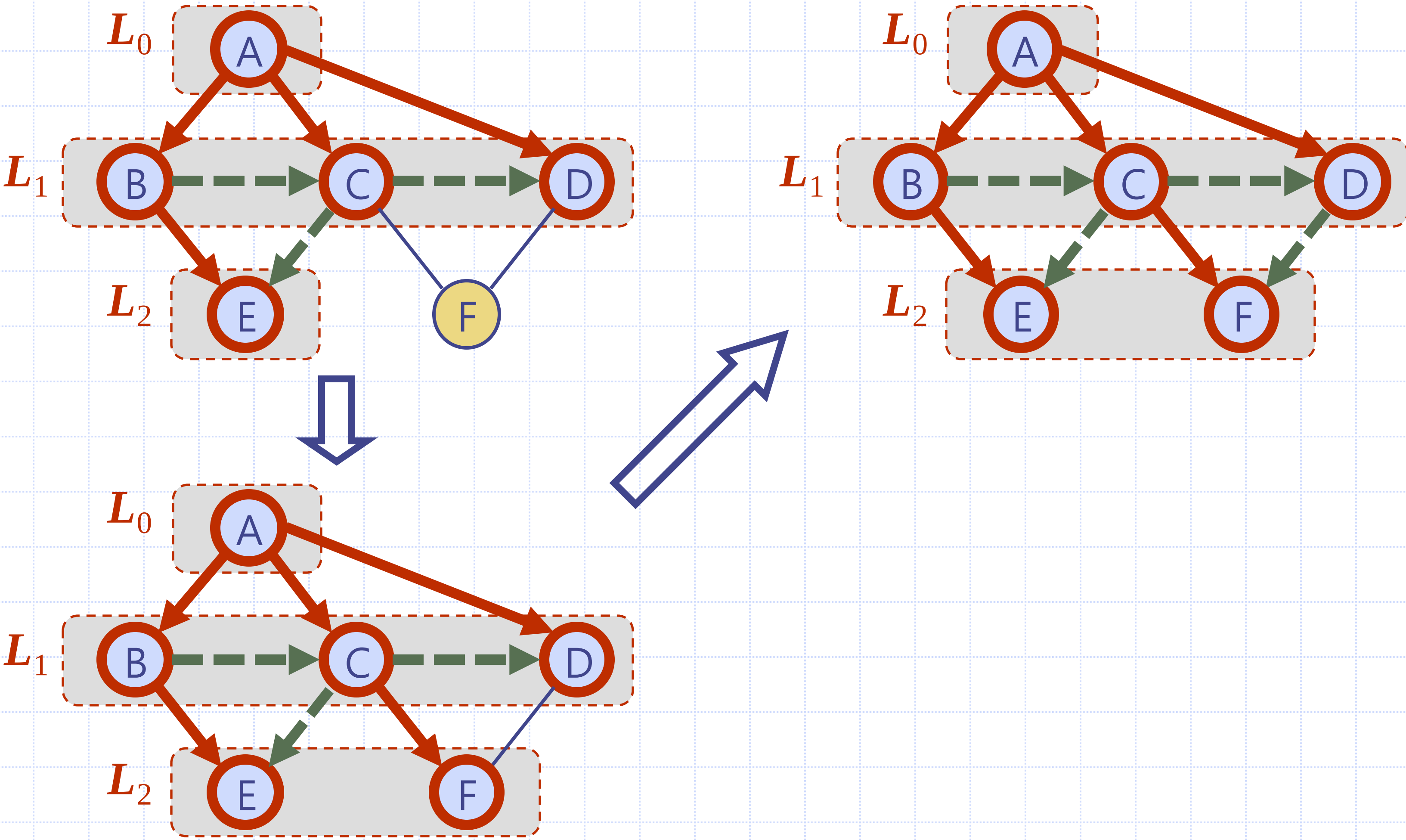
- 새로운 정점
- 방문한 정점
- 새로운 간선
- 트리간선
- 교차간선



BFS 수행 예 (conti.)

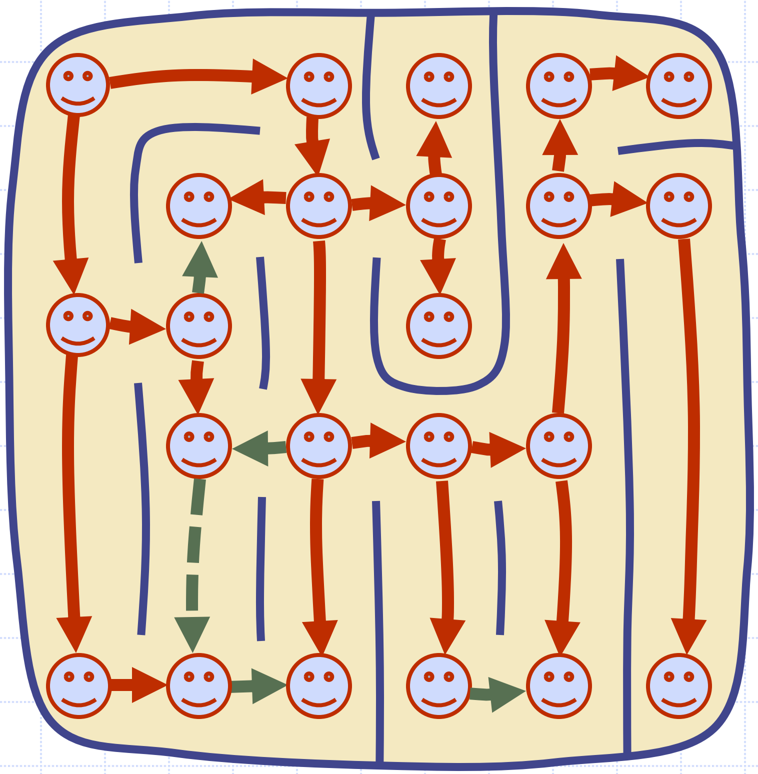


BFS 수행 예 (conti.)



BFS와 미로 순회

- BFS 알고리즘은 **미로**를 탐험하는데 있어서의 다소 **보수적**인 전략과 유사
  - 방문한 **교차로, 모퉁이, 막힌 복도**(모두 **정점**임)를 표시
  - 순회한 **복도**(모두 **간선**임)를 표시
  - **레벨**을 하나씩 증가시키면서 진행



BFS 속성

표기

G_v: v의 연결요소

속성 1

BFS1(G, v)는 G_v의 모든 정점과 간선을 방문

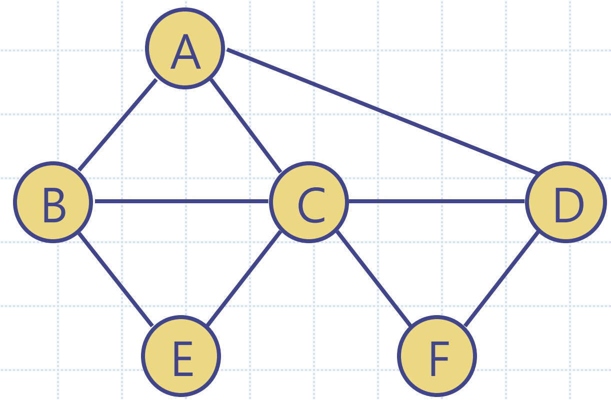
속성 2

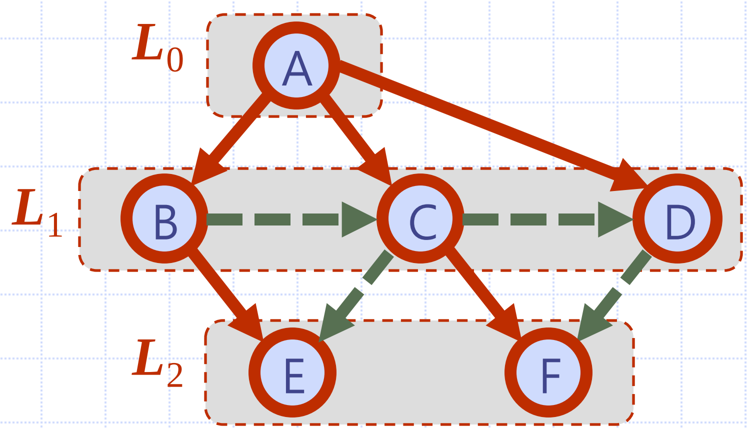
BFS1(G, v)에 의해 라벨된 트리 간선들은 G_v의 **신장트리(BFS tree**라 불림) T_v를 형성

속성 3

L_i 내의 각 정점 w에 대해,

- T_v의 v에서 w로 향하는 경로는 i개의 간선을 가진다
- G_v내의 v에서 w로 향하는 모든 경로는 최소 i개의 간선을 가진다

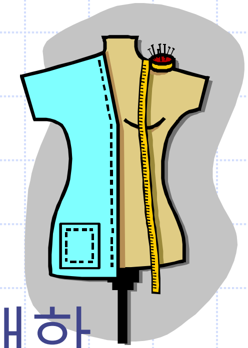




BFS 분석

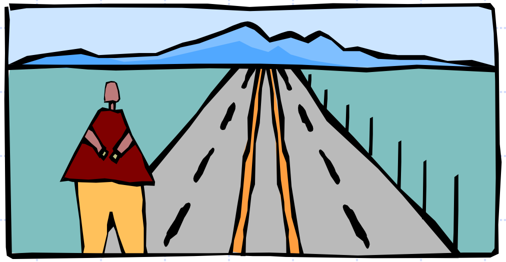
- 정점과 간선의 **라벨**을 쓰고 읽는데 **O**(1) 시간 소요
  - **참고:** 정점이나 간선을 구현하는 노드 위치의 기능성에 "*Visited*" 플래그를 포함하도록 확장 가능
- 각 **정점**은 두 번 라벨
  - 한 번은 ***Fresh***로, 또 한 번은 ***Visited***로
- 각 **간선**은 두 번 라벨
  - 한 번은 ***Fresh***로, 또 한 번은 ***Tree*** 또는 ***Cross***로
- 각 **정점**은 리스트 L_i에 한 번 삽입
- 메쏘드 incidentEdges는 각 **정점**에 대해 한 번 호출
- 그래프가 **인접리스트 구조**로 표현된 경우, BFS는 $\mathbf{O}(n + m)$ 시간에 수행
  - **참고:** $\Sigma_v deg(v) = 2m$

BFS 템플릿 활용



- 템플릿 메쏘드 패턴을 사용하여, 그래프 G에 대한 BFS 순회를 다음 문제들을 $O(n+m)$ 시간에 해결하도록 **특화**할 수 있다
  - G의 연결요소들을 계산하기
  - G의 신장숲을 계산하기
  - G 내의 단순 싸이클 찾기 또는 G가 숲임을 보고하기
  - G의 주어진 두 정점에 대해, 그 사이의 최소 간선으로 이루어진 G 내의 경로 찾기, 또는 그런 경로가 없음을 보고하기

비트리 간선

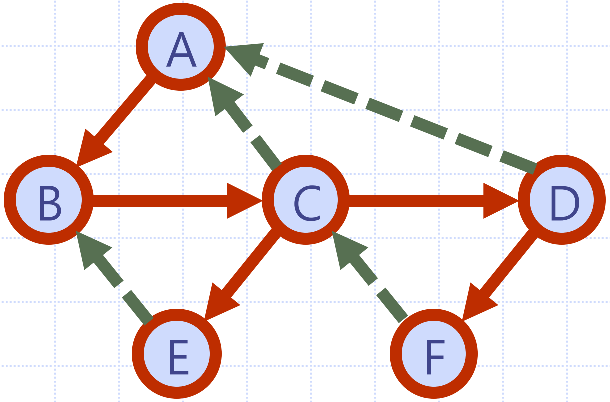


후향간선 (v, w)

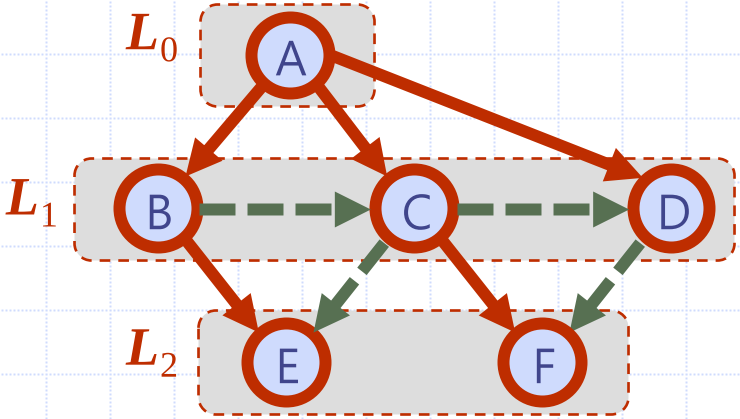
- 트리 간선들의 트리에서 w가 v의 조상

교차간선 (v, w)

- 트리 간선들의 트리에서 w가 v와 동일 또는 다음 레벨에 위치



DFS



BFS

DFS와 BFS 응용

응용	DFS	BFS
신장숲 연결요소 경로 싸이클	√	√
최단경로		√
이중 연결요소	√	

응용문제: 경로 찾기

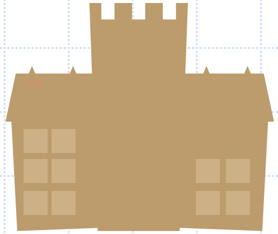
- 원형 메쏘드를 사용하여, 주어진 두 정점 사이의 **경로**를 찾기 위한 DFS의 특화를 **의사코드**로 작성하라
  - path(G, v, z): ***G***의 주어진 두 정점 ***v***와 ***z*** 사이의 경로를 찾아 보고
- **힌트:** 출발정점과 현재 정점 사이의 경로를 추적하기 위해 **스택**을 사용

해결: 경로 찾기

- path(G, *v*, *z*)는 ***v***와 ***z***를 각각 **출발** 및 **도착**정점으로 하여 pathDFS(G, v, z, S)를 호출
- ***v***와 **현재** 정점 사이의 경로를 추적하기 위해 스택 ***S***를 사용
- ***z***을 만나자마자 ***S***에 누적된 내용을 경로로써 반환

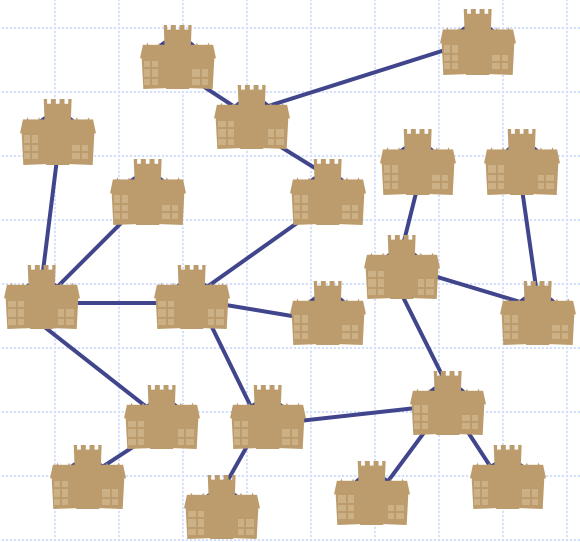
```
Alg path(G, v, z)
1. S ← empty stack
2. pathDFS(G, v, z, S)
3. return  S.elements()

Alg pathDFS(G, v, z, S)
1. l(v) ← Visited
2. S.push(v)
3. if (v = z)
        return
4. for each e ∈ G.incidentEdges(v)
        if (l(e) = Fresh)
            w ← opposite(v, e)
            if (l(w) = Fresh)
                l(e) ← Tree
                S.push(e)
                pathDFS(G, w, z, S)
                S.pop()   {e gets popped}
            else
                l(e) ← Back
5. S.pop()               {v gets popped}
```

응용문제: 자유트리의 중심



- S 대학교와 전세계의 많은 대학들은 멀티미디어에 관한 협력과제를 수행하고 있다
- **자유트리**를 형성하는 통신선로를 사용하여 이 대학들을 연결하기 위한 컴퓨터 네트워크를 구축한다
- 대학들은 모든 대학 간에 데이터를 공유하기 위해 대학들 가운데 한 곳에 **파일서버**를 설치하기로 결정하였다
- 통신선로의 전송시간은 선로 구성과 동기화에 지배되므로, 데이터 전송의 비용은 사용된 **선로의 수**에 비례한다
- 그러므로, 파일서버를 **중심** 위치에 놓는 것이 바람직하다

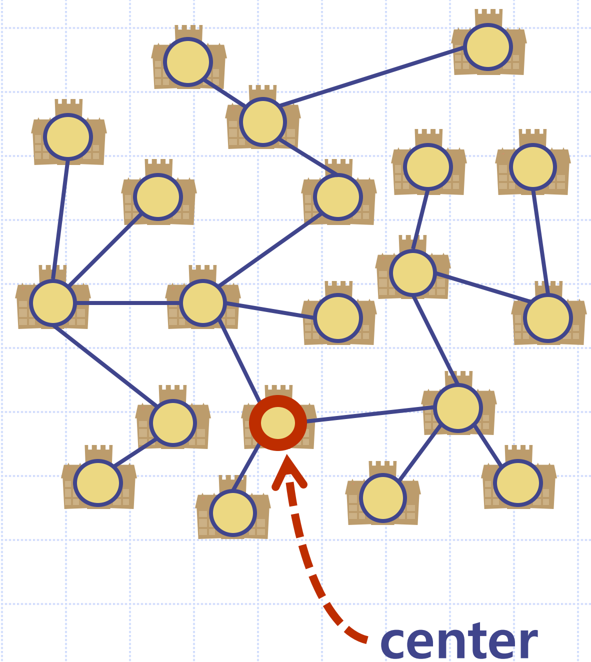
자유트리 T



응용 문제: 자유트리의 중심 (conti.)

- 자유트리 T와 T의 한 노드 v가 주어졌을 때, v의 **이심율**(eccentricity)이란 v로부터 T의 다른 노드로의 경로 가운데 최장경로의 길이를 말한다
- 최소의 이심률을 가지는 T의 노드를 T의 **중심**(center)이라 부른다

자유트리 T



a. 주어진 n-노드 자유트리 T에 대해, T의 중심을 찾는 효율적인 알고리즘을 **의사코드**로 설계하라
b. 중심은 **유일**한가? 아니라면, 자유트리는 중심을 몇 개까지 가질 수 있는가?

해결: 개요

- 관찰
  - 자유트리 T의 중심은 트리의 모든 잎들을 **삭제**하더라도 변하지 않는다(반대로, 모든 잎에 자식들을 **추가**하더라도 마찬가지)
  - 최소 세 개 노드의 트리에서 잎은 중심이 될 수 없다
- 그러므로, 주어진 자유트리의 잎을 계속 삭제하여 하나 또는 두 개의 노드만 남게 되면 이것이 트리의 **중심**이다

- 잎의 삭제
  - 원래 트리의 복사본에서 잎을 실제로 삭제할 수도, 혹은 잎에 표시함으로써 모의적으로 삭제 가능
  - 어떤 "**삭제**" 작업이던 트리를 순회하며 (임의의 노드에서 출발) 잎을 삭제하거나 표시함으로써 수행 가능
  - 최악의 경우, 삭제 작업은 $\mathbf{O}(n)$ 시간 소요 – 즉, 전체적으로는 2차 시간에 수행(편향트리를 생각해볼 것)

해결: 개요 (conti.)

- 결과 그래프 G'가 **단 한 개**의 노드라면, 이것이 G의 **중심**
- G'가 **두 개**의 노드라면, 이들 가운데 아무거나 G의 **중심**
- 알고리즘은 G의 **중심**만을 반환하지 **이심율**을 반환하지는 않는다 – 하지만 이는 잎 삭제 작업의 회수를 저장한다면 쉽게 구할 수 있다

해결: 알고리즘 (conti.)

Alg ***findCenter***(G)
input a free tree G
output a center of G

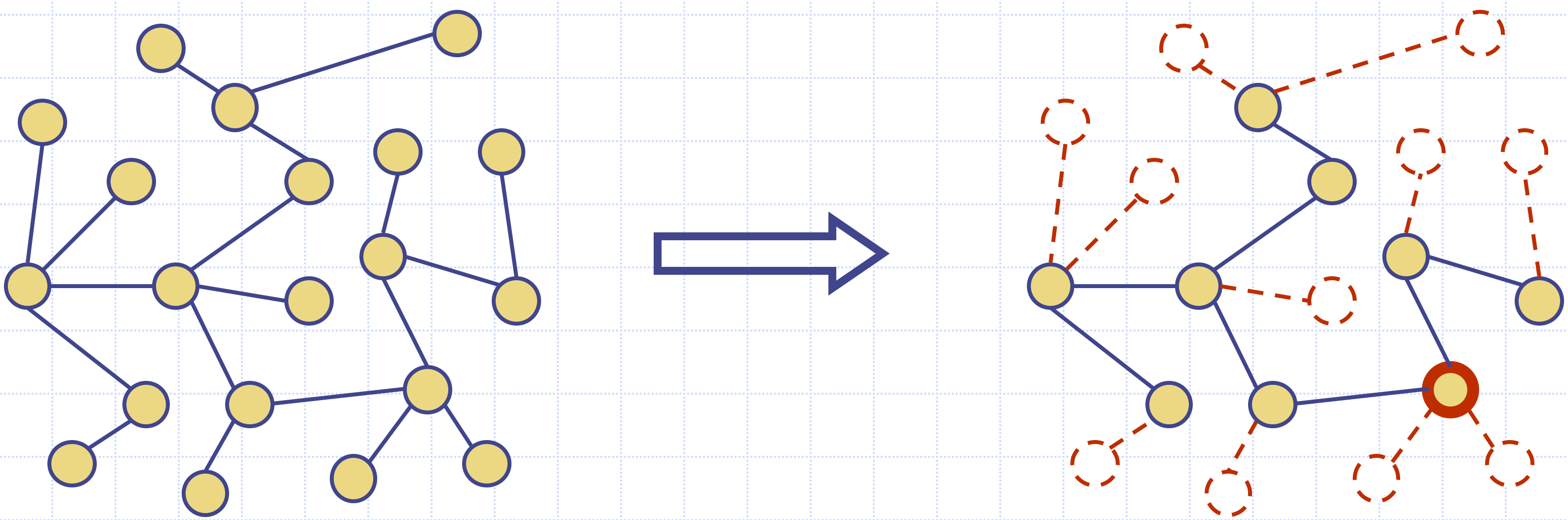
1. $G' \leftarrow$ *a copy of* G
2. **while** $(G'.numVertices() > 2)$
   $removeLeaves(G', G'.aVertex(), Null)$
3. **return** $G'.aVertex()$

Alg ***removeLeaves***(G, v, p)
input a free tree G, a vertex v, parent vertex p of v in the tree traversal
output a free tree G with its leaves removed

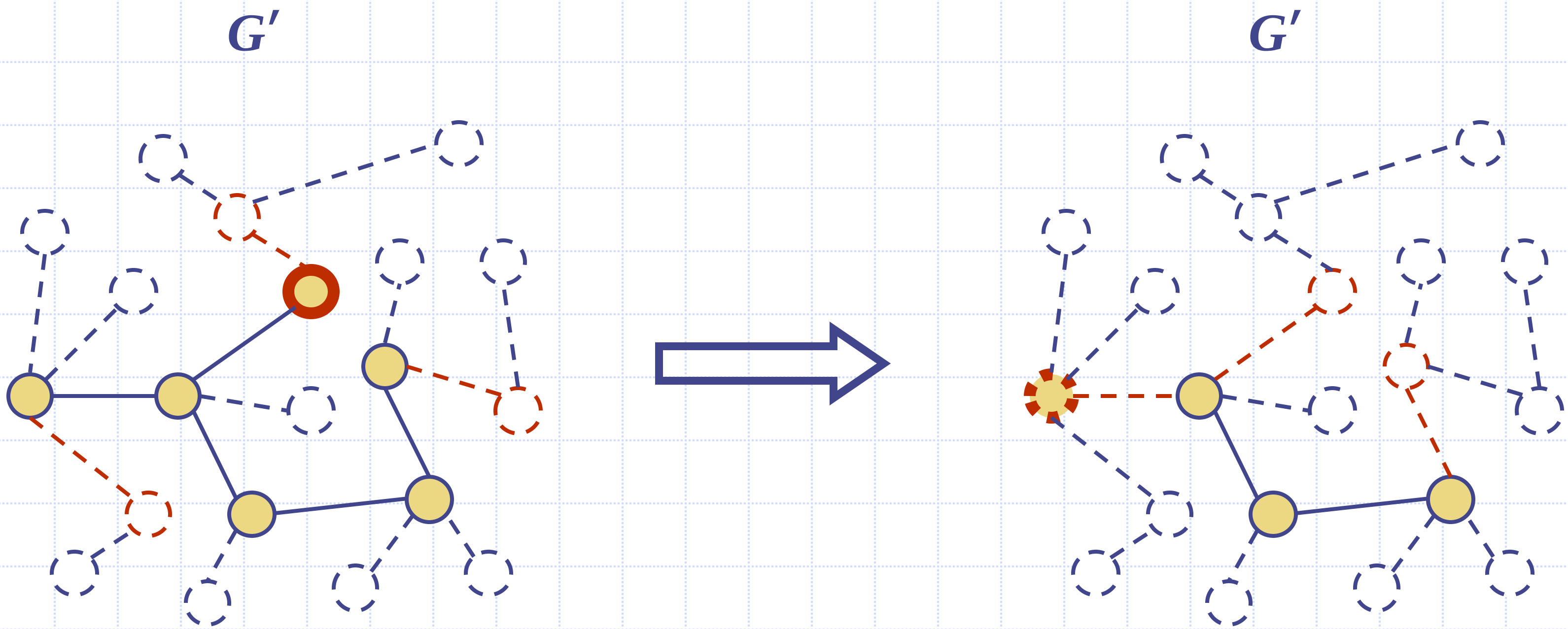
1. $c \leftarrow 0$
2. **for each** $e \in G.incidentEdges(v)$
   $c \leftarrow c + 1$
   $w \leftarrow G.opposite(v, e)$
   if $(w \neq p)$
      $removeLeaves(G, w, v)$
3. **if** $(c = 1)$
   $G.removeVertex(v)$

해결: 수행 예 (conti.)

예: $G = G'$ $\qquad$ G'



해결: 수행 예 (conti.)



해결: 수행 예 (conti.)