Proseminar

Grundbegriffe der Topologie

WS 2004/05

M. Grosser

Die folgenden vier Aufgaben dienen der Wiederholung mengentheoretischer Grundlagen.

1) Wie lauten die Definitonen von $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ und $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$?

2) Zeigen Sie die Gültigkeit der de Morgan'schen Regeln für eine Menge X und eine beliebige Familie $\{A_i \mid i \in I\}$ von Teilmengen von X:

$$X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i).$$

   Schreiben Sie die beiden Gesetze auch unter Verwendung der Schreibweise $A^c := X \setminus A$ für das Komplement an.

3) Benützen Sie die Identität $A \setminus B = A \cap B^c$, um Formeln herzuleiten, deren linke Seiten aus den drei Mengenvariablen A, B, C (jede soll genau einmal auftreten), mindestens einem Operator für die Mengendifferenz und keinem oder einem Vorkommen der Operatoren $\cap$ bzw. $\cup$ gebildet werden können, plus entsprechender Klammerung. (Als Grundmenge X bei der Komplementbildung denken wir uns irgendeine Menge, in der A, B und C enthalten sind; für die Beweise dürfen alle handelsüblichen Formeln für Durchschnitt und Vereinigung ungefragt verwendet werden.)

4) *Wettkampf Bild gegen Urbild.* Seien X und Y Mengen (mit jeweils mindestens 2 Elementen). Der Wettkampf besteht aus vier Teildisziplinen: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement. In der Disziplin „Durchschnitt" beispielsweise werden für den Kandidaten „Bild" für alle möglichen $f : X \to Y$ und alle $A, B \subseteq X$ die Mengen $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ verglichen. Ist die erste dieser Mengen in jedem Fall in der zweiten enthalten, gibt es einen Punkt für „Bild", ebenso für die umgekehrte Inklusion (d.h. zwei Punkte, falls die beiden Mengen immer übereinstimmen). Analog verläuft der Bewerb für die Kandidatin „Urbild" und in den anderen Disziplinen. Wie geht der Wettkampf punktemäßig aus? Begründen Sie jedes erfolgreiche Abschneiden in einer Teildisziplin mit einem Beweis, jedes erfolglose Abschneiden mit einem Gegenbeispiel. (Zu viel Arbeit? Im Team aufteilen!) Hätte dem Verlierer/der Verliererin ein Doping in Form von Injektivität bzw. Surjektivität der in betracht gezogenen Funktionen f genützt? Wenn ja, in welchen Teildisziplinen?

5) Wiederholen Sie den Beweis des Satzes aus der Analysis-Vorlesung, daß für eine Funktion f die Stetigkeit in einem Punkt x_0 gleichbedeutend ist mit der „Folgenstetigkeit", d.h. damit daß aus $x_n \to x_0$ stets folgt $f(x_n) \to f(x_0)$; formulieren Sie aber diesen Satz und den Beweis gleich (äußerlich allgemeiner) für eine Funktion f von einem metrischen Raum (X, d) in einen weiteren metrischen Raum (Y, d') statt für $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$.

6) Braucht man im Beweis der vorhergehenden Aufgabe wirklich die Abstandsmessung durch die Metrik(en), d.h. ließe er sich auch bloß mit Hilfe von Umgebungen (nichtspezifizierter Gestalt und Größe) von x_0 bzw. $f(x_0)$ führen?

7) Zeigen Sie, daß für einen normierten Vektorraum $(V, \|.\|)$ durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V definiert wird.

8) Zeigen Sie, daß auf einer beliebigen nichtleeren Menge X durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

eine Metrik definiert wird, die sogenannte *diskrete* Metrik. Wie sehen die ε-Kugeln bezüglich dieser Metrik aus?

9) Stammt *jede* Metrik auf einem Vektorraum im Sinne von Aufgabe 7 von einer Norm ab? Salopp gefragt: Gibt es mehr normierte oder mehr metrische Vektorräume oder gleichviele, d.h. welcher der beiden Begriffe ist der allgemeinere?

10) Bringen Sie die Definitionen der Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_\infty$ (auf $\mathbb{R}^n$) in Erfahrung und zeigen Sie, daß tatsächlich die Normeigenschaften (N1) bis (N3) erfüllt sind.

11) Zeigen Sie die Ungleichungen $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ und $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Was folgt daraus für Konvergenz und Stetigkeit auf $\mathbb{R}^n$, wenn man diesen (Vektor-)Raum durch Ausstattung mit jeweils einer der drei Metriken, die aus den drei besagten Normen gewonnen werden können, zum metrischen Raum macht?

12) Die Redeweise von der „uneigentlichen" Konvergenz einer Folge reeller Zahlen x_k gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ (suchen Sie sich die Definition aus der Analysis-Vorlesung heraus) kann im Sinne der Konvergenz in metrischen Räumen verstanden werden, wenn man die beidseitig erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ auf folgende Weise mit einer Metrik d versieht: Sei

$$g(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (x = -\infty) \\ \arctan(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ +\frac{\pi}{2} & (x = +\infty) \end{cases}$$

und $d(x, y) := |g(x) - g(y)|$ $(x, y \in \overline{\mathbb{R}})$. Zeigen Sie, daß d in der Tat eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ darstellt und daß für eine reelle Folge $(x_n)_n$ genau dann uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$ vorliegt, wenn $(x_n)_n$ im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen $\pm\infty$ konvergiert, d.h. wenn $d(x_n, \pm\infty)$ gegen null geht.

13) Obwohl die Einschränkung der Metrik d aus der vorangehenden Aufgabe auf $\mathbb{R}$ nicht mit der üblichen Distanzfunktion $d_0(x, y) := |x - y|$ übereinstimmt, führt sie dennoch zum selben Konvergenzverhalten von Folgen, d.h. für $x_n, x \in \mathbb{R}$ ist $d(x_n, x) \to 0$ äquivalent mit $d_0(x_n, x) \to 0$; beweisen Sie das.

14) Zeigen Sie, daß durch $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt$ auf dem Raum $\mathrm{C}([a, b])$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ eine Norm definiert wird (die ihrerseits nach Aufgabe 7 eine Metrik d_1 induziert).

15) Zeigen Sie, daß auch durch $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$ auf $\mathrm{C}([a, b])$ eine Norm definiert wird (die wiederum nach Aufgabe 7 eine Metrik d_∞ induziert).

16) Führen die Metriken d_1 und d_∞ aus den beiden vorhergehenden Aufgaben zum selben Konvergenzbegriff auf $\mathrm{C}([a, b])$?

17) Weisen Sie nach, daß die in der Vorlesung angegebene Definition der kofiniten Topologie tatsächlich die einschlägigen Axiome (O1)–(O3) erfüllt, daß die Bezeichnung „Topologie“ somit also gerechtfertigt ist.

18) Wieviele Topologien gibt es auf einem Raum X, der a) kein Element (leere Menge!), b) ein Element bzw. c) zwei Elemente enthält?

19) Neugierig geworden, wieviele Topologien es auf einem Raum mit drei Elementen gibt? [Diese Fragestellung gilt nicht als reguläre Proseminaraufgabe, sie gehört eher in die Tüftel- und Knobelecke eines Wochenendmagazins.] Ein Hinweis: Das Hauptproblem besteht darin, eine geeignete systematische Vorgangsweise zu finden, um aus den 64 relevanten Möglichkeiten (beachte: $\emptyset$ und X sind ja stets offen!) mit vernünftigem Arbeitsaufwand die gewünschten herauszufinden. Eine brauchbare Strategie besteht zum Beispiel darin, die Fälle zu unterscheiden, daß die Topologie $\mathcal{T}$ 0,1,2,3 Singletons (Einermengen) enthält und — wo nötig — dann die Unterfälle nach Anzahl der offenen Zweiermengen zu unterscheiden.

20) Weisen Sie nach, daß die in der Vorlesung angegebenen Umgebungsbasen für die Niemytzki-Topologie der oberen Halbebene tatsächlich die einschlägigen Axiome (UB1), (UB2) und (UB4) erfüllen, daß die Bezeichnung „Topologie“ somit also auch in diesem Fall gerechtfertigt ist.

21) Weisen Sie nach, daß für die in der Vorlesung angegebene Basis für die Boxtopologie auf einem Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ($(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume) tatsächlich die Basiseigenschaften (B1) und (B3) erfüllt sind.

22) Eröffnen Sie ausführlich den Eingang ins Haus der Topologie, über dem das Schild „Subbasen“ hängt, das heißt: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz, der die Gleichwertigkeit einer Topologiedefinition durch Vorgabe einer Subbasis mit

einer der bereits vorliegenden Definitionen (hier wohl am günstigsten: mit der via Basen) zum Inhalt hat.

23) Eröffnen Sie in ähnlicher Weise den Eingang ins Haus der Topologie, über dem das Schild „abgeschlossene Mengen“ hängt, das heißt: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz, der die Gleichwertigkeit einer Topologiedefinition durch Vorgabe einer Familie von abgeschlossenen Mengen mit der bereits vorliegenden Definition über offene Mengen zum Inhalt hat.

24) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für den Abschluß von Teilmengen A, B eines topologischen Raumes X:

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{X} = X$,

(b) $A \subseteq \overline{A}$,

(c) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(e) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(f) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Dafür stehen Ihnen zwei Strategien zur Verfügung: Strategie I baut mittels der Formel $\overline{B} = ((B^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} = B^{\mathrm{c}\circ\mathrm{c}}$ auf den entsprechenden in der Vorlesung bewiesenen Resultaten für das Innere von Mengen auf; für Strategie II wird frisch gekocht, und zwar für (a) bis (c) mit Hilfe der Charakterisierung $x \in \overline{B} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap B \neq \emptyset$ und für (d) bis (f) durch direktes Imitieren der entsprechenden Beweise für das Innere.

25) Beweisen Sie $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathrm{c}}}$ auf drei Arten:

(a) unter Verwendung „unserer“ Definition $\overline{B} := B^{\circ} \cup \partial B$;

(b) unter Verwendung der Charakterisierung $x \in \overline{B} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap B \neq \emptyset$;

(c) unter Verwendung der Formel $\overline{B} = ((B^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} = B^{\mathrm{c}\circ\mathrm{c}}$.

26) In der Vorlesung finden sich keine Formeln für $(A \cup B)^{\circ}$ bzw. $\overline{A \cap B}$. Klären Sie die betreffende Situation vollständig, inklusive allfälliger Beweise bzw. (möglichst radikaler — das geht bereits in $\mathbb{R}$!) Gegenbeispiele.

27) Sei X eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und d die diskrete Metrik darauf.

(a) Beschreiben Sie für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ die Mengen $B_\varepsilon(x)$ (siehe Aufgabe 8), $S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ und $K_\varepsilon : (x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

(b) Zeigen Sie, daß d auf X die diskrete Topologie induziert.

(c) Vergleichen Sie (für $\varepsilon = 1$) $S_\varepsilon(x)$ mit $\partial B_\varepsilon(x)$ und $K_\varepsilon(x)$ mit $\overline{B_\varepsilon(x)}$.

28) Eröffnen Sie in schließlich und endlich auch den Eingang ins Haus der Topologie, über dem das Schild „Abschlußoperator“ hängt, das heißt: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz, der die Gleichwertigkeit einer Topologiedefinition durch Vorgabe eines Abschlußoperators mit einer der bereits vorliegenden Definitionen (hier wohl am günstigsten: mit der via abgeschlossene Mengen) zum Inhalt hat.

29) Durch welchen Eingang in das Haus der Topologie erweist sich am schnellsten, daß die kofinite Topologie tatsächlich die Bezeichnung „Topologie“ verdient? Wie sieht die kofinite Topologie auf einem endlichen Raum aus?

30) Versuchen Sie zu erraten, welche Zugänge Nummer 8 bis Nummer 11 zum Topologiebegriff der Vortragende bei Verwendung des Ausdrucks „elffacher Pfad“ im Sinne gehabt haben könnte.

31) Sei X eine überabzählbare Menge, ausgestattet mit der kofiniten Topologie $\mathcal{T}$. Zeigen Sie, daß $(X, \mathcal{T})$ separabel ist, jedoch nicht AA1 (und daher schon gar nicht AA2) erfüllt. Genauer: Zeigen Sie, daß sogar *jede* abzählbare Teilmenge dicht in X ist, daß aber kein Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen kann.

32) Erstellen Sie eine ausführliche Fassung des Beweises aus der Vorlesung, daß die obere Halbebene mit der Niemytzki-Topologie nicht metrisierbar ist.

33) Sei F der (reelle Vektor-)Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $t, a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a < b$) sei $S_{t,a,b} := \{f \in F \mid a < f(t) < b\}$; wir verwenden diese Mengen $S_{t,a,b}$ als Subbasis, um die Topologie $\mathcal{T}_p$ der punktweisen Konvergenz auf F zu definieren.

   (a) Bevor Sie ernsthaft darangehen, b) bis e) zu lösen, beantworten Sie die Frage: Welchem Zweck dient diese Aufgabe?

   (b) Zeigen Sie, daß die Bezeichnung „Topologie der punktweisen Konvergenz“ gerechtfertigt ist: Eine Folge von Funktionen f_n aus F konvergiert genau dann punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen $f \in F$, wenn sie bezüglich $\mathcal{T}_p$ konvergiert, d.h. wenn sie in jeder $\mathcal{T}_p$-Umgebung schließlich enthalten ist.

   (c) Sei $A := \{f \in F \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele x}\}$ und *1* die konstante Funktion in F mit Wert 1. Zeigen Sie, daß *1* in $\overline{A}$ liegt.

   (d) Zeigen Sie, daß keine Folge $(f_n)_n$ aus A gegen *1* konvergiert: Bezeichnet C_n die (endliche!) Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die f_n von 0 verschieden ist, betrachten Sie die Umgebung $S_{t,\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$ von *1* für ein $t \in \mathbb{R}$, das in keinem der C_n liegt.

   (e) Zeigen Sie: $(F, \mathcal{T}_p)$ ist nicht AA1 und daher auch nicht metrisierbar.

34) Was besagt die Konvergenz einer Folge im Falle a) der diskreten Topologie; b) der Klumpentopologie?

35) Zeigen Sie: $f : X \to Y$ (X, Y topologische Räume) ist auf jeden Fall stetig, wenn X die diskrete Topologie oder Y die Klumpentopologie trägt.

36) Geben Sie einen topologischen Raum X an (und zwar einen Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der Spurtopologie) und eine Teilmenge A von X, für die sämtliche mögliche Teilmengen der von A, A^c, A', $\mathrm{Isol}(A)$, ∂A induzierten Partition von X nichtleer sind. Wieviele Teile hat diese Partition im allgemeinen Fall? Geben Sie für das von Ihnen gewählte Beispiel in jedem dieser Teile einen Punkt an.

37) Zeigen Sie: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt genau dann das Trennungsaxiom T_1, wenn jedes Singleton $\{x\}$ ($x \in X$) abgeschlossen ist.