Proseminar zur Analysis II

Sommersemester 2001

Übungsbeispiele Mathematica

1. Differenziere die folgenden Funktionen und zeichne Funktion und Ableitung (in *einer* Grafik) in einem „vernünftigen" Bereich.

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

   (d) $f(x) = \log(1+x^2)$

   (e) $f(x) = (1+e^x)^2$

   (f) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

   (g) $f(x) = x^{x^x}$

   (h) $f(x) = (x^x)^x$

   (i) $f(x) = \frac{(x^3-2x+5)^7}{\sqrt{1+x^4}}$

   (j) Für eine Automatisierung (d.h. wenn dir das Eingeben zu fad wird...) bieten sich folgende zwei Vorgangsweisen an:

   - Interaktive Eingabe der Funktion mittels `Input`-Kommandos und Ausgabe mittels `Print`.
   - Angabe aller Funktionen in einer Liste (d.h. in der Form `functions[x_]:=` $\{\sqrt{1+x^2}, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \ldots\}$), dann Berechnungen und Ausgabe innerhalb einer `For`-Schleife.

   Benutze die Online-Hilfe, um eine der beiden Varianten zu realisieren.

2. Berechne und zeichne (in *einer* Grafik) die ersten 5 Ableitungen der folgenden Funktionen. Achte darauf „vernünftige" x- und y-Bereiche zu verwenden. Hinweis: Um eine Liste mit den Ableitungen als Eintragungen zu erzeugen verwende das `Table`-Kommando, um diese dem `Plot`-Befehl sinnvoll übergeben zu können verwende `Evaluate`.

   (a) $f(x) = 8x^5 + 5x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 3$

   (b) $f(x)$ wie in Übungsbeispiel 116.

3. Bestimme die Grenzwerte (für $n \to \infty$) der folgenden Folgen.

   (a) $a_n = \frac{n^k}{a^n}$ für $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

   (b) $a_n = \frac{n!}{a^n}$ für $a > 1$.

   (c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

4. Berechne die Grenzwerte der Reihen falls er existiert. Sonst zeige die Divergenz (wenn nötig etwa mittels geiegneter Tests).

   (a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ für $a \in \mathbb{R}$.

   (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   (h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\log k)^k}$

   (i) $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt[k]{a} - 1)$

5. Entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um 0. Der entsprechende Befehl heißt `Series`; entwickle bis zu einer „vernünftigen" Ordnung.

   (a) $f(x) = e^x$

   (b) $g(x) = \sin x$

   (c) $h(x) = \cos x$

   (d) Überprüfe mittles der Potenzreihendarstellung von f, g und h die Eulersche Formel.