

ANALYSIS  
IN EINER VARIABLE  
FÜR LAK

ROLAND STEINBAUER

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK  
UNIVERSITÄT WIEN  
WINTERSEMESTER 2012/13  
2 WSTD / 4 ECTS

## Inhaltsverzeichnis

### **Kapitel 3: Differentiation**

§ 0 Rückblick und Ausblick .....	5
0.1 Wiederholung aus „Was will und soll die Analysis“ .....	5
0.2 Rückblick auf Kap. 1 & Kap. 2 .....	6
0.3 Ausblick auf Kap. 3 .....	7
0.4 Ausblick auf Kap. 3 - Details .....	7
0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung .....	9
§ 1 Differenzierbarkeit und Ableitung .....	11
1.1 Motivation: Änderungsverhalten von Funktionen .....	11
1.2 Definition: Differenzenquotient .....	14
1.3 Bemerkung: zwei Variablen .....	15
1.4 Definiton: Limes von Funktionen auf Intervallen .....	15
1.5 Bemerkung: Technisches Detail .....	15
1.6 Definition: Differenzierbarkeit und Ableitung .....	16
1.7 Zur Bedeutung von 1.6 & einseitige Ableitung .....	17
1.8 Beispiele: höchste Zeit – differenzierbare und nicht differenzierbare Fkt .....	18
1.9 Bemerkung: (Nicht) differenzierbare Funktionen .....	21
1.10 Bemerkung: Historische Bemerkung 1 zum Tangentenproblem .....	22
1.11 Bemerkung: Historische Bemerkung 2 Newtonsche Mechanik .....	24
1.12 Bemerkung: Differenzierbarkeit vs. Stetigkeit .....	27
1.13 Theorem: diffbar => stetig .....	27
1.14 Motivation: weiteres Vorgehen .....	28
1.15 Proposition: Grundoperationen & Diffbarkeit – Differenzierungsregeln .....	28
1.16 Beispiele: weitere diffbare Funktionen .....	30
1.17 Motivation: Differentiation als lineare Approximation .....	31
1.18 Bemerkung: Differentialquotient vs. lineare Approximation .....	32
1.19 Theorem: Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation .....	33
1.20 Bemerkung: Zur Bedeutung von 1.19 .....	33
1.21 Beispiel: Der Sinus bei 0 .....	36
1.22 Motivation: zurück zum Baukasten .....	37
1.23 Theorem: die Kettenregel .....	37
1.24 Bemerkung: zur Kettenregel .....	38
1.25 Bemerkung: Ableitung der Umkehrfunktion .....	40
1.26 Motivation/Erinnerung: Umkehrfunktion .....	41
1.27 Theorem: Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion .....	41
1.28 Beispiel: Ableitung des Logarithmus & eine berühmte Formel .....	42
1.29 Beispiele: weitere diffbare Funktionen .....	43
1.30 Bemerkung: höhere Ableitungen .....	44

§ 2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen .....	47
2.1 Intro .....	47
2.2 Definition: lokale Extremwerte .....	48
2.3 Bemerkung: Extrema & Ableitung, die Idee .....	49
2.4 Proposition: Notwendige Bedingung für lokale Extrema .....	49
2.5 Beispiel: Extrema des Sinus.....	50
2.6 Warnung: Notwendig vs. Hinreichend, lokal vs. global.....	51
2.7 Motivation: lokale Änderungsrate – globale Eigenschaften .....	52
2.8 Theorem: der Mittelwertsatz .....	53
2.9 Bemerkung: Beweisstrategie „Kippen“ des Graphen.....	54
2.10 Lemma: Satz von Rolle.....	54
2.11 Bemerkung: zum Satz von Rolle und seinem Beweis.....	55
2.12 Beweis des Mittelwertsatzes (MWS Diff.).....	56
2.13 Bemerkung: Anwenden des MWS.....	57
2.14 Korollar: Wachstumsschranken .....	57
2.15 Bemerkung: Lipschitzstetigkeit .....	58
2.16 Beispiel: der Sinus ist dehnungsbeschränkt.....	59
2.17 Proposition: Monotonie via Ableitung.....	60
2.18 Warnung: Die Umkehrung von 2.17 ii ist falsch .....	60
2.19 Korollar: Hinreichende Bedingung für lok. Extrema.....	61
2.20 Beispiel: nochmals Extrema des Sinus.....	62
2.21 Warnung: Hinreichend – nicht notwendig!.....	62
2.22 Motivation: Konvexität.....	62
2.23 Definition: Konvexe Funktion .....	64
2.24 Proposition: Konvexität via $f''$ .....	64
2.25 Beispiele: konvexe & konkave Funktionen .....	66
2.26 Bemerkung: Wendestellen .....	66
2.27 Motivation: Die Regeln von De L'Hospital.....	67
2.28 Lemma: Verallgemeinerter MWS Diff. ....	68
2.29 Bemerkung: zum Verallgem. MWS Diff.....	69
2.30 Satz: Regeln von De L'Hospital .....	69
2.31 Beispiele: Die Regeln von De L'Hospital.....	69
 <b>Kapitel 4: Integration</b>	 73
§ 1 Das Riemann Integral .....	74
1.1 Intro .....	74
1.2 Definition: Treppenfunktion.....	77
1.3 Lemma $\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Vektorraum.....	78
1.4 Definition: Integral für Treppenfkt. ....	78
1.5 Bemerkung: zum Integral in 1.4 .....	79
1.6 Proposition: Linearität & Monotonie des Integrals auf $\mathcal{T}[a,b]$ .....	80
1.7 Motivation: das Riemann-Integral.....	81
1.8 Definition: das Riemann Integral.....	82
1.9 Beispiele: R-intbare & nicht R-intbare Funktionen .....	83
1.10 Motivation: Integrabilitätskriterium.....	83
1.11 Theorem: Integrabilitätskriterium (Einzwicken zw. Treppenfkt.) .....	84
1.12 Korollar: stetige & monotone Fkt. sind R-intbar .....	84

1.13 Satz: Approximation stetiger Fkt. durch Treppenfkt.....	85
1.14 Motivation: Grundeigenschaften – zum Zweiten .....	88
1.15 Proposition: Linearität & Monotonie des R-Integrals .....	89
1.16 Motivation: In Richtung Dreiecksungleichung .....	90
1.17 Definition: positiver & negativer Teil einer Funktion.....	90
1.18 Bemerkung: zu $f_+$ , $f_-$ und $ f $ .....	90
1.19 Proposition: Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale .....	91
1.20 Korollar: Integrierbarkeit von Produkten.....	91
1.21 Motivation: Mittelwertsatz (MWS) der Integralrechnung.....	92
1.22 Proposition MWS der Integralrechnung .....	93
1.23 Bemerkung: Teilintervalle & Orientierung .....	94
1.24 Bemerkung: Riemann-Summen .....	95
 § 2 Integral & Ableitung .....	99
2.1 Intro .....	99
2.2 Definition: Stammfunktion .....	99
2.3 Beispiel: Stammfunktion .....	99
2.4 Motivation: 2 Fragen zur Stammfunktion.....	100
2.5 Proposition: Differenz von Stammfunktionen .....	100
2.6 Motivation: Zum Programm aus 2.4 .....	102
2.7 Theorem: Hauptsatz der Differential & Integralrechnung.....	102
2.8 Bemerkung: Die Bedeutung des HS DI .....	103
2.9 Motivation: konkretes Integrieren .....	105
2.10 Bemerkung: Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral .....	106
2.11 Beispiele: Höchste Zeit: konkretes Integrieren .....	107
2.12 Motivation: Mehr Werkzeuge .....	107
2.13 Proposition: Partielle Integration .....	108
2.14 Beispiele: Partielle Integration .....	108
2.15 Proposition: Substitutionsregel.....	109
2.16 Bemerkung: zur Substitutionsregel .....	109
2.17 Beispiele: zur Substitutionsregel .....	110
 § 4 Uneigentliche Integrale .....	112
4.1 Intro .....	112
4.2 Definition: Uneigentliches Integral Fall 1 (eine uneig. Integralgrenze) .....	112
4.3 Beispiel: Uneig. Integral Fall 1 .....	113
4.4 Definition: Uneig. Integral Fall 2 (Integr. an 1 Integrationsgrenze unbeschr./undef.) .....	114
4.5 Beispiel: Uneig. Integral Fall 2 .....	114
4.6 Definition: Uneig. Integral Fall 3 (komb. Fall – beide Integrationsgrenzen kritisch). ....	115
4.7 Beispiel: Uneig. Integral Fall 3 .....	115
4.8 Motivation: Konvergenztests für uneigentl. Integrale .....	117
4.9 Proposition: Konvergenztests für uneigentl. Integrale .....	117
4.10 Beispiele: Konvergenztests .....	119
4.11 Motivation: Integraltest für Reihen.....	120
4.12 Proposition: Integraltest für Reihen.....	120

[3]

## DIFFERENTIATION

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differenzialrechnung starten setzen wir dieses in Beziehung ersten Teil der Vo und geben auch einen Ausblick auf die weiteren Themen dieses 2. Teils des Vo-funktional Analysis.

## §0 RÜCKBLICK & AUSBLICK

0.1 Wt &w 10] §0 (Was will und was soll die Analysis)

Der inhaltliche Kern der Analysis ist [10] 0.2 ] d.h.  
Differenzial- & Integralrechnung.

Genauer: das Verstehen & Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen

Noch genauer ist das Hauptthema der Analysis:

{ Welche Begriffe eignen sich um Punkten dazu  
 die Änderung einer Fkt im Kleinen (d.h. lokal  
 um einen Pkt im Defbereich) zu verstehen  
 und was kann man daraus über die Fkt im Großen  
 (d.h. ihren Gesamtverlauf) sagen ? }

## 0.2 Rückblick auf 1[1] & 1[2]

Zentraler Begriff: STETIGKEIT

- beschreibt ja genau das lokale Änderungsverhalten von Fkt
- aber noch nicht genug?  $\Rightarrow$
- baut auf dem  $\epsilon$

Zentraler Begriff: GRENZWERTBEGRIFF

- liefert via (obs konv) Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessoer Fkt (über Polynome & rationale Fkt hinausgehend)

$\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \arcsin, \arccos, \arctan$   
 $x^a, \sinh, \cosh, \tanh$

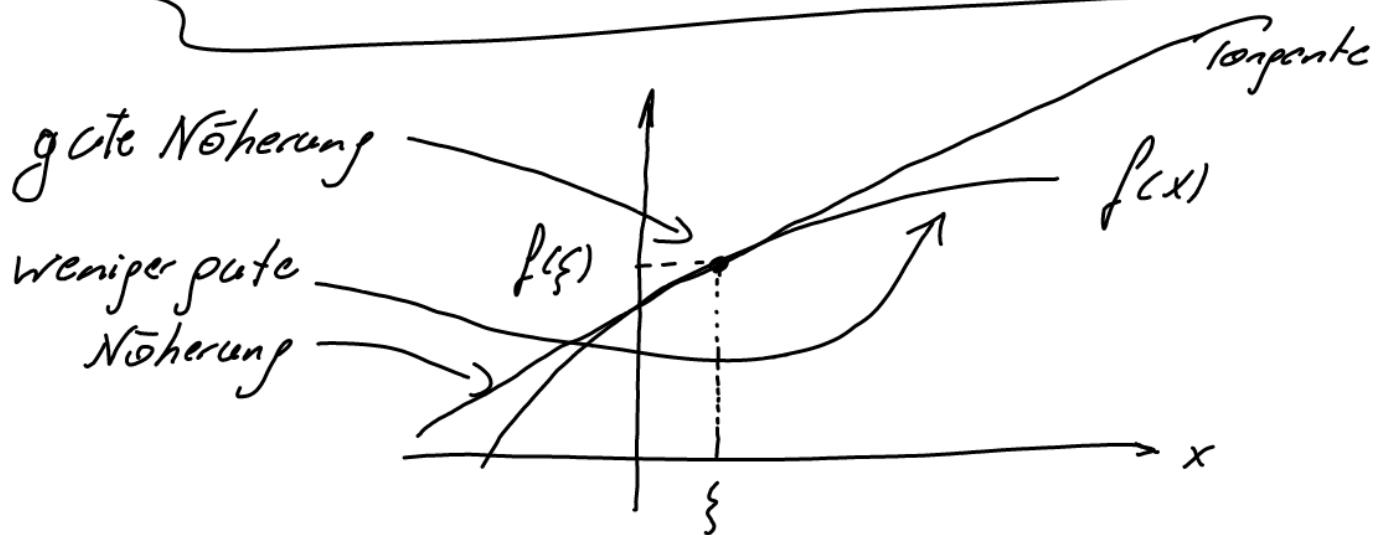
Mit diesen Inhalten und auch den Techniken der EinfA haben wir einen Grundstein auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

### 0.3 Ausblick auf [3]:

Hier nimmt unser Studium des Änderungsverhalten von Fkt die alles entscheidende Handlung?

Idee: Vergleiche die Änderung einer Fkt  $f$  nahe  $\xi$  (Pkt im Defbereich) mit der ein-  
fachsten nicht-konstanten Fkt  $x \mapsto x$

Formal:  $f$  heißt differenzierbar in  $\xi$ , falls  $f$  nahe  $[x_i^o] \rightarrow \xi$  gut durch eine Gerade (ihre Tangente) approximiert werden kann.



Wir werden sehen, dass diese Idee enorm weit fröpt! ☺

### 0.4 Ausblick auf [3]-Details

- (i) Zunächst werden wir in §1 die Begriffe Differenzierbarkeit & Ableitung von Fkt gründlich untersuchen.

Natürlich spielen hier die „alten Bekannten“ Differenzenquotient & Differentialquotient wichtige Rollen. Neulinger kommt ein anderer Gesichtspunkt, der viel allgemeiner gefasst werden kann und daher auch viel weiter hüpft [vgl. vor allem 3. Teil der VO]

Die Ableitung als Lineare Approximation  
an die Funktion

Wir klären das Verhältnis der Differenzierbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekannten“<sup>①</sup> Ableitungsregeln her um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

(ii) Des Weiteren lernen wir in §2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den Mittelwertsatz der Differentialrechnung – eines der Hauptresultate der Vo, Kriterien für (lokale) Extremstellen und die De l'Hospital - Regeln – die letzteren sicher auch „schulbekannt“.

<sup>①</sup>

„schulbekannt“ in Analogie zu omdsbekannt.

## 0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung

(i) In Kapitel [9] befassen wir uns gründlich mit der Integralrechnung. Wir lernen das Riemann-Integral kennen. Hier wird der Grenzwertbegriff verwendet um eine Eigenschaft einer Fkt im Großen zu definieren: Eine Fkt heißt integrierbar, wenn sie sich gut zwischen Treppenfkt „einzwickeln“ lässt.

Die Brücke zwischen Differenzial- und Integralrechnung schlägt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Er ermöglicht nicht nur das konkrete Berechnen von Integralen und somit Flächen sondern verbindet lokale mit globalen Eigenschaften von Fkt. - vgl 0.1

Wir lernen außerdem den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt („schöne“) Fkt nur aus der Kenntnis ihrer höheren Ableitungen in einem einzigen Pkt zu rekonstruieren,? - vgl 0.1

(ii) Dieser Satz wird uns dazu führen Folgen (und auch Reihen) von Funktionen zu studieren.

Dies sind Folgen, deren einzelnen Glieder nicht reelle Zahlen sind, sondern Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese studieren wir in Kap. 15]

Nummerenfolgen

Folge in  $\mathbb{R}$



Folge in  $\mathbb{C}$



Folge von Funktionen

Wir lernen Konvergenzbeziehungen für solche Folgen kennen und betrachten spezielle

Funktionsreihen: Potenzreihen & Fourier-Reihen.

Verallgemeinerung von Polynomen

Zerlegung von periodischen Funktionen

(„Signale“) in Grund- und Oberschwingungen; sehr wichtig in Anwendungen

# §1 DIFFERENZIERBARKEIT & ABLEITUNG

## 1.1 Motivation (Änderungsverhalten von Funktionen)

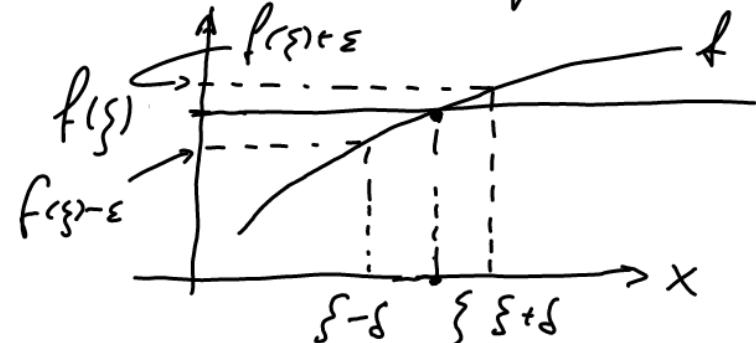
- (i) Wir haben im Verlauf der EiDA öfters geschaut, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die  
 { Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

Zwei dieser „Änderungsmodi“ haben wir schon kennen gelernt: Monotonie [12] 2.17] & Schärfe [12] §1 ]

- (ii) Erinnern wir uns an die Definition der Schärfe [12] 1.6] für eine Fkt  $f: \mathbb{R}^{2D} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $\xi \in D$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D \text{ mit } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

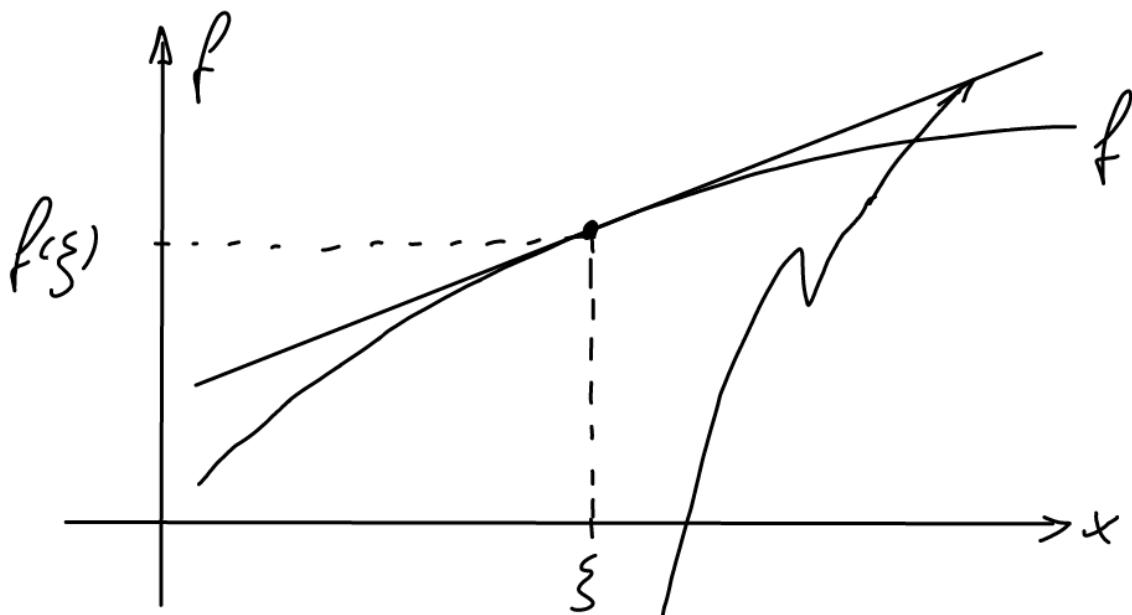
Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich  $f$  nahe  $\xi$  wie die Konstante Funktion  $x \mapsto f(\xi)$  verhält.



(iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Fkt  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  können wir uns [unter vielen alternativen Zugängen? Siche auch später] auf ähnliche Weise nähern, die aber auch ein beliebter Zugang der Schulmathematik ist:

Wir werden  $f$  bei  $\xi \in \mathbb{D}$  differenzierbar nennen, wenn  $f$  „in der Nähe“ von  $\xi$  „schr gut“ durch eine Gerade approximiert werden kann. (\*)

Diese Gerade ist dann natürlich die Tangente [sies der Schulmathematik].



approximierende Gerade,  
Tangente bei  $(\xi, f(\xi))$

Um die Idee (\*) zu präzisieren und in eine offizielle Definition zu können, müssen wir sie zunächst etwas formale ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat - sowie jede Gerade - die Form

$$(**) \quad g(x) = \alpha x + \beta \in \text{"g-Abschnitt"} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{Anstieg} \end{array}$$

Außerdem passiert  $g$  den Punkt  $(\xi, f(\xi))$ , d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha \xi + \beta. \quad (***)$$

Daher ergibt sich im Punkt  $x = \xi + h$

$$\underbrace{g(x) = f(\xi + h)}_{\stackrel{(**)}{\sim}} = \alpha(\xi + h) + \beta = \alpha\xi + \beta + \alpha h \stackrel{(***)}{=} \overbrace{f(\xi) + \alpha h}$$

Im Sinne unserer Approximation-Idee (\*) bedeutet das, dass für  $x$  „nahe bei“  $\xi$  (d.h. für „kleine“  $h$ )

$$\underbrace{f(x)}_{\stackrel{x}{\sim}} = \underbrace{f(\xi + h)}_{\stackrel{\sim}{\sim}} \approx \underbrace{g(\xi + h)}_{\stackrel{\sim}{\sim}} = \overbrace{f(\xi) + \alpha h} \quad (1)$$

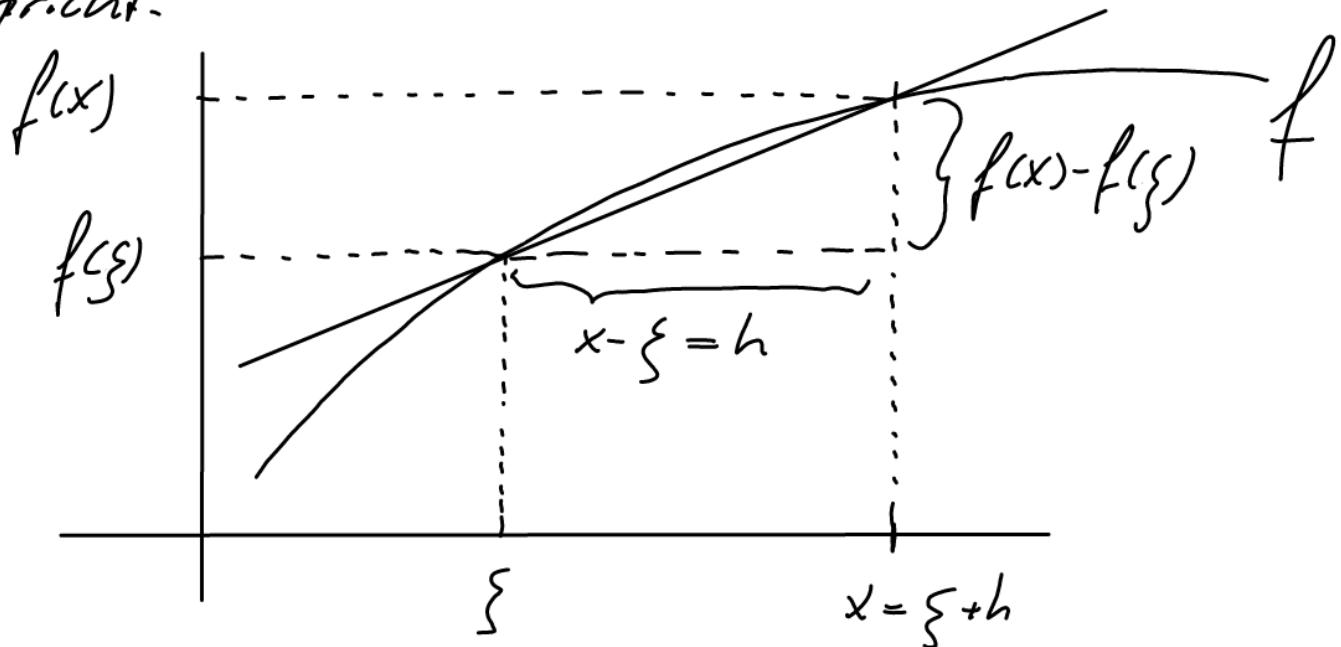
pilt.

Noch bevor wir (1) präzise fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekannten Anstieg  $\alpha$  der approx. Geraden  $g$  zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Diesen Ausdruck werden wir als Differenzenquotient bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist:

dass er der Steigung der Sekante zwischen den Punkten  $(\xi, f(\xi))$  und  $(\xi+h, f(\xi+h)) = (x, f(x))$  entspricht.



(iv) Der weitere Weg der Präzisierung von (\*) ist nun vorgezeichnet. Um der Idee (\*) gerecht zu werden müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten beschäftigen

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

sofort sinnlos

befassen, bspw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

## 1.2 DEF (Differenzenquotient)

-Jetzt offiziell:

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\xi \in I$  fix. Für  $I \ni x \neq \xi$  heißt der Ausdruck  $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$  Differenzenquotient von  $f$  bei  $\xi$ .

1.3 BETT (2 Variablen) Formel hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von 2 Variablen, nämlich  $\xi$  und  $x$  abhängt. Wie in 1.1(ir) angekündigt wollen wir die Abhängigkeit von  $x$  durch Übergang zum Limes  $x \rightarrow \xi$  loswerden, wobei der Differenzenquotient in die Tangentensteigung übergehen sollte.

die 2 Plätze, die die Sekante füllen

Um diesen Limes (von Fkt!) sauber durchführen zu können, wiederholen wir

1.4 DEF (Limes von Fkt auf Intervallen; Spezialfall von 1.2]1.21)

{damit automatisch BP, [1] 3.28(ii)}

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\xi \in I$

Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = c, \quad \left\{ \begin{array}{l} c \in \mathbb{R}, \text{ oder } \pm \infty \end{array} \right.$$

falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $I$  mit  $x_n \rightarrow \xi$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow c$ .

1.5 BETT (Technisches Detektiv) Wir haben in 1.1(ir) geschenkt, dass im Differenzenquotienten  $x = \xi$  sinnlos ist und diesen Fall daher auch in Def 1.2 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Def 1.4 explizit auch die Folge  $x_n = \xi + \varepsilon_n$  [konvergiert ja Dirigentweise, vgl. 1] 2.11(cii)].

Dann müssen wir im Folgenden bei  $\lim_{x \rightarrow \xi}$  immer die konstante Folge  $x_n = \xi$  explizit verbieten und schreiben  $\lim_{x \neq \xi, x \rightarrow \xi}$  oder  $\lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi}$ .

Warnung: Rennche Quellen [z.B. Hauss] verbieten in der Def für Konvergenz von Funktionen  $x_n = \xi$ . Dann muß bei der Differenzierbarkeit  $x_n = \xi$  nicht ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details im Zusammenhang mit Grenzen von Flkt anders zu handhaben? Jetzt aber los!

## 1.6 DEF (Differenzierbarkeit & Ableitung)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Flkt.

(i) Sei  $\xi \in I$ . Die Flkt  $f$  heißt differenzierbar an der Stelle  $\xi$  [diffbar in  $\xi$ ], falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{oder, was} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert und endlich ist. [d.h. kein unregelm. Grenzwert erlaubt, ]

Wir die Ableitung von  $f$  in  $\xi$  und schreiben

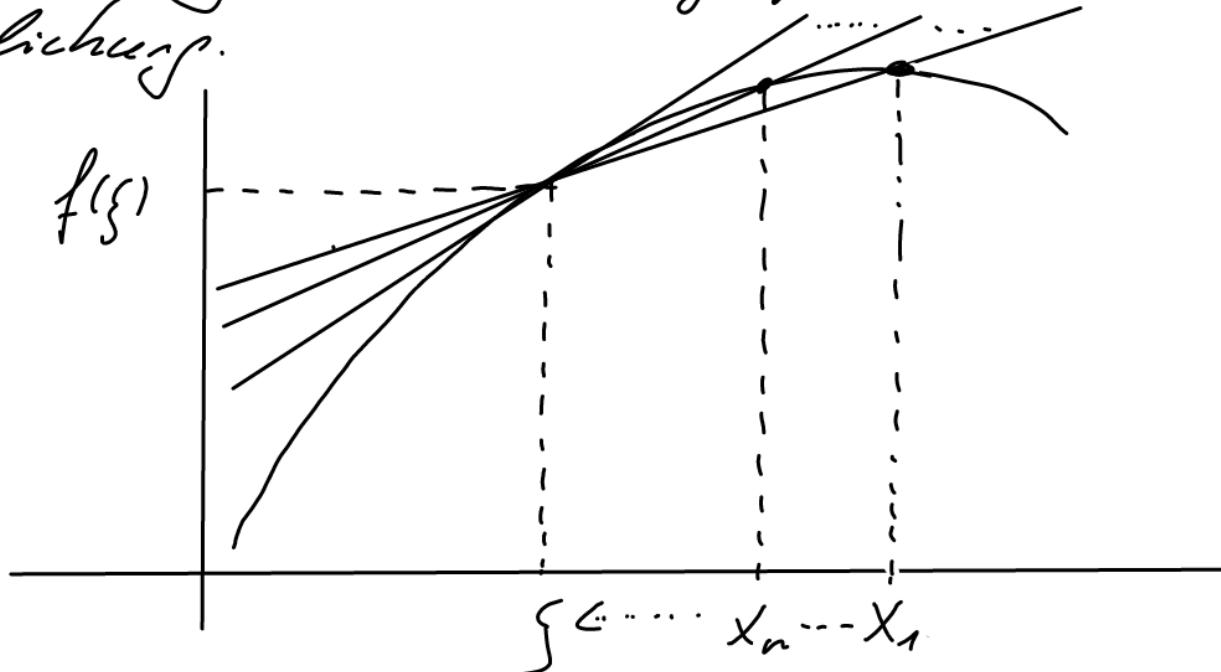
$$\exists f'(\xi).$$

(ii) Ist  $f$  differenzierbar in allen Punkten  $\{ \in I \}$ , dann heißt  $f$  differenzierbar auf  $I$  oder einfach differenzierbar.

### 1.7 BEN (Zur Bedeutung von Def 1.6 & einseitige Ableitung)

(i) Falls der Limes in 1.6(i) existiert und endlich ist, gilt fortsohchlich wie in 1.1(iii) anstipiert, dass die Ableitung (an der Stelle  $\{$ ) gleich dem Limes der Differenzzugraktionen (an der Stelle  $\{$ ) ist.

Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Tangente im Punkt  $\{$  an der Graphen von  $f$  interpretiert werden. Zu dieser Lösung des sog. Tangentenproblems unten [1.10] mehr. Jetzt noch eine graphische Veranschaulichung.



(ii) Bis her haben wir supposedtiv immer  $x \geq \xi$  getzählt.  
 Das dient aber nur der Veranschaulichung.  
 Klaverweise sind in der Def 1.6(i) resp 1.4  
 auch Folgen erlaubt, die von links/rechts  
 gegen  $\xi$  konvergieren - ebenso wie Folgen  
 die „hin- und herspringen“.

$\underline{x_2 x_3 \dots x_n x_1}$

[Nach Def 1.4 & 1.6 sind alle Folgen  $\{x_n\}_n$  in  $I$  erlaubt mit  $x_n \notin \{\xi\}$ ,  $x_n \rightarrow \xi$  und  $x_n \rightarrow \xi$ ]

(iii) Ist  $I$  ein (renigstens halb-) abgeschlossenes  
 Intervall und  $\xi$  ein Randpunkt von  $I$ , dann  
 kommen nur Folgen in Frage die von oben  
 bzw unten gegen  $I$  konvergieren. Dann spricht  
 dann von einschlägigen Ableitungen. Natürlich  
 können solche auch für innerer Punkte eines beliebigen  
 Intervalls betrachtet werden.

### 1.8 BSP (Höchste Zeit: Diffbare & nichtdiffbare Fkt.)

(i) Konstante Fkt sind (überall) diffbar mit  $Abl = 0$   
 Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$   $\forall x$ . Dann gilt  

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

(ii) Potenzfkt sind diffbar. Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq n \geq 1$ .  
 Wir betrachten  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \overline{c x^\lambda}$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \neq 0} \frac{c((x+h)^n - cx^n)}{h} = c \lim_{h \neq 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 (\text{BLS}) &= c \lim_{h \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} \\
 &= c \lim_{h \neq 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} \\
 &= c \lim_{h \neq 0} \frac{h}{h} \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right) \\
 &= c \lim_{h \neq 0} \left( \binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right) \\
 &\quad \xrightarrow[\substack{\leq n \\ \rightarrow 0}]{} \\
 &= \underbrace{cx^{n-1}}
 \end{aligned}$$

In besondere gilt also

- (Geraden)  $f(x) = cx$ ,  $f'(x) = cx^0 = c$

- $f(x) = x^2$ ,  $f'(x) = 2x$

(iii)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist überall diffenzierbar und  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\partial h$  auf dem ganzen Defber.  
R. f. 03

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \neq 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{h \neq 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \\
 &= \lim_{h \neq 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

(ir) Die Exponentialfkt ist auf ganz  $\mathbb{R}$  diffbar und gleich ihrer Ableitung, dann

$$\boxed{\exp' = \exp}$$

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \stackrel{[1] 4.38}{=} \exp(x) \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ \stackrel{[2] 3.8(viii)}{=} \exp(x).$$

(ii) Die Winkelfkt sin & cos sind diffbar auf  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin'(x) = \cos(x) \\ \cos'(x) = -\sin(x) \end{array} \right.$$

Tatsächlich wird für den Sinus

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \stackrel{[2] 3.17(iii)}{=} \lim \frac{2 \cos(x + h/2) \sin(h/2)}{h}$$

$$= \lim \cos(x + h/2) \underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\substack{\text{cos stetig } [2] 3.17(ii) \\ \rightarrow \cos(x) (h \rightarrow 0)}} \rightarrow 1 [2] 3.17(iii)$$

$$\stackrel{[1] 2.23}{=} \lim \cos(x + h/2) \lim \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \underline{\cos(x)}$$

Der Cosinus-Fall löst sich analog erledigen  $\rightsquigarrow$  [UE].

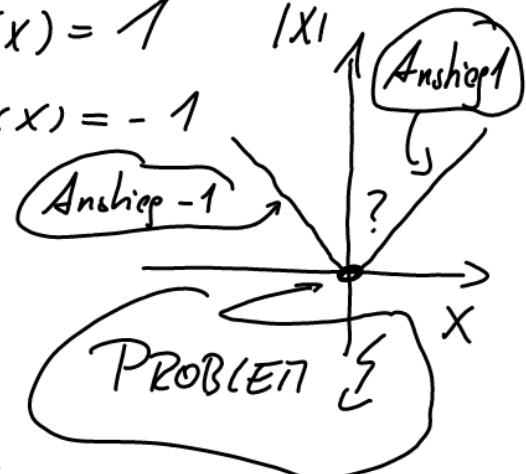
(vi) Der Absolutbetrag  $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  ist diffbar auf  $\mathbb{R}$ , do aber nicht diffbar in  $x=0$

Tatsächlich gilt für

$$x > 0 : \text{abs} = \text{id} \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \text{abs}'(x) = 1$$

$$x < 0 : \text{abs} = -\text{id} \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} \text{abs}'(x) = -1$$

Aber  $\text{abs}'(0)$  existiert nicht, denn sei  $h_n = (-1)^n / n$ , dann gilt  $h_n \rightarrow 0$  aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht:



$$\frac{|0+h_n| - |0|}{h_n} = \frac{1/h_n}{(-1)^n / h_n} = (-1)^n \xrightarrow{\text{div}} [1] 2.11(iii)]$$

[Die Folge  $(h_n)$  ist natürlich so gewählt, dass sie obere- und untere Differenzenquotienten  $\pm 1$  produziert ...]

### 1.8 BEI ((Nicht)-diffbare Fkt.)

(i) Bemerk, dass  $\text{abs}$  in  $x=0$  zwar stetig ist [B 1.2(iv)] aber eben nicht diffbar?

(ii) In gewisser Weise ist der Knick von  $\text{abs}$  bei  $x=0$  ein Prototyp einer nicht-Differenzierbarkeit - etwa wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind [vgl. B 1.8(iv) oder auch B 1.15?] Aber auch hier

ist die punkt Wehrheit komplizierter. Es gibt also Fkt, die auf ganz R<sup>n</sup> stetig aber nirgends diffbar sind, z.B. die Weierstraß-Fkt  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$  [Topologisch passen gibt es sogar viele solche Fkt - sie liegen dicht in den stetigen.]

(iii) Das "Problem" von obs bei  $x=0$  lößt sich mithilfe einseitiger Ableitungen [1.7(iii)] genauer analysieren.

Offensichtlich gilt

*(siehe Zbl. zw. 2)*

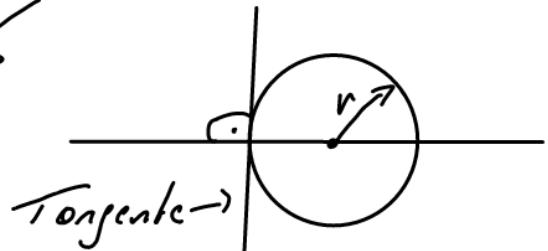
$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1,$$

sodass die einseitigen Ableitungen bei  $x=0$  existieren und  $\pm 1$  ergeben.

### 1.10 BEM (Historische Bemerkung 1: Tangentenproblem)

Die grundlegende Problemstellung der Differenzialrechnung war seit der Antike unter dem Namen Tangentenproblem bekannt: {Finde die Tangente in einem Punkt an eine beliebige Kurve.}

Dabei ist zunächst das Problem, wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie z.B. den Kreis zu einer geraden Linie Vervollständigungen ableiten soll/ kann. Ein zunächst

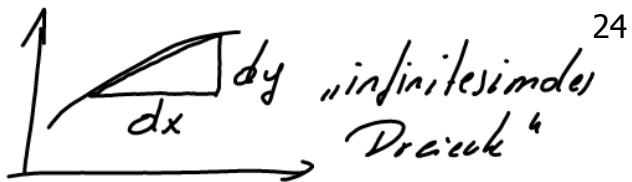


naheliegender Ansatz ist es, die Tangentensteigung durch die Sekantensteigungen anzunähern – obs unsre Idee (\*) aus 1.1(iii). Was wir in Def 1.6(c) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte die MathematikerInnen bis vor ~300 Jahren vor gewaltige technische Probleme.

Noch früheren Ansätzen von P. Fermat [~1600-1665] und R. Descartes [1596-1650] gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716] und Isaac Newton [1643-1727] funktionierende Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypotenuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen“, ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differenzialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt: Bezeichnen wir eine Funktion mit  $y$  (wie früher oft üblich), etwa  $y = x^3 + 2x^2 + 7$ , dann schreibt man für die Ableitung statt  $y'$  auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$



Leibniz hat sich dabei  $\frac{dy}{dx}$  wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkohthe (dy) und Ankohthe (dx) vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein“ sind.

Der moderne Grenzverfbcgriff erspolt es uns mit diesen eine gewisse „richtige“ Annahme voraussetzenden „unendlich kleinen Größen“ kontinuierlich zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson [1918-74] u. o. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen riporosen Umgang mit „unendlich kleinen“ (und „unendlich großen“) Größen ermöglicht. Dieses math. Teilgebiet heißt Nichtstandard Analysis.

### 1.11 Bern (Historische Bem 2: Newtonsche Mechanik)

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „Principia Mathematica“ - einem der einflussreichsten Bücher überhaupt - hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch math. Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der

Momentangeschwindigkeit ausging:  
 Ein Pfeilspunkt  $P$  bewegt sich auf der Zahlenstrahl. Seinen Ort zum Zeitpunkt beschreiben wir mit der Funktion  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto s(t)$ . Unsere Anschauung drängt uns dazu, zu plausieren, dass  $P$  zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Tatsächlich bestimmbare sind aber nur Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t$ ,

$$\text{also } \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

*durch  
mittlere  
Geschw.*

In völliger Analogie zum Tangentenansatz können wir die Momentangeschwindigkeit  $v(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschw. definieren – falls diese existiert, d.h. dass die Durchschnittsgeschw. „stetig“ sind, falls  $t$  „in der Nähe“ von  $t_0$  variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t_0 + t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad [\text{falls existent}]$$

Zum Bsp. gilt für den freien Fall  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$  und daher

$$v(t) = \left( \frac{1}{2}gt^2 \right)' = gt$$

*1.81 m/s*

*Erdbeschleunigung  
 $\approx 9.81 \text{ m/s}^2$*

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschw.  $v$  selbst eine Funktion der Zeit  $t$ ; also  $t \mapsto v(t)$ . Die mittlere Beschleunigung von Körpern von  $t_0$  und  $t$  ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschw. definieren wir die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt  $t_0$  als

$$b(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad [\text{folgt ex.}]$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$\underline{b(t)} = \underline{v'(t)} = (\underline{\rho t})' = \underline{\underline{f}},$$

was auch den Namen der Konstanten  $\rho$  erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschw. und -beschleunigung ermöglichen einen analytischen Zugriff auf Newtons Kraftgesetz (2. Newtonsches Axiom)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} \\ \text{nämlich} \\ F(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t) \end{array} \right\}$$



## 1.12 ZETT (Differenzierbarkeit vs Stetigkeit)

Bsp 1.8(iv) zeigt, dass die Stetigkeit einer Funktion  $f$  im Punkt  $\xi$  nicht die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\xi$  impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Thm zeigt. Insbesondere gilt also für

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in I$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ diffbar in } \xi \\ \Rightarrow f \text{ stetig in } \xi \end{array} \right.$$

## 1.13 Thm (diffbar $\Rightarrow$ stetig) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Falls  $f$  differenzierbar in  $\xi \in I$  ist, dann ist  $f$  in  $\xi$  auch stetig.

Beweis. Sei  $I \ni x \neq \xi$ , dann gilt lt. Voraussetzung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also  $f(x) \rightarrow f(\xi)$  und mit [2] Prop 1.26 folgt  
dass  $f$  stetig in  $\xi$  ist.



## 1.14 Motivation (Weiteres Vorgehen)

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe - hier Differenzierbarkeit - ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispielen und Nicht-Bsp zu finden.

Um dabei nicht immer auf die Def zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in [B]§1 im Falle der Stetigkeit ein „Baukostensystem“ etablieren [vgl. [B]1.16] und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für  $f, g$  ([T]1.3) die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differenziationsregeln (wieder-) entdecken.

## 1.15 Prop (Grundops & Diffbarkeit – Differenziationsregeln)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\xi \in I$  und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $\xi$ . Dann gilt

(i) (Linearkombinationen) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda f + \mu g$  diffbar in  $\xi$  und es gilt

$$\boxed{(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).}$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel)  $f \cdot g$  ist diffbar in  $\xi$  und es gilt

$$\boxed{(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)}$$

(iii) (Quotientenregel) Falls  $p(\xi) \neq 0$ , dann ist  $\frac{f}{g}$  diff'bar in  $\xi$  und es gilt

$$\left\{ \left( \frac{f}{g} \right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)p(\xi) - f(\xi)p'(\xi)}{p(\xi)^2} \right\}$$

Beweis: (i) Folgt sofort aus dem Grenzwerteschen [1] 2.25- [UE]

(ii) Sei  $0 \neq h$  mit  $g+h \in I$ . Dann gilt

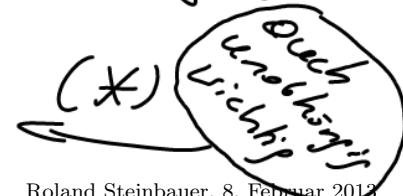
$$\begin{aligned} \frac{f(\xi+h)p(\xi+h) - f(\xi)p(\xi)}{h} &= \frac{1}{h} \left( f(\xi+h) \left( p(\xi+h) - p(\xi) \right) \right. \\ &\quad \left. + (f(\xi+h) - f(\xi)) p(\xi) \right) \\ &= f(\xi+h) \frac{p(\xi+h) - p(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} p(\xi) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[1]{} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Trick}} f(\xi) g'(\xi) + f'(\xi) g(\xi) \\ \xrightarrow{\text{f steigt in } \xi} \end{array}$$

(iii) Sei zumindest  $f(x) = 1$  auf  $I$ . Für  $0 \neq h$  mit  $g+h \in I$  gilt

$$\frac{\frac{1}{p(\xi+h)} - \frac{1}{p(\xi)}}{h} = \frac{g(\xi) - p(\xi+h)}{h g(\xi) p(\xi+h)} \xrightarrow[\substack{1.13.0 \\ \xrightarrow{\text{1.13.0}}}]{\substack{1.13.0 \\ \xrightarrow{\text{1.13.0}}} \frac{g'(\xi)}{p(\xi)^2}}$$

also  $\left( \frac{1}{p} \right)'(\xi) = - \frac{g'(\xi)}{p^2(\xi)}$



Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(\xi) \stackrel{(ii)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) + f(\xi) \left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) \\ &\stackrel{(*)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) - f(\xi) \frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)} \\ &= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \end{aligned}$$

]

### 1.16 Bsp (Wahre diffbare Fkt)

Gent im Sinne von 1.14 wenden wir nun 1.15 an und  
holten reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Fkt)

Sei  $\exists n \geq 1$  und  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^n$ ,  
dann gilt wegen 1.15(iii)  $[1/x^n \neq 0 \vee x \neq 0]$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \stackrel{1.8 \text{ üb}}{=} \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

d.h.

$$(x^{-n})' = -n x^{-n-1}$$

kein Intervall oder Vereinigung  
zweier Intervalle

Oder auch (falls  
im Bereich von  
einem einknotigen  
Schnittpunkt ist)

(ii) fom:  $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist diffbar und

es gilt

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &\stackrel{1.15(\text{iii})}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

(iii) Polynome und rationale Fkt sind überall diffbar. [Details VE]

## 1.17 NOTIATION (Differenziation als lineare Approximation)

Berör wir unser Brakostensystem aus 1.15 [vgl. 1.14] erweitern (können) werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differenziation - diesen Gesichtspunkt der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion

haben wir schon in 1.1(iii) angedeutet. Aber Achtung: Obwohl es in der Schulmathematik eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Potthematik insbesondere bestimmende Aspekt des Begriffs der Differenzierbarkeit!

Er ermöglicht - im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotienten - weitreichende Verallgemeinerungen

siehe 3. Teil der V2

nerungen und ist sozusagen der Kern der Sache.

Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

### 1.18 BEM (Differenzialquotient vs. lin. Approx.)

(i) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $\xi \in I$  mit  $f'(\xi) = \alpha \in \mathbb{R}$ .  
Dann gilt nach Def 1.6 c.)

$$0 = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - \alpha = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - \alpha h}{h}. \quad (*)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren:

Die Lineare Funktion  $h \mapsto \alpha \cdot h$  ist (im Sinne von (\*)) eine Approximation der Fkt  $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$ ;  
mehr dazu in 1.20 unten.

(ii) Umgekehrt auf  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft (\*) d.h.

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - \alpha h}{h} = 0,$$

dann gilt  $\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\xi+h) - f(\xi)) = \alpha$  und

somit ist  $f$  in  $\xi$  diffbar mit  $f'(\xi) = \alpha$

Insgesamt haben wir also gezeigt

(iii)  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ diffbar in } \xi \\ \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - \alpha h}{h} = 0 \end{array} \right.$

und in diesem Fall ist  $f'(\xi) = \varnothing$ .

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee halten wir als Thm fest.

### 1.18 THM (Differenzierbarkeit mittels lin. Approx.)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Fkt auf einem Intervall und sei  $\xi \in I$ . Dann gilt

$f$  diffbar in  $\xi \Leftrightarrow \exists \varnothing \in \mathbb{R} \quad \exists$  Fkt  $r: I \rightarrow \mathbb{R}$  so dass

$$f(\xi+h) - f(\xi) = \varnothing \cdot h + r(h)$$

$$\text{und } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

In diesem Fall gilt  $f'(\xi) = \varnothing$ .

### 1.20 BEM (Für Bedeutung von Thm 1.18)

(i) Um die Bedeutung von 1.18 besser zu verstehen definieren wir das Inkrement der Fkt  $f$  bei  $\xi$  als

$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Dann besagt 1.18 im Falle der Differenzierbarkeit, dass

$$\varphi(h) = f'(\xi) \cdot h + r(h),$$

Zunahme von  
 $f$  zwischen  $\xi$  u.  $\xi+h$

d.h. dass das Inkrement bis auf einen „Fehler“  $r(h)$  proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen  $h$  ist – der Proportionalitätsfaktor ist genau  $f'(\xi)$

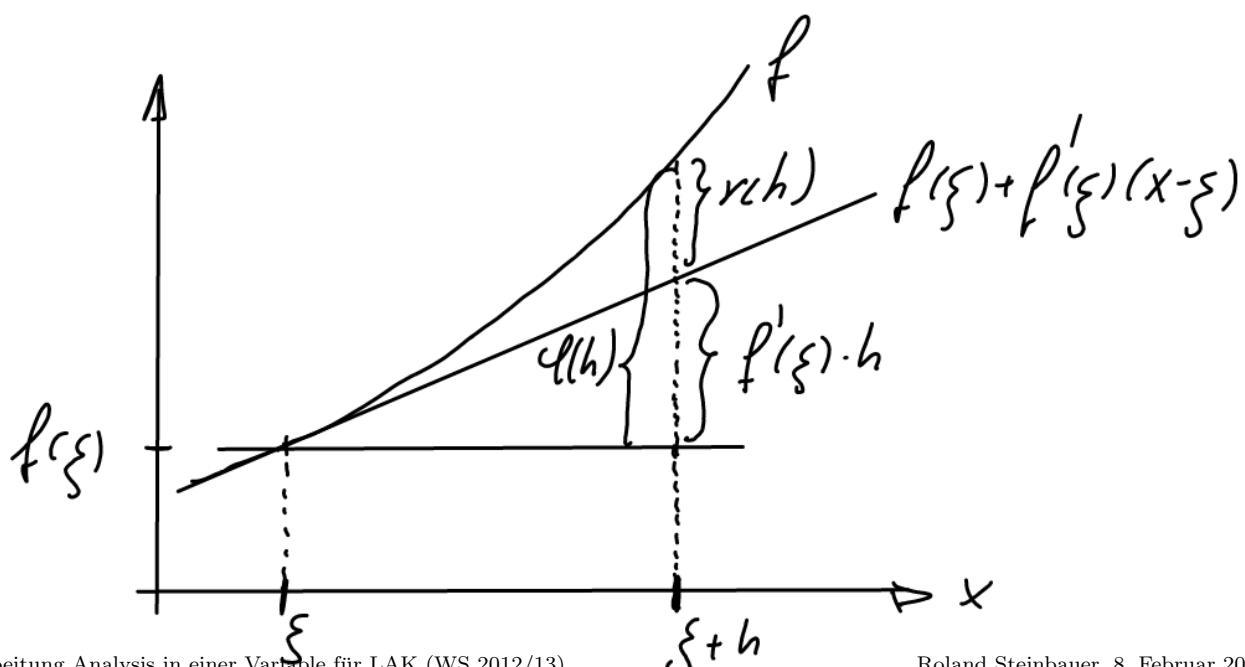
$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi) \approx f'(\xi) \cdot h$$

Oder noch anders: Die Inkrementfunktion  $h \mapsto \varphi(h)$  wird bis auf den „Fehler“  $r(h)$  durch die Lineare Fkt  $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$  approximiert.

(ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als [vgl. 1.1 ciii)] dass die Tangente an  $f$  im Pkt  $\xi$  definiert ist

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

im präzisen Sinn von 1.19 für  $x$  nahe  $\xi$  (d.h. für kleine  $h$ ) eine gute Approximation ist [weil 1.1P sagt  $f(\xi+h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h)$ .]



(iii) Besondere Beachtung verdient auch das Verhalten des „Fehlers“  $r$  [r für Rest]. Diese erfüllt nicht nur  $r(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) sondern sogar  $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ )

Oft schreibt man dafür auch  $r(h)=o(h)$

*klein ob von h*

(ir) Damit sieht man auch besonders schön, dass [oder sogar vorin] Differenzierbarkeit stärker ist als Stetigkeit [vgl. 1.12]. Es gilt ja [2] 1.26]

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow f(\xi+h) - f(\xi) \rightarrow 0$$

*nur das & nicht mehr*

Wählen wir also irgendein  $\alpha \in \mathbb{R}$  und schreiben

$$f(\xi+h) - f(\xi) = \alpha \cdot h + r(h) \quad [\text{d.h. } r(h) :=$$

$$f(\xi+h) - f(\xi) - \alpha h]$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow r(h) \rightarrow 0$$

und es ist keine Rede von  $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  oder davon, dass  $\alpha$  eindeutig bestimmt ist – was ja aus dem zweiten in 1.19 folgt. [siehe auch UE]

Nach dieser langen Bem zum erstaunlich kurzen

### Beweis von 1.19

" $\Rightarrow$ ": Sei  $r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - f'(\xi)h$ . Für  $0 \neq h$  mit  $\xi+h \in I$  gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

" $\Leftarrow$ ": Sei wieder  $0 \neq h$  mit  $\xi+h \in I$ . Local Vorwärtschung giebt

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \rightarrow a + 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

also ist  $f$  diffbar in  $\xi$  mit  $f'(\xi) = a$

□

### 1.21 Bsp (Der Sinus bei 0)

Wir veranschaulichen die Situation von 1.19 am Bsp der Sinusfkt:  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

[2] 3.22(cii)

$$1.8(v) \Rightarrow \sin'(x) = \cos(x) \Rightarrow \sin'(0) = \cos(0) = 1 \quad (*)$$

1.19  $\xrightarrow{\xi=0}$

$$\sin(h) = \sin(0+h)$$

$$= \sin(0) + \sin'(0) \cdot h + r(h)$$

$$(*) = 0 + h + r(h)$$

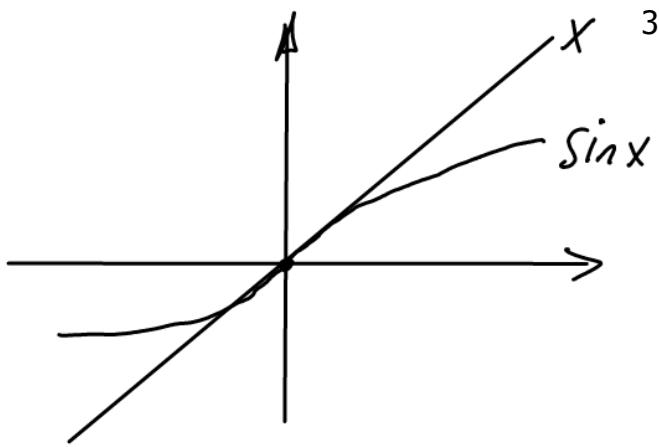
$$= h + r(h)$$

$$\text{mit } r(h) = \sin(h) - h = o(h)$$

$$\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$$

dass wissen wir  
im übrigen auch  
schon aus [2] 3.17(vi)

Graphisch bedeutet das, dass  
sin nahe 0 wie id aussieht.



### 1.22 Motivation (Zurück zum Baukosten)

Jetzt kehren wir endlich wieder zu unserem Baukostensystem zurück und erweitern ihn. Prop 1.15 hat ja schon einige gebracht [siehe auch UE], aber zum point an Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differenziation mit der Verknüpfung [vgl. auch 12] 1.17(iii) im Fall der Stetigkeit]. Sie wird uns auch die Tür für Differenziation der Umkehrfunktion öffnen.

Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel - dabei können wir die Postschreibweise aus 1.18 gleich gut gebrauchen [müssten wir aber nicht verwenden vgl. [Hö], Beur's von Thm 7.9]

1.23 TH (Kettenregel) Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und seien  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Fkt. sodass  $f(I) \subseteq J$ .

Ist  $f$  diff'bar in  $\{ \in I \}$  und ist

$g$  diff'bar in  $y := f(x) \in J$ , dann ist die Verknüpfung  $gof: I \rightarrow \mathbb{R}$  diff'bar in  $\{$  und

die Voraussetzung ist nicht def.  
vgl. 12) 1.3(cii)

es gilt  $(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$

### 1.24 BEM (Zur Kettenregel)

(i) (Schreibweise) In der Leibniz'schen Schreibweise hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{d\xi}$$

Wobei hier  $g$  mittels Verknüpfung mit  $f$  abhängt von  $\xi$  zu verstehen ist, also  $g(\xi) := g(f(\xi))$ .

(ii) (Beweisidee für 1.23) Folgende (einfache & brutale) Beweiskette/Rechnung ist naheliegend:  
Sei  $\xi \neq x \in I$ , dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

→  $g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$

Das Problem dabei ist aber, dass  $f(x) - f(\xi) = 0$  gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar? Er kann direkt repariert werden (siehe [Hö, 7.9]) oder man kann (wie wir es gleich tun werden) das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 1.19 umgehen.

Beweis von 1.23. Wir verwenden 1.19 um die Voraussetzung umzuschreiben ( $h, k$  so dass  $\xi+h \in I, \eta+k \in J$ )

$$f \text{ diff'bar in } \xi \stackrel{1.19}{\Rightarrow} f(\xi+h) - f(\xi) = f'(\xi)h + r_1(h) \text{ mit } (*) \\ r_1(h) := \frac{r_1(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

$$g \text{ diff'bar in } \eta \stackrel{1.19}{\Rightarrow} g(\eta+k) - g(\eta) = g'(\eta)k + r_2(k) \text{ mit } (**) \\ r_2(k) := \frac{r_2(k)}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0)$$

Daraus folgt

$$g \circ f(\xi+h) - g \circ f(\xi) = g(f(\xi+h)) - g(f(\xi)) \\ \text{Durch den  
druckmischen  
Wirgrundsatz  
vgl. 1.19} \\ K = f(\xi+h) - f(\xi) \\ n = f(\xi) \\ \stackrel{(***)}{=} g'(\eta) (f(\xi+h) - f(\xi)) + r_2(f(\xi+h) - f(\xi)) \\ \stackrel{(*)}{=} g'(\eta) (f'(\xi)h + r_1(h)) \\ + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ = g'(\eta) f'(\xi) h + r(h), \quad (***)$$

wobei

$$r(h) = g'(\eta) r_1(h) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ \stackrel{(*), (**)}{=} g'(\eta) \rho_1(h) \cdot h + \rho_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \cdot (f'(\xi)h + r_1(h))$$

und daher

$$r(h)/h = g'(\xi) \underbrace{\rho_1(h)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \\ \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Nun folgt mit (der Rückleitung von) 1.18, dass  $g \circ f$  diffbar in  $\xi$  ist mit  $(g \circ f)'(\xi)_{\text{(*)}} = g'(f(\xi)) f'(\xi)$ . □

1.25 BEM (Ableitung der Umkehrfkt) Seien  $I, J$  Intervalle.

Sei  $f: I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$  eine reelle bijektive Fkt auf einem Intervall. Angenommen  $f$  ist diffbar in  $\xi \in I$  und die Umkehrfkt  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ( $J$  war  $f$  bijektiv) ist diffbar in  $y = f(\xi)$ . Wir können daher die Kettenregel in  $\xi$  anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = id_I \quad \text{[vgl. EVA 4.3.30]}$$

Das ergibt  $(f^{-1} \circ f)'(\xi) \stackrel{1.23}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \stackrel{1.8\text{iii)}}{=} id'(\xi) = 1$ .  $(*)$

Insbesondere gilt also  $f'(\xi) \neq 0$  und wir können  $(*)$  mit  $\xi = f^{-1}(\eta)$  umschreiben zu

$$\left\{ (f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))} \right\}$$

Bemerk, dass wir in dieser Aussage die Diffbarkeit von  $f^{-1}$  in  $y$  vorausgesetzt haben. Eine Möglichkeit die Diffbarkeit von  $f^{-1}$  oder von  $f$  zu folgen lernen wir als nächstes kennen.

1.26 Erinnerung / Notation (Umkehrfkt) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow f(I) =: J$  stetig und streng monoton. Dann besagt [2] Thm 2.18, dass  $J$  ein Intervall,  $f$  bijektiv und  $f^{-1}: J \rightarrow I$  stetig & str. monoton ist.

Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Diffbarkeit von  $f$  in  $\xi \in I$  unter der Bedingung  $f'(\xi) \neq 0$  schon die Diffbarkeit von  $f^{-1}$  in  $y = f(\xi)$  folgt. Wegen 1.25 ist diese Bedingung auch necessary?

### 1.27 THM (Diffbarkeit der Umkehrfkt)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und stetig auf dem Intervall  $I$ . Ist  $f$  diffbar in  $\xi$  mit  $f'(\xi) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfkt  $f^{-1}: J := f(I) \rightarrow I$  diffbar in  $y := f(\xi)$  und es gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array} \right.$$

Beweis. Sei  $(y_n)_n$  eine Folge in  $J \setminus \{y\}$  mit  $y_n \rightarrow y$ .

$f$  bij.  $\Rightarrow (x_n) := (f^{-1}(y_n))$  ist Folge in  $I \setminus \{\xi\}$

$f^{-1}$  stetig  $\Rightarrow x_n \rightarrow \xi$

Daher gilt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} \xrightarrow[f'(x_n) \neq 0 \quad \text{d. diffbar in } \xi]{f'(x_n) \rightarrow f'(\xi)} \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} \xrightarrow[f'(x_n) \neq 0 \quad \text{d. diffbar in } \xi]{f'(x_n) \rightarrow f'(\xi)} \frac{1}{f'(\xi)}$

und (wegen 1.6(c), 1.4) ist  $f'$  diffbar in  $\gamma$  mit Ableitung  
 $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi) = 1/f'(f^{-1}(\eta))$ . □

### 1.28 BSP (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel)

(i) Die Logfkt ist diffbar auf  $(0, \infty)$  [s.o. auf ihrem gesamten Definitionsbereich] und es gilt

[vgl. 1.2] 3.2]  $\left\{ \log'(x) = 1/x \right\}$

Tatsächlich ist  $\log = \exp^{-1}$  [1.2(iii)], so ist  $\log$  definiert, und  $\exp$  ist diffbar auf ganz  $\mathbb{R}$  [1.8(iii)] mit  $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$  [1.1] 4.40(i)]. Also können wir 1.27 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$\left\{ e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

herleiten, die oft auch als Definition der Euler-Schen Zahl verwendet wird. [Wir haben  $e$  ja als  $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$  definiert, vgl. 1.1] 4.37.] Es gilt

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{\underset{\text{log}(1)=0}{\underset{\text{log-Subst}}{\underset{1.22(iii)}{1 = \log'(1) \stackrel{1.6(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log(1)}{1/n}}}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ \boxed{1.23} \quad &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \\ &= \underbrace{\log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)}, \end{aligned}$$

und daher mittels exp auf beiden Seiten der Gleichung angewandt

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

### 1.28 Bsp (Weitere differenzierbare Fkt)

(i) Die allgemeine Potenzfkt ( $\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$ ) ist differenzierbar und es gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

und daher insbesondere

$$\sum \left( \frac{1}{x^n} \right)' = \left( x^{-n} \right)' = \frac{1}{n} x^{-n-1} = \frac{1}{n x^{n+1}}$$

$$\sum \left( \frac{1}{x} \right)' = \left( x^{-1} \right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Tatsächlich können wir rechnen

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &\stackrel{\text{def. 3.5(i)}}{=} (\exp(\alpha \log(x)))' \stackrel{1.23}{=} \exp'(\alpha \log x)(\alpha \log x)' \\ &= \exp(\alpha \log x) \alpha \log'(x) \end{aligned}$$

$$\stackrel{1.28(ii)}{=} x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$$

(ii) (Affine Variablentransformation) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $g(x) := f(ax+b)$  ist diffbar mit

$$g'(x) = f'(ax+b)(ax+b)' - af'(ax+b).$$

(iii) Der Arcussinus [12] 3.28(ii)] ist auf  $(-1, 1)$

diffbar und es gilt

$$\text{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\cos = \sqrt{1 - \sin^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(iv) Der Arcustangens [12] 3.28(iii)] ist diffbar auf seinem ganzen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\text{arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

### 1.30 BEM (Höhere Ableitungen)

(i) (Notation & Def) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf (punkt I) diffbar. Dann definieren wir die Ableitungsfunktion durch

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Fkt  $f'$  stellen - insbesondere noch ihrer Differenzierbarkeit.

Ist  $f'$  in  $\{ \in I$  diffbar so schreiben wir  $f''(\xi)$  für die Ableitung von  $f'$  in  $\xi$  und nennen  $f''(\xi)$  die 2. Ableitung von  $f$  in  $\xi$ . Ist  $f'$  auf ganz  $I$  diffbar, so definieren wir die Fkt

$$\begin{aligned} f'': I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x). \end{aligned}$$

und nennen sie die 2. Ableitungsfunktion von  $f$ . Oft schreibt man auch  $f^{(2)}$  für  $f''$

Induktiv definieren wir nun die  $n$ -te Ableitung von  $f$  in  $\xi \in I$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  via (folgt)

$$f^{(n)}(\xi) = (f^{(n-1)})'(\xi)$$

In diesem Zusammenhang schreiben wir auch  $f^{(0)}$  für  $f$  selbst.

Die  $n$ -te Ableitung ist die Ableitung der  $(n-1)$ -ten Ab.

### (ii) (Ein Bsp)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$$

$$\sin^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x)$$

$$\sin^{(5)}(x) = \sin'(x) = \cos(x), \text{ usw.}$$

Aber gilt

$$\left\{ \sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos \right.$$

Somit ist  $\sin$  beliebig oft diffbar, d.h.  $n$ -mal diffbar für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Solche Funktionen nennt man auch plott oder  $C^\infty$ -Fkt.

Funktionen, die  $n$ -mal diffbar sind und deren  $n$ -. Ableitung stetig ist, nennt man auch  $n$ -mal stetig differenzierbar oder  $C^n$ -Funktionen.

(iii) WARNUNG!

$(C^n \neq C^{n+1})$

Eine diffbare Funktion muß keine diffbare Ableitung haben. z.B. ist  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$  zwar  $C^1$  aber nicht  $C^2$ -diffbar. [Details VE]

(diffbar  $\neq C^1$ )

Noch schlimmer muss die Ableitung einer diffablen Fkt. nicht einmal stetig sein, z.B. ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{diffbar aber nicht } C^1$$

[Details VE]

## §2 EIGENSCHAFTEN DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN

2.1 INTRO. In diesem § kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Fkt in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 0.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mit Hilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Fkt. selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von de l'Hospital benutzen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS) den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise

1.1A Notation/Sprechweise (Randpunkte & innere Punkte von Intervallen)

Sei  $I$  ein Intervall

- (i) Falls  $I$  beschränkt ist, also von der Form  $[vgl. 1.6]$   $[a, b], [a, b), (a, b]$  oder  $(a, b)$ , dann heißen
- $a \& b$  Randpunkte von  $I$ .

(ii) Falls  $I$  halbbeschränkt ist, also von der Form  $[a, \infty)$  oder  $(0, \infty)$  (bzw.  $[a, b]$  oder  $(-a, b)$ ) dann heißt  $a$  (bzw.  $b$ ) Randpunkt von  $I$

(iii)  $\{ \in I$  heißt innerer Punkt von  $I$ , falls  $\{$  kein Randpunkt ist.

(iv) z.B. ist die Menge der inneren Punkte (das sog. Inne) von  $[0, b]$ ,  $(0, b]$ ,  $[0, b)$  und  $(0, b)$  jeweils  $(0, b)$ .

In besonderer besteht jedes offene Intervall nur aus inneren Punkten, ist also gleich seinem Innen.

2.2 DEF (lokale Extremwerte) Sei  $I$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion.

(i) Ein Pkt  $\xi \in I$  heißt lokales Maximum von  $f$  falls es eine Umgebung von  $\xi$  gibt auf der nur Funktionswerte kleiner gleich  $f(\xi)$  annehmen, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) \geq f(x). \quad (*)$$

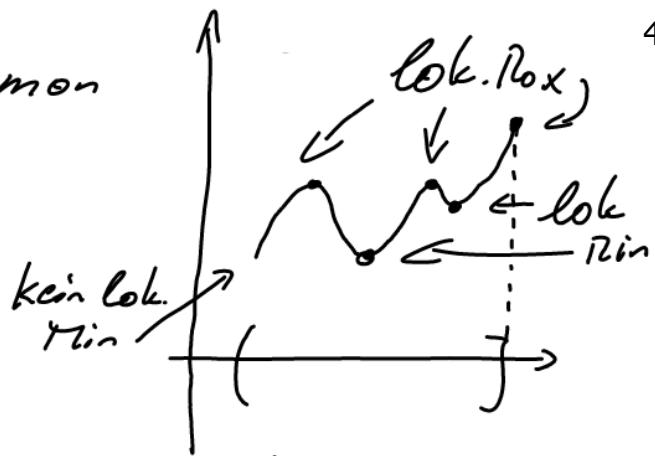
(ii) Der Pkt  $\xi$  heißt streiktes lokales Maximum von  $f$ , falls in  $(*)$  „ $\geq$ “ statt  $\geq$  steht, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) > f(x).$$

(iii) Analog sind (streikte) lokale Minima definiert, d.h.  $\xi$  heißt (streiktes) lokales Minimum, falls

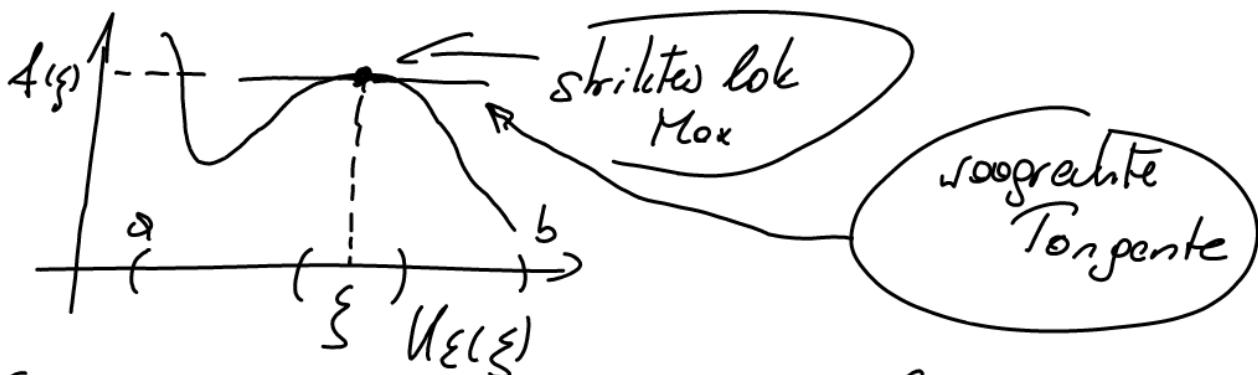
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) \leq f(x) \quad (f(\xi) < f(x)).$$

(iv) In beiden Fällen spricht man von einer (strikten) lokalen Extremstelle oder einem (str.) lok. Extremum



### 2.3 BEM (Extrema & Ableitung, die Idee)

(i) Der Inhalt von Def 2.2 für innerer Punkte  $\xi$  (für ein str. lok. Rox.) kann so vereinfacht werden



(ii) Geometrisch erwarten wir uns, dass - falls  $f$  diffbar in  $\xi$  ist -  $f$  dort eine waagrechte Tangente hat, also  $f'(\xi) = 0$  gilt.  
Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden

### 2.4 Prop (Notwendige Bedingung f. lok. Extrema)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar und sei  $\xi$  ein innerer Pkt von  $I$ .  
Falls  $\xi$  lokales Extremum von  $f$  ist, dann gilt  $f'(\xi) = 0$ .

Bemerk. Wir behandeln nur den Fall der lok. Rox, der Fall der Min ist völlig analog.

Sei  $\xi$  ein (nicht hohenwertige stetiges) Pkt.  
Max. Dann gilt

$$\text{Z.2(i)} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \quad f(\xi) \geq f(x)$$

$\xrightarrow{\text{diffbar in } \xi}$

$$\lim_{\substack{x \nearrow \xi \\ x \neq \xi}} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{\substack{x \searrow \xi \\ x \neq \xi}} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leq 0}$$

$$[\text{Zähler} \leq 0, \text{Nenner} \leq 0] \quad [\text{Zähler} \leq 0, \text{Nenner} \geq 0]$$

Also  $0 \leq f'(\xi) \leq 0$  und damit  $f'(\xi) = 0$ .

□

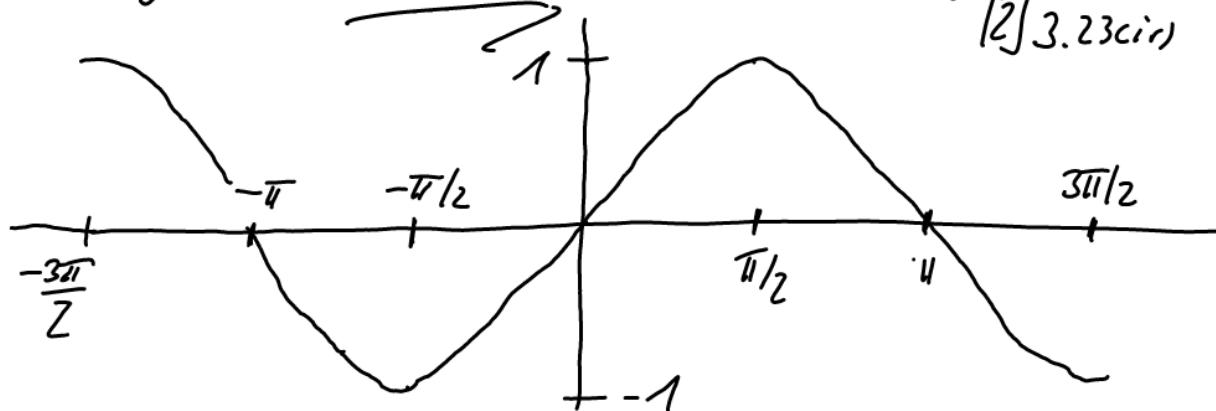
2.5 Bsp (Extrema des Sinus) Wir betrachten  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

In [2] 3.24(iii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) liegen.

[mehr:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  sind es genau die NST des Cos]

Tatsächlich gilt  $\sin'(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$

[2] 3.23(iii)

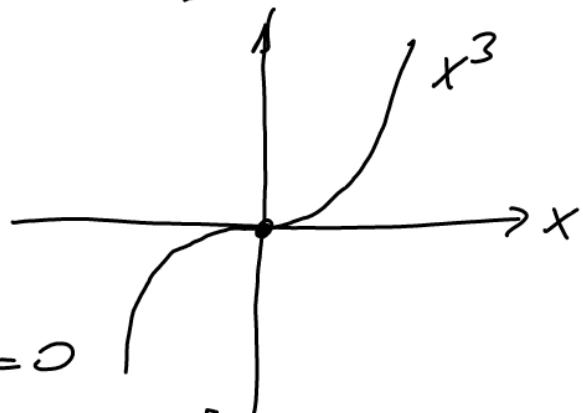


## 2.6 WAHRUNG (Notwendig vs hinreichend, lokal vs. global)

(i) 2.4 zeigt, dass  $f'(g)=0$  notwendige Bedingung für ein lok. Extr. ist — Sie ist nicht hinreichend, wie folgendes Bsp zeigt

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3$$



$$\text{Es gilt } f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

aber  $x=0$  ist kein lokales Extr [denn jede Umgebung  $U_\varepsilon(0)$  enthält pos & negat.  $x$  und damit nimmt  $f$  auf  $U_\varepsilon(0)$  pos & neg. Werte an]

Daher gilt also

$$\boxed{\text{lok Extr} \Rightarrow \cancel{f'(g)=0}}$$

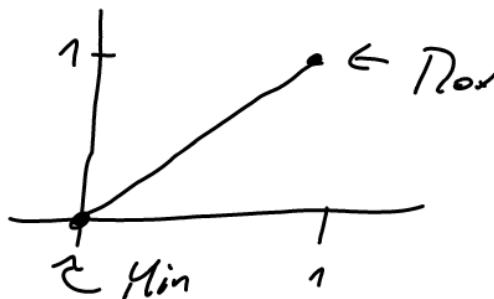
und Nullstellen von  $f'$  sind nur Kandidaten für lok. Extr.

(ii) Sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann zeigt [2] Thm 2.11, dass  $f$  globale Max & Min auf  $[a,b]$  besitzt.

Diese können am Rand von  $[a,b]$  liegen, also in  $a$  oder in  $b$ . Selbst falls  $f$  diffbar auf  $[a,b]$  ist (mit einseitigen Ableitungen in  $a,b$ ) müssen  $f'(a)$  und  $f'(b)$  nicht verschwinden, wie das folgende Bsp zeigt.

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$



Dann hat  $f$  ein  $\text{Rin}$  in  $f=0$  und ein  $\text{Rox}$  in  $f=1$   
obwohl  $f'(0) = 1 = f'(1)$ .

Dieses Bsp steht nicht im Widerspruch zu Z.F., da 0 & 1 keine inneren Punkte von  $I = [0,1]$  sind, also Z.F. über  $f'(0)$ ,  $f'(1)$  keine Aussage macht.

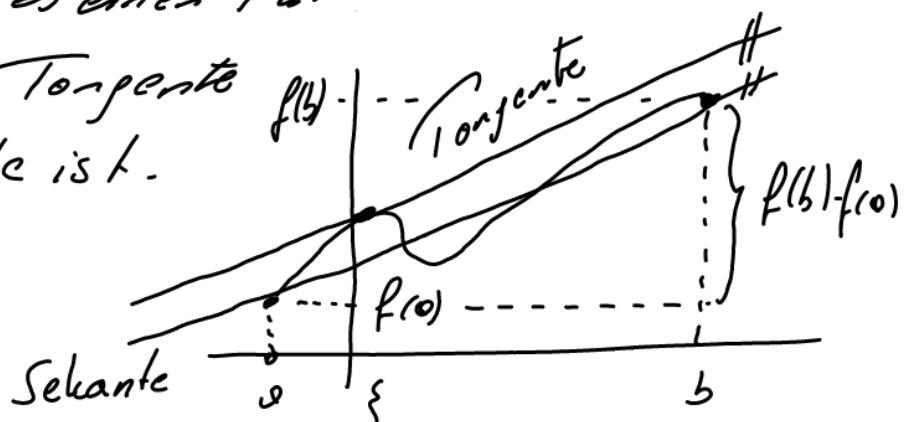
Wenn wir andererseits  $f(x) = x$  auf  $I = (0,1)$  betrachten,  
dann hat  $f$  weder  $\text{Rin}$  noch  $\text{Rox}$  (nur  $\inf$  &  $\sup$ ) und  
das Problem löst sich in Luft auf...

## 2.7 Rotations (lokale Änderungsrate - globale Eigenschaften)

- (i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlaubt wird, aus der Kenntnis der Ableitung einer Fkt (in allen Punkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Fkt abzuleiten: den Mittelwertsatz (MWS)
- (ii) Dieser Aussage ist anschaulich evident:

Im Intervall  $I$  muß es einen Pkt

geben, in dem die Tangente  $f(b)$  parallel zur Sekante ist.



(iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der Mechanik (vgl. 1.11):

Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135 km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muß irgendwo an diesem Autobahnteil die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130 km/h überschritten werden sein.

Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muß einen Zeitpunkt geben an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135 km/h ist.

Nun zur exakten Formulierung des MWs

### 2.8 TMA (Mittelwertsatz)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und diffbar auf  $(a, b)$ .  
Dann gibt es einen Pkt  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\left\{ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{oder (was dasselbe ist)} \right. \quad \left. \text{mit} \right.$$

$$\left. \left. \left. f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \right. \right. \right. \quad (2.1)$$

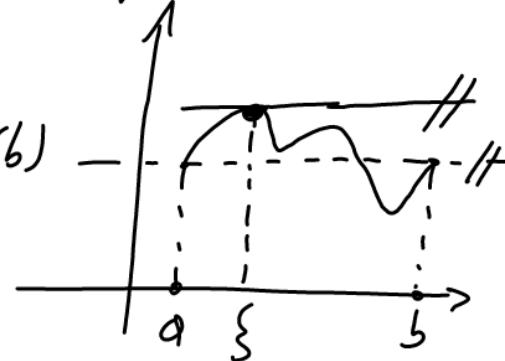
### 2.9 Bem (Bewässerungs-, „Kippen“ des Graphen)

(i) Die grundlegende Bewässerungs- bestehlt darin, den Graphen von  $f$  zu modifizieren und so

$f(a) = f(b)$  zu erreichen. Damit müssen wir lediglich einen Punkt mit  $f'(g) = 0$  finden, was wir mittels 2.4 tun werden.

(ii) Die Idee ein solches  $\xi$  zu finden ist nach die folgende. Interpretieren wir

$$f(a) = f(b)$$



f ob die „Höhenfunktion“ bei einer Bergwandlung. Dann bedeutet  $f(a) = f(b)$ , dass wir am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klareweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort wo wir vom Bergaufgehen zum Bergabgehen übergegangen sind – also am Gipfel ( $\equiv$  lok. Max) eine waagrechte Tangente (kein Anstieg) gehobt haben.

Diese Ideen gießen wir nun in grosszügische Notation.

## 2.10 (LEMMA) (Satz von Rolle)

{ Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und diffbar auf  $(a, b)$ .

Falls  $f(a) = f(b)$ , dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = 0$$

### Beweis. (erfreulich kurz)

(1) Falls  $f$  konstant ist  $[f(x) = f(a) = f(b) \forall x \in (a,b)]$  ist die Aussage trivial  $[f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)]$  [1.8(c.)]

Sei also  $f$  nicht konstant

$\Rightarrow \exists x \in (a,b)$  mit  $f(x) > f(a)$  oder  $f(x) < f(a)$ ;

se: obdA  $\underbrace{f(x) > f(a)}_{\text{(*)}} = f(b)$  [sonst analog]

(2)  $f$  stetig auf  $[a,b]$   $\stackrel{\text{[2.11]}}{\implies} f$  hat ein Rox in  $[a,b]$   
d.h.  $\exists \xi \in [a,b]$  mit

$$(\star\star) \quad f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

(3) Wegen (\*) kann  $\xi$  nicht am Rand liegen, also ist  $\xi$  innerer Punkt  $[\xi \in (a,b)]$  und wir können Prop. 2.4 verwenden [ beachte  $(\star\star)$  ]

$$\stackrel{2.4}{\implies} f'(\xi) = 0.$$

□

### Z.11 Beweis (zum Satz von Rolle & seinem Beweis)

(i) Beachte, dass der Beweis & auch der Satz wesentlich auf [2] Thm 2.11 beruht, also darauf, dass stetige  $f$  auf kp Pausen  $D$  in  $\mathbb{R}_x$  besitzen D [und somit leichtlich auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .]

(ii) Die Voraussetzung  $f$  stetig auf  $[a,b]$  und diffbar auf dem Intervall  $(a,b)$  von  $[a,b]$  ist natürlich fast-weise redundant: was diffbar in  $(a,b)$  folgt natürlich stetig in  $(a,b)$  [1.13].

Daher bewirkt die Voraussetzung  $f$  stetig in  $[a,b]$  nur die Stetigkeit am Rand, also in  $a$  und  $b$ .

Natürlich hätten wir auch  $f$  diffbar auf  $[a,b]$  voraussehen können. Da diese Voraussetzung etwas stärker ist, würde das Lemma schrächer werden. z.B. wäre die Fkt  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  auf  $[-1,1]$  nicht erfasst.



(iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind. [Details VE].

(ir) Wir bereisen jetzt den MWS indem wir den Graphen der Fkt im MWS in "Rolle-Position" bringen.

2.12 Bau des MWS. Sei  $f$  wie im Thm. Wir definieren

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Dann ist  $g$  stetig auf  $[a,b]$ , diffbar auf  $(a,b)$  und  $g(a) = g(b) = 0$ .

et. "Baukosten"

Rolle  $\Rightarrow f\}_{\xi \in (a,b)} \text{ mit}$

$$0 = f'(\xi) = f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

### 2.13 Bem (Anwenden des MWS)

Der MWS ist ein reines Existenzresultat; in dem Sinn, dass die Existenz von  $\xi$  mit der entsprechenden Eigenschaft  $f'(\xi) = 0$  garantiiert ist er aber keine Möglichkeit liefert,  $\xi$  auch tatsächlich zu berechnen.

Daher wird der MWS meist in der Form (2.1) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung kennenlernen, die globale Aussagen über die Funktion ermöglichen; genauer über Wachstumsschranken & Monotonie!

lgl.  
O.1

### 2.14 KOR (Wachstumsschranken)

Sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und diffbar auf  $(a,b)$ .

(i) Falls  $f'$  beschränkt ist, d.h.  $\exists C > 0$  mit

$$|f'(x)| \leq C \quad \forall x \in (a,b),$$

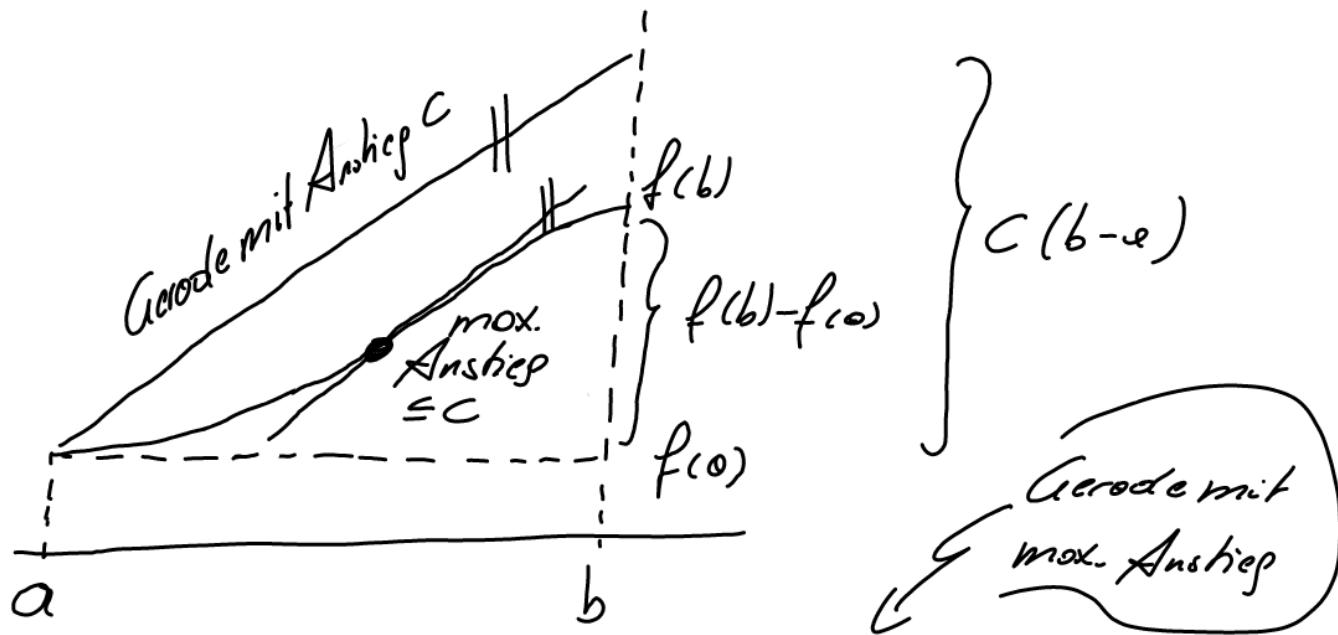
dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C|x_2 - x_1| \quad (2.2)$$

(ii) Falls  $f'(x)=0 \forall x \in (0, b)$ , dann ist  $f$  konstant  
 (genauer:  $f(x)=f(0)=f(b) \forall x \in (0, b)$ ).

### 2.15 Bem (Lipschitzstetigkeit)

(i) Die Bedeutung von (i) kann leicht in einer Skizze veranschaulicht werden:



Eine Funktion  $f$  mit  $|f'(x)| \leq C$  kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg  $C$ , bzw.  $f(b)$  muss kleiner sein als  $f(a) + C(b-a)$ , also  $f(b) - f(a) \leq C(b-a)$ .

(ii) Funktionen, die (2.2) erfüllen heißen Lipschitz-stetig oder Dehnungsbeschränkt, genauer  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt L-stetig, falls  $\exists C > 0 : |f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \forall x, y \in I$

Die Funktionswerte liegen also nicht weiter voneinander ab als die Argumente mal einer Fixen Konstante  $C$ , genannt Dehnungsschranke.

(iii) Lipschitz stetige Fkt sind stetig, je sepor plm. stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt (jeweils auf  $I$ )

12] 2.15

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lipschitz stetig} \not\Rightarrow \text{gelm stetig} \not\Rightarrow \text{stetig.} \end{array} \right\}$

Detaills siehe UE.

(iv) Wir können 2.16c) nun auch so ausdrücken:

Difffbare Fkt mit beschränkte Ableitung sind nicht nur (plm.) stetig sondern sogar Lipschitz stetig.

Beweis (von 2.16 - erstaunlich einfach !)

(i) Sei  $f$  wie in der Behauptung. Dann gilt

$$\forall x_1, x_2 \in [0, b] \quad \exists \xi \in (x_1, x_2) : \quad \text{(2.1)} \quad \text{(lt. Vorauss.)}$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)| / |x_2 - x_1| \leq C / |x_2 - x_1|. \quad (\times)$$

(ii) Lt. Voraussetzung ist  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (0, b)$

$$\stackrel{(\times)}{=} f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [0, b]$$

Voraussetzung mit  $C=0$

□

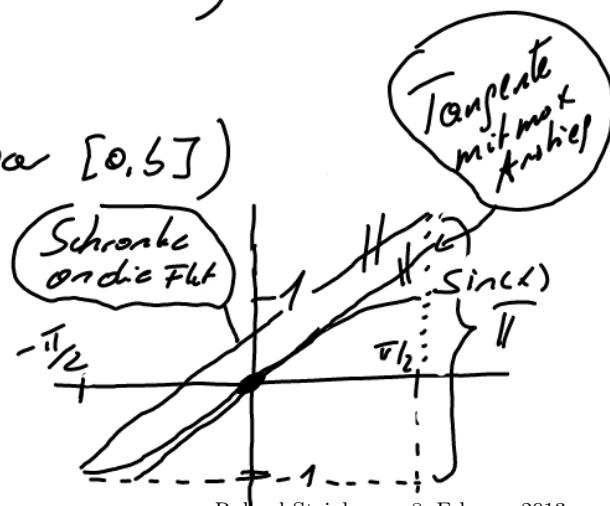
2.16 Bsp (Sinus ist ableitungsbeschränkt)

Sei  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in (0, b) \quad (\text{sogar } [0, b])$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall x, y \in [0, b] \end{array} \right\}$$



## 2.17 PROP. (Monotonie via Ableitung)

Sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und diff'bar auf  $(a,b)$ . Dann gilt

- (i)  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a,b) \iff f$  mon. wachsend auf  $[a,b]$
- (ii)  $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$  str. mon. wachs. auf  $[a,b]$
- (iii) Beide Punkte (i) & (ii) gelten analog für  $f'(x) \leq 0$  und (str.) mon. fallend.

## 2.18 WARNUNG! Die Umkehrung von (ii) ist falsch, d.h.

$$f'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \not\Rightarrow f \text{ str. mon. wachs. auf } [a,b].$$

Die Ableitung str. mon. Flkt kann in einzelnen Punkten verschwinden, wie etwa  $f(x) = x^3$  lehrt:

Es gilt  $f$  ist str. mon. wachsend, aber auf  $[-1,1]$  obwohl  $f'(0)=0$ ?



Beweis (von 2.17).

(i) „ $\Rightarrow$ “ und (ii): Indir. arg  $f$  ist nicht (str.) mon. wachs.

$$\Rightarrow \exists x_1 < x_2 \in [a,b] \text{ mit } f(x_1) > f(x_2)$$

Wurs  
 $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \text{ mit } (bzw. f(x_1) \geq f(x_2))$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) < 0 \quad (\text{bzw. } f'(\xi) \leq 0) \quad \text{Widerspr.} \quad \checkmark$$

(ii)  $\Leftarrow$ : Da  $f$  monoton wachsend, gilt  $\forall x, \xi \in (0, b), x \neq \xi$

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

(  $\xi > x \Rightarrow \text{Zähler} & \text{Nenner} \geq 0$   
 $\xi < x \Rightarrow \text{Zähler} & \text{Nenner} \leq 0$  )

$$\Rightarrow f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (0, b)$$

□

2.19 KOR (Hinreichende Bedingung f. lok Ext)

Sei  $f: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar, sei  $\xi \in (0, b)$  und sei  $f$  2-mal diffbar in  $\xi$ . Dann gilt

$$\begin{cases} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) > 0 \quad (f''(\xi) < 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ hat ein strictes} \\ \text{lok. Min (Max)} \\ \text{im Punkt } \xi \end{array}$$

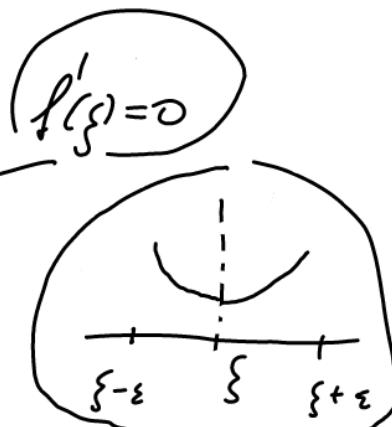
Beweis. Sei  $\xi$  wie oben und  $f'(\xi) = 0, f''(\xi) > 0$  [da  $f''(\xi) < 0$  ist völlig analog]

$$\Rightarrow 0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

? Einl?

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ sodass } \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

$$0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} = -\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi) : f'(x) < 0 \stackrel{2.17}{\Rightarrow} f \text{ str. mon. f.} \\ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) : f'(x) > 0 \stackrel{2.72}{\Rightarrow} f \text{ str. mon. w.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ist str.} \\ \text{17.0n} \end{cases}$$

## 2.20 Bsp (Nachmals Extreme des Sin)

Wie in 2.5 wiederholt wissen wir seit [2] 3.74(ii), dass die Extreme des Sinus in  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  liegen.

Wie in 2.5 nachgeprüft, gilt klarweise die notwendige Bedingung für Extreme 1.4.

Es sind auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 2.19 erfüllt: [2] 3.22(iv)

$$\sin' \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = 0$$

$$\sin'' \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \begin{cases} +1 & k \text{ ungerade} \\ -1 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Minima in  $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

Maxima in  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

## 2.21 Warnung (Hinreichend nicht notwendig?)

Die Bedingung 2.19 ist nicht notwendig, wie das Bsp  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4$$

zeigt:  $f$  hat ein strictes lokale

Min in  $\{=0\}$  [ $f(x) = x^4 > 0 \quad \forall x \neq 0$ ] aber

$$f''(x) = 12x^2 \text{ und damit } f''(0) = 0.$$



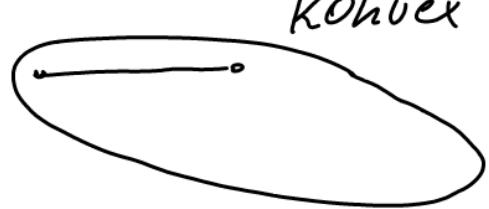
## 2.22 Motivation (Konvexität)

Als nächster Begriff den wir mittels Differenzialrechnung beschreiben können befassen wir uns mit dem

# Krümmungsverhalten von Flächen mit dem Begriff Konvexität

## Konvexität

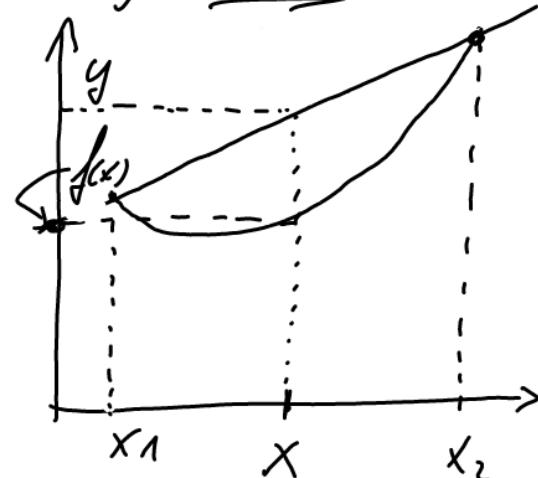
(i) Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesuchte  $y_0$ -Bindungsgerade in der Menge liegt.



nicht konvex

(ii) Eine Fläche  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  werden wir konvex nennen (offizielle Definition), falls die Menge über ihrem Graphen konvex ist.

Anders ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je 2 Punkten über dem Graphen liegt.



(iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für  $\lambda \in [0, 1]$  durchläuft

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

das obige Intervall  $[x_1, x_2]$ . Analog durchläuft

$$y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

die Sekante von  $f(x_2)$  bis  $f(x_1)$ . Jetzt brauchen wir nur noch  $f(x)$  mit  $y$  zu vergleichen: Ist  $y \geq f(x)$ , so liegt die Sekante über der Kurve.  
Jetzt offiziell

2.23 DEF (Konvexe Fkt) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt auf dem Intervall  $I$ .  
 linkspunktmmt

(i) Wir nennen  $f$  konvex, falls  $\forall x_1, x_2 \in I$  und  $\forall d \in [0, 1]$

$$\left\{ f(dx_1 + (1-d)x_2) \leq df(x_1) + (1-d)f(x_2) \right\}$$

gilt.

(ii) Wir nennen  $f$  konkav, falls  $-f$  konvex ist.



2.24 Prop (Konvexität von  $f''$ )

Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal diff'bar.

Dann gilt

konkav Fkt

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " Wir prüfen die Bedingung in 2.23(i) nach.

Dazu sei (oBdA)  $x_1 < x_2$  und  $0 < d < 1$ . Wir schen

$$x = dx_1 + (1-d)x_2 \quad (\Rightarrow x_1 < x < x_2)$$

2.17(i)  $f'$  ist monoton wachsend auf  $[x_1, x_2]$

MWS  
 $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x) \quad \exists \xi_2 \in (x, x_2) \text{ mit}$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (*)$$

Es gilt  $x - x_1 = dx_1 + (1-d)x_2 - x_1 = (1-d)(x_2 - x_1) > 0$

$$x_2 - x = x_2 - dx_1 - (1-d)x_2 = d(x_2 - x_1) > 0$$

und damit folgt dies ( $\star$ )

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}$$

und daher

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ f(x) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  "Indirekt aus  $\exists \xi$  mit  $f''(\xi) < 0$ . Wir sehen"

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x - \xi) \quad (x \in I) \quad (\star)$$

Dann gilt •  $\varphi$  ist 2-mal diffbar auf  $I$

- $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$
- $\varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$

$\stackrel{2.19}{\Rightarrow} \varphi$  hat ein strictes lok. Maximum in  $\xi$

$\stackrel{2.2cii}{\Rightarrow} \exists \varepsilon_0 > 0: \varphi(x) < \varphi(\xi) \quad \forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \subseteq I$

Insbwondere gilt für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$\varphi(x-\varepsilon) < \varphi(\xi), \quad \varphi(x+\varepsilon) < \varphi(\xi)$  und daher

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2} (\varphi(\xi-\varepsilon) + \varphi(\xi+\varepsilon)) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (f(\xi-\varepsilon) + f(\xi+\varepsilon)) \quad (\star\star)$$

Sehen wir nun  $\lambda = \frac{1}{2}, x_1 = \xi - \varepsilon, x_2 = \xi + \varepsilon$ , dann lässt sich

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{\xi}) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \begin{matrix} \nearrow \text{zu Konvexität} \\ \searrow \end{matrix}$$

## 2.25 Bsp (Konvexe & konkav Fkt)

(i) (Quadratische Polynome) Sei  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Es gilt  $f''(x) = 2a$  und damit (wegen 2.24)

$f$  konvex  $\Leftrightarrow a > 0$



$f$  konkav  $\Leftrightarrow a < 0$



(ii) Die Exponentialfkt ist konvex, denn

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0 \quad [1.8(iv), 1]4.40(i)]$$

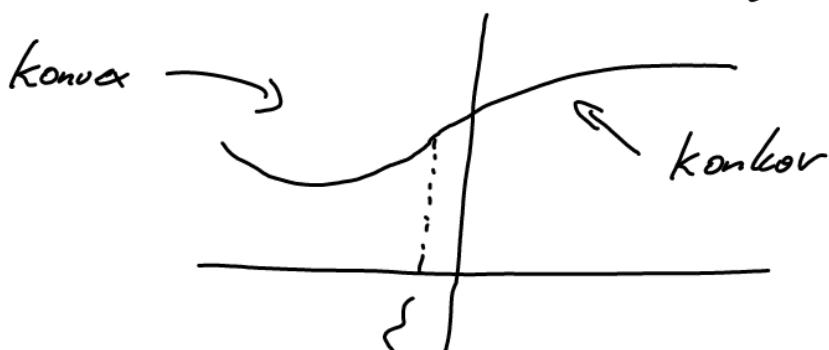
(iii) Die Logarithmusfkt ist konkav, denn

$$\log''(x) = (1/x)' = -1/x^2 < 0 \quad [1.28(ii), (iii)]$$

## 2.26 Bem (Wendestellen)

(i) Punkte  $\xi \in I$  in denen eine Fkt  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Krümmungsverhalten ändert heißen Wendepunkte oder Wendestellen.

In einer Wendestelle ändert  $f$  ihr Verhalten von konkav auf konvex oder umgekehrt.



ciii Falls  $f''$  stetig und oft differenzierbar ist, dann besagt 2.26, dass eine Wendestelle ein Pkt ist, indem  $f''$  das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von  $f'''$ .

Analog zum Fall lok. Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wendepunkte  $\{ f''(\xi) = 0 \}$  und eine hinreichende Bedingung  $[f''(\xi) = 0, f'''(\xi) \neq 0]$ .

[Details VE]

## 2.27 Motivation (Die Regeln von De l'Hospital)

(i) Das Problem: Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)/g(x)$

tritt öfter eine der nicht definierten Fälle „%“; „ $\pm\infty/\pm\infty$ “ auf, wie etwa in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{1/x}.$$

Zuvor haben wir diese Probleme - jeweils mit passenden Methoden / Tricks geknackt [12] 3.8, [12] 3.17 (riess),

praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differenzialrechnung tatsächlich angegeben werden.

(ii) Die Idee. Wir betrachten den Fall „0/0“. Seien also  $f, g$  diffbar und  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$  und  $g'(x) \neq 0 \neq f'(\xi)$ .

Dann gilt [1.13]  $f(\xi) = 0 = g(f)$  und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}{\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}} \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (*)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den Limes  $f(x)/g(x)$  durch den Limes  $f'(\xi)/g'(\xi)$  ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir eine technische Verallgemeinerung des MWS.

## 2.28 Lemma (Verallgemeinerte MWS)

Seien  $f, g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & diffbar auf  $(0, b)$ .

Dann gibt es einen Punkt  $\xi \in (0, b)$  mit

$$(f(b) - f(0))g'(\xi) = (g(b) - g(0))f'(\xi).$$

2.29 Bew (zum MWS) Falls  $g'(x) \neq 0$  auf  $(0, b)$  und damit auch  $p(b) - p(0) \neq 0$  [MWS  $\Rightarrow \exists \xi \in (0, b)$ .  
 $p(b) - p(0) = g'(\xi)(b - 0)$ ;  $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in (0, b) \Rightarrow p(b) - p(0) \neq 0$ ] können wir die Formel in 2.28 umschreiben zu

$$\frac{f(b) - f(a)}{p(b) - p(0)} = \frac{f'(s)}{p'(\xi)}.$$

Und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments (\*) in 2.26(iii).

Beweis von 2.28. Wende den Satz von Rolle auf

d.h. Fkt  $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (p(b) - p(0))f(x)$   
 $(x \in [0, b])$  an. Details siehe [UE].

]

2.30 SATZ (Regeln von de l'Hospital)

Seien  $f, g: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

diffbar und sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (0, b)$ . Sei außerdem

(i)  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \downarrow 0} g(x)$ , oder

(ii)  $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = \pm \infty$ .

Dann gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Falls der rechte Limes (evtl. als uneigentl. Limes  $\pm \infty$ ) existiert.  
Analoges gilt für den Limes  $x \nearrow b$ .

Rausj. Wir betrachten nur den Fall  $x \downarrow \alpha$ .

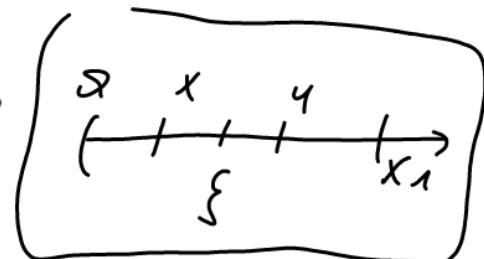
(1) Sei zunächst

$$(*) \quad \gamma := \lim_{x \downarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Wir wählen  $y_0, y_1$  mit  $\gamma < y_1 < y_0$

$\Leftrightarrow \exists x_1 \in (0, b)$  sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (0, x_1) \quad (**)$$



Seien nun  $x, u \in (0, x_1)$   $\xrightarrow{\text{(Vermutung)}} \exists \xi \in (x, u)$ :

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{(**)}{<} y_1 < y_0 \quad (***)$$

Im Fall (i) gilt für  $x \downarrow \alpha$  wegen (\*\*\*)

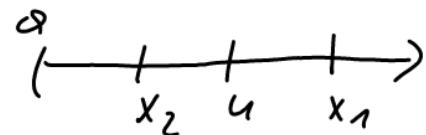
$$\left\{ \frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0 \right\} \quad \forall u \in (0, x_1) \quad (1)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur  $g(x) \rightarrow +\infty$ , der andere Fall ist analog.

Zu festem  $u \in (0, x_1)$  bestimmen wir ein  $x_2 \in (0, u)$  sodass

$$g(x) > \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (0, x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} > 0 \quad \forall x \in (0, x_2)$$



$$\xrightarrow{***} \frac{f(x) - f(w)}{g(x)} < y_1 \frac{g(v) - g(w)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < y_1 - y_1 \frac{g(w)}{g(x)} + \frac{f(w)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, x_2)$$

$$\xrightarrow{***} \exists x_3: \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow y_1 (x \downarrow 0) \\ \frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_3) \end{array} \right\} (\Delta)$$

Zusammengefaßt gilt also in beiden Fällen (i) und  
(ii)  $\forall y_0 > y \exists x_0$  so dass  $[(\Delta), (\Delta\Delta)]$

$$\left. \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_0) \right\} \right\} (\Diamond)$$

(2) Analog folgt für  $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :  $\forall y_0 < y \exists \tilde{x}_0$ :

$$\left. \left\{ y_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, \tilde{x}_0) \right\} \right\} (\Diamond\Diamond)$$

(3) Aus (1) & (2) ergibt sich nur die Beh., denn  
Falls  $y = \pm\infty$  wird durch (1) bzw (2) alle erledigt.  
Falls  $y \in \mathbb{R}$  ergibt die Kombination von (1) & (2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{x}_0$   
so dass  $y - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < y + \varepsilon \quad \forall x \in (0, \tilde{x}_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y$ .  $\square$

## 2.31 BSP (Die Regeln von De l'Hospital)

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für [vpl(12) 3.8(vii)]

$$\left\{ \frac{\log(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \right\}$$

$$f(x) = \log(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x^\alpha \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\stackrel{2.30}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

(ii) Wir berechnen

$$\lim_{x \downarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Es gilt  $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$  und wir versuchen

2.30 anzuwenden. Es ergibt sich

$$f(x) = x - \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0), \quad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$g(x) = x \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0), \quad g'(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

Nun gilt  $f'(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$  und  $g'(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$   
und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten Anwendung von 2.30 [d.h. anwendet auf  $f''/g''$ ]

$$f''(x) = \sin(x), \quad f''(0) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$$

$$g''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x), \quad g''(0) \rightarrow 2 \quad (x \downarrow 0)$$

Also gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lim_{x \downarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$$

## [4] INTEGRATION

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, die zweiten fassenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In §1 entwickeln wir den Integralbegriff für "schöne" Funktionen auf abg. Intervallen. Genauer definieren wir das Riemann-Integral über den Zugang über Treppenfunktionen.

In §2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir den Hauptsatz der VO kennen, den Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, der sozapp gesprochen besagt, dass Differenzieren & Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen.

In §3 lernen wir den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt, "schöne" Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

In §4 werden wir uns schließlich mit unendlichen Integralen beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder wo der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

# S1 DAS RIEMANN-INTEGRAL

In diesem § entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfache Fkt - die Treppenfkt - definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken).

Das Integral für allgemeine Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfkt definiert.

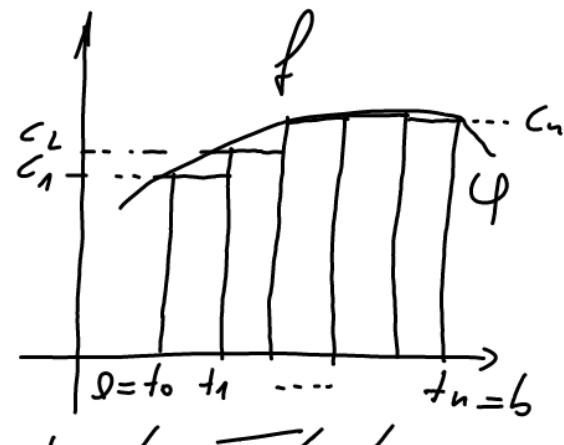
Wir beginnen mit einer

## 1.1.1 INTRO (Zur Wege zum Integralbegriff)

(i) Geometrische Motivation. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine pos. Fkt. Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse bestimmen (Fläche unter dem Graphen).

Falls  $f$  „hinreichend flach“ ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann.

Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt auffassen



(vgl. 1.2) Def 2.1(x) und Uh. 1.2(iii unten)

Sei also  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfkt mit

$\overbrace{[\varphi]}^{\sim}$

$$\varphi(t) = \begin{cases} c_1 & a = t_0 \leq t < t_1 \\ c_2 & t_1 \leq t < t_2 \quad [\text{siehe Skizze}], \\ \vdots & \\ c_n & t_{n-1} \leq t < t_n = b \end{cases}$$

wobei  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  passend für  $f$  gewählt sind.

Ein Näherungswert für die Fläche unter dem Graphen von  $f$  ist die Fläche unter dem Graphen von  $\varphi$  - und diese können wir berechnen

$$\left\{ A \approx \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{\substack{\nearrow \\ \text{Höhe des Rechtecks}}} = \sum_{j=1}^n \varphi(t_j) \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{\substack{\searrow \\ \text{Basis des Rechtecks}}} \right\}$$

(ii) Rotation aus der Mechanik (vgl. [3] 1.11)

Sei  $s: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Ortsfunktion eines Massenpunkts  $P$ . ( $s(t)$  gibt die Position von  $P$  zum Zeitpunkt  $t$  an.) Dann ist die Momentangeschwindigkeit  $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Ableitungs fkt von  $s$ , also

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe: Angenommen, wir kennen  $s(0)$ , also den Ausgangspunkt von  $P$

und wir kennen  $v(t)$  für  $t \in [0, T]$ . Wie können wir  $s(t)$  für  $0 < t \leq T$  bestimmen?

Behachten wir dazu ein „kleines“ Zeitintervall  $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$ . Falls sich  $v(t)$  auf  $[t_1, t_2]$  wenig ändert (also fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den „Weg“ (Ortszunahme) gemäß der „Formel“

$$\underbrace{\text{S} \text{ Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit.}}$$

d.h.

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \quad t \in (t_1, t_2)$$

Wenn wir diese Approximation auf den „kleinen“ Zeitintervallen  $[0=t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n=T]$  durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$\underbrace{s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^n v(t_j)(t_j - t_{j-1})}_{\text{Treppenfkt}}$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt  $\varphi$  auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \quad \text{für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j=1, \dots, n)$$

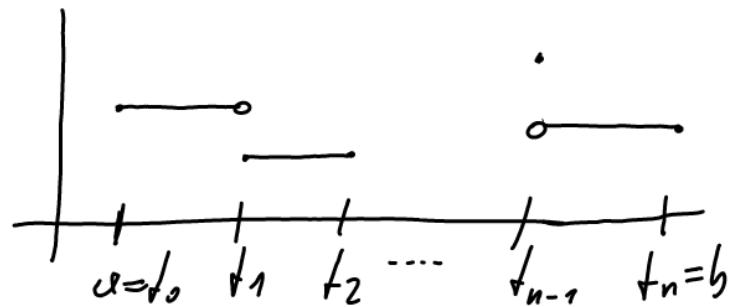
(iii) In beiden Fällen haben wir gewünscht, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine einer Integraltheorie anbieten (parallel zu aufdrängen). Daraus beginnen wir damit ein Integral für Treppenfkt zu definieren & seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch unvermeidliche) Def dieser Klasse (schöner, P) Fkt.

### 1.2. DEF (Treppenfkt)

- (i) Eine Fkt  $\varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfkt, falls es
- eine endliche Zerlegung  $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  des Intervalls  $[0, b]$  gibt, d.h.  $t_i \in [0, b]$  mit
- $$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$
- und Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  sodass

$$\varphi(t) = c_j \text{ füllt } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j=1, \dots, n)$$

$\varphi$  stückweise konst auf den offenen Intervallen; über  $c_{l(j)}$  wird nichts verlangt.



- (ii) Wir bezeichnen die Proper Treppenfkt auf  $[0, b]$  mit

$$T[0, b] := \left\{ \varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfkt.} \right\}.$$

### 1.3 Lernmaß (J[0,b] ist ein Vektorraum) Espill

- [Punkt]
- (i)  $\varphi, \psi \in J[0,b] \Rightarrow \varphi + \psi \in J[0,b]$
  - (ii)  $\varphi \in J[0,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\varphi \in J[0,b]$ .

Mit anderen Worten  $J[0,b]$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ( $J[0,b]$  ist ein Teilvektorraum von  $\mathbb{R}^{[0,b]} := \{f: [0,b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  dem VZ aller reellen Fkt auf  $[0,b]$ ).  
[→ Lineare Algebra]

Beweis. (ii) ist sofort klar nach Def  $[\varphi(t) = c_j \quad t \in (t_{j-1}, t_j)]$   
 $\Rightarrow (c\varphi)(t) = c\varphi(t) = c_j \quad t \in (t_{j-1}, t_j)]$

(ii) Aus den Zerlegungen  $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$  für  $\varphi$  und  $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$  für  $\psi$  erhält man die Zerlegung  $\tilde{Z} := Z \cup Z'$ . Diese kann man als  $\tilde{Z} = \{\vartheta = s_0, s_1, \dots, s_e = b\}$  schreiben wobei  $\varphi$  und  $\psi$  und damit  $\varphi + \psi$  auf  $(s_{j-1}, s_j)$  konstant ist (Details VE). [ ]

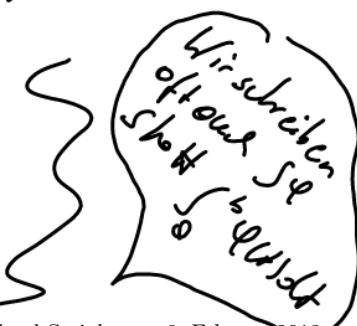
### 1.4 DEF (Integral für Treppenfkt) Sei $\varphi \in J[0,b]$

mit Zerlegung  $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  und Werten

$\varphi(t) = c_j \quad (t \in (t_{j-1}, t_j), 1 \leq j \leq n)$ . Wir definieren

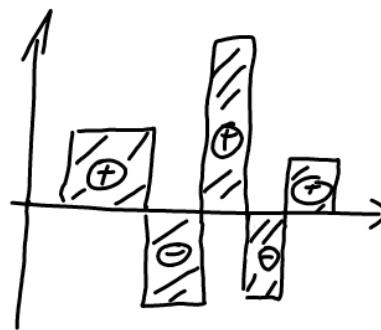
das Integral von  $\varphi$  auf  $[0,b]$  als

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1})$$

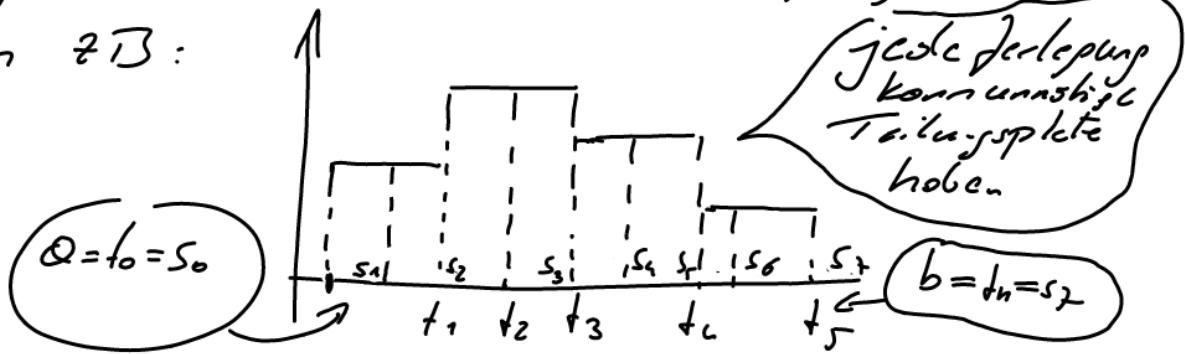


## 1.5 Bem (zum Integral 1.4)

(ii) Nochmals geometrische Deutung: Wie in 1.4(c) diskutiert, ist für  $\varphi$  positiv  $\int \varphi$  gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat  $\varphi$  negative Werte, so werden gemäß Def 1.4 die entsprechenden Rechtecksfelder subtrahiert ( $c_j < 0$ )



(iii) Wohldefiniertheit. Strenggenommen, müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 1.4. wohldefiniert ist. Genauer: Def 1.2(c) verlangt für  $\varphi \in J[0, b]$  die Existenz einer endl. Zerlegung – es könnte aber mehrere Zerlegungen für  $\varphi$  geben z.B.:



Def 1.4 berichtet sich aber auf eine bestimmte Zerlegung und es ist zu zeigen, dass  $\int \varphi$  nicht von der Wohl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Dies ist graphisch evident, allerdings etwas auf-

wenig genau hinzuschreiben [siehe [Hö] Lemma in P. 2, [F] Bem p. 18].

[Der springlegende Punkt ist, dass die „unnötigen“ Teilungspunkte keinen Schaden anrichten – aber Arbeit machen.]

(iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 1.6 erlaubt es uns das Integral als Abbildung aufzufassen

$$\begin{aligned} f: J[0, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_0^b \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen. z.B. beweigt die nächste Prop, dass  $\int$  ein

lineares Funktional [im Sinne der lin. Algebra] auf dem VR  $J[0, b]$  ist, das zusätzlich monoton ist.

### 1.6 PROP (Linearität & Monotonie des $\int$ auf $J[0, b]$ )

{ Seien  $\varphi, \psi \in J[0, b]$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt }

$$(i) \quad \int_0^b (\varphi + \psi)(t) dt = \int_0^b \varphi(t) dt + \int_0^b \psi(t) dt$$

$$(ii) \quad \int_0^b (\lambda \varphi)(t) dt = \lambda \int_0^b \varphi(t) dt$$

$$(iii) \quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \int_0^b \varphi(t) dt \leq \int_0^b \psi(t) dt$$

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [0, b]$$

Beweis. (i) Verwende für  $\varphi, \psi$  eine gemeinsame Fortsetzung wie im Beweis von Lemma 1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen [Dekoril ev. V6].

(ii), (iii) klar. J

## 1.7 MOTIVATION (Das Riemann-Integral)

(i) Wir haben also einen vernünftigen Integralbegriff für  
d.h. mit guten Eigenschaften  
als als lin. mon. Funktional besonders schöne Fkt, die Treppenfunktionen definiert.

Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine größere Klasse von Fkt auszudehnen.

(ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben eine beschränkte Funktion  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann betrachten wir alle Treppenfkt  $\varphi \in \mathcal{T}[0, b]$  mit  $f \leq \varphi$  und das inf der Integrale über alle solchen  $\varphi$ , also

$$\alpha := \inf_f \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[0, b], f \leq \varphi \right\}.$$

Ebenso können wir alle  $\varphi \in \mathcal{T}[0, b]$  mit  $\varphi \leq f$  und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup \left\{ \int_0^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[0, b], \varphi \leq f \right\}$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen [i.s. gilt  $\beta = \alpha$ ], dann werden wir  $\int_0^b f(t) dt = \alpha = \beta$  definieren.

Γ(iii) Wic zwangsläufig ist diese Vorgehensweise?

Sie ergibt sich zwangsläufig, falls

- (1) das neue Integral  $\beta$ : Treppenfkt mit dem Integral 1.6 übereinstimmen soll, und
- (2)  $f \leq g \Rightarrow \int_0^b f(t) dt \leq \int_0^b g(t) dt$  gelten soll.

Denn für alle  $\varphi \in T[0,b]$ ,  $f \leq \varphi$  gilt dann  $\int_0^b f(t) dt \leq \int_0^b \varphi(t) dt$   
 also  $\int_0^b f(t) dt \leq \alpha$  und für alle  $\psi \in T[0,b]$ ,  $\psi \leq f$  gilt  
 $\int_0^b \psi(t) dt \leq \int_0^b f(t) dt$ , also  $\beta = \int_0^b \psi(t) dt$ .

Insgesamt also

$$\beta = \int_0^b f(t) dt \leq \alpha$$

und falls  $\alpha = \beta$  ergibt sich zwangsläufig  $\int_0^b f(t) dt = \alpha = \beta$ .

Nun offiziell:

1.8. DEF (Riemann-Integral) Sei  $f: [0,b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

(i) Wir definieren das Ober- bzw. Unterintegral von  $f$  als

$$\int_0^b * f(t) dt := \inf \left\{ \int_0^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in T[0,b], f \leq \varphi \right\} \text{ bzw.}$$

$$\int_0^b * f(t) dt := \sup \left\{ \int_0^b \psi(t) dt \mid \psi \in T[0,b], \psi \leq f \right\}.$$

(ii) Wir nennen  $f$  Riemann-integrierbar, falls

$$\int_0^b * f(t) dt = \int_0^b * f(t) dt. \text{ In diesem Fall definieren}$$

wir das Riemann-Integral von  $f$  von 0 nach  $b$  als

$$\left\{ \int_0^b f(t) dt \right\} := \left\{ \int_0^b * f(t) dt \right\}$$

# 1.9 BSP (R-intbare & nicht R-intbare Fkt.)

(i) Treppenfkt. Wie erwartet (& gewünscht) sind Treppenfkt R-intbar und das R-Integral stimmt mit dem Integral 1.4 überein.

Tatsächlich für  $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$  gilt

$$\int_0^* \varphi(t) dt = \int_0^* \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ R-intbar} \& R \int_0^* \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt$$

(ii) Die Dirichletfkt  $X_Q$  ist nicht R-intbar.

$$X_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

ist beschränkt auf  $\mathbb{R}$  also auch auf jedem  $[a,b]$ . Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen [1.11(iii)] daher gilt

$\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ ,  $X_Q \leq \varphi \Rightarrow \varphi \geq 1$  auf jedem Teilintervall eine Zerlegung

$$\varphi \in \mathcal{T}[a,b], \varphi \leq X_Q \Rightarrow \varphi \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^* X_Q(t) dt = 1 \neq 0 = \int_a^b X_Q(t) dt$$

# 1.10 MOTIVATION (Integrabilitätskriterium)

Auch bei genauer Betrachtung erweist sich die Def der R-Intbarkeit als sprödig und schwach

handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrierbarkeitskriterium, dass besagt dass ein beschränktes  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann R-intervall ist, falls es zwischen 2 Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  "eingetwickelt" werden kann  $[4 \leq f \leq 4]$  deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Def und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen beide Klassen von Fkt, nämlich stetige Fkt & monotone Fkt ab in ihr zu unterscheiden.

### 1.11 IITM (Integrierbarkeitskriterium: Einzwicken zw Treppenfkt)

Sei  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[0, b] \text{ mit}$$

$f$  ist R-intervall  $\Leftrightarrow 4 \leq f \leq 4$  und

$$\left\{ \int_0^b \varphi(t) dt - \int_0^b \psi(t) dt \leq \varepsilon \right.$$

klar wegen  
Rokotnik  
1.6.Üb)

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Def der R-intervallität & den Eigenschaften von inf & sup. (UVUE) □

### 1.12 KOR (stetig Fkt & mon Fkt sind R-intervall)

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Jeder stetige } f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist R-intervall} \\ \text{(ii) Jedes monoton } f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist R-intervall} \end{array} \right.$$

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Fkt auf kompakten Intervallen wissen [vgl. KJ 2.1].

### 1.13 Satz (Approximation stetiger Fkt durch Treppenfkt)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b]$  mit den Eigenschaften

$$(a) \varphi \leq f \leq \psi$$

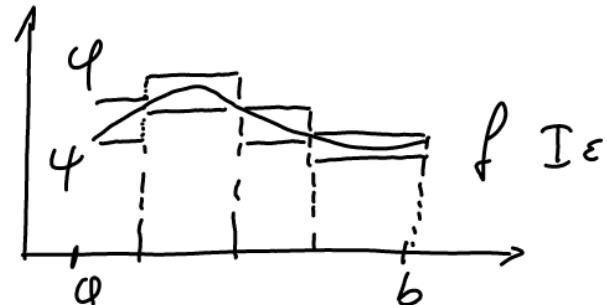
$$(b) |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$ .

(1)  $f$  ist glm stetig [KJ Thm 2.16]

$\xrightarrow{\text{Def 2.16}}$   $\exists \delta > 0$  sodass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in [a, b] \text{ mit } |x - x'| < \delta$$



(2) (Konstruktion von  $\varphi, \psi$ )

Sei  $n$  so groß, dass  $\frac{b-a}{n} < \delta$ . (\*\*)

Wir definieren eine (äquidistante) Teilung von  $[a, b]$

$$\text{v.a} \quad t_k := a + k \frac{b-a}{n} \quad (k=0, \dots, n)$$

Es gilt dann

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad |t_k - t_{k+1}| < \delta \quad (***)$$

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren

wir via ( $1 \leq k \leq n$ )

$$c_k := \sup \{ f(x) / t_{k-1} \leq x \leq t_k \} \quad (1)$$

$$c_k' := \inf \{ f(x) / t_{k-1} \leq x \leq t_k \}.$$

Wir setzen  $\varphi(a) := f(0) =: \varphi_0$  und ( $1 \leq k \leq n$ )

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t) := c_k & t_{k-1} < t \leq t_k \\ \varphi(t) := c_k' & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{array} \right\}$$

(3) Nun gelten (a) noch Konstruktion (vgl. (1))  
und (b), denn

12) Thm 2.11  $\Rightarrow \exists \xi_k, \xi_k' \in [t_{k-1}, t_k] \quad (1 \leq k \leq n):$

$$f(\xi_k) = c_k, \quad f(\xi_k') = c_k'$$

$$\xrightarrow{(***)} |\xi_k - \xi_k'| < \delta \xrightarrow{(*)} |c_k - c_k'| < \varepsilon.$$

□

Beweis von 1.12:

(i) Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\xrightarrow{1.13} \exists \varphi, \psi \in T[0, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$

Daher gilt

$$\text{und } |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon / (b-a) \quad (*)$$

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt$$

1.6(iii)

$$\xrightarrow{1.6(i), (iii)} = \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) dt \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Zerlegung  
 $a = t_0 < t_1 = b$

$\xrightarrow{1.11}$   
 $\Rightarrow f$  ist R-integrbar

(ii) Wir beweisen nur den Fall f mon. wachsend (der fallende Fall ist analog).

Wir konstruieren (wie in Bsp 1.13, Schritt (2)) eine (äquidistante) Zerlegung von  $[a, b]$  via

$$t_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfkt setzen wir

$$\begin{aligned}\psi(t) &= f(t_{k-1}) & t_{k-1} \leq t < t_k \\ \varphi(t) &= f(t_k) \\ \psi(b) &:= f(b) = \varphi(b)\end{aligned}$$

$$f \text{ mon. wachsend} \Rightarrow \psi \leq f \leq \varphi$$

Außerdem gilt

$$1.6(\text{iii}) \quad 0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \varphi(t_k) (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \psi(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (\varphi(t_k) - \psi(t_{k-1}))$$

$$\text{Teleskop.} \quad \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also gilt  $\forall \varepsilon > 0$ , dass  $0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt < \varepsilon$ , falls nur  $n$  groß genug ist  $\xrightarrow{1.11} f R\text{-intfkt.}$

## 1.14 Motivation (Grund Eigenschaften - zum Intervall)

Nachdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Fkt ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist – in dem Sinn, dass die Grund Eigenschaften aus 1.6 erhalten bleiben (vgl. 1.7). Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im leichten Beweis geschchen, wo 1.6 essentiell an mehreren Stellen eingespielt wurde.

## 1.15 Prop (Linearität & Monotonie des R-Integrals)

Seien  $f, g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrabel und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt

- (i)  $f+g$  ist R-integrabel und  $\int_0^b (f+g)(t) dt = \int_0^b f(t) dt + \int_0^b g(t) dt$
- (ii)  $\lambda f$  ist R-integrabel und  $\int_0^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_0^b f(t) dt$
- (iii)  $f \leq g \Rightarrow \int_0^b f(t) dt \leq \int_0^b g(t) dt$

Beweis. (i) Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wählen wir  $\varphi_i, \psi_i \in J[0, b]$

$(i, j = 1, 2)$  mit  $\varphi_i \leq f \leq \psi_1$ ,  $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$  und  $(1 \leq i, j \leq 2)$

$$0 = \int_0^b \psi_j - \int_0^b \varphi_j \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad [1.11].$$

Dann sind  $\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2 \in J[0, b]$  [1.3cii] und es gilt

$$\int_0^b (\varphi_1 + \varphi_2)(t) dt - \int_0^b (\psi_1 + \psi_2)(t) dt \leq \varepsilon \quad [1.6cii, iii]$$

Nicht korrekt

und somit ist  $f+g$  R-intervallbar lt 1.11.  
Außerdem gilt [1.8(ii)]

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g) = \int_a^b (f+g)$$

Seien  $\psi_1, \psi_2$  wie im Sup  
 in 1.8(i) für  $f$  bzw  $g$ .  
 Dann ist  $\psi_1 + \psi_2$  zulässige  
 Fkt im Sup für  $f+g$ .

$$= \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

Analog f. inf

$$= \int_a^b f + \int_a^b g$$

Und da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist,  
gilt immer  $=$  stetig  $\leq$  und wir erhalten

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g).$$

(ii) ähnlich wie (i) [Scpot für  $d=0, d>0, d=-1, d<0$ ]

(iii) Sofort klar aufgrund der Def  $\left[ \int_a^b f \leq \int_a^b g \right]$

□

### 1.16 Motivation (In Richtung $L$ -Unpl für $\int$ )

Unser nächstes Ziel ist es, die  $L$ -Ungleichung für Integrale – eine sehr wichtige Abschätzung –

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der  $L$ -Ungl  $|x+y| \leq |x| + |y|$  bzw der verallgemeinerten  $L$ -Ungl (vgl. Bau 12/4.42)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

aufgestellt werden. Dazu beschreiben wir folgende Begriffe - die auch unabhängig voneinander sind

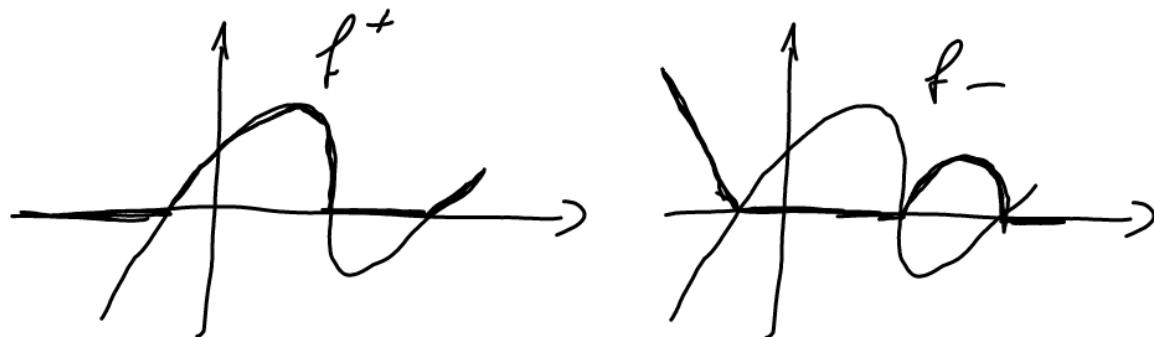
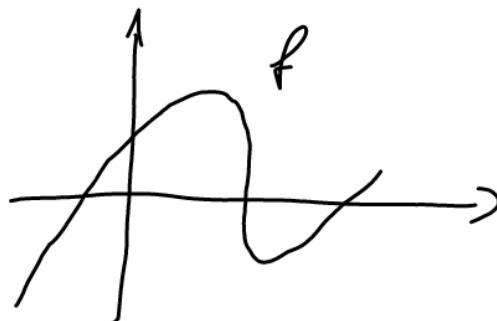
### 1.17 DEF (positiver & negativer Teil einer Fkt)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren positiven und negativen Teil von  $f$  ob

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 1.18 BEH (zu $f^+$ , $f^-$ und $|f|$ )

(i) Folgende Skizze illustriert Def 1.12:



(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0),$$

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^- \quad \text{und}$$

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, \quad g^- \leq f^- \quad [\text{Details ue}]$$

### 1.19 PROP ( $f$ -Ungl für $\int f$ )

Sei  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-intervor, dann sind auch  $f^+, f^-$  und  $|f|$  R-intervor und es gilt

$$\left| \int_0^b f(t) dt \right| \leq \int_0^b |f(t)| dt.$$

Beweis • Wir beweisen zuerst die R-intervorit von  $f^+$ . Sei  $\varepsilon > 0$

1.11  $\Rightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}[0, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$0 \leq \int \varphi - \int \psi \leq \varepsilon$$

Nun sind  $\varphi^+$  und  $\psi^+ \in \mathcal{C}[0, b]$  mit  $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$  und es gilt  $\varphi^+ - \varphi = \varphi_+ \leq \psi_+ - \psi = \psi^+ - \varphi \Rightarrow \varphi^+ - \varphi \leq \psi - \varphi \Rightarrow$

1.18(cii)

$$0 \leq \int \varphi^+ - \varphi \leq \int \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

1.11  $\Rightarrow f^+$  ist R-intervor

• Die R-intervorit von  $f$  folgt analog

•  $|f|$  ist R-intervor wegen  $|f| = f^+ + f^-$  und 1.15(c.)

• Schließlich gilt wegen  $f \leq |f|, -f \leq |f|$  mit

1.15(cii)  $\int f \leq \int |f|$  und  $-\int f \leq \int |f|$  und somit

$$|\int f| \leq \int |f|.$$

### 1.20 KOR (Intervorit von Produkten)

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-intervor. Dann gilt

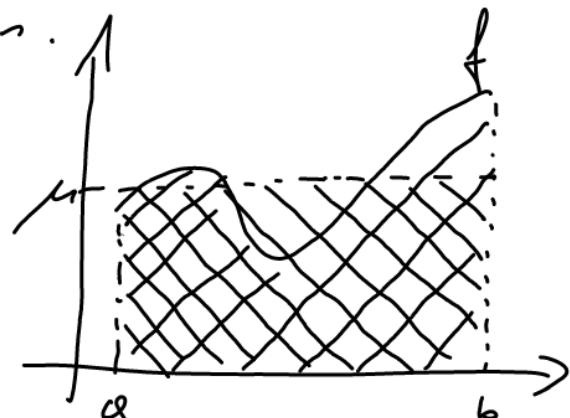
(i)  $f \cdot g \in C[a, b]$ :  $|fg|$  ist R-intervor

(ii)  $f \cdot g$  ist R-intervor

Beweis. siehe [Hö S. 11 Prop (iii), (iv)] □

### 1.21 Motivation (MWS der Integralerechnung)

(i) Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & positiv. Dann ist  $f$  R-integrabel [1.12(c)] und  $\int_a^b f(t) dt$  oft entspricht der Fläche  $A$  unter dem Graphen. Anschaulich ist klar dass es ein Rechteck der Höhe  $\mu$  über  $[a, b]$  geben muss, das den gleichen Flächeninhalt hat, also  $\mu(b-a) = A$  gilt.



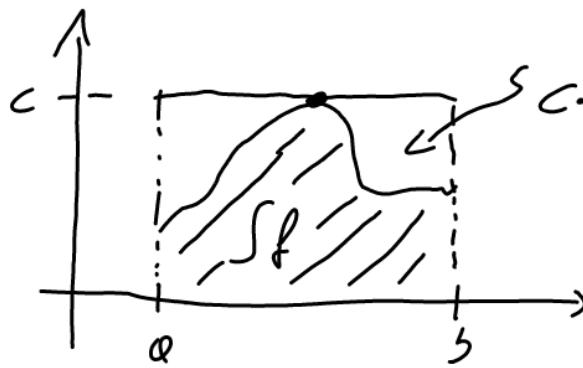
Dies ist faktisch die Toff, wie die nächste Prop zeigt. Zusätzlich besagt diese MWS der Integralerechnung, dass es ein  $\xi \in [a, b]$  gibt mit  $f(\xi) = \mu$ . Also zusammengefasst:

$$\exists \xi \in [a, b] : \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{---}} = f(\xi)(b-a) \quad (*)$$

(ii) Ähnlich wie der MWS der Differenzialrechnung kann der MWS der Integralerechnung herwegen dort verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten [vgl. 1.3] 2.13]. Gilt z.B.  $f(x) \leq c$  für  $x \in [a, b]$ , dann folgt sofort aus (\*)

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \leq c(b-a) \right\}.$$

Diese Abschätzung lässt sich auch geometrisch verstehen:



Die Fläche des Rechtecks über  $[0, b]$  mit Höhe  $c$  ist sicher größer als  $\int_0^b f(t) dt$ .

(iii) Wir formulieren nun den MWS-Lit exakt und beginnen mit einer etwas allgemeineren Version

### 1.22 Prop (MWS der Integralrechnung)

Seien  $f, \varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\varphi \geq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in [0, b]$  sodass

$$\int_0^b f(t) \varphi(t) dt = f(\xi) \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Insbesondere ergibt sich mit  $\varphi(t) = 1 \quad \forall t \in [0, b]$

$$\int_0^b f(t) dt = f(\xi) (b - 0)$$

Beweis. (erstaunlich kurz)

$f$  stetig auf  $[0, b]$   $\xrightarrow{[2.11]} f$  beschränkt, d.h.  
 $m := \inf \{f(x) \mid x \in [0, b]\}$  und  
 $M := \sup \{f(x) \mid x \in [0, b]\}$  existieren

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m \leq f \leq M \xrightarrow{\varphi \geq 0} m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi \\ &\xrightarrow{1.15(iii)} m \int_0^b \varphi \leq \int_0^b f\varphi \leq M \int_0^b \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_0^b f d\varphi = \mu \int_0^b \varphi$$

ZUS  $\Rightarrow \exists \xi \in [0, b]$  mit  $f(\xi) = \mu$ , also

$$\int_0^b f d\varphi = f(\xi) \int_0^b \varphi. \quad ]$$

### 1.23 BEM (Teintervalle & Orientierung)

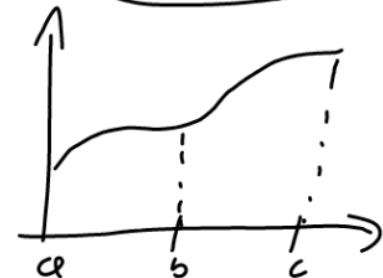
(i) Seien  $a < b < c$  und  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.  
Dann ergibt sich durch Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfunktion.

$f$  ist R-intervall  $\Leftrightarrow f|_{[0,b]} \& f|_{[b,c]}$  sind R-intervall

Einschränkung von  $f$  auf  $[a,b] \cup [b,c]$

In diesem Fall gilt

$$\left\{ \int_a^c f - \int_0^b f + \int_b^c f \right\}$$



(ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls  $b < a$ , dann schen wir

$$\int_a^b f(t) dt := - \int_b^a f(t) dt.$$

Dies reflektiert die Idee, dass die  $x$ -Achse in Richtung positiver Werte von  $x$  orientiert ist.

(iii) Wir setzen  $\int_0^0 f(t) dt = 0$ .

## 1.24 BEM (Riemannsummen)

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum R-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des R-Integrals erlaubt [die Methode Intervalle zu berechnen folgt im nächsten §] und oft auch als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition:

(i) Sei  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\mathcal{Z} := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$  eine Teilung von  $[0, b]$ .

Wir wählen in jedem Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  einen Punkt  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ , genannt Stützstelle.

Teilungspunkte  $t_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) und Stützstellen  $\xi_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) fassen wir zusammen zu

$$[\text{Folge } \mathcal{Z}] \rightarrow \mathcal{J} := \left( (\delta_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right)$$

und definieren die Riemann-Summe von  $f$  bzgl.  $\mathcal{J}$  als

$$\left\{ S(\mathcal{J}, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\}$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspunkte und Höhe =  $f$  an der entsprechenden Stützstelle

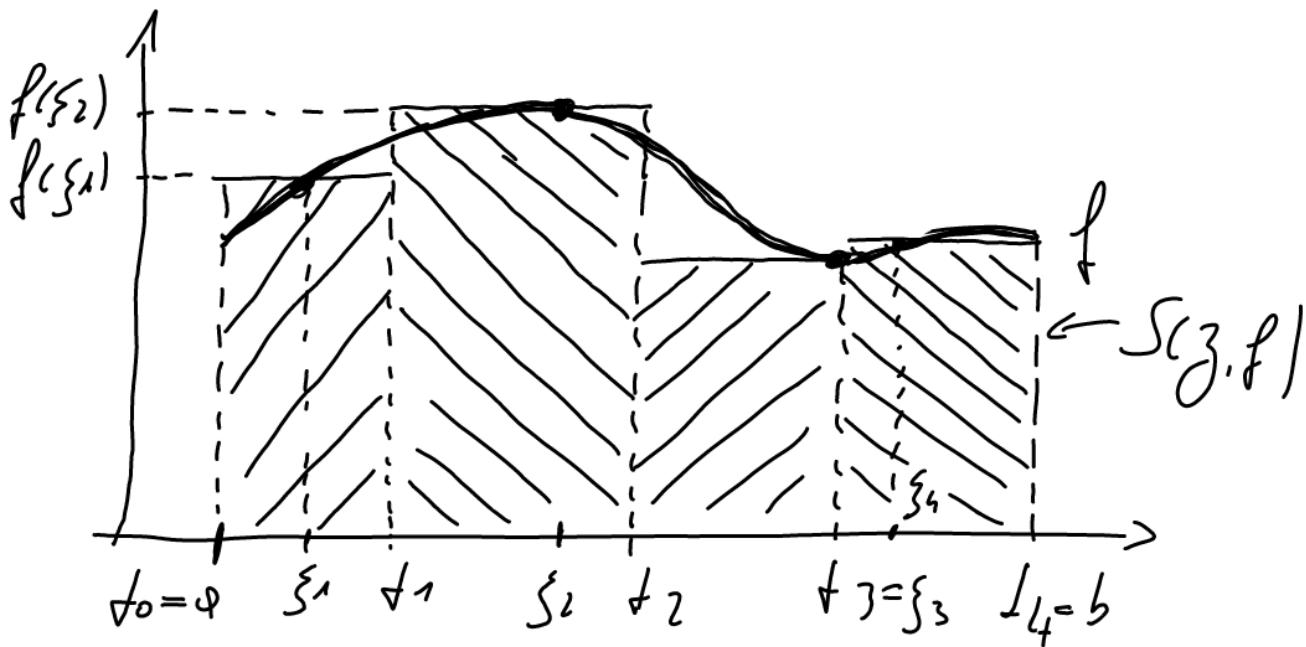
Wir nennen

$$\mu(\zeta) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

Länge des  
proben Teilintervalls

die Fairheit der Zerlegung  $\zeta$

(ii) Wir können diese Def graphisch veranschaulichen:



Wir sehen, dass die R-Summe ob Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt  $\varphi$  interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

und daher genauer

$$\underbrace{\int_a^b \varphi(t) dt}_{\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\xi_i) dt} = R(\zeta, f)$$

$\varphi$  interpoliert also  $f$  an den Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Riemanns ursprüngliche Idee war es nun, den Grenzwert von  $R(\zeta, f)$  für  $\mu(\zeta) \rightarrow 0$  zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximationen durch an den Stützstellen interpolierende

Treppenfkt zu konstruieren.

Dieser Jepang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfkt ist etwas expliziter.

Da es im Limes  $\mu(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  anschaulich die Zahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Jepänge äquivalent sind. Genau gilt

(iii) TH 7: Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt

}  $f$  ist R-intervor  $\Leftrightarrow$   $\exists s \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  sodass für jede Zerlegung  $\mathcal{Z}$  mit  $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$   $|S(\mathcal{Z}, f) - s| < \varepsilon$

*Die R-Summe kommt aus beliebigen Teilintervallen, falls die Teilung nur paarweise ist.*

In diesem Fall gilt  $s = \int_a^b f(t) dt$

Beweis siehe [Hö, §.13] □

(iv) Bsp. Wir berechnen exemplarisch das Integral  $\int_0^q f(x) dx$  mittels R-Summen.

Sei  $1 \leq h \leq \mathbb{N}$ . Wir wählen ob Zerlegungsplätze  $t_k := \frac{kq}{h}$  ( $k=0, \dots, n$ ) und Stützstellen  $\xi_k = t_k$ . Dann ist also

*Das ist erlaubt, vgl. (i)  
& es ist einfach?*

$$\mathcal{Z} = \left( (t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=0}^n \right) = \left( \left( \frac{kq}{h} \right)_{k=0}^n, \left( \frac{kq}{h} \right)_{k=0}^n \right)$$

und  $\mu(\mathcal{J}) = \frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

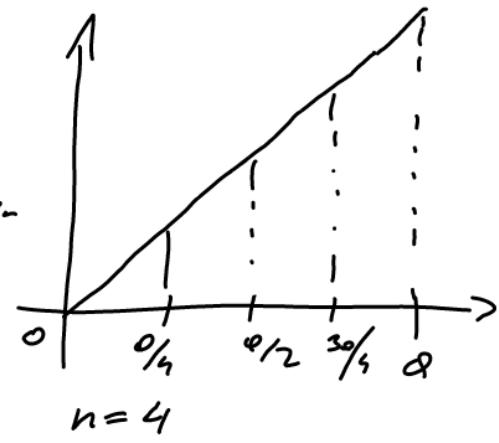
Also ergeben sich die R-Summen

$$S_n = S(\mathcal{J}, f) = \sum_{k=1}^n \frac{k\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha}{n}$$

$$= \frac{\alpha^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\alpha^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

und somit

$$\left[ \int_0^\alpha f dt = \frac{\alpha^2}{2} \right]$$



Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementar-geometrisch; nicht Integrale berechnen lernen wir im nächsten §.

## §2 INTEGRAL & ABLEITUNG

2.1 INTRO. Im vorigen § haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennengelernt & diskutiert.  
 Eine drängende Frage ist es nun: Wie berechnet man konkret ein Integral über z.B. eine stetige Funktion?  
 ↳ integriert von R-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit den Differenzieren. Dies wird ultimativ vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HdI) erreicht, den wir gleich kennen lernen werden.

Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

2.2. DEF (Stammfunktion) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Eine Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ , falls

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

### 2.3 BSP (Stammfunktion)

$F(x) = x^{\frac{1}{2}}$  ist Stammfunktion von  $f(x) = x$  auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

## 2.4. MOTIVATION (2 Fragen zu Stammfkt.)

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar & in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

- (1) Gibt es immer eine Stammfkt und wenn ja  
wie viele Stammfkt gibt es? panauer: Welche f's  
haben Stammfkt  
absatz von ein-  
fachen Bsp  
wie z.B. 2.3
- (2) Wie kann man Stammfunktionen  
systematisch beschreiben/berechnen?

Wir beantworten den "Eindimensionalität", d.h. (1) in der nächsten Prop und den Rest von (1) und (2) im nächsten Theorem, dem HSDT.

## 2.5 PROP (Differenz von Stammfkt)

Sei  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

(G ist ebenfalls) Stammfkt von  $f \Leftrightarrow F - G$  ist konstant

Beweis.  $\Rightarrow$   $G$  ist Stammfkt von  $f \Rightarrow$  13) 2.14(iii)

$$G' = f = F' \Rightarrow (F - G)'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow F - G \text{ konst.}$$

$\Leftarrow$  Sei  $G(x) = F(x) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow G$  diffbar [Baukosten]

und es gilt

$$G' = (F + c)' = F' = f.$$

□

## 2.6 MOTIVATION (Zum Programm aus 2.5)

Prop 2.5 sagt uns, wie wir alle Stammfkt einer gegebenen Fkt  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen, falls wir eine einzige Stammfkt haben (nämlich durch Addieren einer Konstanten).

Wie wir eine solche Stammfkt erhalten, falls  $f$  stetig ist, sagt u.o. der

## Z.7 THT: (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und seien  $a, b \in I$  beliebig.

(i) Die Funktion  $\bar{F}: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{F}(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (*)$$

ist stetig differenzierbar ( $\bar{F} \in C^1(I)$ ) und  $\bar{F}' = f$ . Insbesondere ist  $\bar{F}$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ .

(ii) Sei  $\bar{F}$  eine (beliebige) Stammfunktion von  $f$ , dann

gilt

$$\int_0^b f(t) dt = \bar{F}(b) - \bar{F}(0)$$

Beweis: (Für so ein vertretbares Resultat erstaunlich einfach und direkt)

(i)  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  R-intervall und (\*) ist sinnvoll, daher  $F$  definiert.

Wir berechnen den Differenzendot. von  $F$  in  $x \in I$  beliebig. Sei  $0 \neq h$  sodass  $x+h \in I$  [oBdA  $h > 0$  sonst analog]. Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (1)$$

↑  
1.24 X

$$\xrightarrow{\text{MWS}} \exists \xi_h \in [x, x+h] \text{ mit } \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) h \quad (11)$$

Bemerke  $\xi_h \rightarrow x$  falls  $h \rightarrow 0$  [ $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h| \rightarrow 0$ ].

Daher erhalten wir

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(1), (11)}{=} f(\xi_h) \rightarrow f(x).$$

f stetig      Worum stimmt das auch intuitiv?  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$   
 $\stackrel{(1)}{=} \boxed{1}/h \approx \boxed{1}/h = f(x)$

Ahoj gilt  $F' = f$  und somit ist  $F'$  auch stetig.

(ii) Definiere  $G$  wie in (\*), also  $G(x) = \int_0^x f(t) dt$   
 $\Leftrightarrow G$  ist Stammfkt von  $f$

Sei  $F$  beliebige Stammfkt von  $f \stackrel{2.1-}{\Rightarrow} F = G + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )  
Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_0^b f + \int_a^0 f = \int_0^b f(t) dt.$$

↑  
1.24(iii)



## 2.8 BEM (Die Bedeutung des HsDI)

(i) Für die Pkte (i) & (ii) im HsDI hielten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x) \text{ bzw. } \int_0^x F'(t)dt = F(x) - F(0) \\ \text{Diff von Int} = Id \\ \text{Ind von Diff} = Id \text{ bis auf eine Konstante} \end{array} \right.$$

Späterklaus jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass  
 { Differenzieren und Integrieren im wesentlichen "inverse Operationen"  
 sind }

(ii) Erstes präziser können wir die Situation wie folgt darstellen (Notation wie im Thm.):

$$\left\{ \begin{array}{c} f \in C^0(I) \xrightarrow{\text{INT}} \left( F(x) = \int_0^x f(t)dt \right) \xrightarrow{\text{DIFF}} F' = f \\ \text{j. h. f ist diff auf I} \\ \Leftrightarrow \text{intervall} \\ \text{diff. wegen 2.7(i)} \\ \text{wegen 2.7(ii)} \end{array} \right. (*)$$

bzw. beginnend mit dem Differenzieren

$$\left\{ \begin{array}{c} F \in C^1(I) \xrightarrow{\text{DIFF}} (F')_{R-intb.} \xrightarrow{\text{INT}} \int_0^x F'(t)dt = F(x) - F(0) \\ \text{ohne F verschwindet diff.} \\ \text{N. 2iii)} \\ \text{wegen 2.7iii)} \end{array} \right. (**)$$

(iii) Definieren wir die folgenden Abbildungen

$$D: \mathcal{C}'(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$$

$$F \mapsto F'$$

$$R: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}'(I)$$

$$f \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

können wir wie folgt formulieren

$$D \circ R = id: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$$

wegen (\*)

$$R \circ D: \mathcal{C}'(I) \rightarrow \mathcal{C}'(I) \text{ erfüllt}$$

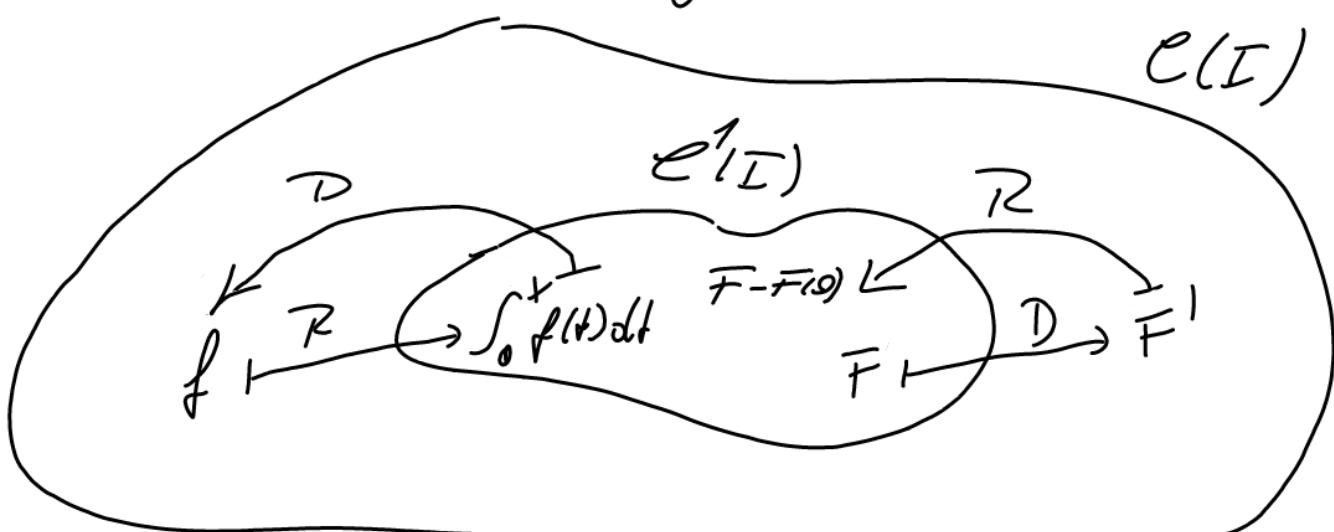
$$R \circ D(F) = F - F(0)$$

wegen (\*\*)

nur für  
die Id

(iv) Neben der Tatsache, dass  $R \circ D$  nicht genau die Identität ergibt [ $R \circ D = id + \text{Konstante}$ ] haben  $D$  &  $R$  unterschiedliche Def- & Zielbereiche. D.h. sind  $D$  &  $R$  eben doch nicht genau invers zu einander. - die Details des Slogans aus (i) sind erschöpft?  $\Rightarrow \Rightarrow$

Eine leichte Veranschaulichung der Situation ist:



## 2.9 Motivation (Konkretes Interpretieren)

(i) Der HSDI und insbesondere Thm 2.7(ii), d.h.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: \overbrace{F(t)}_0^b$$

erleicht es nun praktisch

praktische Schreibweise

konkrete Integrale zu

berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte  
einer (beliebigen) Stammfunktion an der  
Ober- bzw. Untergrenze bilden

(ii) Wie erhalten wir eine Stammfunktion? No durch  
unsere Ergebnisse aus [3] über das konkrete Differ-  
enzieren?

(iii) Als einfaches Bsp betrachten wir  $\int_0^b x^n dx$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ).  
Wegen  $(x^n)' = n x^{n-1}$  [3] 1.8(ii)] gilt

$$\left\{ \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^b \right\} .$$

Bevor wir weitere einfache Bsp betrachten ein begründetes  
Panopliek !

## 2.10 BEI (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral)

(i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise

$\bar{F}(x) = \int f(x) dx$  und meint damit eine oder auch alle Stammfkt von  $f$ . Der Ausdruck

$$\int f(x) dx \quad (*)$$

wird dabei als „unbestimmtes Integral“ bezeichnet.

(ii) Diese traditionell lange übliche Bezeichnung führt aber in eine echte terminologische Katastrophe.

Ganzer betrachten wir die folgenden Bezeichnungen:

	<u>Bei uns</u>	<u>TRAD. ÜBLICH</u>
$\int_a^b f(t) dt$	Integral von $f$ zu $a$ und $b$	bestimmtes Integral v. $f$
$F$ mit $\bar{F}' = f$	Stammfkt von $f$	unbestimmtes Integral v. $f$

Die hochgradig nichttriviale Aussage (ii) im HsDE, die das prakt. Integrieren erst ermöglicht, lautet „bei uns“ (vgl. 2. P(ii))

Das Integral von  $f$  zu  $a$  und  $b$  ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfkt v.  $f$  an Ober- bzw. Unterpunkte

Die traditionelle Terminologie verstellt diese Aussage in der wintigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts:

Das bestimmte Integral von  $f$  ist gleich der Differenz der Werte eines unbestimmten Integrals von  $f$  an den Ober- bzw. Unterpunkten.

(iii) Wir vermeiden daher die Bezeichnung „Unbestimmtes Integral“ und verwenden (\*) ausschließlich im folgenden Sinn:

„bestimme  $\int f(x)dx$ “ bedeutet „finde eine Stammfkt. f“.

### 2.11 Bsp (Höchste Zeit: konkretes Integrieren)

(i) Wir verallgemeinern 2.8(iii) auf  $-1 < s \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ .

Wege  $(x^s)' = s x^{s-1}$  [ $\square$  1.7P(c)] gilt

$$\int_a^b x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} \Big|_a^b \quad (*)$$

Für  $s \in \mathbb{N}$  gilt (\*) sogar für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(ii) Der Fall  $s=-1$  in (i) führt auf ( $a, b > 0$ )

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_a^b \quad [\square] 1.28_{\text{cii}}$$

(iii)  $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$ ,  $\int \cos(x) dx = \sin(x)$  [ $\square$  1.8(cv)]

(iv)  $\int e^x dx = e^x$  [ $\square$  1.8(civ)]  $\left. \begin{array}{l} \text{ beachte 2.10 ciii)} \\ \text{ } \end{array} \right\}$

(v)  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$  [ $\square$  1.29\_ciii)]

### 2.12 Rotation (Mehr Werkzeuge!)

Um auch kompliziertere Fkt. integrieren zu können – deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnissen aus [ $\square$ ] „sehen“ – lernen wir nun

Zwei wichtige „Integrationsmethoden“ kennen: die partielle Integration und die Substitutionsregel. Sie sind die „Umkehrungen“ der Produktregel bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus den entsprechenden Regeln und dem HSDT hergeleitet werden.

2.13 Prop (Partielle Integration) Seien  $f, g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_0^b f'(t)g(t) dt = (f(x)g(x)) \Big|_0^b - \int_0^b f(t)g'(t) dt.$$

Beweis. Wir setzen  $F = fg$ . Dann gilt  $F' = f'g + fg'$  [[13] 1.5(iii)] und daher wegen 2.7(ii)

$$(fg(x)g(x)) \Big|_0^b = F(x) \Big|_0^b = \int_0^b F'(t) dt = \int_0^b f'(t)g(t) dt + \int_0^b f(t)g'(t) dt.$$

□

2.14 Bsp (Partielle Integration)

$$(i) \int \sin(x)\cos(x) dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x)\sin(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$$

$$(ii) \int \log(x) dx \stackrel{\text{TRICK}}{=} \int 1 \cdot \log(x) dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow x \log(x) - x$$

2.15 Prop (Substitutionsregel) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

und sei  $\varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diffbar mit  $\varphi([0, b]) \subseteq I$ .

Dann gilt

$$\int_0^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

2.16 Bew (für Substitutionsregel)

(i) Prop 2.15 merkt man sich am einfachsten mit folgendem Trick: Betrachte  $x = \varphi(t)$  als „neue Variable“ für  $f$ , also  $f(x) = f(\varphi(t))$ . Dann gibt die folgende „formale“ Rechnung die richtige Transformation.

$$(*) \quad dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{d(\varphi(t))}{dt} dt = \varphi'(t) dt.$$

Schließlich müssen noch die Integrationsgrenzen „mittransformiert“ werden, d.h.:  $0 \mapsto \varphi(0)$ ,  $b \mapsto \varphi(b)$ .

„Schreiben wir tatsächlich  $\varphi(b)$

$$\int_0^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

(ii) Die Formel in 2.15 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- von rechts nach links, falls wir einen komplizierten Integranden  $f(x)$  vorliegen haben und wir ein passendes  $\varphi$  finden können, sodass  $(f \circ \varphi) \varphi'$  leicht zu integrieren ist.

- Von links nach rechts: Ein fanöchst/ häßlicher Integrand kann die Struktur  $(f \circ \varphi)^{\varphi'}$  haben (für passende  $\varphi$ ) und  $f$  kann leicht integrierbar sein.

### 2.17 BSP (für Substitutionsmethode)

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \Big|_0^{\pi} \\ \left[ \begin{array}{l} x = \varphi(t) = 2t \\ dx/dt = 2 \end{array} \right] = -\frac{1}{2}(-1-1) = \underline{\underline{1}}$$

[Von links nach rechts]

(ii) Etwas allgemeine sei  $c > 0$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $a < b \in \mathbb{R}$

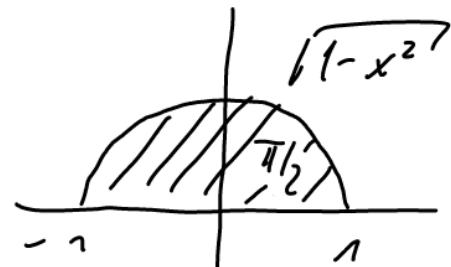
$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_0^b f(cct) c dt = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x) dx$$

$\curvearrowleft$  von links nach rechts

$\curvearrowright$  der besseren Sichtbarkeit wegen

$x = \varphi(t) = ct$   
 $dx/dt = c$

(iii) Die Fläche des Hölzkases:



$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(t) dt$$

Idee: Verwende  $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$   
von rechts nach links

daher:

$$\left[ \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \sin(t) \\ dx/dt = \cos(t) \\ -1 \leq x = \sin(t) \leq 1 \\ \arcsin(-1) \leq \arcsin(x) = t \leq \arcsin(1) \\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad [\square \text{ 3.17 circ}]$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(ii), c=2}{=} \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt + \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \sin(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 & = \frac{1}{4} \left( \underbrace{\sin(\pi)}_0 - \underbrace{\sin(-\pi)}_0 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} \right) = \cancel{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}
 \quad 111$$

Beweis von 2.15: Sei  $F$  eine Stammfkt von  $f$ .

$\Rightarrow F \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist diffbar

$$\boxed{3} \stackrel{1.23}{\Rightarrow} (F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{2.7(iii)}{\Rightarrow} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = (F \circ \varphi) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
 & = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

]

## §4 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

### 4.1 INTRO.

Der bisher entwickelte Integralbegriff ist für viele Anwendungen zu eng gefasst. Seine beiden „Schönheitsfehler“ sind:

- Wir haben nur über komplexe Intervalle integriert.
- R-intbare Fkt sind notwendigerweise beschränkt.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren lernen wir nun die sogen. uneigentlichen Integrale kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwerte von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten 3 Fälle.

### 4.2 DEF (Uneig. I), Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze

Sei  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt mit der Eigenschaft

$f$  ist R-intbar auf jedem Intervall  $[a, R]$  mit  $0 < a < R < \infty$ .

Falls  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt$  existiert und endlich ist, so heißt das Integral  $\int_0^\infty f(t) dt$  konvergent [ $\int_0^\infty f < \infty$ ] und wir setzen

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) dt$$

Analog für  $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Limes der  
Fkt  $R \rightarrow \infty$

### 4.3 BSD (Unip S, Fol(1))

$$(i) \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1.$$

Tatsächlich gilt  $1/x^s$  ist steig und daher R-integrierbar auf jedem Intervall  $[1, R]$  und

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left( 1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) (*)$$

$$\rightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R \rightarrow \infty) \qquad \rightarrow 0 \text{ da } s > 1$$

$$(ii) \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert für } s \leq 1, \text{ denn}$$

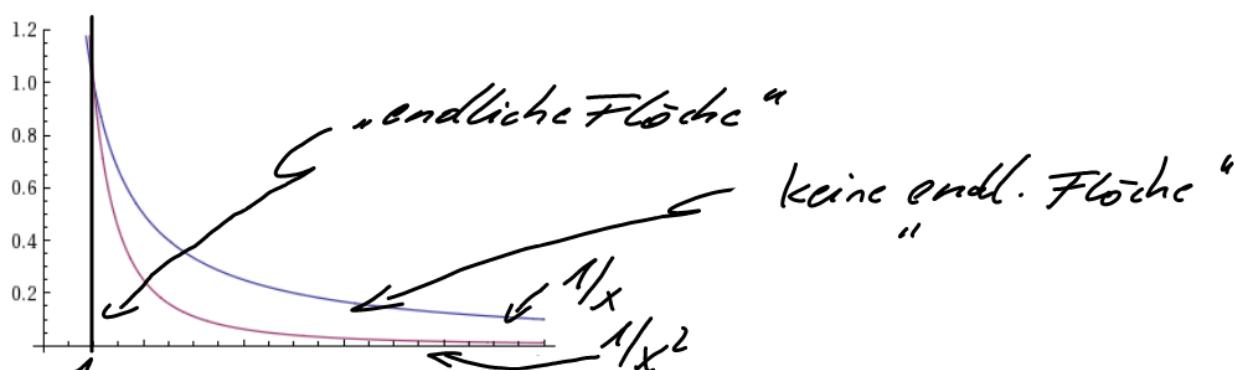
für  $s \neq 1$  können wir die Rechnung in (\*) verwenden und sehen  $\frac{1}{s-1} \left( 1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) \rightarrow \infty$ .

Für  $s=1$  gilt [B] 3.8(iii)]

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_1^R = \log(R) \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Interessant gilt also

$$\left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow s > 1 \right.$$



## 4.4 DEF (Kap. 5, Fall 2: Integrand an einer Integrationsgrenze unbeschr./undefiniert)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit d. Eigenschaft

$f$  ist  $\mathcal{D}$ -int. auf jedem Intervall  $[a+\varepsilon, b]$  ( $\varepsilon > 0$ )

Falls  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt$  existiert und endl. ist, so heißt  
dies Integral  $\int_a^b f(t) dt$  konvergent [ $\int_a^b f(x) dx$ ] und wir setzen

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt \right.$$

Analog für  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 4.5 Bsp (Kap. Integral, Fall 2)

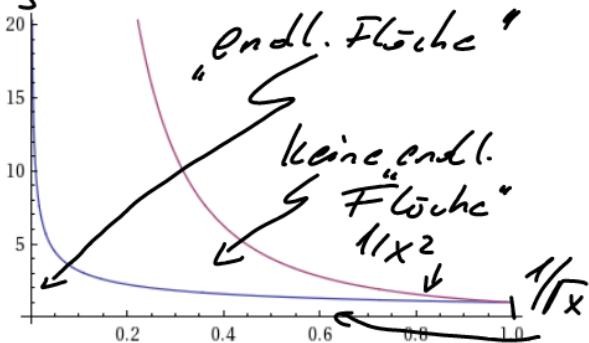
Es gilt  $\left\{ \int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow s < 1. \right.$

$[1/x^s$  ist undefiniert in  $x=0$  falls  $s > 0$ ]

Tatsächlich gilt für  $s \neq 1$  und  $1 > \varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s}$$

$$\xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \infty & s > 1 \end{cases}$$



Falls  $s=1$  und  $1 > \varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_\varepsilon^1 = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

(3) 3.8(i,i)

## 4.6 DEF (Unap.-S, Fall 3: Kombinierte Fall - beide Integrationsgrenzen kritisch)

Sei  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt m.d. Es gibt  $f$  R-integrbar auf jedem Intervall  $[x, y]$  mit  $a < x < y < b$ .

Falls für ein beliebiges  $c \in (a, b)$  die unapendlischen Integrale  $\int_a^c f(t) dt$  und  $\int_c^b f(t) dt$  konvergieren, so hält das Integral  $\int_a^b f(t) dt$  konvergent  $\left[ \int_a^b f(t) dt \right]$  und wir schreiben

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

## 4.7 Bsp (Unap. Int., Fall 3)

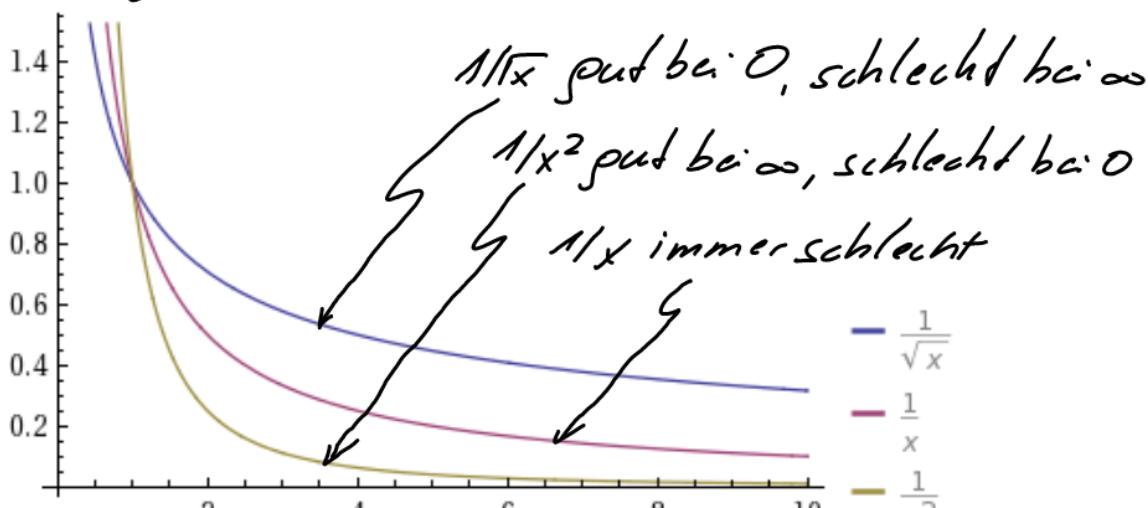
(i)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$  divergiert  $f_s \in \mathbb{R}$

Diese Def ist unabhängig von der Wahl von  $s$  ohne Berechnung

Tatsächlich setze  $c=1$ , dann gilt

$$4.3 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \text{ dir } \forall s \leq 1$$

$$4.5 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx \text{ dir } \forall s \geq 1$$

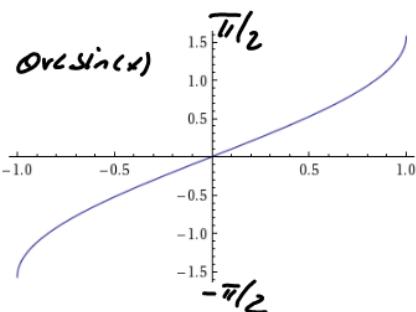
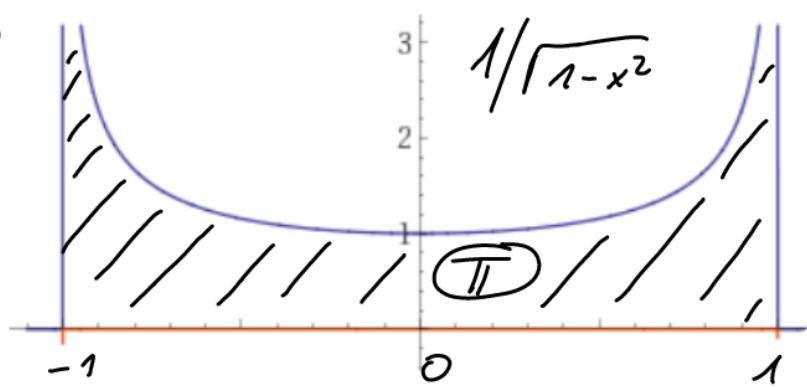


$$(ii) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\pi}}$$

dann aus §12 P(iii)  
 $\int_{-1-\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(1+\varepsilon)$   
 $\rightarrow -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} (\varepsilon \rightarrow 0)$

$$\int_0^1 \frac{1-\varepsilon dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon)$$

$$\rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} (\varepsilon \rightarrow 0)$$



Daher §12  
 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underline{\underline{\pi}}$$

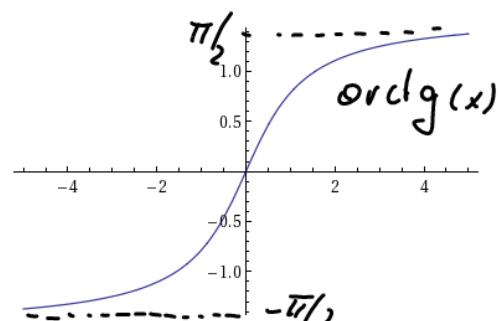
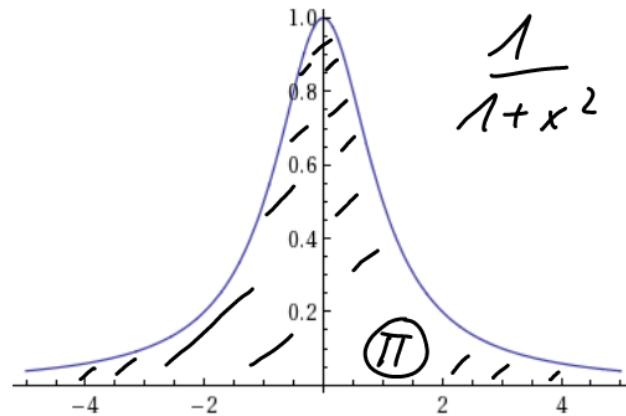
Sei  $R > 0$ , dann §12 P(iii)

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctan}(-R) \rightarrow \frac{\pi}{2} (R \rightarrow \infty)$$

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan}(R) \rightarrow \frac{\pi}{2} (R \rightarrow \infty)$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$



## 4.8 Motivation (Konvergenztests für unreg. Int.)

Ganz ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen [2] lässt sich Konvergenztests für unreg. Intervalle formulieren, die es einem ersparen, die oft unständlichen Intervalle, die in den Defs gefragt sind zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 & 3 ist keine Routinearbeit, die wir hier unterlassen.

## 4.9 Prop (Konvergenztests f. unreg. Int.)

Sei  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Def 4.2, d.h.  $f$  R-integrabel für jedes Intervall  $[0, R]$  mit  $0 < R < \infty$ . Dann gilt:

### (i) Cauchy-Prinzip:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 : \forall r, s > R$$

$$\int_0^\infty f(t) dt \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \left| \int_r^s f(t) dt \right| < \varepsilon$$

### (ii) Majorantenkriterium: Sei $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $h \geq 0$ und $\int_0^\infty h(t) dt$ konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_0^\infty |f(t)| dt \text{ konvergiert}$$

### (iii) Dinoronden krit.: Sei $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $g \geq 0$ und

$$\int_0^\infty g(t) dt \text{ divergiert. Falls}$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_0^\infty |f(t)| dt \text{ divergiert.}$$

Beweis. (i)  $\Leftarrow$ : Sei  $(R_n)$  eine Folge mit  $R_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
Sei  $\varepsilon > 0$  und wähle  $R > 0$  wie in der Bedingung.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: R_n > R \quad \forall n \geq N$

Voraus:

$$\Rightarrow \left| \int_{R_m}^{R_n} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

$\boxed{1} \] 3.16 \Rightarrow \left( \int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$  ist eine Cauchy-Folge

$\boxed{1} \] 3.18 \Rightarrow \left( \int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$  konvergiert  $\stackrel{\boxed{3} \] 1.4}{\Rightarrow} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) dt = \int_0^\infty f(t) dt$

(i)  $\Rightarrow$ : Indirekt angenommen  $\int_0^\infty f(t) dt$  konvergiert,  
aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists r_n, s_n > N: \left| \int_{r_n}^{s_n} f(t) dt \right| \geq \varepsilon \quad (*)$$

Nun gilt aber  $r_n \rightarrow \infty$ ,  $s_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und wir  
definieren eine neue Folge  $R_n$  durch Rischung von  
 $r_n & s_n$ , d.h.

$$\begin{aligned} R_{2k} &= r_k \\ R_{2k+1} &= s_k \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Dann gilt  $R_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und weil  $\int_0^\infty f(t) dt$  konv.

$\boxed{3} \] 1.4 \Rightarrow \left( \int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$  konvergiert

$\boxed{1} \] 3.18 \Rightarrow \left( \int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$  ist Cauchy-Folge

$\Rightarrow \text{Satz } (*)$

(ii) Folgt aus (i): Sei  $\varepsilon > 0$  und  $R$  wie in (i) für  $\text{h und } s > R$   
Dann gilt:

$$\left| \int_r^s f(t) dt \right| \leq \int_r^s |f(t)| dt \stackrel{1.15}{\leq} \int_r^s h(t) dt < \varepsilon$$

↓  
↓  
↓  
↓

$$\Rightarrow \int_a^\infty f < \infty$$

(i) für  $h \Rightarrow$  (i) für  $f$

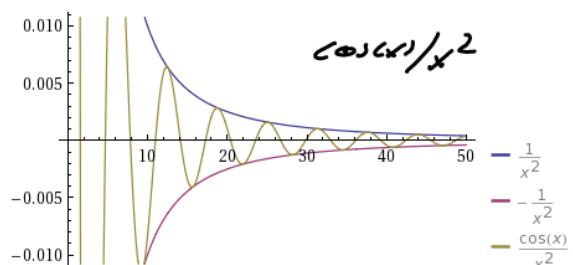
(iii) Folgt sofort aus (ii): Indirekt  $\int_0^\infty f = \infty$   
 $\Rightarrow \int_0^\infty f < \infty$  ist zur Voraussetzung.



## 4.10 Bsp (Konvergenztests)

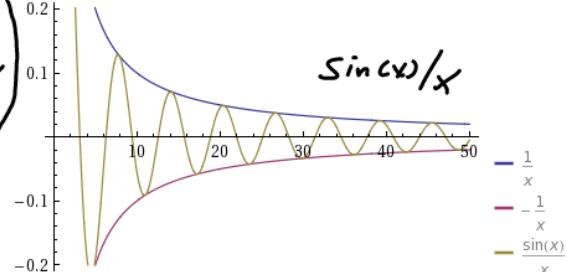
(i)  $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$  konvergiert wegen 4. S(ii):

(4.3cii)



$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  und  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  konv

(ii)  $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$  konvergiert



Wir wenden das Cauchy-Prinzip an: Seien  $1 < r < s$  dann

gilt  $\left| \int_r^s \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \stackrel{P.I.}{=} \left| -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right|$

$\stackrel{1.49 \Rightarrow}{\leq} \left| \frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s} \right| + \left| \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right|$

$\leq \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2}$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für  $r, s \rightarrow 0$

Bemerkung: Wir sind hier fast an der Grenze des Möglichen, dass  $\int_1^\infty dx/x$  divergiert und auch  $\int_1^\infty |\sin(x)|/x dx$ !

und  $\left| \int_r^s \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$  lt.

Cauchy-Prinzip]

## 4.11 Rotation (Integrofunkt für Reihen)

Die Analogie zwischen Konvergenztests für uneig. Int. und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, der sog. Integrofunkt f. Reihen (der die anderen Tests aus 12/84 ergänzt)

## 4.12 POp (Integrofunkt für Reihen)

$\exists$  f:  $[1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine mon. fallende Fkt. Dann

gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(t) dt$  konvergiert

Beweis. Wir definieren Treppenfkt  $\varphi, \psi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(n) \\ \psi(x) &:= f(n+1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ (n \leq x < n+1) \end{array} \right\}$$

f mon. fallend  $\Rightarrow \varphi \leq f \leq \psi$

Integration über  $[1, N]$  liefert

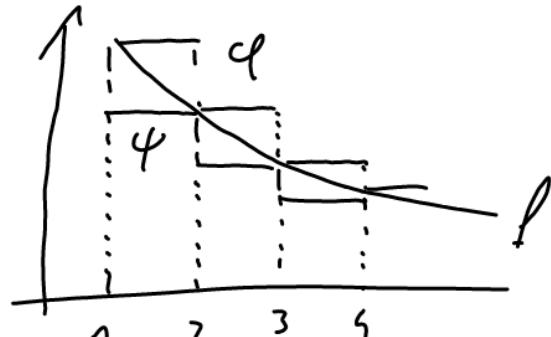
$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N \varphi(t) dt \leq \int_1^N f(t) dt \leq \int_1^N \psi(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$$\int_1^{\infty} f < \infty \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N f(n) \text{ beschränkt} \stackrel{[1] 4.6}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty \text{ & umgekehrt}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Rightarrow f \text{ mon. wach. Folgen } R_n \text{ mit } R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \text{ gilt}$

$$\left( \int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ mon. wach. & beschr} \stackrel{[1] 3.25}{\Rightarrow} \text{konv} \Rightarrow \int_1^{\infty} f < \infty$$



## 4.13 Bsp (Z $\frac{1}{n^s}$ zum Zerlegen; vgl. 12/4.P) Für s > 0 gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv} \stackrel{4.12}{=} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konv} \stackrel{4.3(iii)}{\Rightarrow} s > 1$$