§2 Der Grenzwertbegriff[8]

In diesem Abschnitt besprechen wir *den* zentralen Begriff der Analysis, den Grenzwertbegriff. Wie angekündigt nähern wir uns dem Begriff über eine Iteration.

§2.1 Von der Iteration zum Grenzwertbegriff

Wie versprochen, werden wir in diesem Abschnitt über das Betrachten eines Iterationsprozesses, genauer der näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln in ganz natürlicher Weise auf den Grenzwertbegriff geführt. Tatsächlich ist im Abschnitt D.§1 der Grenzwertbegriff schon mehrmals am Horizont aufgetaucht. Hier machen wir das explizit; aber nicht nur das! Wir werden sogar in ganz natürlicher Weise auf die *formale Definition* des Grenzwerts mit ihrer „Epsilontik“ geführt.

2.1.1. Babylonisches Wurzelziehen konkret, vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.1.2). Das folgende Verfahren zum näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln geht historisch auf die Babilonier zurück und ist damit ca. 3000 Jahre alt!
Stellen wir uns die Aufgabe $\sqrt{30}$ zu berechnen. In der Nähe der gesuchten Zahl liegt sicherlich (als erste Näherung) die Zahl $x_1 = 5$, denn $5 \cdot 5 = 25$. Es bleibt aber noch ein Rest r und wir können schreiben

$$\sqrt{30} = 5 + r. \tag{D.26}$$

Jetzt wollen wir natürlich r näher bestimmen. Dazu quadrieren wir (D.26) und erhalten

$$30 = 25 + 10r + r^2. \tag{D.27}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für r, die aber nicht dazu taugt, r tatsächlich zu berechnen. Tasächlich ergibt sich durch Umformung

$$r^2 + 10r - 5 = 0 \quad \text{also} \quad r = 5 \pm \sqrt{30}, \tag{D.28}$$

was uns also nicht weiterbringt — um r aus (D.28) zu bestimmen, müssten wir $\sqrt{30}$ bereits kennen!
Wir müssen daher einen anderen Weg einschlagen, um r zumindest näherungsweise zu berechnen. Der Schlüssel ist es, den quadratischen Term in (D.27) los zu werden. Dazu überlegen wir: Es gilt sicherlich $r < 1$, denn wäre der Rest 1 dann hätten wir $5 + r = 6$ und $6^2 = 36$ und bereits größer als 30. Wenn aber $r < 1$ gilt, dann ist r^2 noch kleiner und wir lassen den quadratischen Term einfach unter den Tisch fallen. Die ultimative und a-posteriori Rechtfertigung für diesen Schritt ist natürlich, dass das Verfahren (trotzdem) gut funktioniert, wie wir gleich sehen werden.
Unsere Überlegung führt also auf folgende ungefähre Gleichung $30 \approx 25 + 10\,r$ als „Ersatz“ für (D.27). Um den Rest r näherungsweise durch ein Iterationsschema zu bestimmen, machen wir den folgenden Ansatz für die erste Näherung r_1 and r.

$$30 = 25 + 10\,r_1, \quad \text{woraus sich ohne Mühe} \quad r_1 = \frac{5}{10} = 0.5 \tag{D.29}$$

ergibt. Damit haben wir aber nach $x_1 = 5$ einen neuen, besseren Näherungswert

$$x_2 = x_1 + r_1 = 5 + 0.5 = 5.5 \tag{D.30}$$

[8] In diesem Paragraphen fehlen in dieser Version des Skriptums noch einige Grafiken, die aber alle in der Vorlesung besprochen wurden. Die entsprechenden Stellen sind mit ♣ ♣ gekennzeichnet.

gefunden. Nun gilt aber $x_2^2 = 5.5^2 = 30.25$ und wir haben offensichtlich über das Ziel hinausgeschossen. Um noch besser an $\sqrt{30}$ heranzukommen, wiederholen wir unseren obige Vorgehensweise mit $x_2 = 5.5$ statt $x_1 = 5$ und nennen den „neuen Rest“ r'. Wir schreiben erhalten

$$\sqrt{30} = x_2 + r', \quad \text{also} \quad 30 = x_2^2 + 2x_2\,r' + (r')^2 \approx x_2^2 + 2x_2\,r', \tag{D.31}$$

woraus sich analog zu (D.29) für die 2. Näherung r_2 für den Rest

$$30 = x_2^2 + 2x_2 r_2, \quad \text{also} \quad r_2 = \frac{30 - x_2^2}{2x_2} \tag{D.32}$$

ergibt. Damit erhalten wir für den nächsten Näherungswert

$$x_3 = x_2 + r_2 = \frac{30 + x_2^2}{2x_2} \tag{D.33}$$

Setzen wir $x_2 = 5.5$ ein, so ergibt sich numerisch $r_2 = -0.125/5.5 \approx -0,022\,727\,273$ (also wie erwartet ein negativer Wert) und $x_3 \approx 5.5 - 0,022\,727\,273 \approx 5,477\,272\,727$.
Im nächsten Schritt erhalten wir (vgl. (D.33))

$$x_4 = \frac{30 + x_3^2}{2x_3} \tag{D.34}$$

mit dem numerischen Wert $x_4 \approx 5,477\,225\,575\,25$.
Die babylonische Methode erweist sich als sehr effektiv, denn dass Quadrat von x_4 hat den numersichen Wert $x_4^2 \approx 30,000\,000\,002\,2$, ist also schon auf 8 Nachkommastellen nahe am Wert 30. Außerdem ist der nächste Näherungswert $x_5 = 5,477\,225\,575\,05$ und also die Näherung bereits in der 9. Nachkommastelle stabil.

2.1.2. Babylonisches Wurzelziehen abstrakt — Das Heron Verfahren. Nun wollen wir obiges Verfahren etwas genauer analysieren. Zunächst lässt sich aus (D.34) die allgemeine Formel für die Iteration zu

$$x_{n+1} = \frac{30 + x_n^2}{2x_n} \tag{D.35}$$

ablesen. Wennn wir uns nun noch vom konkreten Wert $\sqrt{30}$ lösen und allgemein die Quadratwurzel aus einer beliebigen positiven Zahl a annähern wollen, so erhalten wir offensichtlich die folgende Näherungs*folge* (x_n) in rekursiver Darstellung

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n} \qquad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}). \tag{D.36}$$

Wenn wir diese Darstellung geringfügig umformen zu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \tag{D.37}$$

erkennen wir übrigens einen alten Bekannten: das *Heron-Verfahren*, siehe z.B. (Forster, 2016, §6).
Mit der Formel (D.37) ist auch eine klare und einprägsame geometrische Veranschaulichung verbunden: Wir interpretieren die Zahl a, deren Wurzel wir ja suchen, als die Fläche eines Rechtecks R_1 mit den Seitenlängen

$$x_1 \text{ (also dem Startwert) und } \quad y_1 = \frac{a}{x_1}. \tag{D.38}$$

Die Aufgabe ist es nun das zu R_1 flächengleiche Quadrat Q zu finden, dass dann natürlich die Seitenlänge $\sqrt{a}$ haben muss. Die Iteration funktioniert nun so (siehe auch ♣ `Abbildung` ♣), dass die neue Seitenlänge x_2 als Mittelwert zwischen x_1 und y_1 angesetzt wird, also als

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right). \tag{D.39}$$

Das liefert uns ein zu R_1 flächengleiches Rechteck R_2 mit den Seitenlängen

$$x_2 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{a}{x_2}, \tag{D.40}$$

dessen Seitenlängen bereits näher beieinander liegen, d.h. das näher an einem Quadrat ist. Weitere Iteration führt dann auf Rechtecke R_n mit Seitenlängen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}, \tag{D.41}$$

also genau auf die Iteration (D.37).

Übungsaufgabe.

$\boxed{\textbf{30}}$ **Heron-Verfahren explizit.** Berechnen Sie mittels des Heron-Verfahrens
(a) $\sqrt{30}$ und (b) $\sqrt{17}$
auf 20 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu Technologie!

2.1.3. Eine natürliche Fragestellung. Nun stellt sich mit einiger Dringlichkeit die Frage: *Funktioniert das Verfahren immer?* Präziser formuliert: Kommt die Näherungsfolge (x_n) der Zahl $\sqrt{a}$ mit wachsendem n immer näher und was heißt das genau?

2.1.4. Fehlerabschätzung. Um eine erste Antwort zu finden untersuchen wir das Verhalten des Fehlers z_n in jedem Schritt der Iteration, also von

$$z_n = \sqrt{a} - x_n \qquad (n \geq 1). \tag{D.42}$$

Aus (D.36) ergibt sich sofort

$$z_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{a + x_n^2}{2x_n} = -\frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = -\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = -\frac{z_n^2}{2x_n}. \tag{D.43}$$

Diese Gleichung besagt im übrigen, dass alle Fehler z_n negativ sind, weil ja alle Näherungen x_n positiv sind; letztere sind also (für $n \geq 2$) immer größer als $\sqrt{a}$.
Nun werden wir mit Hilfe der Gleichung (D.43) zeigen, dass sich der Fehler in jedem Schritt mindestens halbiert. Tatsächlich folgt aus (D.43) zunächst

$$z_{n+1} = -\frac{z_n}{2x_n}\, z_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\, z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right) z_n. \tag{D.44}$$

Nun gilt, wie oben bemerkt $x_n > \sqrt{a}$ für $n \geq 2$, also $0 < \sqrt{a}/(2x_n) < 1/2$ und daher

$$|z_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| |z_n| < \frac{1}{2}\,|z_n|. \tag{D.45}$$

Wenn wir diese Ungleichung iterieren, dann erhalten wir die Abschätzung

$$|z_{n+1}| < \frac{1}{2}\,|z_n| < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|z_{n-1}| < \cdots < \frac{1}{2^n}\,|z_1|, \tag{D.46}$$

und somit

$$|z_n| < \frac{1}{2^{n-1}}\,|z_1| \qquad (n \geq 2). \tag{D.47}$$

Diese Formel besagt, dass sich in jedem Schritt der Approximation die Anzahl der gültigen Dezimalstellen verdoppelt — eine Tatsache, die empirisch erfahrbar ist, wenn man das Verfahren explizit durchführt und die uns im folgenden zur Grenzwertdefinition führen wird.

Übungsaufgabe.

$\boxed{31}$ **Heron reloaded.** Implementieren Sie das Heron-Verfahren z.B. mit Geogebra (oder einem Werkzeug Ihrer Wahl) und berechenen Sie für
(a) $\sqrt{212}$ und (b) $\sqrt{313}$ (c) $\sqrt{417}$
und für $n \leq 15$ nicht nur die Näherung x_n sondern auch explizit den Rest r_n und den Fehler z_n. Wie wirkt sich der gewählte Startwert x_1 auf den Approximationsprozess aus?

2.1.5. Approximationsgüte. Angenommen wir wollen mit dem Heron-Verfahren die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen. Das bedeutet, das wir eine Fehlerschranke von 10^{-7} unterschreiten müssen in dem Sinn, dass wir ein x_{n_0} finden, für das

$$|\sqrt{a} - x_{n_0}| < 10^{-7} \tag{D.48}$$

gilt. Die Fehlerabschätzung (D.47) hilft uns dabei, denn es gilt

$$|\sqrt{a} - x_n| = |z_n| < |z_1|\,\frac{1}{2^{n-1}} \tag{D.49}$$

und wir müssen also nur einen Index n_0 finden, sodass

$$|z_1|\,\frac{1}{2^{n_0-1}} < 10^{-7} \quad \text{also} \quad 2^{n_0-1} > 10^7\,|z_1| \quad \text{gilt.} \tag{D.50}$$

Das können wir leicht erreichen, indem wir z.B. $n_0 > 2 \cdot 10^7\,|z_1|$ wählen, denn wegen $2^k \geq k$ $(k \in \mathbb{N})$[9] gilt dann

$$2^{n_0-1} = \frac{1}{2}\,2^{n_0} \geq \frac{1}{2}\,n_0 > \frac{1}{2}\,2 \cdot 10^7\,|z_1| = 10^7\,|z_1|. \tag{D.51}$$

Wegen der Ursprünglichen Fehlerabschätzung (D.47) ist dann im übrigen auch sichergestellt, dass für alle n_0 nachfolgenden Indizes, also für alle $n > n_0$ die gewünschte Fehlerschranke (D.48) gilt.
Mehr noch, auf diese Weise können wir

> zu jeder beliebig vorgegebene Fehlerschranke einen (von ihr abhängigen) Index n_0 angeben, ab dem die Näherungsfolge (x_n) die Fehlerschranke unterschreitet, d.h. im geforderten „Toleranzintervall" um $\sqrt{a}$ liegt.

[9] Wenn nicht offensichtlich, lässt sich das mit Induktion in einer Zeile zeigen:
$2^0 = 1 \geq 0$, $2^1 = 2 \geq 2$; $k \mapsto k+1:\ 2^{k+1} = 2\,2^k \geq 2k \geq k+1$ für $k \geq 1$.

Genau diese Vorstellung liegt aber der Grenzwertdefinition zugrunde, die wir im Lichte der obigen Diskussion wie folgt formulieren:

> Eine relle Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder (noch so kleinen) Toleranz $\varepsilon > 0$ einen (i.a. von ε abhängigen) Index n_0 gibt, sodass alle Folgenglieder x_n mit $n \geq n_0$ im entsprechenden Toleranzintervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ liegen, also
> $$|x_n - x| < \varepsilon \tag{D.52}$$
> gilt.

Bevor wir im nächsten Abschnitt genauer auf den Grenzwertbegriff eingehen machen wir eine

2.1.6. Mathematische Zwischenbemerkung.

(1) Dass die Wahl $n_0 > 2 \cdot 10^7 \, |z_1|$ (unter Gleichung (D.50)) tatsächlich möglich ist, folgt im deduktiven Aufbau der Analysis aus dem Archimedischen Axiom, siehe z.B. (Steinbauer, 2013b, $\boxed{0}$ 1.11(i)). Dieses besagt ja gerade, dass es zu jeder (beliebig großen) reellen Zahl eine natürlich Zahl gibt, die diese übertrifft. Daraus folgt im Übrigen auch, dass $1/n$ eine Nullfolge ist, vgl. (Steinbauer, 2013b, $\boxed{1}$ 1.3(i)). Dass dieser fundamentalste alle Grenzwerte im deduktiven Aufbau der Analysis im Archimedischen Axiom kodiert ist, ist natürlich kein Thema für den Unterricht; zu wissen lohnt es sich für Lehrer/innen aber allemal.

(2) Tatsächlich ist für die Konvergenz des Heron-Verfahrens der Startwert irrelevant. Genauer, die Approximationsfolge (x_n) konvergiert für jeden positiven Startwert x_1 gegen $\sqrt{a}$. Das sieht man aus der Fehlerabschätzung (D.47), denn der Fehler z_n wird beliebig klein, egal, wie groß der „Start-Fehler" $|z_1| = |\sqrt{a} - x_1|$ ist.

Übungsaufgabe.

$\boxed{\mathbf{32}}$ **Grenzwert vorweggenommen.** Durchforsten Sie Abschnitt D§1 der Vorlesung und finden Sie alle Stellen an denen ihrer Meinung nach der Grenzwertbegriff in der Luft liegt, soll heißen in natürlicher Weise auftritt oder zumindest zum Greifen nahe ist. Geben Sie entsprechende Begründungen.

§2.2 Der Grenzwertbegriff: Fachliche Grundlagen und Formulierungen

Wir beginnen mit einer mathematsichen Präzisierung und der komprimierten Form der Definition der Grenzwerts von Folgen.

Mathematische Faktenbox 8: Grenzwert von Folgen

2.2.1. Definition (Limes). Eine relle Folge (x_n) konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0: \quad |x - x_n| < \varepsilon. \tag{D.53}$$

In diesem Fall heisst x *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (x_n) und wir sagen (x_n) konveriert gegen x. Hat eine Folge (x_n) einen Grenzwert, so nennen wir sie *konvergent*, andernfalls heißt sie *divergent*.

Mathematische Faktenbox 8 – Fortsetzung

2.2.2. Schreib- und Sprechweisen. Die folgenden Schreib- und Sprechweisen sind üblich:

$$x_n \to x \quad (n \to \infty) \quad \text{oder kürzer} \quad x_n \to x$$

„(x_n) geht/konvergiert gegen x (für n gegen unendlich)”,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{oder kürzer} \quad \lim x_n = x$$

„Limes von x_n ist x” oder „x ist Limes von (x_n)”.

Falsch hingegen ist : $\lim x_n \to x$, „Limes (x_n) geht gegen x”. sind üblich:

2.2.3. Beispiel (Konvergente und divergente Folgen).

(1) Konstante Folgen konvergieren trivialerweise, $x_n = a \to a$; dafür hätten wir den Grenzwertbegriff aber nicht erfinden müssen!

(2) Das Erzbeispiel einer (nicht-trivial) konvergenten Folge ist $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$. Sie ist eine *Nullfolge*, d.h. sie konvergiert gegen 0, $\frac{1}{n} \to 0$, was wie oben gesagt aus dem Archimedischen Axiom folgt.

(3) Weitere prominente Nullfolgen sind $\frac{1}{n^p}$ und $\frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ für jedes (fixe) $p \in \mathbb{N}$ und q^n für jedes feste $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

(4) Weitere Prominente *konvergente* Folgen sind: $\sqrt[n]{a}$ für jedes feste $a \in \mathbb{R}$ und sogar $\sqrt[n]{n}$ gehen gegen 1, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n \to \frac{1}{1-q}$ für jedes feste $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

(5) Folgen können aus zwei Gründen *divergieren*: entweder sind sie unbeschränkt wie $x_n = n$ oder sie haben (mindestens) zwei Häufungswerte wie die „*Vorzeichenmaschine*“ $x_n = (-1)^n$.

2.2.4. Grenzwert und Häufungswert. Ein gutes Verständnis des Grenzwertbegriffs ergibt sich auch in seiner Abgrenzung zum Begriff Häufungswert (manchmal auch Häufungspunkt[10]) einer Folge. Dabei ist ein Häufungswert intuitiv ein Punkt, dem die Folge immer wieder beliebig nahe kommt, aber sich dazwischen wieder von ihm entfernen kann. Die Folge muss also *nicht* ab einem bestimmten Index *immer* nahe dem Häufungswert sein, sondern es sind „Ausreißer“ erlaubt. Wir geben unten eine mathematische Präzisierung dieser Beschreibung. Alternativ werden Häufungswerte einer Folge auch oft als Grenzwerte von Teilfolgen definiert, vgl. etwa (Steinbauer, 2013b, $\boxed{1}$ 3.6).

Mathematische Faktenbox 9: Häufungswert

2.2.5. Definition(Häufungswert). Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* der reellen Folge (x_n), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n' \geq n_0 : \quad |x - x_{n'}| < \varepsilon. \tag{D.54}$$

2.2.6. Beispiele & Bemerkung (Häufungswert). Neben dem obigen einfachen Beispiel der „Vorzeichenmaschine” hat etwa auch die Folge $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ die beiden

[10] Es gibt einen mathematischen Grund, der gegen diese Bezeichnung spricht: Ein Häufungswert einer Folge ist *nicht* immer auch Häufungspunkt der Menge der Folgenglieder, z.B. für konstante Folgen, vgl. (Forster, 2016, p. 85, Bemerkung 4)).

Mathematische Faktenbox 9 – Fortsetzung

Häufungswerte ± 1. Überdies ist natürlich der Grenzwert einer Folge immer auch ein Häufungswert. Die Umkehrung ist offensichtlich falsch. (Es gilt sogar: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. Dieser ist dann auch der Grenzwert, vgl. (Heuser, 2003, Satz 28.5).)

2.2.7. Grenzwert: Formulierungen, Sprechweisen & Veranschaulichungen. Es haben sich noch viele weitere Sprechweisen eingebürgert, die besonders griffige bzw. anschauliche Formulierungen der Grenzwertbedingung 2.2.1 ermöglichen. Wir besprechen die wichtigsten davon und beginnen mit den folgenden Redeweisen:

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir das offene Intervall $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ als *ε-Umgebung* von x, siehe ♣ `Abbildung` ♣.

(2) Wir sagen, dass *fast alle* Glieder der Folge (x_n) in einer Menge M liegen, wenn $x_n \in M$ für alle Indizes n mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gilt, d.h. wenn $x_n \notin M$ für höchstens endlich viele n gilt.
Wenn es aber nur endlich viele solcher „Ausnahme-Folgenglieder“ gibt, die nicht in M liegen, dann gibt es auch ein „spätestes“ (d.h. mit höchstem Index) unter ihnen, sagen wir a_{n_0}. Alle „späteren“ Folgenglieder, d.h. alle x_n mit $n > n_0$ liegen dann in M.

Wenn wir diese beiden Sprechweisen kombinieren, können wir die Konvergenzbedingung 2.2.1 wie folgt umformulieren:

(F1) Eine Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, falls in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von x fast alle Folgenglieder von (x_n) liegen.

Mit dieser Formulierung ist das Bild des „Hineinzoomens“ verbunden: Egal wir stark man in die Nähe von x (etwa mit einem Mikroskop) hineinzoomt, man sieht immer fast alle Folgenglieder (d.h. nur endlich viele liegen außerhalb des Bildausschnitts des Mikroskops).

Warnung: Fast alle Folgenglieder sind „mehr” als nur unendlich viele. Liegen bloß unendlich viele Folgenglieder einer Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}$, dann ist x zwar Häufungswert von (x_n), aber *nicht* notwendiger Weise Grenzwert. Ein Beispiel ist wieder die „Vorzeichenmaschine” $x_n = (-1)^n$ mit ihren beiden Häufungswerten 1 und -1. In jeder ε-Umgebung von 1 liegen unendlich viele Folgenglieder, nämlich alle mit geradem Index, da $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ebenso liegen unendlich viele Glieder in jeder ε-Umgebung von -1, nämlich alle mit ungeradem Index, denn $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Richtig ist die folgende Formulierung

(F2) Ein $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert einer Folge (x_n), falls in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder von (x_n) liegen.

Eine weitere gute und anschauliche Formulierung der Grenzwertbedingung macht sich die Sprechweise des „Schließlich“ zu Nutze. Sie ist eine „dynamische“ Umformulierung des „fast alle“ von oben.

(3) Wir sagen eine Folge (x_n) bleibt schließlich in einer Menge M, wenn alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index, sagen wir n_0 in M liegen, also wiederum $x_n \in M$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Damit ergibt sich nun klarerweise die Formulierung:

(F3) Eine Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, falls sie schließlich in jeder ε-Umgebung von x bleibt.

Zu den Formulierung (F1) und (F3) passen die folgenden unmittelbaren Veranschaulichungen im Bilde der Folge als „Spaziergang” in $\mathbb{R}$ ♣ `Graphik` ♣ und am Graphen der Folge ♣ `Grafik` ♣.

Dabei ist zu beachten, dass ein wesentlicher Aspekt der Definition in den Veranschaulichungen nicht unmittelbar ersichtlich ist. Es muss ja *für alle* (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein entsprechender Folgenindex n_0 existieren, sodass alle späteren Folgenglieder (also alle x_n mit $n > n_0$) in der ε-Umgebung liegen.
Dieser wichtige Punkt kann besonders anschaulich in Form eines Spiels ausgedrückt werden: Die erste Spielerin gibt beliebig ein ε bzw. eine ε-Umgebung um den vermuteten Grenzwert x vor. Beliebig, also beliebig klein, kann in diesem Kontext als „möglichst gemein“ verstanden werden, um es der zweiten Spielerin möglichst schwer zu machen. Diese soll nämlich die Konvergenz von (x_n) gegen x zeigen, d.h. sie/er muss zu jeder noch so „gemeinen“ ε-Vorgabe *immer noch* ein n_0 finden, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe am Grenzwert liegen.
Natürlich kann ein solches Spiel nicht in alle Ewigkeit durchgeführt werden, um wirklich *für alle* ε ein geeignetes n_0 zu finden — hier ist dann im „wirklichen Leben“ ein mathematischer Beweis von Nöten!

Über die hier vorgestellten Formulierungen hinaus gibt es natürlich auf verschiedenen Exaktheitsstufen gute und weniger gute (Um-)Formulierungen der Grenzwertdefinition. Dabei ist eine Formulierung dann gut, wenn sie den Sachverhalt präzise wiedergibt und in ihrer verbalen Formulierung klar und anschaulich ist, ohne Fehlvorstellungen zu provozieren.

Übungsaufgaben.

$\boxed{33}$ **Gute und schlechte Verbalisierungen der Grenzwertdefinition.** Im Unterricht ist es von fundamentaler Bedeutung — mit der formalen Grenzwertdefinition im Kopf — gute von weniger guten Verbalisierungen unterscheiden und sich guter bedienen zu können.
Beurteilen Sie vor diesem Hintergrund die folgenden Sprechweisen, die den Sachverhalt $\frac{1}{n} \to 0$ ausdrücken (sollen).

(a) $\frac{1}{n}$ strebt für n gegen ∞ gegen 0.
(b) $\frac{1}{n}$ ist schließlich beliebig nahe bei 0.
(c) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.
(d) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher.
(e) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie je zu erreichen.

$\boxed{34}$ **Grenzwertdefinitionen in Schulbüchern[11].** Die folgenden fünf Formulierungen zur Definition des Grenzwerts einer Folge wurden Schulbüchern entnommen.

(1) (STEINER und WEILHARTER 2006, S. 7):
Die Zahl α heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen: $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

(2) (BÜRGER 2004, S. 152):
Ist $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die reelle Zahl a Grenzwert der Zahlenfolge,

[11] Diese Aufgabe stammt aus der Diplomarbeit von Lukas Bäcker.

wenn folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$
Man schreibt: $\lim_{\to\infty} a_n = a$

(3) (THORWARTL et al. 2005, S. 82):
Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung $U(a;\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fast alle Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Anders ausgedrückt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ strebt mit wachsendem n dem Grenzwert (limes) a zu. Man schreibt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergente Folge.
Anmerkung: $\lim a_n = a$ bedeutet nicht, dass a tatsächlich „erreicht“ wird, sondern nur, dass in jeder auch noch so kleinen ε-Umgebung um a fast alle Glieder der Folge liegen.

(4) (SCHÄRF 1971, S. 24):
Eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (von ε abhängige) Nummer N, so daß für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Man schreibt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und liest: a ist Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ für n gegen Unendlich.
Jede Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

(5) (BRAND et al. 2013, S. 62): Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$.
Wir schreiben dann: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.“)
Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

Ihre Aufgabe ist nun die folgende:

(a) Definitionen analysieren und vergleichen.
Analysieren Sie die fünf gegebenen Definitionen einerseits nach deren mathematischen Exaktheit und andererseits danach, wie schülergerecht diese formuliert sind!

(b) Ranking erstellen.
Versetzen Sie sich in die Situation, eine Definition für Ihren Schulunterricht zum Grenzwertbegriff festlegen zu müssen. Erstellen Sie gemäß Ihrer in (1) gemachten Beobachtungen ein (subjektives) Ranking der fünf Formulierungen! Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

2.2.8. Grenzwertberechnungen — praktische Aspekte.

Der Grenzwertbegriff ist in gewisser Weise das *Herzstück* der gesamten Analysis. Daher kommt dem Berechnen von Grenzwerten eine große Bedeutung zu. Wie Sie aus Ihrer Analysis-Ausbildung sicher mitgenommen haben, kann das aber ganz schön unangenehm sein!

Genauer: Es kann oft ganz trickreich werden, wenn man nachweisen soll, dass eine gegebene Folge konvergiert und dann auch noch der Grenzwert bestimmt werden soll. Nur in den allerseltesten Fällen, wird man damit erfolgreich sein, direkt die Definition des Grenzwerts zu verwenden. Daher *vermeidet man es möglichst Grenzwerte in diesem Sinne „direkt“* zu berechnen und nimmt stattdessen zwei Hilfsmittel zur Hand

(1) Wissen über die Eigenschaften konvergenter bzw. divergenter Folgen
(2) Grenzwertsätze, die es erlauben aus der Konvergenz einfacher Folgen auf die Konvergenz komplizierterer Folgen und auf ihren Limes zu schließen.

Diese Werkzeuge werden in der Analysis zu einem wirkungsvollen Kalkül ausgebaut, dessen Anfangsgründe im schulsichen Kontext besonders geeignet sind die zweite der Winterschen Grunderfahrungen (mathematische Welt, vgl 2.2.1) zu vermitteln. Darüberhinnaus lassen diese beiden Werkzeuge eine gute Intuition entstehen, wie konvergente/divergente Folgen „aussehen“. Wir präzisieren diese Hilfsmittel wie folgt.

Mathematische Faktenbox 10: Konvergente Folgen

2.2.9. Faktensammlung: konvergente Folgen. Folgende Tatsachen zu Grenzwerten sind fundamental:

(1) Eine konvergente Folge hat *genau einen* Grenzwert. Somit hat jede Folge *höchstens* einen Grenzwert, vgl. etwa (Steinbauer, 2013b, 1 2.20–21)[a].

(2) Konvergente Folgen sind beschränkt, die Umkehrung ist falsch, siehe etwa (Steinbauer, 2013b, 1 2.14–18)[b].

(3) (Grenzwertsätze) Konvergieren die Folgen (x_n) und (y_n), dann konvergieren auch die Folgen $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ und falls $y_n \neq 0$ auch (x_n/y_n) und es gilt (vgl. z.B. (Steinbauer, 2013b, 1 2.22–27))

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n,$$
$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n \quad \text{und} \quad \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}. \tag{D.55}$$

(4) (Sandwichlemma) Gilt für die drei Folgen (x_n), (y_n) und (z_n), dass $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle n und $x_n \to x$, sowie $z_n \to x$, dann konvergiert auch (y_n) und es gilt $\lim y_n = x$, vgl. etwa (Steinbauer, 2013b, 1 2.29).

[a] Der Beweis dieser fundamentalen Tatsache ist einfach und beruht auf folgender Idee: Gäbe es zwei verschiedene Limiten, dannn wären fast alle Folgenglieder in jeder ε-Umgebung beider Grenzwerte und damit jeder der beiden in jeder ε-Umgebung des anderen. Daher sind sie aber gleich.

[b] Auch hier ist die Beweisidee sehr einfach: Konvergiert eine Folge, so sind alle späten Glieder, sagen wir $\varepsilon = 1$-nahe am Grenzwert, also beschränkt. Die endlich vielen Ausnahmen sind klarerweise auch beschränkt. Die Umkehrung ist falsch, wie z.B. die „Vorzeichenmaschine" zeigt.

2.2.10. Technologieeinsatz. Natürlich ist die Berechnung von Folgengrenzwerten mittels Technologie möglich. Sowohl Geogebra wie auch alle anderen verbreiteten CAS (Computeralgebra-Systeme) wie Mathematica und Maple verfügen über mächtige Funktionen, die es erlauben, Grenzwerte einfach zu berechnen.
Trotzdem ist ein gewisses Maß an Grundwissen über Grenzwerte einfacher Folgen für Lehrer/innen unerläßlich. Daraus ergibt sich vor allem ein Gefühl für verschieden starkes Wachstum, wie es auch die folgenden Übungsaufgaben vermitteln.

Übungsaufgaben.

35 Grenzwerte berechnen, 1. Betrachten Sie nochmals die Folgen aus Aufgabe 16:

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine")

(b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $d_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(e) $e_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(f) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

Welcher dieser Folgen sind konvergent, welche divergent? Im Falle der Konvergenz berechnen Sie den Limes (gerne mit Technologieeinsatz) und argumentieren/beweisen Sie analytisch die entsprechenden Konvergenzen.

$\boxed{36}$ **Grenzwerte berechnen, 2.** Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Grenzwerte der Folgen aus Aufgabe $\boxed{17}$ (gerne mit Technologieeinsatz):

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n} \qquad (n \geq 1).$$

Was kann man aus dieser Aufgabe in Kombination mit Aufgabe $\boxed{17}$ lernen?

2.2.11. Die Notwendigkeit der Präzisierung. Zum Abschluss streichen wir heraus, dass die in der Definition des Grenzwerts vorgenommene und in unserer Diskussion dargestellte Präzisiserung des Grenzwertbegriffs unerlässlich ist, um den Begriff *genau* zu erfassen. Es gibt nämlich zahlreiche Beispiele, die schmerzlich aufzeigen, wie eng die Grenzen eines intuitiven Verständnis des Grenzwertbegriffs tatsächlich sind. Eine sehr frühe Sammlung solcher Beispiele enthält z.B. (Bolzano, 1851). Wir erwähnen hier kurz zwei der am verbreitetsten.

(1) *Treppenstufen:* Die „Treppenfolge“ in Abbildung D.21 nähert sich optisch der Diagonale des Einheits-Quadrats beliebig an: Die „späten“ Treppen bleiben sogar als ganzes beliebig nahe an der Diagonalen. Trotzdem ist die Gesamtlänge jeder Treppe immer 2 aber die Länge der Diagonale gleich $\sqrt{2}$[12].
(2) *Halbkreisbögen:* Analog gilt für die in den Einheitskreis eigneschriebenen Halbkreisbögen in Abbildung D.22, dass die Summe der Umfänge der Halbkreisbögen mit gleichem Radius immer konstant gleich π ist, aber die Länge der Sehne gleich 2.

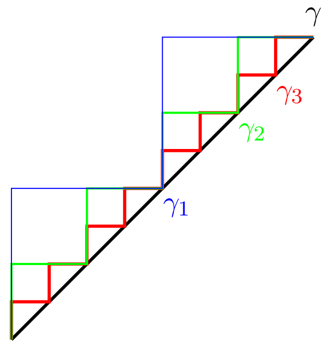

Abb. D.21: Die Länge der Treppen ist konstant 2, die Länge der Diagonale aber $\sqrt{2}$.

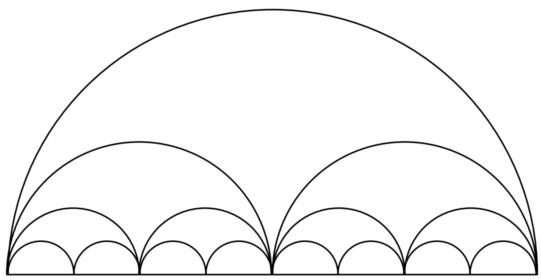

Abb. D.22: Die Summe der Längen der Halbkreisbögen ist pi, aber die Länge der Sehne ist 2.

[12]Mit diesem Beispiel steht im Zusammenhang, dass in der Theorie der Längenräume (Eine mathematische Theorie, die das Konzept der Länge von Kurven möglichst abstrakt fasst und viele Anwendungen in der (metrsichen) Geometrie hat.) Längen unterhalbstetig sind: Kurven können nur von einer Folge *längerer* Kurven gleichmäßig approximiert werden.

Literaturverzeichnis

H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

G. Bleier, J. Lindenberg, A. Lindner, and E. Süss-Stepancik. *Dimensionen — Mathematik 6.* Wien: Verlag E. Dorner, 2018.

W. Blum. Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *MU*, 25:42–50, 1979.

W. Blum and A. Kirsch. Anschauung und Strenge in der Analysis IV. *MU*, 25, 1979.

W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, and O. Köller. *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor, 2006.

Bernard Bolzano. *Paradoxien des unendlichen.* Reclam, 1851.

J.S. Bruner. Der Akt der Entdeckung. In Neber H., editor, *Entdeckendes Lernen.* Weinheim, Basel: Beltz Verlag, 1981.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum, Heidelberg, 2006.

Zoltan P Dienes and Edmond W Golding. *Methodik der modernen Mathematik: Grundlagen für Lernen in Zyklen.* Herder, Freiburg, 1970.

Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

Hans Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

Stefan Götz. Ein versuch zur analysis-ausbildung von lehramtsstudierenden an der universität wien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, pages 364–367. WTM-Verlag, Münster, 2013.

G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V Ulm, and H.-G. Weigand. *Didaktik der Analysis.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis.* B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Math. Ann.*, 95(1):161–190, 1926. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01206605. URL `https://doi.org/10.1007/BF01206605`.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung.* Springer, 2013.

Bertrand Russel. *Philosophie des Abendlandes.* Europa Verlag, Zürich, 1950.

H. Schichl and R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Spektrum, Heidelberg, 2018.

Fritz Schweiger. Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2,3), 1992.

Roland Steinbauer. Analysis in einer Variable für LAK, Februar 2013a.

Roland Steinbauer. Einführung in die Analysis, Februar 2013b.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).

Hans-Joachim Vollrath and Hans-Georg Weigand. *Algebra in der Sekundarstufe.* Spektrum, Akad. Verlag, 2007.

R. vom Hofe. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1995.

Christof Weber. Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In *Mathematik verständlich unterrichten.* Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1996.

Erich Ch Wittmann, Gerhard N Müller, and Martina Röhr. *Das Zahlenbuch: Mathematik im... Schuljahr. 2: Arbeitsheft"mit Blitzrechnen".* Klett, 2004.