Überlegungen zum Einstieg ins Mathematikstudium: Einführung in das mathematische Arbeiten

Hermann Schichl, Roland Steinbauer*

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

ÖMG + DMV Kongress, Graz, September 2009

Überlegungen zum Einstieg ins Mathematikstudium: Einführung in das mathematische Arbeiten

Hermann Schichl, Roland Steinbauer*

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

ÖMG + DMV Kongress, Graz, September 2009

Inhalt

Bericht über die Neugestaltung des ersten Semesters der Mathematikstudien an der Universität Wien seit dem Studienjahr 2001.

Probleme zu Studienbeginn: Eine Analyse

- breiter Graben zwischen Schul- und Hochschulmathematik
- hoher Drop-Out gerade zu Beginn
- Mitschleppen grundlegender Missverständnisse/Schwächen

(A) Abstraktionsschock:

- scharfer Gegensatz im Abstraktionsniveau Schule Universität
- unterschiedliche Rolle von Beispielen

Viele Studierende gehen schon zu Beginn im Definition-Satz-Beweis-Dschungel eines unkommentiert auf sie einwirkenden abstrakten Zugangs verloren.

(B) Beherrschung des Schulstoffs:
Deutliche Lücke zwischen dem tatsächlich aus der Schule mitgebrachten Wissen und dem in den AnfängerInnenvorlesungen vorausgesetzten und unkommentiert verwendeten „Schulstoff".

Lösungsansatz Studieneingangsphase (A)

Einführung in das mathematische Arbeiten
(3 SWSt., 5 ECTS)

- Pflichtvorlesung zur Linderung des Abstraktionsschocks
- geblockt am Anfang des Semester, *vor* den Hauptvorlesungen
- Inhalte & Themen, die den Hauptvorlesungen vorgelagert sind bzw. an deren Beginn stehen:
  grundlegende Ideen & Schreibweisen, Aussagenlogik, (naive) Mengenlehre, einfache algebraische Strukturen, Zahlenmengen, analytische Geometrie
- Methodik: Mathematik gemeinsam mit ihrer Methode, Sprache, und ihren Konventionen vermitteln
- Ziel: geeignetes Abstraktionsniveau für Hauptvorlesungen herstellen

Lösungsansatz Studieneingangsphase (B)

Workshops zur Aufarbeitung des Schulstoffs (3 ECTS)

- 15 freiwillige Einheiten (2-4 Std.) zu Beginn des Semesters zu jeweils zentralen Themen des Schulstoffs (z.B.: Teilbarkeit & Primzahlen, elementare Funktionen, Kurvendiskussion, Restklassen, . . .)
- freiwilliger Besuch nach anonymen Online-Einstufungstests
- schulartig, beispielorientiert, *nicht* „mathematisch exakt"
- stark interaktiver Charakter, von TutorInnen gestaltet
- Einsatz neuer Medien (blended learning)
- Leistungsüberprüfung
  Kolloquium über die Studieneingangsphase
  Inhalte der EMA und Schulstoff aus Workshops

Curriculare Umsetzung

- „Traditionelles” erstes Semester

Analysis, VO (5 SWSt.)

Lineare Algebra und Geometrie, VO (5 SWSt.)

Analysis, UE (2 SWSt.)

Lineare Algebra und Geometrie, UE (2 SWSt.)

- erstes Semester mit Studieneingangsphase

Studieneingangsphase

Einführung in das mathematische Arbeiten (3 SWSt., 6 ECTS)

Einführung in die Analysis, VO (3 SWSt., 5 ECTS)

Einführung in die Lineare Algebra, VO (3 SWSt., 5 ECTS)

Workshops zur Aufarbeitung des Schulstoffs (3 ECTS)

Einführung in die Analysis, UE (2 SWSt., 4 ECTS)

Einführung in die Lineare Algebra, UE (2 SWSt., 4 ECTS)

Hilfsmittel aus der EDV, UE (2 SWSt., 3 ECTS)

EMA: Didaktisches Credo

Dem „Was” das „Wie” gleichberechtigt zur Seite stellen

- Methodik, Fachsprache, Konventionen verwoben mit den Inhalten an Ort und Stelle thematisieren
- oft Unausgesprochenes explizit und Inoffizielles offiziell machen
- Explizite Hilfestellung zum Überwinden dreier Hürden
  - Abstraktion: sanfte Einführung, vom Speziellen zum Allgemeinen vorgehen, Motivation! Breiter Raum dem Beweisen widmen, abstrakten Zugang selbst zum Thema machen
  - Fachsprache: Informationsdichte explizit aufdecken, richtiges Rezipieren mathematischer Inhalte thematisieren
  - Selbständiges Arbeiten: „versteckte” Mini-Aufgaben, sorgfältige Auswahl von Übungsaufgaben

Zunächst als Vorlesungskonzept und begleitendens Skriptum
Nun eigenständiges Lehrbuch (über 3std. VO hinausgehend)

EMA: Stilmittel

- $\boxed{\text{graue Boxen}}$ erklären an Ort und Stelle Methodik, fachsprachliche Aspkete, Konventionen, etc.
- „naives” Verwenden des Schulstoffs ermöglicht Rückgriff auf reichen Beispielfundus; explizit machen!
- Mathematische Methodik als „Nebeneffekte” z.B. in Kapitel
  - 2 Grundlagen: Aufbau mathematischer Texte (Def., Satz, Beweis)
  - 3 Logik: Implikation, (in)direkte Beweise, über das Beweisen
  - 5 Algebra: Definition-Satz-Beweis-Stil, Spezialisierung und Verallgemeinerung in math. Strukturen
- Anknüpfungspunkte zu weiterführenden Themen z.B. Kapitel
  - 2 Grundlagen: diskrete Mathematik
  - 5 Algebra: Zahlentheorie, Algebra
  - 6 Zahlenmengen: Brückenkopf zur Analysis
  - 7 Analyt. Geometrie: Brückenkopf zur Lin. Algebra, Angew. Math.
- direktes Ansprechen der LeserInnen
- Erweiterungsstoff (ZFC, Konstruktion der Zahlenmengen)

Seiten mit derselben Zahl multipliziert werden; Wie steht es mit der Division?

Theorem 2.4.1 (Sinnlosigkeit der Zahlen) Alle Zahlen sind gleich. **2.4.1**

Beweis: O.B.d.A. werden wir den Spezialfall $1 = 2$ beweisen. Wir werden nur elementare Umformungen benutzen. Wir beginnen mit reellen Zahlen a und b mit $a = b$.

> Die Abkürzung **o.B.d.A.** steht für *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*. Damit wird der Leser darauf hingewiesen, dass nur ein Spezialfall der Aussage bewiesen wird, und der Autor des Beweises der Meinung ist, dass sich die Gesamtaussage *trivial*er Weise (d.h. besonders leicht) auf diesen Spezialfall reduzieren lässt. Es steckt also hinter o.B.d.A. ein weggelassenes (einfaches) mathematisches Argument, mit dem aus dem tatsächlich Bewiesenen die gewünschte Aussage folgt.
> Zusätzlich zur Beschränkung auf einen Sonderfall, aus dem schon die gesamte Aussage folgt, kann man o.B.d.A. auch noch zur Vereinfachung der Bezeichnung oder zum Ausschließen trivialer Sonderfälle verwenden. Beispiele zu diesen Verwendungen werden Sie in späteren Beweisen finden.

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab && \text{nach Multiplikation mit } a \\
a^2 + a^2 &= a^2 + ab && \text{nach Addition von } a^2 \\
2a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 + ab - 2ab && \text{nach Subtraktion von } 2ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2(a^2 - ab) &= 1(a^2 - ab) \\
2 &= 1 && \text{nach Division durch } a^2 - ab,
\end{aligned}$$

woraus unsere Behauptung folgt. □

Natürlich haben wir in diesem Beweis einen Fehler gemacht. Können Sie ihn entdecken?

EMA: Beispiele (1)
Korrektes Aufschreiben von Rechnungen

Ziel

- Unterschied zwischen Äquivalenzumformungen und Implikationen
- korrektes Ableiten von Formeln in Beweisen („von oben nach unten rechnen”)

In diesem Beweis sieht man schön die Falle, in die man bei Verwendung der Division als *Äquivalenzumformung* tappen kann. Es muss immer sichergestellt werden, dass nicht durch 0 dividiert wird wie im obigen Beweis, und 0 kann sich hinter komplizierten Ausdrücken verbergen.

2.4.2 Anwendung von Funktionen

Man kann nicht nur auf beiden Seiten der Gleichung elementare arithmetische Operationen ausführen, sondern man kann auch versuchen, geeignete Funktionen anzuwenden um zu vereinfachen. Besonders beliebt sind Umkehrfunktionen von Funktionen, die auf beiden Seiten der Gleichung auftauchen.
Ein einfaches Beispiel bietet die nächste Umformungskette, in der wir im ersten Schritt die Logarithmusfunktion (log), die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion anwenden:

$$\begin{aligned} e^{3x+4} &= e^{x-2} \quad |\log\_ \\ 3x+4 &= x-2 \\ 2x &= -6 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

In der Mathematik wird der natürliche Logarithmus oft mit log und nicht mit ln bezeichnet. Der Logarithmus zur Basis a wird $\log_a$ geschrieben, und für den Logarithmus zur Basis 10 müssen wir bei Verwendung obiger Konvention $\log_{10}$ schreiben und nicht bloß log.

2.4.2 **Theorem 2.4.2 (Sinnlosigkeit der Zahlen — 2. Versuch)** Alle Zahlen sind gleich.

Beweis: O.B.d.A werden wir den Spezialfall $4 = 5$ beweisen:

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 16-36 &= 25-45 \\ 16-36+\tfrac{81}{4} &= 25-45+\tfrac{81}{4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4^2 - 2\cdot 4\cdot \tfrac{9}{2} + \left(\tfrac{9}{2}\right)^2 &= 5^2 - 2\cdot 5\cdot \tfrac{9}{2} + \left(\tfrac{9}{2}\right)^2 \\
\left(4-\tfrac{9}{2}\right)^2 &= \left(5-\tfrac{9}{2}\right)^2 \qquad\qquad \text{weil } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
4-\tfrac{9}{2} &= 5-\tfrac{9}{2} \\
4 &= 5,
\end{aligned}
$$

womit die Sinnlosigkeit des Zahlenbegriffs erwiesen ist. □

Offensichtlich steckt in diesem Beweis ein Fehler, denn die Ungültigkeit des Satzes steht wohl außer Zweifel. Können Sie den Fehler entdecken?

Die falsche Umformung steht in der vorletzten Zeile der Rechnung: Das Ziehen der Quadratwurzel ist keine Äquivalenzumformung! Soll eine Gleichung durch Wurzelziehen umgeformt werden, so muss man sich zuvor überzeugen, dass die Vorzeichen auf beiden Seiten übereinstimmen. Dies ist in obigen Ausdrücken in den Klammern nicht der Fall, und daher hätten wir schreiben müssen

$$
\begin{aligned}
\left(4-\tfrac{9}{2}\right)^2 &= \left(5-\tfrac{9}{2}\right)^2 \qquad \Leftarrow \\
4-\tfrac{9}{2} &= 5-\tfrac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Allgemein muss man bei der Anwendung von Umkehrfunktionen f^{-1} darauf achten, dass die Funktion f, die man „entfernen“ möchte, *injektiv* (siehe Abschnitt 4.3 unten) auf den Definitionsbereichen beider Seiten der Gleichung ist.

Beispiel 2.4.3 *Im Allgemeinen ist das Quadratwurzelziehen keine Äquivalenzumformung, weil die Funktion $f(x) = x^2$ sowohl x als auch $-x$ auf x^2 abbildet; also das Ziehen der Wurzel nicht eindeutig ist! Schränken wir aber f auf positive reelle Zahlen ein, so vermeiden wir dieses Problem und können gefahrlos Wurzel ziehen.* **2.4.3**
Sei $x \geq 0$, und seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
4x^2 &= (a^2+b^2)^2 \\
2x &= a^2+b^2 \\
x &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2),
\end{aligned}
$$

und diese Umformung ist richtig, da wir schon wissen, dass $x \geq 0$ und $a^2 + b^2 \geq 0$ (warum?) gelten.

EMA: Beispiele (1)
Korrektes Aufschreiben von Rechnungen

Ziel

- Unterschied zwischen Äquivalenzumformungen und Implikationen
- korrektes Ableiten von Formeln in Beweisen („von oben nach unten rechnen”)

1. Gleichungsumformungen in Beweisen — Stil und Fallen (1)
2. **Gleichungsumformungen in Beweisen — Stil und Fallen (2)**
3. Korrektes Aufschreiben eines Induktionsbeweises

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$.
Induktionsannahme: Es sei die Behauptung für n bereits bewiesen, es gelte also

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Induktionsschritt: Wir müssen nun die Behauptung für $n+1$ zeigen, also

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

beweisen. Beginnen wir den Beweis mit der linken Seite

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1.$$

Für diese Umformung haben wir einfach die Definition des Summensymbols Σ verwendet und den letzten Term explizit aufgeschrieben. Durch diesen Trick (ein Standardtrick in Induktionsbeweisen) haben wir auf der rechten Seite einen Term (den Summenausdruck) erzeugt, der in der Induktionsannahme vorkommt. Wir können also die Induktionsannahme einsetzen und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1.$$

Die rechte Seite ist ein vollständiges Quadrat, und daher können wir fertig umformen

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

und wir haben den Induktionsschritt beendet.
Damit ist alles bewiesen — in einem Schritt für unendlich viele, ja für alle natürlichen Zahlen (ab 1). □

Nachdem sich gezeigt hat, dass besonders bei Induktionsbeweisen die Versuchung sehr groß ist, die falsche Beweisvariante der Von-Oben-Nach-Unten-Rechnung zu verwenden, kehren wir nochmals zum Hauptthema von Abschnitt 2.4 zurück. Wir demonstrieren anhand eines Beispiels, wie man die *richtige Idee* solcher *falschen Beweise* retten kann, indem man sie in mathematisch zulässige Gestalt bringt.

Es sei unsere Aufgabe zu beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

gilt.
Ein typischer Beweis, wie er häufig zu finden ist (und möglicherweise in Schulen gelehrt wird), sieht in etwa so aus:
Entwurf:
Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0 = \tfrac{1}{3}0(0+1)(0+2) \qquad w.A.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \tfrac{1}{3}(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)\\
\sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) &= \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)\\
\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + n^2 + 3n + 2 &= \tfrac{1}{3}(n^2+3n+2)(n+3)\\
\tfrac{1}{3}(\cancel{n^3} + 3n^2 + 2n) + n^2 + 3n + \cancel{2} &= \tfrac{1}{3}(\cancel{n^3} + 6n^2 + 11n + \cancel{6})\\
3n^2 + 2n + 3n^2 + 9n &= 6n^2 + 11n\\
0 &= 0 \qquad w.A.
\end{aligned}$$

Dieser Beweis enthält alle wichtigen Rechnungen, aber mathematisch korrekt ist er nicht. Der allgemeinen Konvention folgend, ist die Rechnung von oben nach unten zu lesen und beweist so aus der zu zeigenden Identität die überraschende Gleichung $0 = 0$, aber ***nicht die Gültigkeit der zu zeigenden Identität****. Warum aus ersterem logisch nicht zweiteres folgt, diskutieren wir noch in Beispiel 3.3.6, unten.*
Trotzdem kann man einen Beweisversuch einmal so beginnen. Danach ist es aber unerlässlich, ihn in einer „Reinschrift“ in mathematisch korrekte Form zu bringen. Der Arbeitsaufwand ist dabei gar nicht so hoch. Der Trick ist, zuerst die linken Seiten in den Gleichungen von oben nach unten abzuschreiben und danach die rechten Seiten von unten nach oben. Einzig, die weggekürzten

Terme muss man jeweils behalten. Dann schreibt man alles in dieser Reihenfolge in eine lange Gleichungskette:

Mathematischer Beweis 1:

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0 = \tfrac{1}{3}0(0+1)(0+2)$$

Induktionsbehauptung: *Für n gelte*

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Induktionsschritt: *Zu zeigen ist* $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)\\ &= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + n^2 + 3n + 2 = \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n) + n^2 + 3n + 2\\ &= \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n + 3n^2 + 9n + 6) = \tfrac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)\\ &= \tfrac{1}{3}(n^2 + 3n + 2)(n+3) = \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \qquad \square\end{aligned}$$

Wenn Sie genau vergleichen, werden Sie bemerken, dass es tatsächlich nicht allzu viel Arbeit war, die Reinschrift aus dem Entwurf zu erzeugen. Und dies ist ein mathematisch korrekter *Beweis, zeigen wir doch tatsächlich, dass der Summenausdruck auf der linken Seite gleich dem Produkt auf der rechten Seite ist. Wirklich* schön *ist der Beweis aber immer noch nicht. Bei genauem Betrachten der Gleichungskette erkennen wir nämlich, dass der Beweis im Induktionsschritt noch deutlich abgekürzt werden kann — auch das ein Vorteil des korrekten Beweises mit seiner langen Gleichungskette. Wir können nach Verwendung der Induktionsbehauptung einfach $(n+1)(n+2)$ herausheben (ausklammern).*

Mathematischer Beweis 2 (Induktionsschritt):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)\\ &= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

EMA: Beispiele (1)
Korrektes Aufschreiben von Rechnungen

Ziel

- Unterschied zwischen Äquivalenzumformungen und Implikationen
- korrektes Ableiten von Formeln in Beweisen („von oben nach unten rechnen”)

1. Gleichungsumformungen in Beweisen — Stil und Fallen (1)
2. Gleichungsumformungen in Beweisen — Stil und Fallen (2)
3. **Korrektes Aufschreiben eines Induktionsbeweises**

Die *symmetrische Mengendifferenz* ist die letzte Grundoperation, die wir für Mengen einführen wollen. Ihr Venn–Diagramm ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

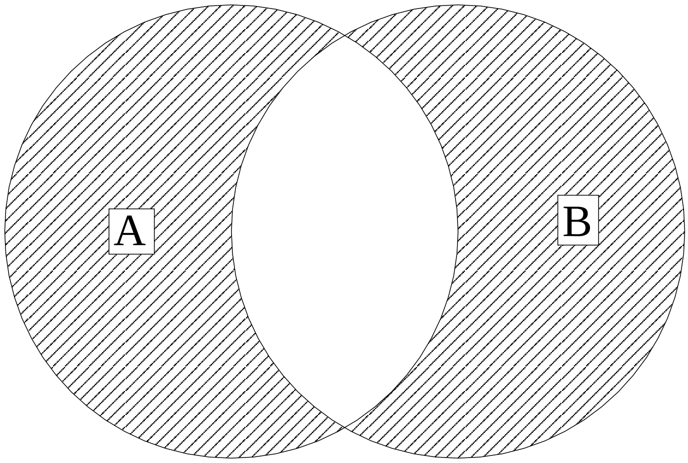

Abbildung 4.6. Venn–Diagramm: symmetrische Mengendifferenz

4.1.23 **Definition 4.1.23 (Symmetrische Mengendifferenz)** Es seien wieder zwei Mengen A und B gegeben. Wir definieren die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ von A und B als die Menge derjenigen Elemente von A und B, die nicht in beiden Mengen liegen; formal

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{4.4}$$

Diese Definition beinhaltet genau genommen eine kleine Behauptung, nämlich dass die beiden Ausrücke rechts des definierenden Gleichheitszeichens (:=), d.h. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ihrerseits gleich sind. Wird in einem mathematischen Text eine solche „Mini-Behauptung“ nicht weiter begründet (wie etwa oben), so bedeutet das, dass die AutorInnen der Ansicht sind, dass die Gültigkeit der Behauptung klar auf der Hand liegt. Die Aufgabe der LeserInnen und besonders der AnfängerInnen ist es, solche kleinen Behauptungen in mathematischen Texten aufzuspüren (d.h. diese nicht zu übersehen) und sich ihre Gültigkeit klar zu-machen. Ist der Text gut geschrieben (d.h. wird der Wissensstand der LeserInnen von den AutorInnen richtig eingeschätzt), so sollten Sie auch keine Probleme haben, diese „Mini-Behauptungen" mit „Mini-Beweisen" zu belegen. Also, falls Ihnen die Aussage $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ nicht klar ist, so nehmen Sie jetzt Papier und Bleistift zur Hand und begründen diese fürs erste z.B. mittels eines Venn–Diagramms.

Beispiel 4.1.24 (Symmetrische Differenz) *Seien* $A = \{2, 3, 6\}$ *und* $B = \{2, 5, 7\}$. *Dann ist* $A \triangle B = \{3, 6, 5, 7\}$. **4.1.24**

Aufgabe 4.1.25 Bestimmen Sie die Menge $A \triangle B$ für die folgenden Mengen:
1. $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$,
2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$,
3. $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Häufig liegt in mathematischen Theorien der Fall vor, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer Grundmenge U sind (z.B. ist in der Analysis oft von Mengen reeller Zahlen die Rede, in der Topologie werden Teilmengen eines topologischen Raumes (einer Menge) X betrachtet, etc.). Diese Grundmenge U heißt dann oft *Universalmenge* (auch Universum). Die Mengendifferenz zu der Menge U erhält dann einen eigenen Namen. Im Venn–Diagramm stellt sie sich wie in Abbildung 4.7 dar.

Definition 4.1.26 (Komplement) Sei A eine Teilmenge der Menge U. Dann definieren wir das *Komplement* $\complement A$ von A (in U) durch die Beziehung **4.1.26**

$$\complement A := \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Oft werden auch die Bezeichnungen A' und A^c für das Komplement von A verwendet.
Die Komplementbildung entspricht der logischen Operation $\neg$, der Negation.

EMA: Beispiele (2)
Richtiges Rezipieren mathematischer Texte

Ziel:

- Hinweis auf hohe Informationsdichte mathematischer Texte
- Motivation zu genauem Lesen
- Vermeiden von Lücken im exakten Aufbau und Verständnis

1. **Definition der symmetrischen Mengendifferenz**
2. Eigenschaften von Äquivalenzklassen

4.2.11 **Definition 4.2.11 (Äquivalenzklasse)** Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren die *Äquivalenzklasse von* $a \in M$ durch

$$C_a := \{b \in M \mid b \sim a\}.$$

Alternative Bezeichnungen für C_a sind auch $[a]$ und $\bar{a}$. Außerdem nennen wir jedes $b \in C_a$ einen *Repräsentanten* der Äquivalenzklasse C_a.

4.2.12 **Beispiel 4.2.12 (Äquivalenzklassen)** *Die Äquivalenzklassen der „wohnt im selben Bezirk wie"-Relation sind jeweils die Mengen aller HörerInnen, die in einem bestimmten Bezirk wohnen. Achtung: Gehen wir von Wien mit seinen 23 Bezirken aus, heißt das nicht, dass es 23 Äquivalenzklassen gibt. Es könnte ja sein, dass z.B. niemand im Hörsaal im 20. Bezirk wohnt.*

Aufgabe 4.2.13 Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen aus Aufgabe 4.2.10 die Äquivalenzklassen.

Aus der Definition sehen wir unmittelbar, dass für jedes $a \in M$ die Äquivalenzklasse $C_a \subseteq M$ erfüllt. Wegen der Reflexivität von $\sim$ gilt $a \in C_a$ (Äquivalenzklassen sind also niemals leer!) und somit

$$\bigcup_{a \in M} C_a = M.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Äquivalenzklassen wollen wir in der nachfolgenden Proposition festhalten.

4.2.14 **Proposition 4.2.14 (Eigenschaften von Äquivalenzklassen)** Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann sind zwei Äquivalenzklassen C_a und C_b entweder disjunkt oder gleich. In Symbolen

$$C_a \cap C_b \neq \emptyset \Leftrightarrow C_a = C_b.$$

Wie in Definition 4.1.23 (vgl. die graue Box nach dieser Definition) ist in Proposition 4.2.14 eine kleine (zusätzliche) Behauptung versteckt, nämlich dass für zwei Mengen C_a und C_b die Aussage C_a und C_b sind entweder disjunkt oder gleich gleichbedeutend mit der Aussage $C_a \cap C_b \neq \emptyset \Leftrightarrow C_a = C_b$ ist. Ehrlich, haben Sie das bemerkt? Gut, und falls Ihnen diese „Mini-Behauptung" nicht klar ist, dann ... (Tipp: Verneinung der Äquivalenz, siehe p. 88)

Beweis: Da es sich um eine Äquivalenz handelt ...
$\Leftarrow$: Ist $C_a = C_b$, so ist auch $C_a \cap C_b = C_a \neq \emptyset$, weil Äquivalenzklassen niemals leer sind.
$\Rightarrow$: Ist umgekehrt $C_a \cap C_b \neq \emptyset$. Dann existiert ein $y \in C_a \cap C_b$, und somit gelten $y \sim a$ und $y \sim b$. Aus Symmetrie und Transitivität folgt $a \sim b$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$a \sim b \Rightarrow C_a = C_b$$

gilt. Sei dazu $x \in C_a$. Dann wissen wir $x \sim a$ und wegen der Transitivität auch $x \sim b$ und damit $x \in C_b$. Also gilt $C_a \subseteq C_b$. Nachdem wir analog durch Vertauschen von a und b in obiger Argumentation $C_b \subseteq C_a$ beweisen können, folgt $C_a = C_b$, was wir behauptet hatten.

$\square$

Wir finden also für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M eine Familie von Teilmengen von M, die Äquivalenzklassen C_a, die

(i) $\bigcup_{a \in M} C_a = M$ (Man sagt: Die C_a **überdecken** M) und
(ii) $C_a \cap C_b \neq \emptyset \Leftrightarrow C_a = C_b$

erfüllen.
Eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge M, die die obigen Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt, ist ein mathematisch interessantes Objekt — und zwar unabhängig davon, ob diese Familie aus den Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf M besteht oder *irgendwelchen* Teilmengen von M. Wir definieren daher wie folgt:

EMA: Beispiele (2)
Richtiges Rezipieren mathematischer Texte

Ziel:

- Hinweis auf hohe Informationsdichte mathematischer Texte
- Motivation zu genauem Lesen
- Vermeiden von Lücken im exakten Aufbau und Verständnis

1. Definition der symmetrischen Mengendifferenz
2. **Eigenschaften von Äquivalenzklassen**

Wirkung

derzeit zuwenig Datenmaterial für Statistik

Erfahrungsbericht aus Rückmeldungen von Studierenden & Lehrenden, eigenen Beobachtunen

- Konzept der EMA bedingt Akzentuierung der Stoffauswahl
- Frühe erste Prüfung gibt verwertbare Rückmeldung
- Stoffliche Doppelgleisigkeiten der Hauptvorlesungen eliminiert
- Schulstoff-Kompetenz erhöht
- tendenziell leicht gesunkene HörerInnenzahlen in den Hauptvorlesungen bei leicht höherem Leistungsniveau (Diplom/Bachelor)

Was noch zu sagen und zu tun wäre

- EMA: Differenzierung zwischen Vorlesung und Buchtext
- Differenzierung zwischen Bachelor- und Lehramtsstudien
- Detailliertes zu den Workshops
- Einbinden neuer Medien

- genauere Analyse der Wirkung

Zum Weiterlesen

- Hermann Schichl, Roland Steinbauer „Einführung in das Mathematische Arbeiten: Ein Projekt zur Gestaltung der Studieneingangsphase an der Universität Wien”, Mitteilungen der DMV, 17-2, im Druck, 2009.
- Hermann Schichl, Roland Steinbauer „Einführung in das Mathematische Arbeiten”, Springer, 2009.
- Albrecht Beutelspacher, Rainer Danckwerts, „Mathematik Neu Denken, Abschlußbericht 2005–07”, `http://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/tkprojekt/downloads/abschlussbericht07.pdf`.
- Franz Embacher, Petra Oberhuemer, „Mathe online, Eine Gallerie multimedialer Lernhilfen für Schule, Fachhochschule, Universität und Selbststudium”, `http://www.mathe-online.at`.

EMA: Stilmittel

- $\boxed{\text{graue Boxen}}$ erklären an Ort und Stelle Methodik, fachsprachliche Aspkete, Konventionen, etc.
- „naives” Verwenden des Schulstoffs ermöglicht Rückgriff auf reichen Beispielfundus; explizit machen!
- Mathematische Methodik als „Nebeneffekte” z.B. in Kapitel
  - 2 Grundlagen: Aufbau mathematischer Texte (Def., Satz, Beweis)
  - 3 Logik: Implikation, (in)direkte Beweise, über das Beweisen
  - 5 Algebra: Definition-Satz-Beweis-Stil, Spezialisierung und Verallgemeinerung in math. Strukturen
- Anknüpfungspunkte zu weiterführenden Themen z.B. Kapitel
  - 2 Grundlagen: diskrete Mathematik
  - 5 Algebra: Zahlentheorie, Algebra
  - 6 Zahlenmengen: Brückenkopf zur Analysis
  - 7 Analyt. Geometrie: Brückenkopf zur Lin. Algebra, Angew. Math.
- direktes Ansprechen der LeserInnen
- Erweiterungsstoff (ZFC, Konstruktion der Zahlenmengen)

EMA: Stilmittel

- $\boxed{\text{graue Boxen}}$ erklären an Ort und Stelle Methodik, fachsprachliche Aspkete, Konventionen, etc.
- „naives” Verwenden des Schulstoffs ermöglicht Rückgriff auf reichen Beispielfundus; explizit machen!
- Mathematische Methodik als „Nebeneffekte” z.B. in Kapitel
  - 2 Grundlagen: Aufbau mathematischer Texte (Def., Satz, Beweis)
  - 3 Logik: Implikation, (in)direkte Beweise, über das Beweisen
  - 5 Algebra: Definition-Satz-Beweis-Stil, Spezialisierung und Verallgemeinerung in math. Strukturen
- Anknüpfungspunkte zu weiterführenden Themen z.B. Kapitel
  - 2 Grundlagen: diskrete Mathematik
  - 5 Algebra: Zahlentheorie, Algebra
  - 6 Zahlenmengen: Brückenkopf zur Analysis
  - 7 Analyt. Geometrie: Brückenkopf zur Lin. Algebra, Angew. Math.
- direktes Ansprechen der LeserInnen
- Erweiterungsstoff (ZFC, Konstruktion der Zahlenmengen)