§1.3 Folgen in der Schule — Zugänge im Unterricht

Im folgenden Abschnitt gehen wir konkret auf Folgen im Schulunterricht ein. An den Beginn stellen wir Formalia, d.h. die Vorgaben des Lehrplans und des Katalogs der Grundkompetenzen.

1.3.1. Folgen in Lehrplan und Grundkompetenzkatalog. Der *Lehrplan AHS 2016*[3] sieht Folgen in der 6. Klasse vor (1. Semester, Kompetenzmodul 3). Folgende zwei Punkte werden gelistet:

- Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)

Im *Gundkompetenzkatalog* der Handreichung zum Lehrplan 2016[4] treten Folgen im Rahmen der Grundkompetenzen aus dem Inhaltbereich *Funktionale Abhängigkeiten* (FA) auf, konkret als Punkt
FA 7 Folgen, mit den Unterpunkten:

- FA-L 7.1 Zahlenfolgen (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können
- FA-L 7.2 Zahlenfolgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen
- FA-L 7.3 Definitionen monotoner und beschränkter Folgen kennen und anwenden können
- FA-L 7.4 Grenzwerte von einfachen Folgen ermitteln können

In der Folge diskutieren wir einige konkrete Zugänge zum Folgenbegriff für den Unterricht.

1.3.2. Allgemeines. Wenn in der 10. Schulstufe (AHS) Folgen behandelt werden, dann lernen die Schülerinnen und Schüler damit einen neuen mathematischen Begriff kennen, bei dessen Einführung das Durchlaufen von vier Phasen zielführend ist. Mathematische Begriffe und die Bedeutung eines Begriffs erschließen sich den Lernen nicht durch eine bloße Mitteilung oder Definition des Begriffs. Ein tieferes Verständnis eines mathematischen Begriffs wird erst durch eine sorgfältige Erarbeitung des Begriffs, bei der gleichzeitig angemessene Vorstellungen aufgebaut werden können, erreicht. Die vier Phasen sind:

$$\text{(1) Einstieg} \rightsquigarrow \text{(2) Erarbeitung} \rightsquigarrow \text{(3) Sicherung} \rightsquigarrow \text{(4) Vertiefung}$$

§1.3.1 Einstieg (Phase 1)

Bei der ersten Phase – dem Einstieg zum Themenfeld Folgen – geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler erste Vorstellungen des Begriffs aufbauen, den Namen und wichtige Merkmale des neuen Begriffs kennen lernen. Dabei arbeiten die Lernenden mit entsprechenden Repräsentanten (Beispielen) und Darstellungen dieses neuen Begriffs. Die nachfolgenden Ausführungen zeigen mögliche Ausgestaltungen der Einstiegsphase. Charakteristisch ist für

[3] https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/bgbla_2016_ii_219_mathematik.pdf
[4] https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/handreichung_lehrplan_mathematik_2016_bmb.pdf

alle drei, dass der Folgenbegriff in ganz natürlicher Weise auftritt und die Frage nach der Konvergenz in den Aufgabenstellungen bereits angelegt ist.

1.3.3. Einstieg im Kontext – Folgen als diskrete Modellierung rekursiver Prozesse. In Analogie zum Beispiel Medikamentenspiegel im Körper kann in der Schule zum Einstieg in die Begriffserarbeitung ebenfalls ein „praktisches“ (Alltags-)Problem herangezogen werden. Damit wird signalisiert, dass die Mathematik aus einem praktischem Problem erwachsen ist und Alltagsbezug hat.
Gleichzeitig wird damit die Grunderfahrung *(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (mathematischer Blick)* angesprochen.

Aufgabenstellung: Koffeingehalt einer Kaffeeliebhaberin. Angenommen eine Kaffeeliebhaberin trinkt an einem langen 12-Stunden-Arbeitstag gleich nach dem Betreten des Arbeitsplatzes eine Tasse Kaffee und dann jede weitere Stunde wieder eine Tasse Kaffee. Pro Stunde werden etwa 7% des Koffeingehaltes abgebaut und eine Tasse Kaffee enthält rund 40mg Koffein. Wie entwickelt sich der Koffeingehalt im Laufe des Arbeitstages?

Lösungserwartung. Dieser Prozess lässt sich rekursiv sehr gut in einer Tabelle beschreiben.

Zu Beginn des Arbeitstages wird eine Tasse Kaffee getrunken.	Anfangswert: $k_0 = 40$
Nach einer Stunde sind 7% der 40mg Koffein abgebaut also noch 93% vorhanden. Also sind von der ersten Tasse Kaffe noch $0,93 \cdot 40$mg im Körper vorhanden, aber es werden auch wieder 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach einer Stunde: $\begin{aligned} k_1 &= 0,93 \cdot k_0 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 40 + 40 \\ &= 77,2 \end{aligned}$
Nach einer weiteren Stunde sind nun 7% von $77,2$mg abgebaut, also noch $0,93 \cdot 77,2$mg vorhanden. Außerdem werden auch wieder 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach zwei Stunden: $\begin{aligned} k_2 &= 0,93 \cdot k_1 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 77,2 + 40 \\ &= 111,796 \end{aligned}$
Noch eine weitere Stunde später sind noch $0,93 \cdot 111,796$mg vorhanden, und es werden wiederum 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach drei Stunden: $\begin{aligned} k_3 &= 0,93 \cdot k_2 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 111,796 + 40 \\ &= 143,97028 \end{aligned}$

Allgemein lässt sich die Entwicklung des Koffeingehalt mit

$$\begin{aligned} &k_0 = 40 \quad \text{und} \\ &k_{n+1} = 0,93 \cdot k_n + 40 \quad \text{für } n = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{D.15}$$

angeben. Die Folge $(k_n) = k_0, k_1, k_2, \ldots$ beschreibt also die zeitliche Entwicklung des Koffeingehalts.
Mit Hilfe eines Tabellenkalkulations-Programms kann die Entwicklung des Koffeingehalts sehr rasch dargestellt werden.

	A	B	C	D	E
1	Stunde	Koffeingehalt vor Zufuhr	nach Abbau	Zufuhr	Koffeingehalt neu - nach Zufuhr
2	0	0	0	40	40
3	1	40	37,2	40	77,2
4	2	77,2	71,796	40	111,796
5	3	111,796	103,97028	40	143,97028
6	4	143,97028	133,89236	40	173,8923604
7	5	173,8923604	161,719895	40	201,7198952
8	6	201,7198952	187,599503	40	227,5995025
9	7	227,5995025	211,667537	40	251,6675373
10	8	251,6675373	234,05081	40	274,0508097
11	9	274,0508097	254,867253	40	294,867253
12	10	294,867253	274,226545	40	314,2265453
13	11	314,2265453	292,230687	40	332,2306872

Abb. D.10: Kaffegehalt: tabellarische Darstellung

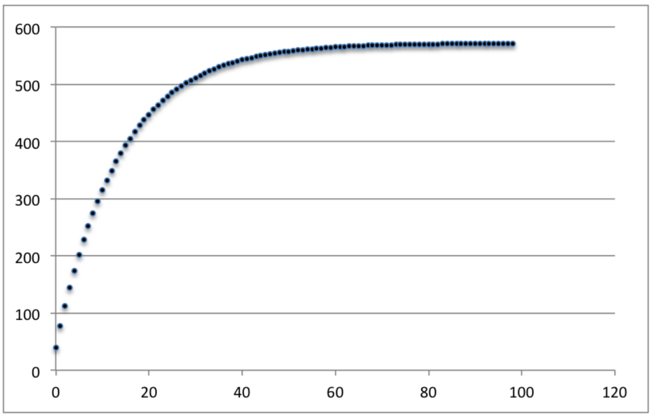


Abb. D.11: Kaffegehalt: Graph der Folge (k_n)

Sowohl die Tabelle als auch die grafische Darstellung lassen erkennen, dass sich der Koffeingehalt bei etwas mehr als 571mg einpendelt.

FdPw-Box 11: Lösungserwartung

Unter einer Lösungserwartung verstehen wir eine Musterlösung einer Aufgabe im Sinne einer Ausarbeitung wie sie im Idealfall von der besten Schülerin/dem besten Schüler einer Klasse erwartet werden könnte. Dementsprechend sollte eine Ausarbeitung der Lehrkraft im Rahmen der Unterrichstvorbereitung etwa dieselbe Form haben.
Vergleichen Sie diese im vorliegenden Fall mit der knapperen Beschreibung der Rekursion, die wir im fachmathematischen Kontext in Abschnitt D.§1.2 gegeben haben! Dabei wird deutlich, wie derselbe Inhalt auf verschiedenen Verständnisniveaus (hier: SchülerInnen der Schulstufe 10 vs. Lehramtsstudierende im 5. Semester) sinnvoll dargestellt werden kann.

Übungsaufgabe.

$\boxed{18}$ **Dauertropfinfusion.** Einem Patienten wird durch eine Dauertropfinfusion eine gleichbleibende Menge eines Medikaments verabreicht, das bis dahin nicht in seinem Körper vorhanden war. Bei diesem Vorgang wird einerseits das Medikament im Blut angereichert, andererseits wird ein Teil wieder über die Nieren ausgeschieden. Pro Minute wird über die Infusion eine Menge von 3,8 mg des Medikaments zugeführt, während im gleichen Zeitraum 5 Prozent des zugeführten Medikaments wieder über die Nieren ausgeschieden werden. Wie entwickelt sich der Wirkstoffspiegel dieser Infusion innerhalb einer Stunde?

(a) Erstellen Sie eine mathematisch „knackige“ Lösung.
(b) Arbeiten Sie eine Lösungserwartung für den schulischen Kontext aus!

$\boxed{19}$ **Explizite und rekursive Darstellung — Kontext gesucht.** In der Vorlesung wurde im Zusammenhang mit dem Beispiel „Medikamentenspiegel im Körper“ aus einer rekursiv definierten Folge die explizite Darstellung (D.13) hergeleitet. Betrachten Sie nun eine solche explizite Darstellung mit

$$m_0 = 1240, \quad r = 0,6 \quad \text{und} \quad d = 20.$$

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Folgenglieder und geben Sie eine rekursive Darstellung der Folge an!
(b) Entwickeln Sie aus der gegebenen Folge eine Aufgabenstellung für den Schulunterricht mit außermathematischen Bezug, die mindestens drei Fragestellungen enthält! Erarbeiten Sie eine entsprechende Lösungserwartung!

1.3.4. Einstieg mit Experimenten. Für den Einstieg in den Begriffsbildungsprozess zu Folgen eignet sich aber auch ein experimenteller Zugang. Dazu können beispielsweise verschiedene Experimente in Form eines Gruppenpuzzles (Expertenmodell `https://de.wikipedia.org/wiki/Gruppenpuzzle`) bearbeitet werden.

Aufgabenstellung: Immer kürzer — und doch kein Ende in Sicht. Beginnend mit einem Papierstreifen der Länge 100 cm werden Papierstreifen, die jeweils die halbe Länge des vorhergehenden Streifens haben, auf ein Plakat geklebt.

(1) Wie lange lässt sich dieses Experiment theoretisch fortsetzen?
(2) Wie entwickeln sich die Längen der Papierstreifen?
(3) Was lässt sich über die Gesamtlänge aller aufgeklebten Papierstreifen sagen, selbst wenn das Experiment sehr lange fortgesetzt wird?

$\boxed{20}$ **Experimente zu Zahlenfolgen.** Arbeiten Sie für die oben stehende Aufgabenstellung eine Lösungserwartung aus und diskutieren Sie die Aufgabenstellung vor dem Hintergrund der Grunderfahrungen nach Winter sowie den Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff.

1.3.5. Einstieg mit Mustern und Strukturen. Das Arbeiten mit Mustern und Strukturen ist vielen Schülerinnen und Schülern bereits aus der Volksschule bekannt. Dort werden bereits erste Gesetzmäßigkeiten anhand von Zahlenmustern (siehe Abbildung D.12) untersucht.

Abb. D.12: Zahlenmuster aus Wittmann et al. (2004)

In den deutschen, englischen und amerikanischen Bildungsstandards wird das auch explizit deutlich gemacht.

- Deutschland, Primarstufe[5]:
  - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen,
  - arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.
- US, Grade 3-5[6] :
  - describe, extend, and make generalizations about geometric and numeric patterns;
  - represent and analyze patterns and functions, using words, tables, and graphs.
- UK, Primary School[7]:
  - Pupils recognise and describe number patterns, and relationships including multiple, factor and square. They begin to use simple formulae expressed in words.

In der Unterstufe haben die Schülerinnen und Schüler eventuell Pythagorasbäume und kreisförmige Muster konstruiert und untersucht – dies kann hier erneut aufgegriffen und fortgesetzt werden, siehe Abbildung D.13, D.14 und D.15.

[5] https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf
[6] https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra/
[7] http://www.cliftonprimary.bham.sch.uk/pdfs/ageexpectations/maths-145.pdf

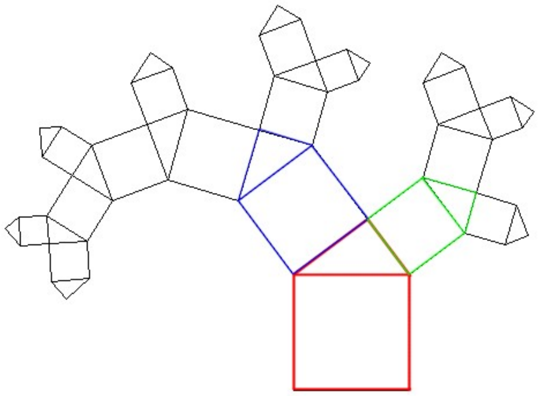


Abb. D.13: Pythagorasbaum

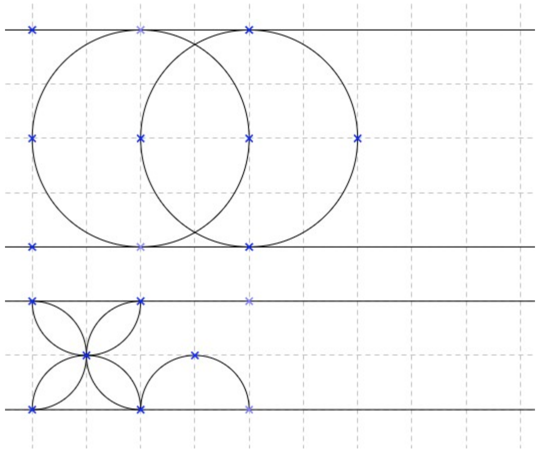


Abb. D.14: Kreismuster

Aufgabenstellung: Schlangenlinie. Konstruiere mit Zirkel und Lineal oder mit einem elektronischen Tool die abgebildete Figur. Beginne mit einem Halbkreis oberhalb einer Hilfslinie. Hänge daran einen Halbkreis mit halb so großem Radius unterhalb der Hilfslinie. Setze die Konstruktion so lange wie möglich fort. Wie viel Platz benötigst du für die Konstruktion maximal?

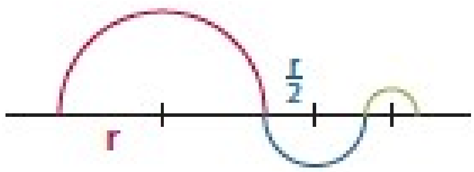


Abb. D.15: Schlangenlinien

Übungsaufgabe.

$\boxed{\textbf{21}}$ **Zahlenfolgen aus geometrischen Konstruktionen.** In der Vorlesung wurde kurz die Aufgabenstellung *Schlangenlinie* thematisiert. Entwickeln Sie eine analoge Aufgabenstellung und arbeiten Sie eine Lösungserwartung aus.

§1.3.2 Erarbeitung (Phase 2)

Bei der Erarbeitungsphase werden Umfang und Inhalt des Begriffs herausgearbeitet. Dazu zählen:

- Explizite und rekursive Darstellung von Folgen
- Grafische Darstellung von Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem
- Arithmetische und geometrische Folge
- Eigenschaften von Folgen (Monotonie und Beschränktheit)

1.3.6. Explizite und rekursive Darstellung von Folgen.
Beim Erarbeiten der expliziten und rekursiven Darstellung von Folgen kann auf aufwendige außermathematische Kontexte verzichtet werden, da das algebraische Beschreiben von Folgen im Vordergrund steht. Zuerst allerdings müssen die für Folgen typischen Schreibweisen und Begriffe (Glied einer Folge, Bedeutung der Indizes, endliche/unendliche Folge, ...) eingeführt werden.

Aufgabenstellung. Ein unendliche Folge ist durch $\langle 1, 4, 9, 16, ...\rangle$ gegeben.

- Beschreibe das Bildungsgesetz der Zahlenfolge mit Worten.
  Lösungserwartung: „Es handelt sich um Quadratzahlen." oder „Ausgehend vom ersten Folgenglied mit dem Wert 1 entstehen die weiteren Folgenglieder durch Addition der ungeraden Zahlen $3, 5, 7, \dots$."
- Gib zwei mögliche Bildungsgesetze an.
  Lösungserwartung: „Explizite Darstellung: $a_n = n^2$" oder „Rekursive Darstellung: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$"

1.3.7. Grafische Darstellung von Folgen. Zur grafischen Darstellung von Folgen bieten sich (wie in 1.1.6 erklärt) die Zahlengerade und das zweidimensionale Koordinatensystem an.

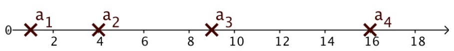


Abb. D.16: Bild einer Folge, Spaziergang

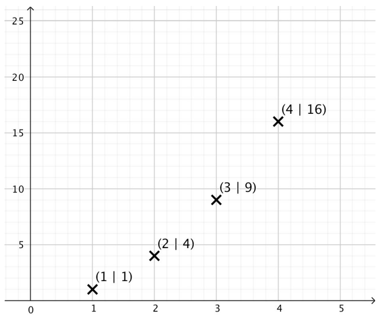


Abb. D.17: Graph einer Folge

Beide Formen der Darstellung sind den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt. Die Zahlengerade wird von der Volksschule bis zur 9. Schulstufe zur Darstellung von Zahlen genützt. Die zweidimensionale Darstellung von Folgen wird Schülerinnen und Schülern vom Arbeiten mit Funktionen her vertraut sein. Insgesamt können die rekursive und explizite Darstellung mit der grafischen Darstellung gemeinsam erarbeitet werden.

1.3.8. Arithmetische und geometrische Folge. Beim Erarbeiten der Begriffe arithmetische und geometrische Folge geht es einerseits um das Entdecken gewisser Merkmale von Folgen sowie um das Erkunden dieser beiden Folgenarten. Wir klären zuerst die mathematischen Fakten.

Mathematische Faktenbox 4: Arithmetische und geometrische Folge

1.3.9. Definition (Arithmetische Folge). Eine arithmetische Folge ist eine reelle Folge (a_n) mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Aus der Definition gewinnt man sofort die rekursive Darstellung ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{D.16}$$

wobei wir die konstante Differenz zwischen je zwei benachbarten Folgengliedern d genannt haben. Daraus ergibt sich wiederum mühelos die explizite Darstellung, wobei wir das Anfangsglied mit a_0 bezeichnen

$$a_n = a_0 + n \cdot d. \tag{D.17}$$

Eine arithmetische Folge ist also durch Angabe des Anfangsglieds a_0 und der konstanten Differenz benachbarter Folgenglieder d eindeutig festgelegt.

Mathematische Faktenbox 4 – Fortsetzung

Beachte, dass die beiden Darstellungen Spezialfälle der rekursiven Darstellung (D.5) bzw. der expliziten Darstellung (D.13) aus Abschnitt D.§1.2 für $r = 1$ sind.

1.3.10. Definition (Geometrische Folge). Eine geometrische Folge ist eine reelle Folge (a_n) mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Wiederum ergibt sich mühelos die rekursive sowie die explizite Darstellung zu ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_{n+1} = a_n \cdot r, \quad \text{und} \quad a_n = a_0 \cdot r^n \tag{D.18}$$

und eine geometrische Folge ist eindeutig bestimmt durch Angabe ihres Anfangsglieds a_0 und des konstanten Quotienten benachbarter Folgenglieder r.
Wiederum sind die beiden Darstellungen Spezialfälle von (D.5) bzw. (D.13), nun mit $d = 0$.

Übungsaufgabe.

$\boxed{22}$ **Arithmetische und geometrische Folge.** Wählen Sie aus zwei verschiedenen Schulbüchern die Definitionen für arithmetische und geometrische Folge sowie für deren rekursive und explizite Darstellung aus. Vergleichen Sie schulmathematische und hochschulmathematische Schreibweisen. Zeigen Sie Gemeinsamkeiten/Unterschiede auf.

Zum Erfassen der Merkmale arithmetischer und geometrischer Folgen im Unterricht bietet sich das sogenannte entdeckende Lernen an, siehe (Bruner, 1981). Dabei wird den Schülerinnen und Schülern eine Vielfalt von Objekten dargeboten, die bestimmte Merkmale gemeinsam haben bzw. sich in bestimmten Merkmalen unterscheiden. Fragen nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden lenken die Aufmerksamkeit auf die Merkmale. Dabei kann nach folgenden beiden Prinzipien vorgegangen werden, in Anlehnung an Dienes and Golding (1970):

FdPw-Box 12: Prinzip der Variation

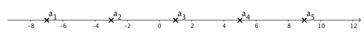
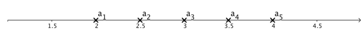
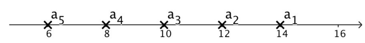
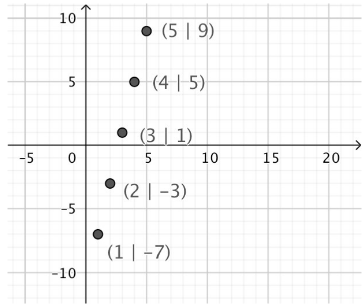
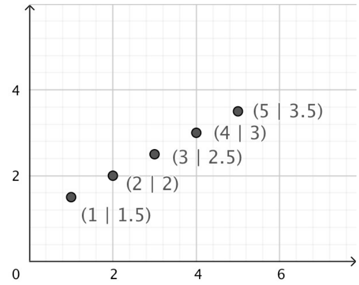
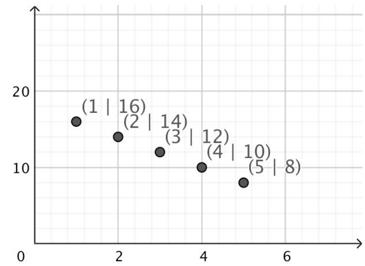
Beim Lehren von Begriffen nach dem Prinzip der Variation sind genügend viele verschiedene Objekte vorzulegen, die das charakteristische Merkmal des Begriffs gemeinsam haben und das Wesentliche dieses Begriffs herauszuarbeiten. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler zumindest zu zweit zusammenarbeiten, um ihre Entdeckungen auszutauschen. Mit Plakaten oder auch im Plenum sind abschließend die entdeckten Merkmale zu sammeln und von der Lehrperson gegebenenfalls zu ergänzen. (ICH-DU-WIR bzw. Think-Pair-Share: `http://www.sinus-transfer.de/module/modul_8kooperatives_lernen/methoden/ich_du_wir.html`)

Die nachstehende Aufgabenstellung kann z.B. gemäß diesem Prinzip für die Erarbeitung arithmetischer Folgen herangezogen werden. Für geometrische Folgen können analoge Aufgabenstellungen formuliert oder den Schulbüchern entnommen werden. Entscheidend ist, die Leitfragen so zu stellen, dass die Lernenden zu den entdeckenden Merkmalen geleitet werden.

Aufgabenstellung. Gegeben sind die drei Zahlenfolgen $a_n = \langle -7, -3, 1, 5, 9, \dots \rangle$, $b_n = \langle 2; 2,5; 3; 3,5; 4; \dots \rangle$ und $c_n = 16–2n$.

- Stelle die drei Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Gib sowohl rekursive als auch explizite Darstellungen an.
- Beschreibe, wodurch sich zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden und vergleiche mit der rekursiven und expliziten Darstellung.

Lösungserwartung.

a_n	b_n	c_n
		
		
$a_1 = -7, \quad a_{n+1} = a_n + 4$	$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = b_n + 0,5$	$c_1 = 12, \quad c_{n+1} = c_n – 2$
$a_n = -11 + 4n$	$b_n = 1,5 + 0,5n$	$c_n = 16–2n$
Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist 4.	Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist 0,5.	Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist -2.
Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.	Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.	Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.

Bei der Darstellung dieser Folgen im Koordinatensystem wird für die Schülerinnen und Schüler, die ja bereits mit linearen Funktionen vertraut sind, sichtbar, dass die Folgenglieder „gleichmäßig" wachsen/fallen. Auch die Analogie der expliziten Darstellungen zur linearen Funktion werden die Lernenden entdecken. Die dort schon kennen gelernten Parameter k und d, finden sich auch in der expliziten Darstellung wieder und sind nun im Zusammenhang von Folgen zu interpretieren.

Übungsaufgabe.

$\boxed{23}$ **Geometrische Folge nach dem Prinzip der Variation.** In der Vorlesung wurde anhand einer Aufgabenstellung gezeigt, wie nach dem *Prinzip der Variation* arithmetische Folgen erarbeitet werden können. Arbeiten Sie in Analogie dazu eine Aufgabe zur Erarbeitung geometrischer Folgen sowie eine Lösungserwartung aus.

Sobald die Schülerinnen und Schüler die charakteristischen Eigenschaften von arithmetischen Folgen erkennen und formulieren können, ist es ihnen auch möglich arithmetische Folgen

selbstständig zu definieren. Dazu benötigen die Lernenden ein wenig Übung und müssen wissen, dass sie Oberbegriffe (z.B. Zahlenfolge) zur Definition (hier arithmetische Folge) verwenden sollen. Auch *Signalwörter* („...nennt man ...", „...bezeichnet man als ...", „...so sagt man ...", „...wird als ... bezeichnet.") helfen den Schülerinnen und Schülern beim selbstständigen Definieren.
In der Erarbeitsungsphase von Begriffen bietet sich aber neben dem Prinzip der Variation auch das *Prinzip des Kontrasts* an. Es setzt, wie der Name schon sagt, an den *kontrastierenden Merkmalen* der Begriffe an.

FdPw-Box 13: Prinzip des Kontrasts

Beim Lehren von Begriffen gemäß dem Prinzip des Kontrasts sind ebenso ausreichend viele Objekte vorzulegen, bei denen das charakteristische Merkmal nun eben nicht gegeben ist. Zum Begriff, der erarbeitet werden soll, sind also geeignete Beispiele und Gegenbeispiele (Kontrastmaterial) vorzulegen. Die Gegenbeispiele sollen sich hierbei vom zu erarbeitenden Begriff nur in einem wesentlichen Merkmal unterscheiden.

Für die Unterrichtsplanung und -gestaltung gilt es die beiden Prinzipien (Variation/Kontrast) abwechselnd zu nutzen. Für die Erarbeitung der Begriffe arithmetische und geometrische Folge gemäß dem Prinzip des Kontrasts könnten beispielsweise in einer Aufgabenstellung wie oben

- arithmetische und geometrische Folgen oder
- arithmetische/geometrische und alternierende (die Folgenglieder sind abwechselnd positiv und negativ) Folgen angegeben werden.

Auch hier es wichtig, dass von der Lehrperson Fragestellungen für die Schülerinnen und Schüler formuliert werden, die deren Aufmerksam auf die charakteristischen Merkmale (und deren Unterschiede) lenken.

Nach der Erarbeitung der Definition von arithmetischen und geometrischen Folgen (gemäß einem der oben ausgeführten Prinzipien) ist es wichtig, die arithmetische und geometrische Folge in unterschiedlichen Aufgabenstellungen (inner- und außermathematisch) anzuwenden und somit weitere Grunderfahrungen zu ermöglichen.

Übungsaufgabe.

$\boxed{24}$ **Geometrische Folge nach dem Prinzip des Kontrasts.** Arbeiten Sie eine Aufgabenstellung zur Erarbeitung geometrischer Folgen aus, die auf dem *Prinzip des Kontrasts* beruht. Erstellen Sie weiters eine Lösungserwartung.

1.3.11. Eigenschaften von Folgen — Monotonie und Beschränktheit. Ein weiterer Aspekt der Erarbeitungsphase (Phase 2) ist das Ausloten (einfacher) Eigenschaften von Folgen, die natürlich im Kontext etwa von Beispielen auftreten. Wir wiederholen zuerst die mathematischen Begriffe.

Mathematische Faktenbox 5: Monotone Folgen

1.3.12. Definition (Monotonie). Eine reelle Folge (a_n) heißt

(1) (streng) *monoton wachsend* oder *steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad (a_n < a_{n+1}) \quad \text{gilt.} \tag{D.19}$$

Mathematische Faktenbox 5 – Fortsetzung

(2) (streng) *monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad (a_n > a_{n+1}) \quad \text{gilt.} \tag{D.20}$$

(3) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass (D.19) oder (D.20) nur für alle $n \geq N$ gilt, so sagen wir (a_n) hat die entsprechende Eigenschaft *ab* N.

1.3.13. Beispiel (nicht-monotone Folgen).

(1) $a_n = n$ ist streng monoton wachsend. Jede konstante Folge, d.h. $a_n = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist monoton wachsend *und* monoton fallend; keine der beiden Eigenschaften ist aber streng erfüllt.
(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ ist streng monoton fallend. Die Folge $a_0 = 17$, $a_1 = 27$, $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$ ist streng monoton fallend ab $n = 2$.
(3) Die „Vorzeichenmaschine" $a_n = (-1)^n$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

Übungsaufgaben.

$\boxed{25}$ **Monotone Folgen 1.** Stelle alle Folgen in Beispiel 1.3.13 graphisch auf beide Arten dar und argumentiere die behaupteten Monotonieeigenschaften.

$\boxed{26}$ **Monotone Folgen 2.** Finde je eine reelle Folge, die monoton wachsend, monoton fallend ab $N = 5$, monoton wachsend aber nicht streng monoton wachsend, und weder monoton wachsend noch fallend ist.

Mathematische Faktenbox 6: Beschränkte Folgen

1.3.14. Definition (Beschränkte Folge). Sei (a_n) eine reelle Folge.

(1) (a_n) heißt nach oben (bzw. nach unten) *beschränkt*, falls es eine reelle Zahl K gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq K \quad (\text{bzw. } a_n \geq K\ ) \quad \text{gilt.} \tag{D.21}$$

Jedes solche K heißt obere (bzw. untere) *Schranke* von (a_n).
(2) Ist eine Folge *nicht* nach oben (bzw. unten) beschränkt (gibt es also kein solches K), dann heißt sie nach oben (bzw. unten) *unbeschränkt*.
(3) Ist eine Folge (a_n) sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so heißt sie *beschränkt*.

Eine beschränkte Folge (a_n) ist „eingesperrt"; es gilt ja nach Definition, dass es ein C gibt, sodass für alle n

$$-C \leq a_n \leq C, \quad \text{also} \quad |a_n| \leq C \quad \text{gilt.} \tag{D.22}$$

So ein C erhält man z.B. als $C = \max\{|K_1|, |K_2|\}$ wobei K_1 untere und K_2 obere Schranke von (a_n) ist.

Mathematische Faktenbox 6 – Fortsetzung

Abbildung D.18 zeigt die graphische Darstellung einer beschränkte Folge in den beiden Veranschaulichungen von 1.1.6.

1.3.15. Beispiel (un-beschränkte Folgen).

(1) $a_n = n$ ist nach unten durch $K = 0$ beschränkt (aber etwa auch durch -5, nicht aber durch 1) und nach oben unbeschränkt.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n > 0)$ ist beschränkt. Nach oben ist die durch 1 beschränkt (aber auch durch 7 oder 17), nach unten durch 0.

1.3.16. Bemerkung (Monotonie und Schranken). Eine monoton wachsende Folge (a_n), die zusätzlich nach oben beschränkt ist, ist schon beschränkt. Klar, denn sei K obere Schranke, dann gilt mit der Monotonie

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq K. \tag{D.23}$$

Es ist eine fundamental wichtige Tatsache, dass solche Folgen sogar konvergieren, wie wir später diskutieren werden.

Der Begriff der Monotonie sowie das Untersuchen von Funktionen hinsichtlich ihres Monotonieverhaltens ist den Schülerinnen und Schülern der 10. Schulstufe bereits bekannt. Ein kurzes Auffrischen der damit verbundenen Vorkenntnisse und Fähigkeiten ist empfehlenswert.
Auch die Monotonie und Beschränktheit kann mit dem Prinzip der Variation bzw. dem Prinzip des Kontrasts erarbeitet und eine Definition vorgenommen werden.

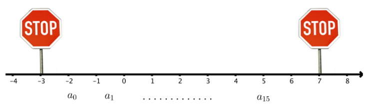
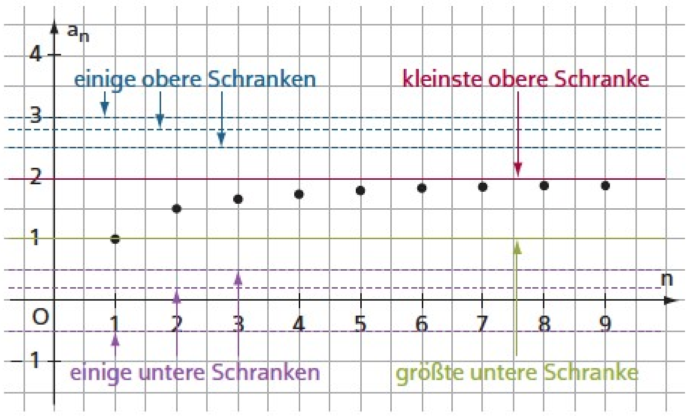


Abb. D.18: Bild (oben) und Graph (links) einer beschränkten Folge



Die Präzisierung der Begriffe „kleinste obere Schranke“ und „größte untere Schranke“ muss von der Lehrperson angeleitet werden. Tatsächlich handelt es sich dabei um mathematisch nicht ganz einfache Begriffe!

Mathematische Faktenbox 7: Supremum und Infimum

In natürlicher Weise stellt sich die Frage nach der „besten” oberen bzw. unteren Schranke einer Folge. Das führt auf die Begriffe *Supremum* und *Infimum*, die praktischer Weise gleich allgemein für Teilmengen von $\mathbb{R}$ (statt spezielle für die Menge der Folgenglieder

Mathematische Faktenbox 7 – Fortsetzung

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ einer Folge (a_n)) definiert werden.

1.3.17. Definition (Supremum und Infimum). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von von M, falls

(1) s obere Schranke von M ist (d.h. $s \geq x \quad \forall x \in M$), und
(2) keine Zahl $r < s$ obere Schranke von M ist.

Wir schreiben dann $s = \sup M$. Der Begriff des Infimums ist analog definiert und wir schreiben $\inf M$.

Das Supremum einer reellen Folge (a_n) ist definiert als

$$\sup(a_n) := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \tag{D.24}$$

also als das Supremum der Menge der Folgenglieder. Das Infimum einer reellen Folge ist analog definiert. Graphisch können wir Supremum und Infimum einer Menge wie in Abbildung D.18 (links) darstellen.

1.3.18. Beispiel (Supremum und Infimum).

(1) $\inf \mathbb{N} = 0$ und $\mathbb{N}$ hat kein sup.
(2) $\inf((0,1]) = 0 = \inf([0,1])$ und $\sup((0,1]) = 1 \sup([0,1])$
(3) $\sup((1/n)_{n\geq 1}) = 1$, $\inf((1/n)_{n\geq 1}) = 0$

1.3.19. Bemerkung (Supremum und Infimum).

(1) Offensichtlich muss eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt sein, um ein Supremum besitzen zu können. Die Tatsache, dass jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt (also die sogenannte *Supremumseigenschaft*) ist fundamental für die ganze Analysis und wir werden noch darauf zurückkommen.
(2) Zunächst einmal halten wir fest, dass Suprema und Infima, falls sie existieren, eindeutig bestimmt sind. (Das folgt leicht aus der Definition: Seien s und s' Suprema von M, dann folgt aus 1.3.17(1), dass beide obere Schranken sind. Daher kann nach 1.3.17(2) weder $s' < s$ noch $s < s'$ gelten, also folgt $s = s'$.) Daher ist es immer legitim von *dem* Supremum oder *dem* Infimum einer Menge zu sprechen.
(3) Bei allem oben Gesagten ist es völlig egal, ob $\sup M$ oder $\inf M$ Elemente der Menge M sind oder nicht! Ist dies der Fall, d.h. gilt $s = \sup M \in M$ ($s = \inf M \in M$) so sagt man s ist *Maximum* (*Minimum*) von M und schreibt $s = \max M$ ($s = \min M$).

1.3.20. Beispiel (Maximum und Minimum).

(1) $\min \mathbb{N} = 0$ und $\mathbb{N}$ hat kein max.
(2) $\max((0,1]) = 1 = \max([0,1])$, $\min([0,1]) = 0$ aber $(0,1]$ hat kein min.
(3) $\max((1/n)_{n\geq 1}) = 1$, aber $(1/n)_{n\geq 1})$ hat kein min.

Übungsaufgaben.

$\boxed{27}$ **Zum Infimum.**

(a) Formulieren Sie eine Definition des Infimums einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$.
(b) Geben Sie eine möglichst anschauliche Erklärung, was $\inf(M)$ ist.
(c) Kommentieren Sie die folgende Aussage und belegen Sie sie mit Beispielen: „Supremum und Infimum beschränkter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ sind der immer verfügbare Ersatz für das nur allzu häufig fehlende Maximum und Minumum.“

$\boxed{28}$ **Supremum, Maximum, Infimum, Minimum.** Stellen Sie die obigen Beispiele 1.3.18 und 1.3.20, d.h. falls existent stellen Sie Supremum, Maximum, Infimum bzw. Minimum von $\mathbb{N}$, $(0,1]$, $[0,1]$ und $(1/n)_{n\geq 1}$ graphisch dar. Erfinden Sie zwei weitere Aufgaben, eine leicht und eine schwierige.

Für die algebraischen Umformungen zum Nachweis der Monotonie und Beschränktheit wird das Lösen von Ungleichungen benötigt. Diese Fertigkeiten sollten die Schülerinnen und Schüler schon vorher (ebenfalls in der 10. Schulstufe) erworben haben.

Für die verstehensorientierte Erarbeitung von Verfahren im Allgemeinen bzw. Lösungsverfahren im Konkreten hält die Mathematikdidaktik ein *Schema* bereit. Denn grundsätzlich gilt, dass (Lösungs-)Verfahren mit den Lernenden zu erarbeiten sind. D. h. es braucht im Unterricht an solchen Stellen mehr als das bloße Vorzeigen der einzelnen Abarbeitungsschritte. Das Erarbeiten von Lösungsverfahren erfolgt also am besten gemäß der nachstehenden Schrittfolge.

FdPw-Box 14: Erarbeitung von Lösungsverfahren

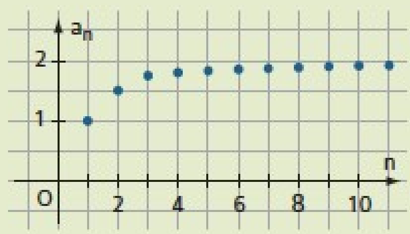
Beim Erarbeiten von Lösungsverfahren gilt es,

- die Schrittfolgen, die abzuarbeiten sind, zu begründen und deutlich zu machen,
- die Beiträge der einzelnen Lösungsschritte auf das Ziel hin deutlich zu machen,
- mit zunehmendem Alter die Lösungsschritte so zu notieren, dass sie als Algorithmen durch einen Computer ausgeführt werden können,
- die Lernenden anzuhalten, über alternative Verfahren/Weg nachzudenken.

Zu guter Letzt müssen die so einsichtig gemachten Verfahren von den Schülerinnen und Schülern angewendet und gelernt werden.

Das folgende Beispiel D.19 zeigt, wie im Schulbuch (Bleier et al., 2018) versucht wird, das Lösungsverfahren zumindest ein stückweit für Schülerinnen und Schüler einsichtig zu machen.

Beispiel:
Untersuche die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{2n-1}{n}$, für $n \in \mathbb{N}^*$
a) hinsichtlich der Art der Monotonie,
b) hinsichtlich möglicher Schranken.



Lösung:
Bestimme einige Folgenglieder.
$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{5}{3},\ a_4 = \frac{7}{4}, \ldots,\ a_{100} = \frac{199}{100}$

a) Betrachte die Folgenglieder und stelle eine Vermutung zur Monotonie auf.
$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_{100}$
Vermutung: Die Folge ist streng monoton steigend.
Beweis[1]: Es muss für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gelten:

$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{Drücke } a_n \text{ und } a_{n+1} \text{ durch die entsprechenden Terme aus.}$$
$$\frac{2n-1}{n} < \frac{2(n+1)-1}{(n+1)} \qquad | \cdot n \cdot (n+1) \qquad \text{Es gilt } n \cdot (n+1) > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$
$$(2n-1) \cdot (n+1) < (2n+1) \cdot n$$
$$2n^2 + n - 1 < 2n^2 + n \qquad | -2n^2$$
$$n - 1 < n$$

Dies ist **für alle n** eine wahre Aussage, weil die linke Seite um 1 kleiner ist als die rechte Seite.
⇒ Die Vermutung ist richtig. Die Folge ist streng monoton steigend.

b) Betrachte die Folgenglieder und stelle eine Vermutung zu möglichen Schranken auf.
Vermutung: Eine obere Schranke ist: $S_O = 2$
Beweis: Es muss $a_n \leq S_O$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gelten.

$$a_n \leq 2 \qquad \text{Drücke an durch den entsprechenden Term aus.}$$
$$\frac{2n-1}{n} \leq 2 \qquad | \cdot n \qquad \text{Es gilt } n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$
$$2n - 1 \leq 2n \qquad \text{Dies ist für alle } n \text{ eine wahre Aussage.}$$

⇒ Die Vermutung ist richtig. 2 ist daher eine obere Schranke.

Der Nachweis, dass 2 auch die kleinste obere Schranke ist, ist schwieriger und wird erst im nächsten Abschnitt behandelt.
1 ist die größte untere Schranke, da die Folge streng monoton steigend ist.

[1] Der Beweis wird eigentlich in die falsche Richtung geführt, weil er mit der zu beweisenden Eigenschaft beginnt und daraus eine richtige Tatsache abgeleitet wird. Da aber nur Äquivalenzumformungen verwendet werden, könnte der Beweis umgekehrt (von unten nach oben) gelesen werden, wodurch aus einer bekannten richtigen Tatsache die zu beweisende Eigenschaft hergeleitet wird.

Abb. D.19: Lösungsverfahren - Dimensionen Mathematik 6, 2018

Auch hier - also nach der Erarbeitung des Verfahrens - empfiehlt es sich auch diese Begriffe dies wiederum in inner- und außermathematischen Aufgabenstellungen anzuwenden.

1.3.21. Bemerkung (Umformungen — Stil und Fallen). Formulierungen wie im Beweis in D.19 sind in der Schul(buch)literatur üblich, aber nicht optimal. Führt man den Beweis gemäß der obigen Fußnote aus, ergibt sich etwa folgende Darstellung:

Um die vermutetet Monotonie, also $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ zu zeigen, müssen wir

$$\frac{2n-1}{n} < \frac{2(n+1)-1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \tag{D.25}$$

nachweisen. Wir schreiben also

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{2n-1}{n} & \overset{?}{<} & \dfrac{2(n+1)-1}{n+1} & \mid \cdot\, n \cdot (n+1) \\ (2n-1)(n+1) & \overset{?}{<} & (2n+1)n & \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 2n^2+n-1 & \overset{?}{<} & 2n^2+n & \mid -2n^2 \\ n-1 & \overset{?}{<} & n. & \end{array}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich korrekt und weil alle Umformungen in unserer Rechnung Äquivalenzumformungen sind, können wir aus der korrekten letzten Zeile auf die Gültigkeit der ersten Zeile schließen. Damit ist die behauptete Monotonie nachgewiesen.

Der mathematische Hintergrund ist hier der folgende: Nach den Regeln der Logik, implizieren falsche Aussagen durchaus wahre Aussagen (natürlich auch falsche, aber um das geht es uns hier nicht). Man sagt „Ex falso [sequitur] quodlibet“ — Lateinisch für: „aus Falschem [folgt] Beliebiges“, siehe etwa (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 3.2.2.1). Daher können wir im obigen Beispiel die Monotonie *nicht* dadurch nachweisen, dass wir aus der vermuteten und zu zeigenden Ungleichung eine wahre Aussage herleiten: Das wäre ja auch möglich, falls die vermutetet Aussagen *falsch* ist!
Im obigen Beispiel geht alles gut, da tatsächlich nur Äquivalenzumformungen verwendet werden und daher aus der offensichtlich korrekten Aussage in der letzten Zeile die zu beweisende Ungleichung in der ersten Zeile folgt und diese damit ebenfalls korrekt ist.

Es muss aber nicht immer alles gut ausgehen! Beispiele von Fallgruben finden sich etwa in den folgenden Übungsaufgaben oder in (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 2.4), siehe auch

➤ **Video** Gleichungsumformungen: Stil und Fallen .

Übungsaufgabe.

$\boxed{29}$ **Umformungen: Stil und Fallen.** Kommentieren Sie die folgenden Beweise. Sind sie korrekt? Sind die behaupteten Aussagen korrekt? Stellen Sie gegebenenfalls die Aussage richtig und beweisen Sie diese *in gutem Stil*.

(a) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 - 3n - 4 > n^2 - 4n$.
Beweis:

$$\begin{array}{rcll} n^2-3n-4 & > & n^2-4n & \\ (n+1)(n-4) & > & n(n-4) & \\ n+1 & > & n & \text{w.A.} \end{array}$$

(b) Behauptung: Für $n \geq 1$ gilt $1 - n^2 \geq n(n-1)$
Beweis:

$$\begin{array}{rcll} 1-n^2 & \geq & n(n-1) & \mid^2 \\ \cancel{1}-2n^2+\cancel{n^4} & \geq & n^2(n^2-2n+1) & = n^4-2n^3+n^2 \geq \cancel{n^4}-2n^3+\cancel{1} \quad \text{weil } n^2 \geq 1 \\ -2n^2 & \geq & -2n^3 & \\ n^2 & \leq & n^3 & \\ 1 & \leq & n & \text{w.A.} \end{array}$$

§1.3.3 Sicherung (Phase 3)

Auch wenn bereits wie oben ausgeführt die unterschiedlichen Begriffe nach ihrer Einführung angewendet wurden, gilt es, eine explizite Phase der Sicherung im Unterricht zu implementieren. Diese Phase der Sicherung beginnt mit dem Sammeln, Ordnen und Strukturieren der neu erworbenen Begriffe z. B. in Form einer Mindmap, Conceptmap (siehe beispielsweise: `http://www.ahs-vwa.at/pluginfile.php/2981/mod_page/content/106/Concept%20Map_NEU.pdf`) oder Begriffslandkarte (siehe beispielsweise: `http://www.pfm.ehb-schweiz1.ch/fileadmin/Schienen/CAS_PFM_3_BL/Concept_Map-2_01.pdf`). Nach dem Sammeln, Ordnen und Strukturieren werden Beispiele und Gegenbeispiele behandelt, so dass der Begriff (auch) gegen andere Begriffe abgegrenzt wird.

§1.3.4 Vertiefung (Phase 4)

In der Vertiefungsphase werden Querverbindungen zu anderen Begriffen hergestellt und es können auch Spezialfälle betrachtet werden.

1.3.22. Querverbindung – Folgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$. Im Sinne der Querverbindung zu anderen Begriffen können nun Folgen als Funktionen über IN bzw. IN* behandelt werden. Gemäß dem oben beschriebenen Unterrichtsgang ergibt sich der Zusammenhang zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie der zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen ganz natürlich.

1.3.23. Spezialfall — $n!$. Als Spezialfall kann die Folge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n(n+1)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ betrachtet und mit der expliziten Darstellung $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot (n-1) \cdot n$ von $n!$ erarbeitet werden.

§1.4 Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

Auch in diesem letzten Abschnitt werfen wir einen informierten Blick zurück und verwenden die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen (siehe Abschnitt B), um unsere fachdidaktische Diskussion des Folgenbegriffs abzurunden.

§1.4.1 Aspekte des Folgenbegriffs

Beim Folgenbegriff lassen sich *drei* verschiedene Aspekte unterscheiden. Es sind dies der *Aufzählungsaspekt*, der *Zuordnungsaspekt* und der *Iterationsaspekt*.

1.4.1. Der Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt. Wie bereits in 1.2.2 erklärt, spricht man von einer rekursiven Darstellung einer Folge (a_n), wenn die einzelnen Folgenglieder mit Hilfe ihres Vorgängers (oder auch mehrerer Vorgänger) angegeben werden. Der Einfachheit halber besprechen wir hier nur ersteren Fall und formulieren genauer: Gegeben ist ein Startwert a_0 und eine Vorschrift, wie aus a_n sein Nachfolger a_{n+1} konstruiert werden kann. Diese „Vorschrift“ können wir mit Hilfe einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weiter formalisieren. Dann sind für alle $n \geq 1$ die Folgenglieder mittels $a_{n+1} = f(a_n)$ gegeben und die ganze Iterationsfolge nimmt die Form

$$a_0,\ a_1 = f(a_0),\ a_2 = f(a_1),\ a_3 = f(a_2), ...$$

an. Weniger formal halten wir fest:

FdPw-Box 15: Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt des Folgenbegriffs

Jedes Folgenglied (außer dem ersten) wird sukzessive aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) konstruiert.

Mit digitalen Werkzeugen lässt sich die Idee der Iteration besonders gut im Mathematikunterricht zeigen, da aus dem Anfangsglied und der Iterationsvorschrift die rekursiv definierte Folge erzeugt werden kann.

Der Iterationsaspekt kann den Schülerinnen und Schülern durchaus bereits vertraut, z.B. aus der Zinseszinsberechnung und der Bearbeitung von Dreieckszahlen. Besonders wichtig ist beim Iterationsaspekt, dass die Schülerinnen und Schüler eine funktionale Beziehung zwischen zwei Folgengliedern gesehen wird.

1.4.2. Der Aufzählungsaspekt.

FdPw-Box 16: Aufzählungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge wird als sukzessive Auflistung, Aneinanderreihung, Reihenfolge oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten betrachtet.

Beim Aufzählungsaspekt handelt sich um einen Aspekt des Folgenbegriffs, der Schülerinnen und Schülern aus vielfältigen (Alltags-)Erfahrungen bereits seit langem vertraut ist. Wichtig ist im Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt, dass die Objekte nicht in einer beliebigen Reihenfolge aufgezählt werden, sondern dass das Ordnen und Auflisten in Form einer Reihenfolge erfolgt. So können Spielkarten beispielsweise nach ihrer Wertigkeit geordnet werden: Herz-Bube, Herz-Dame, Herz-König, Herz-As. Während geometrische Figuren beispielsweise nach ihrer Eckenanzahl geordnet werden können: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, ... Das geordnet Auflisten dient dem Erkennen von Eigenschaften.

1.4.3. Der Zuordnungsaspekt.

FdPw-Box 17: Zuordnungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert zuordnet.

Dieser Aspekt wird in Anbetracht der mathematischen Faktenbox 3: Folgen wenig überraschen, Folgen lassen sich ja als (spezielle) Funktionen interpretieren, ja wir haben sie sogar als solche definiert: Jeder natürlichen Zahl k wird ein Wert a_k Element aus $\mathbb{R}$ zugeordnet. Der Zuordnungsaspekt lässt sich wie schon bei Funktionen an Tabellen und Graphen veranschaulichen.

Mathematisch gesprochen ist der Zuordnungsaspekt charaktersisierend und wird in der Analysis verwendet, um den Folgenbegriff zu definieren. Der Aufzählungsaspekt ist eine etwas weniger formale Beschreibung desselben Inhalts. Der Rekursionsaspekt hingegen ist nicht charaktersisierend — nicht jede Folge kann rekursiv angegeben werden, z.B. die Folge der Primzahlen. Nichtsdestotrotz sind rekursive Folgen fundamental wichtige mathematische Objekte und die Formulierung von (diskreten) Iterationsprozessen mittels des Folgenbegriffs drängt sich in natürlicher Weise auf und ist eine zentrale Maotivation für den Folgenbegriff, vgl. 1.2.1.

§1.4.2 Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

Wir haben bereits in Abschnitt C.§4.1 Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff erläutert. Alle drei (Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung) können auf den Folgenbegriff übertragen werden und eine weitere – vierte – Grundvorstellung kommt hinzu.

1.4.4. Reihenvorstellung zum Folgenbegriff. Dieser ersten Grundvorstellung begegnen wir bereits in der Aufgabenstellung Koffeingehalt einer Kaffeeliebhaberin, dort wird die Entwicklung des Koffeingehalts durch eine Aneinanderreihung der zunehmenden Koffeingehalte beschrieben. Aus der anfänglich zugenommen Koffeinmenge ergeben sich sukzessive die nachfolgenden. Und jeder vollen Stunde wird genau ein bestimmter Koffeingehalt zugeordnet. Damit wird deutlich, dass diese Grundvorstellung auf dem Iterations-, Aufzählungs- und Zuordnungsaspekt beruht. Sie wird wie folgt formuliert.

FdPw-Box 18: Reihenvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge wird als Aneinanderreihung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge angesehen.

1.4.5. Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff. Auch die Kovariationsvorstellung baut auf dem Funktionsbegriff auf, beim Folgenbegriff liegt allerdings eine lokale Zuordnung von einem Folgenglied zum nächsten zugrunde.

FdPw-Box 19: Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge erfasst, wie sich Werte von einem Folgenglied zum nächsten ändern.

Besonders gut sichtbar wird die Kovariation (Änderung) im Unterricht in der rekursiven Darstellung von arithmetischen geometrischen Folgen. Arithmetische Folge: a_1 und $a_{n+1} = a_n + d$; Geometrische Folge: a_1 und $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Damit wird auch deutlich, dass die Kovariationsvorstellung eng auf den Iterationsaspekt bezogen ist.
Die Kovariationsvorstellung zeigt sich aber auch schon bei der Aufzählung von Folgengliedern. Z.B. $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rangle$. D. h. die Kovariationsvorstellung steht auch in Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt.

1.4.6. Zuordnungsvorstellung zum Folgenbegriff. Die Zuordnungsvorstellung baut unmittelbar auf dem Zuordnungsaspekt auf. Wie schon bei Funktionen wird sie besonders gut an grafischen Darstellungen und Wertetabellen sichtbar. Sie wird wie folgt formuliert.

FdPw-Box 20: Zuordnungsvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge ordnet jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zu.

1.4.7. Objektvorstellung zum Folgenbegriff. Auch diese Grundvorstellung wurde bereits für Funktionen erläutert und dort schon als die abstrakteste Grundvorstellung bezeichnet. Analoges gilt für die Objektvorstellung des Folgenbegriffs. Sie wird wie folgt formuliert.

FdPw-Box 21: Objektvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge wird als Ganzes betrachtet.

Insgesamt also kann der Zusammenhang zwischen den Aspekten und Grundvorstellungen des Folgenbegriffs wie folgt D.20 dargestellt werden.

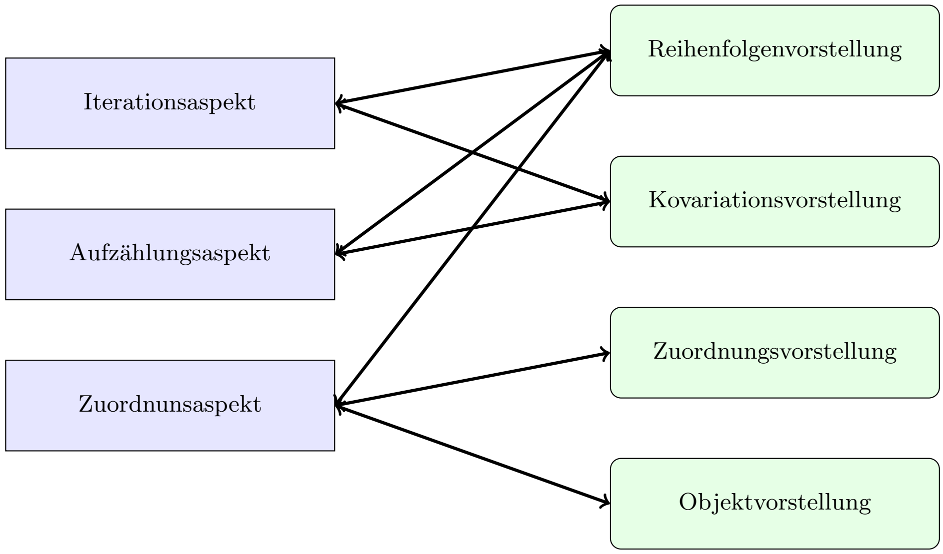


Abb. D.20: Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen

Literaturverzeichnis

H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

G. Bleier, J. Lindenberg, A. Lindner, and E. Süss-Stepancik. *Dimensionen — Mathematik 6.* Wien: Verlag E. Dorner, 2018.

W. Blum. Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *MU*, 25:42–50, 1979.

W. Blum and A. Kirsch. Anschauung und Strenge in der Analysis IV. *MU*, 25, 1979.

W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, and O. Köller. *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor, 2006.

J.S. Bruner. Der akt der entdeckung, 1981.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum, Heidelberg, 2006.

Zoltan P Dienes and Edmond W Golding. *Methodik der modernen Mathematik: Grundlagen für Lernen in Zyklen.* Herder, Freiburg, 1970.

Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

Hans Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

Stefan Götz. Ein versuch zur analysis-ausbildung von lehramtsstudierenden an der universität wien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, pages 364–367. WTM-Verlag, Münster, 2013.

G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V Ulm, and H.-G. Weigand. *Didaktik der Analysis.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis.* B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Math. Ann.*, 95(1):161–190, 1926. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01206605. URL `https://doi.org/10.1007/BF01206605`.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer, 2013.

Bertrand Russel. *Philosophie des Abendlandes*. Europa Verlag, Zürich, 1950.

H. Schichl and R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum, Heidelberg, 2018.

Fritz Schweiger. Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2,3), 1992.

Roland Steinbauer. Analysis in einer Variable für LAK, Februar 2013a.

Roland Steinbauer. Einführung in die Analysis, Februar 2013b.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).

Hans-Joachim Vollrath and Hans-Georg Weigand. *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum, Akad. Verlag, 2007.

R. vom Hofe. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1995.

Christof Weber. Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In *Mathematik verständlich unterrichten*. Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1996.

Erich Ch Wittmann, Gerhard N Müller, and Martina Röhr. *Das Zahlenbuch: Mathematik im... Schuljahr. 2: Arbeitsheft"mit Blitzrechnen"*. Klett, 2004.