Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25, 1. Termin, 11.2.2025
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (b) [false] Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs charakterisiert diesen fachmathematisch vollständig.
   (c) [false] Unter einer Grundvorstellung eines mathematischen Begriffs versteht man eine mathematische Definition dieses Begriffs.
   (d) [false] Primäre Grundvorstellungen sind immer individuell und daher normativ.
2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
   (a) [true] Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass f beschreibt, wie sich die Änderung einer Größe (x durchläuft A) auf eine zweite Größe auswirkt ($f(x)$ durchläuft B).
   (b) [true] Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch ihren Graphen also durch eine Teilmenge des Produkts $A \times B$ beschrieben werden kann.
   (c) [true] Im Rahmen der Objektvorstellung wird f als ein einziges Objekt gesehen, das den Zusammenhang zwischen Elementen in A und B als Ganzes beschreibt.
   (d) [false] Die Zuordnungsvorstellung bezieht sich darauf, dass sich die Änderung einer Größe (x durchläuft A) auf eine zweite Größe auswirkt ($f(x)$ durchläuft B).
3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei I ein Intervall. Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist
   (a) [true] eine Teilmenge von $I \times \mathbb{R}$.
   (b) [false] ein geordnetes Paar $(x, f(x))$.
   (c) [true] die Menge $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$.
   (d) [false] das Produkt aus Definitions- und Zielmenge.
4. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Die Definition baut auf der Zuordnungsvorstellung auf.

(b) [false] Die Definition nimmt wesentlich auf den Iterationsaspekt Bezug.

(c) [false] Die Definition bedient wesentlich die Kovariationsvorstellung.

(d) [false] Der Aufzählungsaspekt ist in der Definition gar nicht sichtbar.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Die Grenzwertdefinition der Analysis baut auf der Vorstellung vom aktual Unendlichen auf.

   (b) [false] Die Grenzwertdefinition der Analysis ist eine überwiegend dynamische Formulierung.

   (c) [true] Eine schlecht ausgeprägte Annäherungsvorstellung ist eine Hauptursache von Fehlvorstellungen.

   (d) [true] Die Annäherungsvorstellung ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

6. *(Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Der Differenzialquotient von f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten von f in x_0 für x gegen x_0.

   (b) [false] Der Differenzenquotient $[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ von f in x_0 ist genau die absolute Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).

   (c) [true] Konvergiert der Differenzenquotient von f in x_0 (für x gegen x_0) gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (d) [true] Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die (sogenannte) Schmiegegerade (an f in x_0).

2 Sätze & Resultate

7. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Das Intervallschachtelungsprinzip ist eine Exaktifizierung der anschaulichen Vorstellung der Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$.

   (b) [true] (Monotonieprinzip, 1) Eine nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist konvergent. Sie wird anschaulich gesprochen gegen ihr Supremum "gequetscht".

   (c) [false] (Monotonieprinzip, 2) Das Monotonieprinzip ist unabhängig von der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

   (d) [true] Im axiomatischen Zugang wird $\mathbb{R}$ als ordnungsvollständiger geordneter Körper definiert, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt. Der Satz von Dedekind stellt sicher, dass $\mathbb{R}$ dann eindeutig definiert ist und mit dem aus den (ZFC)-Axiomen konstruierten Körper mit obigen Eigenschaften übereinstimmt.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Die Konvergenz respektiert die $\leq$-Relation im folgenden Sinn: Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n \leq y_n$ für alle n, dann auch $x \leq y$.

   (b) [true] Eine konvergente Folge (x_n) hat genau einen Grenzwert.

   (c) [false] Ist (x_n) beschränkt, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) [true] Die Konvergenz respektiert Summen im folgenden Sinn: Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y, dann auch $(x_n + y_n)$ und zwar gegen $x + y$.

9. *(Folgen, Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sind korrekt?

   (a) [true] Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen sind beschränkt.

   (b) [false] Eine Folge mit genau einem Häufungswert konvergiert.

   (c) [false] Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe.

   (d) [true] Die Koeffizientenfolgen konvergenter Reihen sind Nullfolgen.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [false] Stetige Funkionen sind auch differenzierbar.

    (b) [false] Hat der Graph von f einen Knick, so ist f nicht stetig.

    (c) [true] Ist f differenzierbar, so hat der Graph von f keine Knicke.

    (d) [true] Ist f streng monoton (wachsend oder fallend), dann ist f auch injektiv.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x, dann ist f monoton wachsend.

    (b) [true] Hat f in $x_0 \in (-1, 1)$ keine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 auch keine Extremstelle.

    (c) [false] Hat f in $x_0 \in [-1, 1]$ ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

    (d) [true] f hat globale Extremstellen.

12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [true] Jedes stetige f hat eine Stammfunktion.

    (b) [false] Jedes Riemann-integrierbare f ist auch stetig.

    (c) [false] Je zwei Stammfunktionen von f stimmen überein.

    (d) [true] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, dann ist $F(x) := \int_a^x f(s)\,ds$ (mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Konvergente Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] $\dfrac{n^n}{n!} \to \infty$ für $n \to \infty$.

    (b) [true] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$.

    (c) [false] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \infty$.

    (d) [true] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

14. *(Vorzeichenmaschine mit Störung.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge

    $$x_n = (-1)^n \big(1 + \frac{1}{n}\big)$$

    sind korrekt?

    (a) [true] In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

    (b) [false] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.

    (c) [true] Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der fast alle Folgenglieder liegen.

    (d) [true] Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der alle Folgenglieder liegen.

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist beschränkt.

    (b) [true] Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat Maximum und Minimum.

    (c) [false] Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ ist unstetig in $x_0 = 0$.

    (d) [false] Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$) sind korrekt?

    (a) [true] $f(x) = x^5$ hat in $x = 0$ kein Extremum, obwohl dort die Tangente waagrecht ist.

    (b) [true] $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ gilt.

    (c) [false] Weil $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend ist, gilt $f'(0) > 0$.

    (d) [false] Weil $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ hat cos in $x_0 = 0$ ein Extremum.

17. *(Differenzierbarkeit.)* Es gilt, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ist und, dass f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ ist. Aber welche der folgenden Argumentationen sind schlüssig?

(a) [true] f ist differenzierbar in allen Punkten $x > 0$, weil

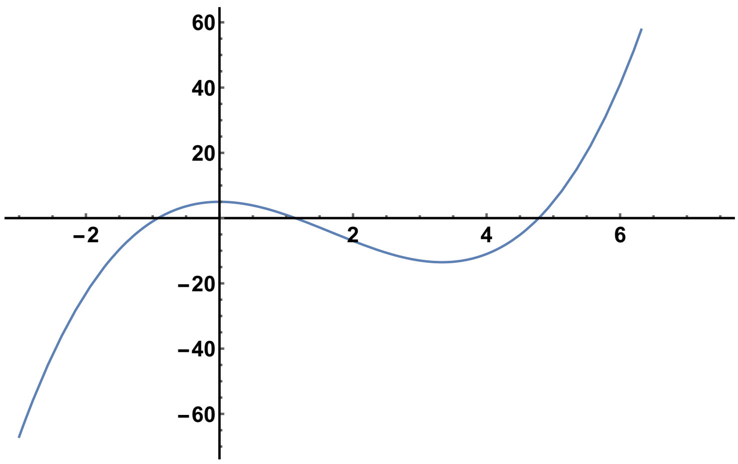
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (h \to 0).$$

(b) [false] f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, weil $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \to \infty$ $(x \searrow 0)$.

(c) [true] Die Aussage für $x > 0$ folgt aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen $(x^q)' = qx^{q-1}$ $(q \in \mathbb{Q})$.

(d) [true] Die Nicht-differenzierbarkeit bei $x_0 = 0$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der Differenzenquotient von f bei 0 für $x \searrow 0$ divergiert.

18. *(Graphische Kurvendiskussion)* Wir betrachten die reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau drei lokale Extrema.

(b) [true] f hat im Intervall $[-2, 6]$ eine Wendestelle.

(c) [false] f' ist im Intervall $[-2, 2]$ positiv.

(d) [true] f'' ist im Intervall $[-2, 1]$ negativ.

Teil 2: Offene Aufgaben

1) Differentialrechnung
   (a) Das ist eine direkte Folge aus der Definition der Differenzierbarkeit bzw. der Ableitung: Falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann gilt für h → 0 $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0)$ und nach Umformung ergibt sich für kleine h die behauptete ungefähre Gleicheit.
   (b) Setze f(x)= $\sqrt{x}$, x_0=25, h=2. Dann gilt $\sqrt{27}=\sqrt{25+2}\approx\sqrt{25}+2\frac{1}{2\sqrt{25}}=5+\frac{1}{5}=5.2$

2) Zum Folgenbegriff
   (a) Die angegebene Folge ist rekursiv definiert, da die Folgenglieder x_{n+1} mithilfe des Vorgängers x_n definiert sind.
   Mögliche Musterlösung:
   $x_1=1{,}2\cdot x_0-2$
   $x_2=1{,}2\cdot x_1-2=1{,}2\cdot(1{,}2\cdot x_0-2)-2$
   $x_2=1{,}44\cdot x_0-4{,}4$

   (b) Vorrangig wird bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung die Kovariationsvorstellung angesprochen, weil aus der rekursiven Darstellung gut erkennbar ist, wie sich die Werte von einem Folgenglied zum nächsten ändern. Durch die Umformung in eine Darstellung in Abhängigkeit von x_0 klingt auch leicht die Zuordnungsvorstellung an.

3) Schularbeit
   (a) Ad a. Die Frage nach der Definitionsmenge von f macht keinen Sinn, da die Angabe einer Funktion auch die Angabe eines Definitions- und eines Zielbereichs braucht. Polynomfunktionen haben per Definition den Definitionsbereich R, insofern wäre nur die Antwort $D_f=R$ korrekt, die wahrscheinlich nicht intendiert war.
   Mögliche Aufgabestellung: Gib alle x-Werte an, deren Funktionswert abgebildet ist.
   Ad b. Da der Grad der Polynomfunktion nicht angegeben ist, ist die Fragestellung nicht beantwortbar.
   Mögliche Aufgabestellung: Gib für das Intervall [-5;4] das Bild von f an.
   Ad c. Da der Grad der Polynomfunktion nicht angegeben ist, ist die Fragestellung nicht beantwortbar. Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hätte zum Beispiel keine globalen Extremstellen.
   Mögliche Aufgabestellung: Gib für das Intervall [-5;4] die globalen Extremstellen von f an.
   (b) Ad a. 1P Die gestellte Frage suggeriert, dass man sich eine Definitionsmenge überlegen kann, die der Abbildung nicht widerspricht. Insofern ist die Antwort zwar sicher kreativ, aber der Graph einer entsprechend definierten Funktion würde sich vom abgebildeten Graphen optisch nicht unterscheiden. Insofern muss man sie gelten lassen.
   Ad b. 1P Der Wertebereich von Polynomfunktionen ist R.

4) Zum Integralbegriff

(a) Flächeninhaltsvorstellung: Dabei könnte man die Kästchen zählen. Jedes volle Kästchen hat dabei den Wert 0,5.
Mittelwertvorstellung: Man sucht jenen Funktionswert, der mit der Intervalllänge 20 ein zur Fläche zwischen Funktionsgraph und der x-Achse möglichst flächengleiches Rechteck ergibt. Dieser Funktionswert liegt sicher zwischen 1,5 und 2,5 und ist mit 2 gut angenähert.

(b) Flächeninhaltsvorstellung, mögliche Übungsaufgabe:
Gegeben ist die lineare Funktion $f: R \to R; x \mapsto 2x$. Bestimme $\int_0^5 2x \, \mathrm{d}x$ auf zwei unterschiedliche Möglichkeiten.

Mittelwertgrundvorstellung, mögliche Übungsaufgabe:
Abgebildet ist eine Funktion 3. Grades. Lies aus der Abbildung den Wert von $\int_0^6 f(x) \, \mathrm{d}x$ ab.