Kapitel E

Differentialrechnung

Die Differentialrechnung stellt gemeinsam mit der Integralrechnung den zentralen Inhalt nicht nur der Schulanalysis, sondern auch der Analysis an sich dar. Aufbauend auf dem Herzstück der Analysis — dem Grenzwertbegriff, siehe Kapitel D — geht es nun darum das lokale Änderungsverhalten von Funktionen zu studieren und geeignet in den Griff zu bekommen. Dabei ist der Ableitungsbegriff *das* entscheidende Werkzeug.

Wir beginnen in Abschnitt E.§1 mit schulmathematischen Zugängen zum Ableitungsbegriff und nehmen danach eine genaue fachliche Begriffsbestimmung vor (Abschnitt E.§2). Nach einem kurzen historisch-philosophischen Intermezzo (Abschnitt E.§3) besprechen wir in einer fachdidaktischen Diskussion Aspekte und Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs (Abschnitt E.§4). Schließlich besprechen wir die in der Schulmathematik prominent vertretenen Themen Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben.

§1 Zugänge zum Ableitungsbegriff in der Schule

Betrachtet man die möglichen Zugänge zum Ableitungsbegriff in der Schule, dann lassen sich folgende zwei Realisierungen ausmachen:

- Zugang über das Tangentenproblem
- Zugang über die Momentangeschwindigkeit

Der Zugang über das Tangentenproblem hat im schulischen Mathematikunterricht lange Tradition, birgt aber bei näherem Hinsehen einige Fallen in sich und enthält zudem einige Schwierigkeiten, die mit methodischen Geschick zwar umschifft, aber nicht aufgehoben werden können. Der Zugang über die Momentangeschwindigkeit hingegen weist solche Hürden und Fallen nicht auf und kann in Kontexten, die für Schülerinnen und Schüler relevant sind, entfaltet werden. Darüberhinaus kann der Zugang über die Momentangeschwindigkeit Wesentliches zur Grunderfahrung 1 (Erscheinungen der Welt um uns [...] in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen) beitragen.

§1.1 Zugang über das Tangentenproblem

Der weit verbreitet Zugang zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem folgt meistens dem Dreischritt:

1. Schritt: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente
2. Schritt: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten

3. Schritt: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert

1.1.1. Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente. Dieser Zugang baut auf zwei mathematischen Begriffen auf, mit denen die Schülerinnen und Schüler aus den vorhergehenden Schuljahren bestens vertraut sind. Es sind dies:

- Die Steigung von Geraden
- Der (geometrische) Tangentenbegriff

Bei einem solchen Einstieg wird von den Schülerinnen und Schülern die Steigung einer Kurve untersucht. Dazu wird die Steigung einer Kurve in einem Punkt als Steigung der Tangente in diesem Punkt definiert. Zumeist wird hierbei der vom Kreis bekannte geometrische Tangentenbegriff benützt. Zahlreiche dynamische Lernobjekte visualisieren diesen Zugang und ermöglichen ein interaktives Erkunden (siehe E.2 und E.3).

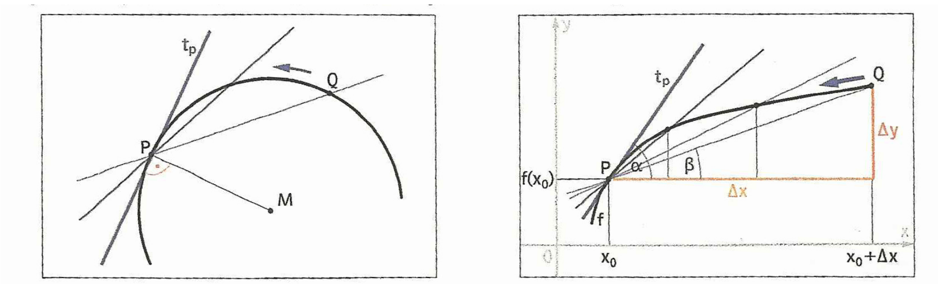


Abb. E.1: Quelle: Götz, Reichel – Mathematik 7, 2011, S. 46

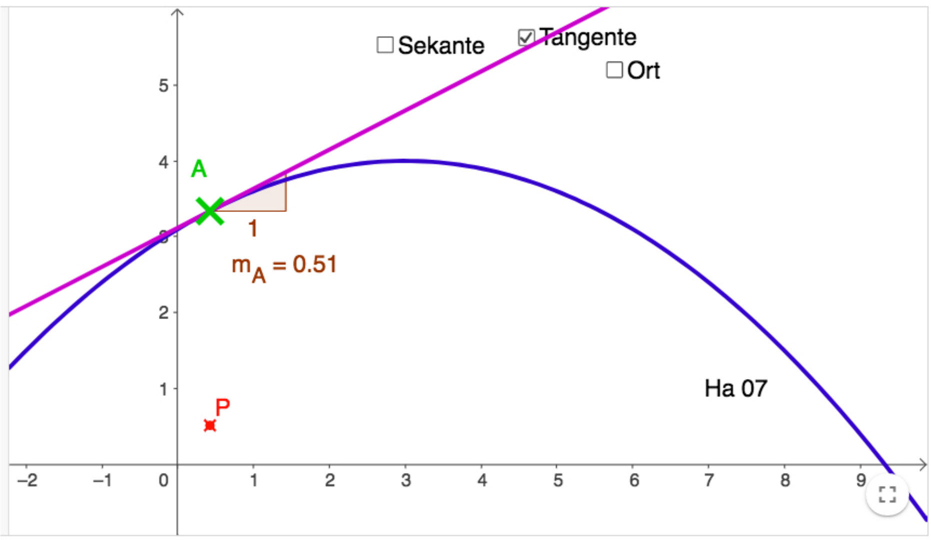


Abb. E.2: Quelle: https://www.geogebra.org/m/Yj8jvfNy

Bereits dieser erste Schritt enthält einige Probleme. Zum einen wird hier der nicht triviale Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff (Tangente als lokale Schmiegegerade) zumeist still schweigend vollzogen. Zum anderen kann gerade dieser

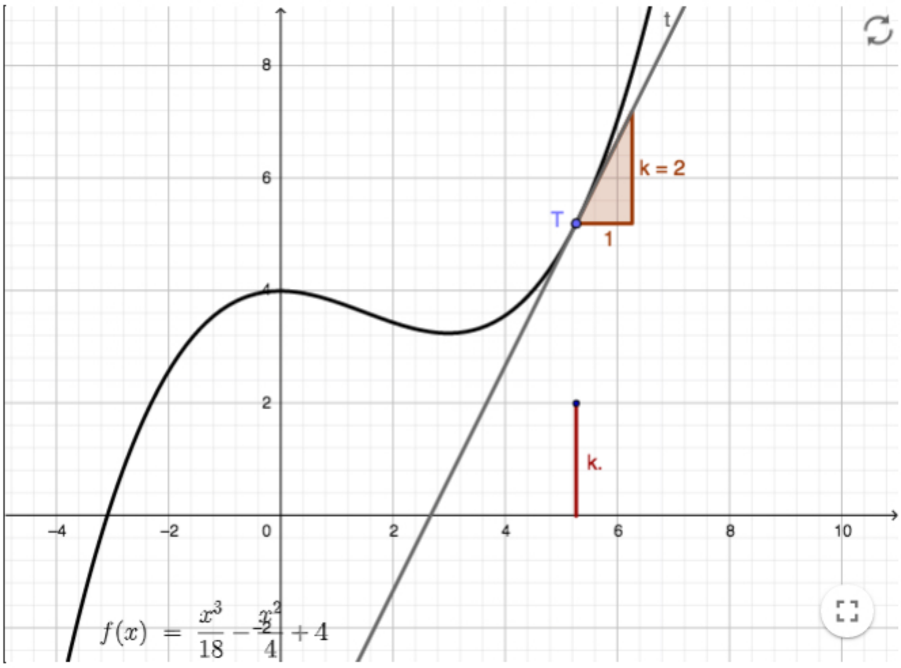


Abb. E.3: Quelle: https://www.geogebra.org/m/VDHNGVK7

nicht thematisierte Paradigmenwechsel zu Verwirrung auf Seiten der Schülerinnen und Schüler führen. Wird nämlich der geometrische Tangentenbegriff genutzt, dann wird eine Tangente als Stützgerade aufgefasst. Eine Tangente ist dann jene Gerade, die mit einem Kreis (mit einer Kurve) genau einen Punkt gemeinsam hat und den Kreis (diese Kurve) nicht durchdringt. Dieses Verständnis kann nur in ausgesuchten Fällen – etwa $f(x) = x^2$ (siehe Abb. E.4) – angewandt werden, in vielen weiteren Fällen (siehe Abb. E.5) führt der geometrische Tangentenbegriff zu Irritationen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler.

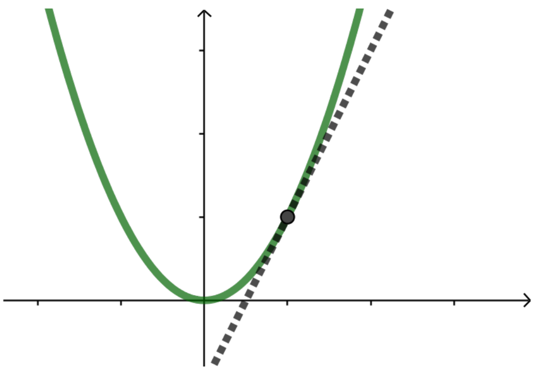


Abb. E.4: Tangente als Stützgerade

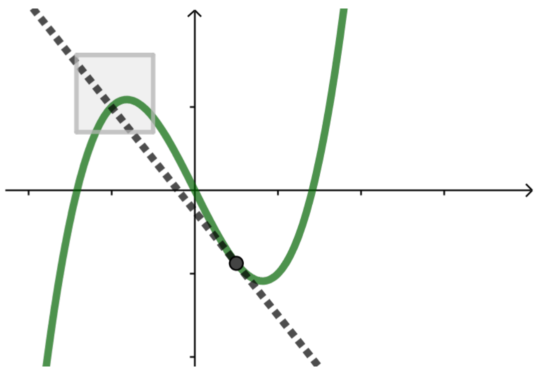


Abb. E.5: Tangente als Schmiegegerade

Es müsste im Unterricht also hier die Tangente als Schmiegegerade aufgefasst werden. Das hieße auch, die Tangente als jene Gerade aufzufassen, die sich der Kurve lokal um einen

Berührpunkt anschmiegt.

1.1.2. Die Tangente als Grenzlage von Sekanten. Im zweiten Schritt dieses Zugangs zum Ableitungsbegriffs wird eine neue Idee zur Berechnung der Tangentensteigung eingeführt. Die Tangente in einem Punkt wird als Grenzlage benachbarter Sekanten aufgefasst. Auch dafür gibt es eine Fülle von interaktiven Lernobjekten, die diese Idee visualisieren (siehe E.6 und E.7).

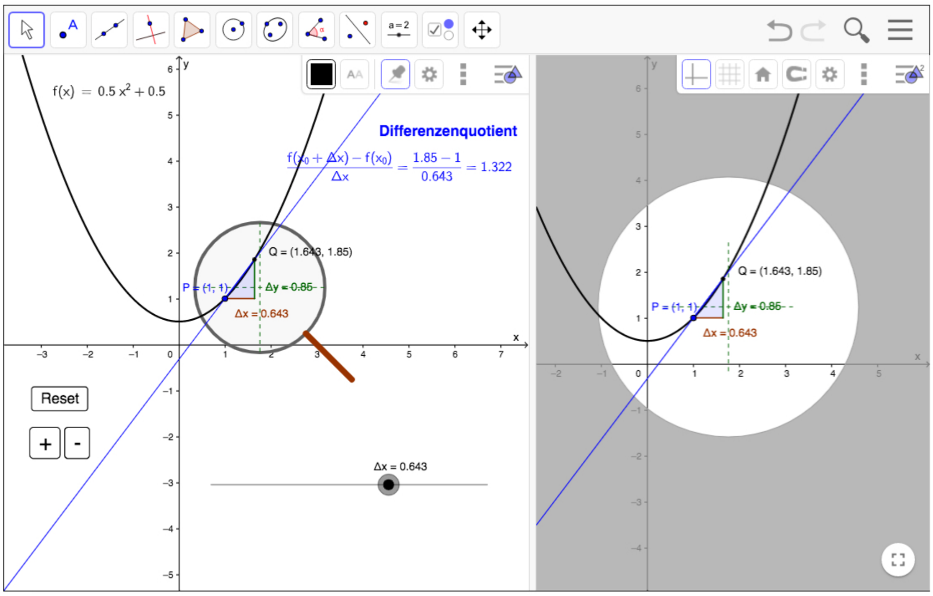


Abb. E.6: Tangente als Grenzlage von Sekanten - interaktiv; Quelle: https://www.geogebra.org/m/iierR9hp

Dieser zweite Schritt enthält ebenfalls zwei Probleme. Es wird nicht an die Idee aus dem ersten Schritt angeknüpft. Denn dies würde bedeuten, zu untersuchen, ob die Schmiegegerade die bestapproximierende Gerade ist. Stattdessen wird eine neue Idee ins Spiel gebracht. Es ist dies die Idee, eine Tangente durch benachbarte Sekanten anzunähern. Diese Idee führt nachweislich zu Verständnisschwierigkeiten, wenn Schülerinnen und Schüler nicht die gesamten Sekanten, sondern nur die Sehnen im Fokus ihrer Betrachtungen haben. Dann nämlich ziehen sich die Sehnen schließlich auf einen Punkt (Punkt P in Abb. E.8) – und nicht auf eine Gerade – zusammen.

1.1.3. Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert. Im dritten Schritt dieses Zugangs wird häufig die Parabel $f(x) = x^2$ betrachtet und die Stelle $x_0 = 1$. Die Annäherung der Tangente im Punkt $(1|1)$ wird mittels der benachbarten Sekanten algebraisch modelliert und der Grenzwert berechnet.
D.h. also für die Sekantensteigung wird der Differenzenquotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ betrachtet.
Für das Beispiel der Parabel $f(x) = x^2$ mit $x_0 = 1$ ergibt das $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, dabei strebt im Zähler und Nenner x gegen x_0, somit streben Zähler und Nenner gegen 0, obwohl der Quotient einen wohldefinierten Grenzwert hat (hier die Zahl 2). Hier tritt die oben schon angesprochene

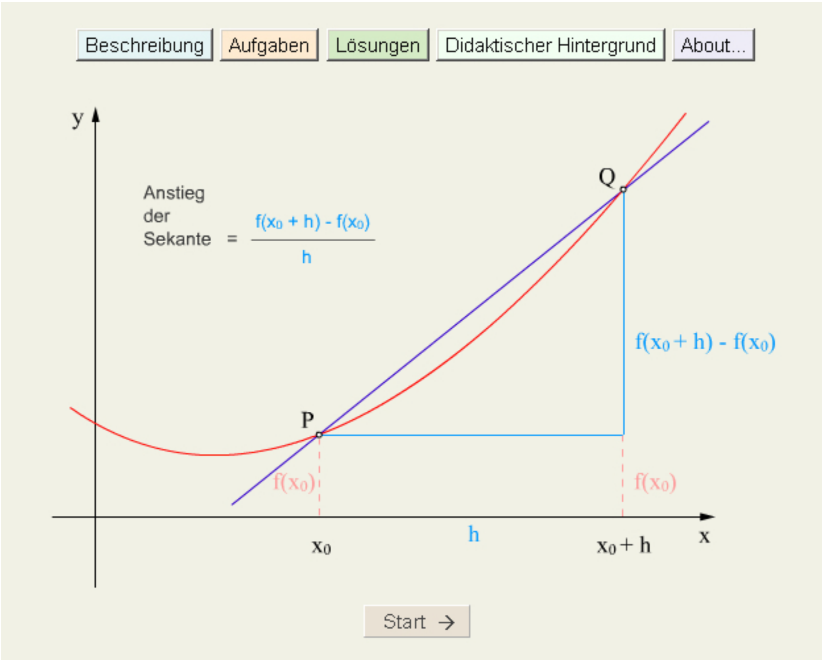


Abb. E.7: Tangente als Grenzlage von Sekanten - interaktiv; Quelle: https://mathe-online.at/galerie/diff1/ablgrenz/index.html

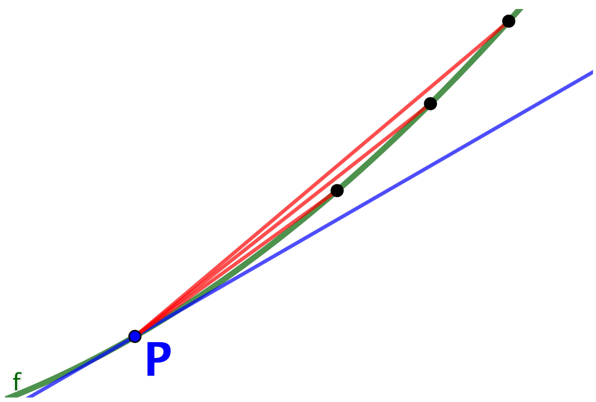


Abb. E.8: Fehlvorstellung: Sekante - Sehne

Fehldeutung – die Sehnen ziehen sich auf einen Punkt zusammen – erneut als Schwierigkeit auf. Als Voraussetzung wird dann $x \neq x_0$ angenommen, um dann schließlich scheinbar doch $x = x_0$ zu setzen. Dieses Vorgehen bedient sich des Grenzwertbegriffs und insbesondere der Annäherungsvorstellung. D.h. hier also die Sekantensteigung als idealisiertes Endprodukt eines Prozesses aufgefasst wird. Zu guter Letzt sei noch darauf verwiesen, dass der Term für die Sekantensteigung und die benötigten Termumformungen die ganze Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler fordern, wobei der inhaltliche und begriffliche Kontext verschwindet.

Zusammengefasst ergeben sich mit diesem Zugang folgende Schwierigkeiten:

- Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
- Berechnung der Tangentensteigung mit der Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen
- Verfahren zur Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert – erkenntnistheoretisch schwierig, algebraisches hinderlich

§1.2 Zugang über Momentangeschwindigkeit

Eine Alternative, sich dem Ableitungsbegriff in der Schule zu nähern, bietet der Zugang über die Momentangeschwindigkeit. Anstelle des lokalen Anstiegs wird also die Frage nach der lokalen Änderungsrate gestellt und in der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler eingebettet. Bei einem solchen Zugang werden auch die drei Winter'schen Grunderfahrungen (Realitätsbezug, Durchdringen eines zentralen theoretischen Begriff, heuristisches Arbeiten) angesprochen.

Ausgangspunkt eines solchen Zugangs kann ein (fiktiver) Dialog – wie der folgende – sein.

Andrea: Am Wochenende war ich zu Besuch in Salzburg. Für die Strecke von Wien nach Salzburg also etwa 300 km habe ich genau 3 Stunden gebraucht.

Peter: Na, dann warst du aber mit 100 km/h nicht besonders schnell.

Andrea: Wie man's nimmt, manchmal bin ich sogar über die erlaubten 140 gefahren.

Den Schülerinnen und Schülern wird in der 11. Schulstufe schon vertraut sein, dass beim Sprechen über Geschwindigkeiten, der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet wird. Solche Weg-Zeit-Funktionen haben die Schülerinnen und Schüler sicher auch schon mehrmals bearbeitet. Damit die oben angesprochene Situation konkret gefasst werden kann, können wir den Anfahrtsvorgang betrachten. Es ist durchaus realistisch, diese Zusammenhang mit $s(t) = t^2$ zu beschreiben.

Der Graph (E.9) zeigt, wie sich der durchfahrene (zurückgelegte) Weg im Laufe der Zeit entwickelt. Der zurückgelegte Weg $s(t)$ wächst mit der Zeit t. Mit fortschreitender Zeit wächst der zurückgelegte Weg immer rascher, der Wagen wird also schneller.

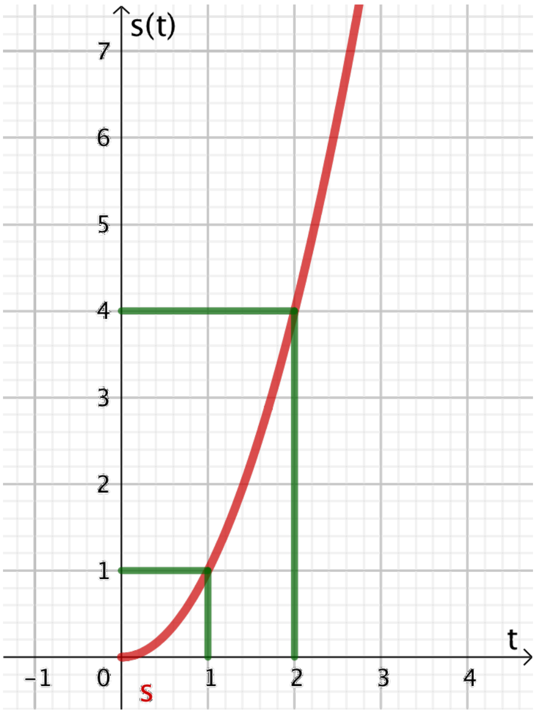


Abb. E.9: Zurückgelegter Weg

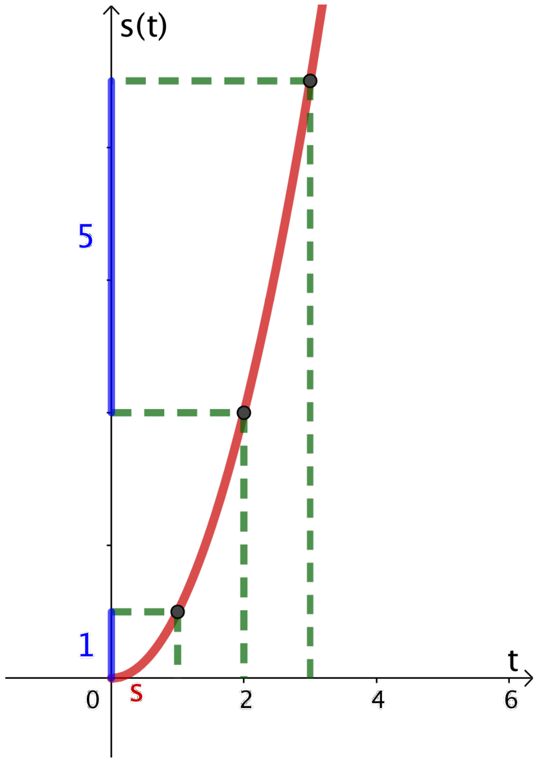


Abb. E.10: Zurückgelegter Weg

Wird dieser Sachverhalt genauer untersucht, dann können beispielsweise gleichlange Zeitabschnitte betrachtet werden (vgl. Grundvorstellung von Funktionen – Kovariation). Sowohl am Graphen als auch einzelne Berechnungen zeigt sich, dass die pro Sekunde zurückgelegten Wegstrecken größer werden (siehe E.10).

- In der ersten Sekunde: $s(1)–s(0) = 1^2–0^2 = 1$ Meter
- In der zweiten Sekunde: $s(2)–s(1) = 2^2–1^2 = 3$ Meter
- In der dritten Sekunde: $s(3)–s(2) = 3^2–2^2 = 5$ Meter

Für beliebige Zeitabschnitte t_0 bis t_1 erhält man die zurückgelegten Wegstrecken mit $s(t_1)–s(t_0)$. Jetzt können als nicht mehr nur Zeitabschnitte der Länge 1 Sekunde betrachtet werden, sondern auch andere.

z.B.: $t_0 = 1$; $t_1 = 3$: $s(t_1)–s(t_0) = s(3)–s(1) = 3^2–1^2 = 8$ Meter

D.h. Im Zeitintervall $[1; 3]$ legt das Auto 8 Meter zurück. In diesen 2 Sekunden legt das Auto also im Mittel 4 Meter zurück. D.h. also auch, die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 3]$ beträgt 4 Meter pro Sekunde.

Auch diese konkrete Überlegung kann verallgemeinert werden. Für beliebige Zeitintervall $[t_0; t_1]$ wird die mittlere Geschwindigkeit mit $\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ berechnet.

Damit haben wir allerdings noch keine Antwort auf die Frage, wie schnell das Auto zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 ist.

Die entscheidende Idee ist hier, die Momentangeschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeiten anzunähern. Sehen wir uns eine solche Näherung für $t_0 = 1$ an.

Zeitintervall $[t_0, t]$	mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t]$
$[1;2]$	$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$
$[1;1,1]$	$\frac{1,1^2-1^2}{2-1}=2,1$
$[1;1,01]$	$\frac{1,01^2-1^2}{2-1}=2,01$
$[1;1,001]$	$\frac{1,001^2-1^2}{2-1}=2,001$

Aus der Tabelle können wir entnehmen: Je kleiner das Intervall $[t_0;t]$ wird, je näher also t an t_0 heranrückt, umso näher scheint die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 2 zu kommen; sie kommt ihm also beliebig nahe.

Um uns zu vergewissern, nähern wir uns auch von der anderen Seite $(t < t_0)$.

Zeitintervall $[t, t_0]$	mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t_0)-s(t)}{t_0-t}$ im Zeitintervall $[t, t_0]$
$[0;1]$	1
$[0,9;1]$	$1,9$
$[0,99;1]$	$1,99$
$[0,999;1]$	$1,999$

Auch hier sehen wir: Je kleiner das Intervall $[t;t_0]$ wird, je näher also t an t_0 heranrückt, umso näher scheint die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 2 zu kommen; sie kommt ihm also beliebig nahe. Es liegt also nahe, 2m/s als die gesuchte Momentangeschwindigkeit zu betrachten.

Dass jede andere Annäherung an den Zeitpunkt $t_0 = 1$ zu dem selben Ergebnis führt, zeigt folgende Überlegung:

Ist t ein benachbarter Zeitpunkt von $t_0 = 1$, so hat die mittlere Geschwindigkeit im Intervall

$[1;t]$ den Wert

$$\begin{aligned}\frac{s(t)-s(1}{t-1} &= \frac{t^2-1^2}{t-1} \quad \text{mit } (t \neq 1)\\ &= \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} = t+1 = 1+t. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Man sieht also: $1+t$ kommt dem Wert 2 beliebig nahe, wenn nur t genügend nahe bei 1 liegt. Somit haben wir die Momentangeschwindigkeit für $t_0 = 1$ erfolgreich berechnet.

Zusammengefasst geht dieser Zugang also über die folgende Schritte:

- Kontext – Geschwindigkeit
- Zurückgelegter Weg in verschiedenen Zeitabschnitten (grafisch und rechnerisch)
- Zurückgelegter Weg in beliebigen Zeitabschnitten
- Mittlere Geschwindigkeit in konkreten und beliebigen Zeitabschnitten
- Frage nach der Momentangeschwindigkeit
    - Annäherung über mittlere Geschwindigkeit von links und rechts
    - Allgemeine Betrachtung

Im Gegensatz zum vorhergehenden Zugang genügt eine Idee – nämlich die der Geschwindigkeit. Die Annäherung der Momentangeschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen ergibt sich für die Schülerinnen und Schüler aus dem Kontext. Bei der letzten Frage, ob der Momentangeschwindigkeit überhaupt ein Grenzwert zugeschrieben werden kann, tritt hier nicht so prominent in der Vordergrund, da in diesem Sachkontext niemand daran zweifelt, dass gefundene Wert etwas anderes als die Momentangeschwindigkeit beschreibt.

$\boxed{42}$ **Pegelstand.** Starke Regenfälle haben Auswirkungen auf den Pegelstand eines Flusses. Die Funktion P mit $P(t) = \frac{1}{108}(t^3 - 18t^2 + 81t + 108)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe des Pegelstandes. Dabei wir die Höhe des Pegelstandes in m und die Zeit t in Stunden gemessen.

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
(b) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes Zeitabschnitten $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$.
(c) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes in den Abschnitten $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$.
(d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(e) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(f) Berechnen Sie näherungsweise die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 3$ und $t = 5$. Nehmen Sie eine Annäherung von links und rechts vor.

$\boxed{43}$ **Differenzenquotient kontextbezogen.** Lösen Sie die Aufgabe und begründen Sie Ihre Wahl!

Im Rahmen eines Abfahrttrainings für den Teamwettbewerb wird besonderes Augenmerk auf einen Rennabschnitt gelegt, der rund 30 m lang ist. Am Beginn dieses Abschnitts, am Ende und an drei Zwischenpositionen werden Lichtschranken positioniert, um die jeweiligen Zwischenzeiten stoppen zu können. Der am Beginn des Rennabschnitts positionierte Lichtschranken wird mit L_0 bezeichnet. Es folgen der Reihe nach L_1, L_2, L_3 und L_4, wobei sich L_4 am Ende des Rennabschnitts befindet, also $\overline{L_0L_4} = 30\,\text{m}$ (gemessen längs der Rennstrecke). $s(i)$, $0 \leq i \leq 4$, gibt die jeweilige Entfernung des Lichtschrankens mit der Nummer i vom Startpunkt der Rennstrecke an. $t(i)$, $0 \leq i \leq 4$, gibt die jeweilige Zwischenzeit an, die beim Durchfahren des Lichtschrankens mit der Nummer i ausgelöst wird. Aufgrund der Beschaffenheit des Rennabschnitts kann davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit während der Fahrt in diesem Abschnitt streng monoton abnimmt.

Aufgabenstellung:
Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

(1)	$\frac{s(2)-s(0)}{t(2)-t(0)}$ liefert einen besseren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ als $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}$.	☐
(2)	Das arithmetische Mittel der vier Quotienten $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}, \dots, \frac{s(4)-s(0)}{t(4)-t(0)}$ liefert angesichts der vorliegenden Daten den bestmöglichen Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$.	☐
(3)	Als bestmöglicher Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ist der Quotient $\frac{s(4)-s(3)}{t(4)-t(3)}$ anzusehen.	☐
(4)	Um einen genaueren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ ermitteln zu können, empfiehlt sich die Platzierung einer weiteren Lichtschranken zwischen L_0 und L_1.	☐
(5)	Je näher L_3 bei L_4 liegt, desto genauer kann die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ermittelt werden.	☐

Abb. E.11: Quelle: Mayer, Süss-Stepancik, Huber - Dimensionen 7 Schularbeitentrainer

§2 Fachliche Begriffsbestimmung[1]

In diesem Abschnitt diskutieren wir die fachlichen Grundlagen der Differentialrechnung. Sie stellt *den* Kern der gesamten Analysis dar. Ihr Grundthema ist es das lokale Verhalten von Funktionen in effektiver Weise zu erfassen und zu beschreiben.

§2.1 Ein fachmathematischer Zugang zur Differenzierbarkeit

Entsprechend zum oben ausgegebenen „Motto“ des Ableitungsbegriffs als *dem* Werkzeug zur Beschreibung des lokalen Änderungsverhalten von Funktionen nähern wir uns dem Begriff aus diesem Blickwinkel an. Wie schon in den Abschnitten D.§1.2 und D.§2.1 beim Folgen- bzw. dem Grenzwertbegriff ergeben sich die entsprechenden Begriffsbildungen in natürlicher Weise. Außerdem ermöglicht uns dieser Zugang im nächsten Unterabschnitt einen ebenso natürlichen Blick auf den fachlich bestimmenden Aspekt der Differenzierbarkeit: den der linearen Bestapproximation.

2.1.1. Motivation: „Änderungsmodi“ von Funktionen. Im Verlauf Ihrer fachlichen Analysisausbildung haben Sie sicherlich bemerkt, dass es bei der Untersuchnung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die *Veränderung der Funktionswerte* bei Veränderung der Argumente. Dieser fachliche Aspekt ist natürlich eng mit der Kovariationsvorstellung des Funktionsbegriffs, siehe 2.2.2 und 4.1.2 verbunden.
Zwei dieser „Änderungsmodi“ sind im kanonischen Aufbau der Analysis dem Differenzierbarkeitsbegriff vorgelagert: die Monotonie und die Stetigkeit. Erinnern wir uns hier kurz an die Stetigkeit

Mathematische Faktenbox 15: Stetigkeit

2.1.2. Definition (stetige Funktion). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (definiert auf einem Intervall I) heißt *stetig* im Punkte $x_0 \in I$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{E.2}$$

Ist die Funktion f in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig, dann heißt sie (global) stetig auf I.

Diese Definition besagt in stark komprimierter Symbolik das folgende: Gegeben eine beliebig (klein) vorgegebene „Toleranzgrenze“ um den Funktionswert $f(x_0)$ in Form einer ε-Umgebung für beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es immer ein „Sicherheitsintervall“ gegeben in Form einer δ-Umgebung um die entsprechende Argumentstelle x_0, sodass für alle Argumente $x \in I$, die in dieser Umgebung liegen, die Funktionswerte in der ε-Umgebung um $f(x_0)$ liegen, siehe Abbildung ♣ `Grafik` ♣

Etwas verkürzter kann man sagen, dass bei einer in x_0 stetigen Funktion ein „kleines Wackeln“ am Argumente in der Nähe von x_0 nur zu einem „kleinen Wackeln“ der Funktionswerte um $f(x_0)$ zu Folge hat.

[1] In diesem Paragraphen fehlen in dieser Version des Skriptums noch einige Grafiken, die aber alle in der Vorlesung besprochen wurden. Die entsprechenden Stellen sind mit ♣ `Grafik` ♣ gekennzeichnet.

2.1.3. Eine Approximationsidee: die Schmiegegerade. Der zuletzt beschriebene Aspekt kann für unsere Zwecke (Motivation der Differenzierbarkeit) auch noch stärker verkürzt werden zu: Nahe der Stelle x_0 verhält sich eine dort stetige Funktion annähernd wie eine konstante Funktion, nämlich $x \mapsto f(x_0)$, siehe Abbildung ♣ `Grafik` ♣.
Nun können wir uns dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \to R$ auf ähnliche Weise nähern. Wir werden wollen die oben beschriebene Näherung an eine stetige Funktion in Form einer konstanten Funktion, also graphisch durch eine waagrechte Gerade verfeinern. Das ist deswegen nötig, weil die eben beschriebene Näherung nur sehr grob ist und nicht nur qualitativ etwas über das Änderungsverhalten der Funktion nahe x_0 sag. Wir wollen nun auch quantitativ etwas darüber Aussagen und beginnen mit der Idee, dass

> Eine Funktion f in x_0 differenzierbar genannt werden soll, falls sie sich dort „gut“ durch eine Gerade annähern lässt,

die nicht notwendigerweise waagrecht ist.
Um diese Idee zu formalisieren beginnen wir damit, dass wir allgemein für die noch zu findende Gerade g ansetzen:

$$g(x) = kx + d. \tag{E.3}$$

Klarerweise wollen wir, dass g durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ geht, d.h. dass

$$f(x_0) = g(x_0) = kx_0 + d \tag{E.4}$$

gilt. Die entscheidende Idee ist es nun, Punkte x nahe x_0 zu betrachten, also Punkte $x_0 + h$ für „kleines“ h. Für solche Punkte ergibt sich

$$g(x) = g(x_0 + h) = k(x_0 + h) + d = k_x 0 + d + kh = f(x_0) + kh, \tag{E.5}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Gleichung (E.4) verwendet haben. Im Sinne unserer obigen Approxiamtionsidee bedeutet das für x nahe x_0 also „kleine“ h, dass

$$f(x) = f(x_0 + h) \approx g(x_0 + h) = f(x_0) + kh \tag{E.6}$$

gelten soll.
Um diese Idee noch präsziser zu fassen, können wir (E.7) verwenden, um den ja noch unbekannten Anstieg der approximierenden geraden zu bestimmen, nämlich

$$k \;\approx\; \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \;=\; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{E.7}$$

Auf diese Weise haben wir einen „alten Bekannten“ aus der Schulmathematik auf ganz natürliche Weise (zurück)gewonnen, den *Differenzenquotienten.* Seine geometrische Bedeutung ist, dass er die Steigung der Geraden zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0)$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ bezeichnet und so den Anstieg der Sekante durch diese beide Punkte des Funktionsgraphen von f, siehe Abbildung ♣ `Grafik` ♣.

Zunächst präzisieren wir und vergeben einen offiziellen Namen:

Mathematische Faktenbox 16: Differenzenquotient

2.1.4. Definition (Differenzenquotient). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei x_0 ein Punkt im Intervall I. Für $x \in I$, $x \neq x_0$ heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{E.8}$$

Differenzenquotient von f bei x_0.

Der weitere Weg der Präzisierung unserer Approximationsidee ist nun vorgezeichnet. Wir müssen uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten (E.8) befassen, wobei wir x gegen x_0 gehen lassen. Das hat auch den folgenden Vorteil: Der Differenzenquotient hängt von den *zwei Variablen* x_0 und x ab und im Grenzwert $x \to x_0$ können wir eine davon (nämlich x) loswerden.

Um das effizient tun zu können, wiederholen wir den Grenzwertbegriff für Funktionen. Eine Möglichkeit ist es diesen Begriff möglichst nahe am bzw. analog zum Grenzwertbegriff für Folgen zu definieren, für Alternativen über Folgen siehe etwa (Forster, 2016, §10).

Mathematische Faktenbox 17: Grenzwert von Funktionen

2.1.5. Definiton (Funktionsgrenzwert). Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert* an der Stelle x_0 gegen ein $c \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon. \tag{E.9}$$

In diesem Fall heißt c *Grenzwert* oder *Limes* der Funktion f an der Stelle x_0 und wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to x_0$.

Diese Formulierung ist weitgehend analog zur Grenzwertdefinition für Folgen. Sie ist formal auch ganz nahe an der Stetigkeitsdefinition, was natürlich kein Zufall ist; daher müssen wir ganz dringend einige Bemerkungen machen.

2.1.6. Bemerkungen, Beispiele & Erweiterungen.

(1) Aus den respektiven Definitionen sieht man ganz leicht, dass

$$f \text{ genau dann stetig in } x_0 \text{ ist, falls } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ gilt,}$$

also der Limes von f an der Stelle x_0 mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an dieser Stelle übereinstimmt.

(2) Beachten Sie, dass wir *nicht* vorausgesetzt haben, dass $x_0 \in D$ liegen muss. Tatsächlich ist der Begriff auch sinnvoll, wenn x_0 ein sogenannter *Berührpunkt* von D ist, d.h. falls es in jeder (noch so kleinen) Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$ einen Punkt aus D gibt. Ein Standardbeispiel wäre etwa ein Randpunkt eines offenen Intervalls (z.B. ist 1 ist Berührpunkt von $[0, 1)$ obwohl $1 \notin [0, 1)$) Ein etwas interessantere Berührpunkt begegenet uns in unserem ersten Beispiel.

Mathematische Faktenbox 17 – Fortsetzung

(3) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \tag{E.10}$$

Dann gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, denn für $x \in D$ (also $x \neq 1$!) gilt $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ und $x + 1 \to 2$ für $x \to 1$.

(4) Um etwas interessantere Beispiele betrachten zu können, etwa „echte“ Polstellen von rationalen Funktionen müssen wir den Begriff etwas erweitern und sagen, die Funktion f divergiert an einer Stelle x_0 (bestimmt) gegen Unendlich, falls $f(x)$ bei Annäherung an x_0 beliebig groß wird, d.h. formal falls

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > C \tag{E.11}$$

gilt. Wir schreiben dann $\lim x \to x_0 f(x) = \infty$.
Analog definiert man die (bestimmte) Divergenz gegen minus Unendlich. Mit diesem Begriffsapparat ausgestattet, kann man nun folgendes Beispiel angehen:

(5) Wie betrachten $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \tag{E.12}$$

(6) Um auch Beispiele anzugehen, wo am Pol ein Vorzeichenwechsel stattfindent, definieren wir einseitige Grenzwerte, bei Annäherung an x_0 von oben ($x \in D$, $x > x_0$) und unten ($x \in D$, $x < x_0$). Damit erhält man etwa $\lim_{x\searrow 0} 1/x = \infty$ und $\lim_{x\nearrow 0} 1/x = -\infty$.

(7) Schließlich definiert man auch Grenzwerte, wenn x beliebig groß wird. Da wir diesen Begriff im gegenwärtigen Kontext der Diffenentialrechnung nicht benötigen werden, verweise wir hier lediglich auf die Analysis-Literatur etwa (Forster, 2016, §10).

2.1.7. Technisches zur Formulieren des Grenzwerts des Diferenzenquotienten. Wir verfolgen nach wie vor unsere Approximationsidee 2.1.3 und wollen diese nun exaktifizieren. Dazu benötigen wir (zum Glück) nur den einfachsten der eben besprochenen Grenzwertbegriffe für Funktionen, nämlich den Fall, dass der Punkt x_0 des Interesses ein Punkt in einem Intervall I ist und der Grenzwert endlich ist.

Eine Feinheit ist dabei allerdings, dass der Diffenzenquotient in x_0 laut Definition 2.1.4 für $x = x_0$ gar nicht definiert ist. Daher müssen wir in (E.9) das „$\forall x \ \in I$“ zu „$\forall x \ \in I,\ x \neq x_0$“ abändern. Dafür verwendet man das Symbol $\lim_{x_0 \neq x \to x_0}$. Oft wird diese Feinheit auch nicht in der Notation widergespiegelt und einfach $\lim_{x\to x_0}$ geschrieben — im stillschweigenden Einverständnis, dass $x = x_0$ ausgeschlossen ist. Jetzt sind wir endlich so weit, das Endprodukt unserer Approximationsidee aus 2.1.3 formulieren zu können.

Mathematische Faktenbox 18: Differenzierbarkeit und Ableitung

2.1.8. Definition (diffenzierbare Funktion). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{E.13}$$

existiert und endlich ist.
Diesen Grenzwert nennen wir die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle (bzw. im Punkt) x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffenzierbar, dann nennen wir f (global) diffenzierbar auf I. In diesem Fall nennen wir die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ (erste) *Ableitungsfunktion* von f.

2.1.9. Nachbetrachtung und Terminologie (Differentialquotient).

(1) Falls der Limes in (E.13) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie oben antizipiert, dass die Ableitung im Punkt x_0 gleich dem Limes des Differenzenquotienten ist. Oft wird der Ausdruck

$$\lim_{x = \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{E.14}$$

als *Differentialquotient* von f bei x_0 bezeichnet — und zwar unabhängig davon, ob der Grenzwert existiert bzw. endlich ist und daher zur Definition der Ableitung „taugt". Mit dieser Terminologie kann man formulieren, dass der Differentialquotient der Grenzwert des Differenzentquotienten ist und, falls er existiert und endlich ist, gleich der Ableitung der Funktion an der betreffenden Stelle ist bzw. diese definiert.

(2) Geometrisch ergibt sich die Ableitung also in diesem präzisen Sinn als der Grenzwert der Sekantensteigungen. Somit ist die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit dem Anstieg $f'(x_0)$ jene gesuchte Gerade, die in der Nähe von $(x_0, f(x_0))$ die Funktion f „besonders gut" approximiert. Sie wird auch of als *Schmiegegerade* bezeichnet. Diese Begrifflichkeit werden wir später noch präzise machen. Hier bemerken wir nur, dass sie mit dem Tangentenproblem in Zusammenhang gebracht werden kann, was aber vor allem didaktisch etwas heikel ist, vgl. Abschnitt E.§1.

Höchste Zeit, ein paar Beispiele und Nicht-Beispiele zu besprechen.

Mathematische Faktenbox 19: Differenzierbare Funktionen

2.1.10. Beispiel ((nicht)-differenzierbare Funktionen)).

(1) Einfache differenzierbare Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind natürlich konstante Funktionen $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ mit verschwindender Ableitung, denn für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0+h)}{h} = \lim \frac{c-c}{h} = 0 = f'(x_0)$, aber dafür hätten wir den Begriff gar nicht gebraucht!

(2) Die „nächst-schwierigere" Funktion ist $f(x) = x$. Diese ist natürlich ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und zwar mit Ableitung $f'(x) = 1$, denn für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $h \neq 0$ gilt $\frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$, und wir mussten nicht einmal einen Grenzwert

Mathematische Faktenbox 19 – Fortsetzung

berechnen!

(3) Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ diffenzierbar (mit dem analogen Argument wie in (2)), in $x_0 = 0$ aber *nicht* differenzierbar, denn es gilt für jedes positive h, dass $\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ aber für jedes negative h, dass $\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. Daher existiert der Grenzwert in (E.13) nicht! Der Funktionsgraph hat bei $x_0 = 0$ eine Knick, die Ableitung ist konstant $-1(+1)$ für negative (positive) Argumente, siehe Abbildung E.12.

(4) Weitere auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbare Funktionen sind etwa die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus, wobei gilt

$$(e^x)' = e^x, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \cos'(x) = -\sin(x). \tag{E.15}$$

Diese Aussagen folgen leicht aus der Definition der Differenzierbarkeit und Ableitung unter der Verwendung der typischen Eigenschaften dieser Funktionen, siehe etwa (Forster, 2016, §15).

(5) Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist zwar auf $[0, \infty)$ definiert, aber nur auf $(0, \infty)$ differenzierbar. Tatsächlich gilt für $x_0 > 0$, dass $f'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$, denn

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (x \to x_0). \tag{E.16}$$

Allerdings gilt für $x_0 = 0$, dass

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty \quad (h \to 0) \tag{E.17}$$

und somit ist der Limes in (E.13) nicht endlich und $\sqrt{x}$ in $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar. Die Funktion hat gegen x_0 hin einen unbeschränkten Anstieg und hätte eine senkrechte Tangente, was aber von Definition 2.1.8 verboten wird, siehe Abbildung E.13.

2.1.11. Die Lehren aus den Nicht-Beispielen. Das obige Beispiele vor allem der der Betrags- und der Wurzelfunktion sind symptomatisch für nicht-differenzierbare Funktionen und wir können einige Lehren daraus ziehen:

(1) Bei der Betragsfunktion werden wir — und das ist in gewisser Weise banal aber wichtig zu erwähnen — erstmals darauf gestoßen, dass zwar in den allermeisten graphischen Veranschaulichung der Differenzierbarkeit h positiv, d.h. $x_0 + h$ rechts von x_0 gezeichnet wird, dies in der Definition *nirgends* gefordert wird! (Lediglich $h = 0$ bzw. $x = x_0$ ist ausgeschlossen!)

(2) Der Graph der Betragsfunktion hat in $x_0 = 0$ einen Knick und dieses Verhalten ist prototypisch für nicht-differenzierbare Funktionen ebenso wie Sprünge Prototypen für unstetige Funktionen sind.

Eine Funktion mit „Knick“ ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.

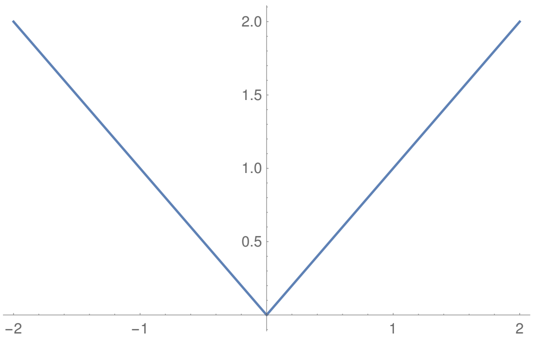


Abb. E.12: Graph der Betragsfunktion $|x|$

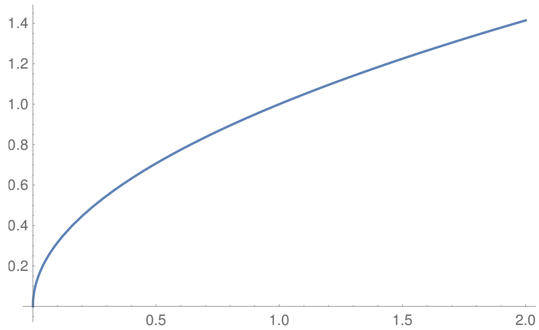


Abb. E.13: Graph der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$

(3) Die Nicht-Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion in $x_0 =$ ist ebenso symptomatisch.

> Eine Funktion mit unbeschränktem Anstieg ist an der entsprechenden Stelle nicht differenzierbar, oder etwas legerer: Senkrechte Tangenten gibt es nicht.

Die Tatsache, dass es sich bei der Wurzelfunktion beim problematischen Punkt um einen Randpunkt des Intervalls handelt ist unerheblich, wie man z.B. am etwas komplizierteren Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x \leq 0) \end{cases} \tag{E.18}$$

sieht, vgl. Abbildung E.14.

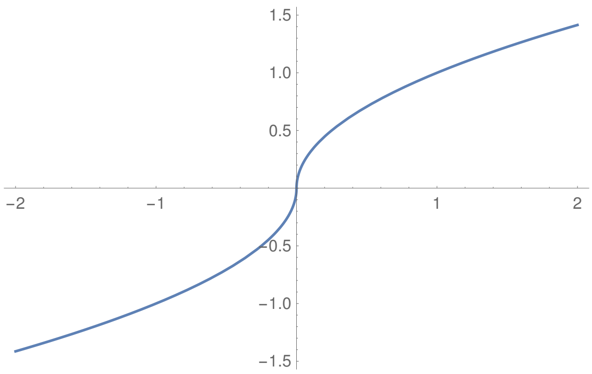


Abb. E.14: Graph der Funktion f aus (E.18)

(4) Bemerken Sie, dass die Beispiele $|x|$ und $\sqrt{x}$ an der Stelle x_0 jeweils einer der Bedingungen an den Limes in Definition 2.1.8 nicht erfüllen, nämlich die Existenz bzw. die Endlichkeit!

(5) Bemerken Sie, dass in allen drei Beispielen $|x|$, $\sqrt{x}$ und f aus (E.18) die Funktionen in $x_0 = 0$ zwar nicht differenzierbar aber dennoch stetig sind. Das bedeutet, wie auch in 2.1.3 antizipiert, dass Differenzierbarkeit stärker ist als Stetigeit. Tatsächlich gilt:

Mathematische Faktenbox 20: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2.1.12. Satz (Stetigkeit vs. Differenzierbarkeit). Für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt x_0 im Intervall I:

$$\boxed{f \quad \text{differenzierbar in } x_0 \quad \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \quad f \quad \text{stetig in } x_0} \tag{E.19}$$

Dabei ist die Implikation ganz leicht einzusehen, denn für eine in x_0 differenzierbare Funktion f gilt

$$f(x) - f(x_0) \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0, \tag{E.20}$$

also $f(x) \to f(x_0)$, was ja die Stetigkeit bei x_0 bedeutet, vgl. 2.1.6 (1).

(4) Die ganze Wahrheit über stetige vs. differenzierbare Funktionen wird vom prototypischen Beispiel $|x|$ natürlich nicht abgedeckt. Tatsächlich ist sie viel komplizierter: Es gibt z.B. Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig aber in keinem(!) Punkt differenzierbar sind, etwa die sog. Weierstraß-Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$.

2.1.13. Ableitungsregeln — praktische Aspekte. Natürlich will man nicht, wie in Beispiel 2.1.10 ständig auf die Definition der Differenzierbarkeit zurückgreifen, um diese nachzuweisen bzw. wichtiger die Ableitung gegebener Funktionen zu berechnen. Daher hat man, analog zum Fall des Folgengrenzwerts (vgl. 2.2.8) einen Kalkül entwickelt. Wie auch beim Folgengrenzwert stechen zwei Aspekte hervor

(1) Wissen über die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen
(2) Differentiationsregeln, die es erlauben aus der Differenzierbarkeit einfacher Funktionen auf die Differenzierbarkeit komplizierterer Funktionen zu schließen *und ganz konkret* ihre Ableitung aus denen der einfachen „Bausteine“ zu berechnen.

Diese Werkzeuge bilden einen wirkungsvollen Kalkül, dessen Grundzüge Sie sicherlich schon aus der Schule kennen. Ableitungen komplizierterer Funktionen werden wie mit einem Baukastensystem aus Ableitungen einfacherer Funktionen zusammengesetzt bzw. berechnet. Dieser Kalkül bietet sich natürlich besonders an, die zweite der Wintersche Grunderfahrungen (mathematische Welt, vgl. 2.2.1) zu vermitteln. Wir präzisieren diese Hilfsmittel wie folgt.

Mathematische Faktenbox 21: Faktensammlung: differenzierbare Funktionen

2.1.14. Proposition (Differentiationsregeln). Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen die im Punkt x_0 im Intervall I differenzierbar sind. Dann gilt:

(1) (Linearkombinationen) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $af + bg$ diffenzierbar in x_0 und es gilt

$$(af + bg)'(x_0) \;=\; af'(x_0) + bg'(x_0). \tag{E.21}$$

(2) (Leibniz- bzw. Produktregel) Die Produktfunktion fg ist in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) \;=\; f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{E.22}$$

Mathematische Faktenbox 21 – Fortsetzung

(3) (Quotientenregel) Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{E.23}$$

(4) (Kettenregel) Für Intervalle I und J und Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ gilt: Falls f differenzierbar in x_0 ist und g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{E.24}$$

Mittels diesen Regeln, die ja nichts anderes besagen, als dass die Differentiation mit den Grundoperationen für Funktionen „verträglich“ ist kann man ohne Mühe für wichtige Klassen von Funktionen Differenzierbarkeit und Ableitung bestimmen. Die Kettenregel ist zwar etwas schwieriger (zu formulieren), aber sie stellt sich als überaus mächtig heraus, z.B. führt sie sehr schnell auf die

(5) (Inversenregel) Ist $f : I \to J$ eine bijektive Funktion zwischen Intervallen (folgt z.B. falls f stetig und streng monoton ist). Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)'}. \tag{E.25}$$

Wir nennen einige wichtige konkrete Beispiele von Funktionen, deren Differenzierbarkeit und Ableitung schnell mittels des „Baukastens“ erledigt werden können.

2.1.15. Korollar (Differenzierbare Funktionen).

(1) Potenzfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(cx^n)' = cnx^{n-1}$ (2.1.14(2)) und daher auch Polynomfunktionen (2.1.14(1)) mit Ableitung

$$\begin{aligned}&(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0)'(x) \\ &\qquad\qquad = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.\end{aligned} \tag{E.26}$$

(2) Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt beispielsweise (2.1.14(3))

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \tag{E.27}$$

(3) Die Tangensfunktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt $(\tan x)' = 1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$. (2.1.14(3))

(4) Die Logarithmusfunktion ist global auf ihrem Definitionsbereich $(0, \infty)$ differenzierbar mit $\ln(x)' = 1/x$ (2.1.14(5)). Mit 2.1.14(4) folgt dann für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(x^\alpha)' \;=\; (e^{\alpha\ln(x)})' \;=\; e^{\alpha\ln(x)}\,\frac{\alpha}{x} \;=\; \alpha x^{\alpha-1} \tag{E.28}$$

und daher insbesondere

$$(\sqrt[n]{x})' \;=\; \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \;=\; \frac{1}{n}\,x^{-\frac{n-1}{n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \tag{E.29}$$

Und das ist erst der Anfang ...

Übungsaufgaben.

$\boxed{44}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 1.** Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = \exp(x)\,\sin(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$

$\boxed{45}$ **Tangente explizit.** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P. Fertigen Sie eine Skizze an.
(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1,1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0,1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0,0)$

$\boxed{47}$ **Knicke und Sprünge.**
(a) Betrachten Sie die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Begründen Sie.
(b) Betrachten Sie die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen, dann verifizieren & begründen Sie die folgenden Aussagen:
(i) H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
(ii) H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
(iii) Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
(iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.

$\boxed{48}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 2.** Für welche reellen x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$

(c) $f_3(x) = x\log(x) - x$

(d) $f_4(x) = e^{2x+3}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$

(f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

§2.2 Die Ableitung als lineare Bestapproximation

In diesem Abschnitt wollen wir kurz einen Aspekt des Differenzierbarkeitsbegriffs besprechen, nämlich den der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprünglich Funktion.

Dieser *Linearsierungsaspekt*, obwohl er in der Schulmathematik nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist *der mathematisch bestimmende Aspekt der Differenzierbarkeit.* Unter vielen anderen fachlichen Vorzügen dieses Aspekts erlaubt nur(!) er eine Verallgemeinerung der Differentialrechnung ins Mehrdimensionale also z.B. auf Funktionen[2] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Wir beginnen mit einem Blick auf Wohlbekanntes, nämlich die Güter der Approximation der Normalparabel durch ihre Tangente.

2.2.1. Die Normalparabel und ihre Tangente. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und ihre Tangente t im Punkt $P = (1, 1)$, siehe Abbildung E.15. Dabei Interessieren wir uns für die Details der Annäherung der Tangente an f in der Nähe von P. Zunächst gilt für die Tangente

$$t(x) \;=\; f'(1)(x-1) + f(1) \;=\; 2(x-1) + 1. \tag{E.30}$$

Nun betrachten wir die Abweichung der Tangente t von der Funktion f. Genauer berechnen wir die Abweichung $r(h) := f(1 + h) - t(1 + h)$ für kleine h also für Punkte in der Nähe von P. Es gilt

$$r(h) \;=\; f(1{+}h){-}t(1{+}h) \;=\; (1{+}h)^2{-}\big(2(h{+}1{-}1){+}1\big) \;=\; 1{+}h^2{+}2h{-}(2h{+}1) \;=\; h^2 \tag{E.31}$$

und wie erwartet konvergiert die Abweichung $r(h)$ gegen 0 für $h \to 0$.
So weit, so gut: Aber wie sieht es nun mit anderen Geraden g durch den Punkt P aus. Dort sollte doch auch die entsprechende Abweichung gegen 0 gehen. Tatsächlich ist das so, denn für eine Gerade g durch $P = (1, 1)$ mit beliebigem aber von der Tangentensteigung abweichenden Anstieg $k \neq 2$ gilt

$$g(x) = k(x - 1) + 1 \tag{E.32}$$

und daher für die Abweichung

$$r_g(h) \;=\; f(1 + h) - g(1 + h) \;=\; (1 + h)^2 - (k\,h + 1) = h^2 + (2 - k)h. \tag{E.33}$$

Und somit wie erwartet gilt auch hier $r_g(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Vergleichen wir aber die beiden *relativen* Abweichungen $r(h)/h$ und $r_g(h)/h$, so fällt ein deutlicher Unterschied auf. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} \frac{r(h)}{h} &= h \;\to\; 0 \quad (h \to 0), \quad \text{aber} \\ \frac{r_g(h)}{h} &= h + (2-k) \;\not\to 0 \quad (h \to 0) \quad \text{denn } k \neq 2. \end{aligned} \tag{E.34}$$

Das bedeutet, dass bei der Tangente auch der relative Fehler gegen 0 geht, während bei allen anderen Geraden durch den Punkt P, das aber *nicht* der Fall ist! Das Ergebnis unserer Überlegungen können wir wie folgt zusammenfassen:

[2]Für deren Bedeutsamkeit siehe etwa C 3.3.2.

> Die Bedingung $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$ ist der analytische Kern der Schmiegeeigenschaft der Tangente.

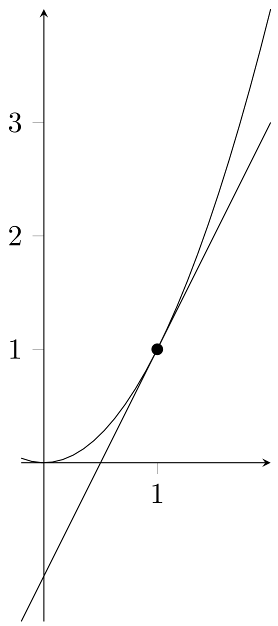


Abb. E.15: Die Normalparabel und ihre Tangente bei $P = (1, 1)$

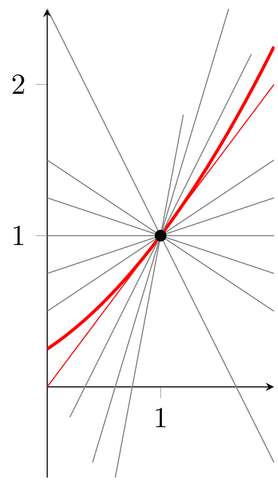


Abb. E.16: Die Tangente als Bestapproximiernde im Geradenbüschel durch $(x_0, f(x_0)$

2.2.2. Die Tangente ist die „beste“ Gerade. Alle unseren oben ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für die Normalparabel $f(x) = x^2$, sondern sind allgemein gültig, d.h. für jede differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, siehe etwa (Danckwerts and Vogel, 2006, p. 72). Tatsächlich gilt auch dann *nur* für die Tangente die *verschärfte* Restbedingung

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \text{statt nur der einfachen Bedingung} \quad \lim_{h\to 0} r(h) = 0. \tag{E.35}$$

Letztere besagt ja lediglich, dass sich Gerade und Kurve im Punkt P berühren, während erstere, also die verschärfte Bedingung die Tangente zur *lokalen linearen Bestapproximation* macht. Geometrisch bedeutet dies, dass

> die Tangente im Geradenbüschl durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ die bestapproximierende Gerade ist,

siehe Abbildung E.16

In diesem Sinne ist die Tangente im Punkte x_0 die bestmögliche Approximation einer Funktion f durch eine Gerade, also durch eine *lineare Funktion* in der Nähe des Punktes $(x_0, f(x_0))$. Man spricht auch von der Tangente als (lokale) *lineare Bestapproximation.*
An dieser Stelle ist es essentiell zu bemerken, dass lineare Funktionen aufgrund ihrer Einfachheit gut geeignete bzw. „dankbare“ Näherungen an die ursprüngliche Funktion sind. So sind etwa die obigen Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ durch nur eine einzige reelle Zahlen (den Anstieg k) eindeutig bestimmt und die (möglicherweise sehr) komplizierte ursprüngliche Funktion kann in der Nähe dieses Punktes mit minimalen Fehler durch ein sehr einfaches mathematisches Objekt, nämlich eine lineare Funktion ersetzt werden!

An diesem Punkt greift nun die Verallgemeinerung der Differentialrechnung für Funktionen mit höherdimensionalem Definitionsbereich oder für noch allgemeinere Situationen an: Eine Funktion ist differenzierbar in einem Punkt, falls sie dort besonders gut, d.h. im Sinne der verschärften Bedingung durch eine lineare Funktion approximiert werden kann.

Übungsaufgabe.

$\boxed{49}$ **Die Tangente als „beste" Gerade — warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?** Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der

„verschärften Bedingung" $\frac{r(h)}{h} \to 0$ aus D§2.2 zu tun hat.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen bzw. bearbeiten Sie nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ ist von der Form $g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$.

(b) Geben Sie den Fehler
$$r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$$
der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und k an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in x_0 ist.

(d) Es gilt
$$\frac{r(h)}{h} \to 0 \ (h \to 0) \text{ genau dann, wenn } g \text{ die Tangente an } f \text{ in } x_0 \text{ ist,}$$
d.h. falls $k = f'(x_0)$ ist.

(e) Fertigen Sie eine Skizze an.

2.2.3. Anwendungen. Abgesehen von der großen theoretischen Bedeutung des obigen Gesichtspunkts der Ableitung als linearen Näherung ergeben sich daraus auch ganz handfeste praktische Resultate. Die Grundüberlegung ist, dass für eine im Punkt x_0 differenzierbare Funktion f die Tangente in x_0 nahe x_0 die Funktion gut approximiert, genauer, dass für kleine $|h|$
$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, h \tag{E.36}$$
gilt. Wir zählen exemplarisch nur zwei sich daraus ergebende Anwendungen auf, siehe auch (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 3.3.2) insbesondere für das Newtonverfahren zur Berechnung von Nullstellen.

(1) (Näherungsweise Berechnungen) Wollen wir etwa $\sqrt{15}$ berechnen, so können wir im gegenwärtigen Kontext wie folgt vorgehen: Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 16$ setzen wir $h = 1$. Dann gilt wegen $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$:
$$\sqrt{15} = \sqrt{16 - 1} \approx \sqrt{16} - \frac{1}{2\sqrt{16}} = 4 - \frac{1}{8} = 3.875, \tag{E.37}$$
was bereits die ersten beiden Nachkommastellen des wahren Werts $\sqrt{15} \approx 3.87298334$ richtig wiedergibt.

(2) (Qualitatives Verhalten von Funktionen) Wir betrachten als Beispiel die Sinusfunktion nahe $x_0 = 0$. Es gilt ja $\sin'(x) = \cos(x)$ und daher $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. Damit können wir für kleine $|h|$ schreiben

$$\sin(h) \;=\; \sin(0+h) \;\approx\; \sin(0) + \sin'(0)\, h \;=\; h, \tag{E.38}$$

was nichts anderes bedeutet, dass der Sinus nahe $x_0 = 0$ sich so wie die Identität verhält, also $\sin(h) \approx h$, was auch in Abbildung ♣ `Grafik` ♣ sichtbar wird.
Genauer können wir sogar schreiben

$$\sin(h) \;=\; \sin(0+h) \;= \sin(0) + \sin'(0)\, h + r(h) \;=\; h + r(h), \tag{E.39}$$

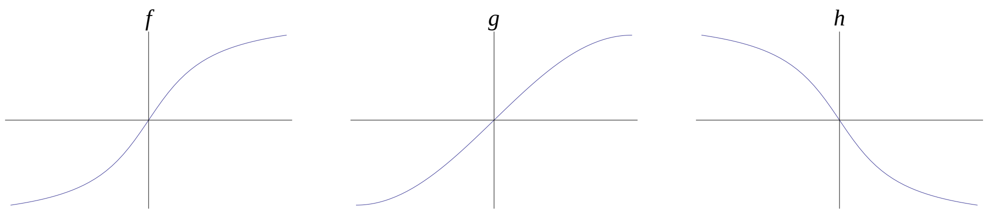
wobei $r(h)/h = (\sin(h) - h)/h \to 0$ gilt.

Verfolgt man diese Idee konsequent weiter, so gelangt man schließlich zu *Taylorreihen* und zum Satz von Taylor, siehe (Danckwerts and Vogel, 2005, Abschn. 4.4)

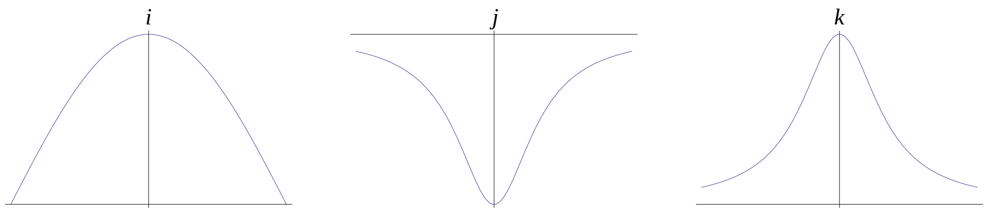
Übungsaufgaben.

$\boxed{46}$ **Näherungsweise Berechnungen mittels Ableitung.** Geben Sie unter Verwendung der Ableitung der Wurzelfunktion eine Näherung für $\sqrt{8.92}$ an. Wie gut ist diese Näherung?

$\boxed{50}$ **Ableitungspuzzle 1.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



Welche der Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h? Begründen Sie Ihre Auswahl!



$\boxed{51}$ **Ableitung und Tangentensteigung — Vorstellungen und Fehlvorstellungen.** Welche der folgenden Vorstellungen zum Ableitungsbegriff sind zutreffend, bei welchen handelt es sich um Fehlvorstellungen? Begründen Sie ihre Einschätzungen!

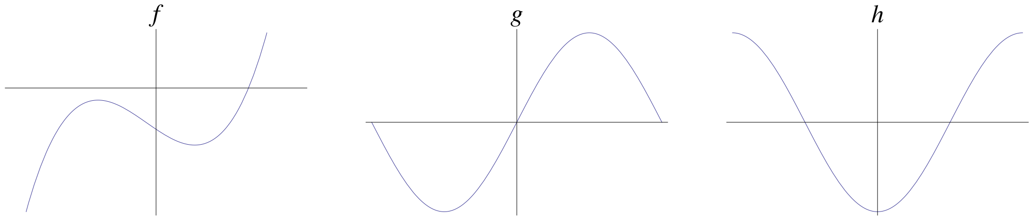
(a) Die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

(b) Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in x_0 differenzierbare Funktion ist, dann schneidet die Tangente an f in x_0 den Graphen von f nur im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

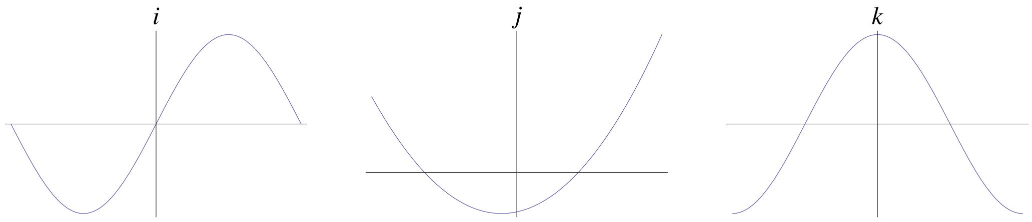
(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn die Folge der Steigungen der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ $(x \neq x_0)$ gegen einen endlichen Wert konvergiert.

(d) Die Tangente an die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 berührt den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ und hat dort die gleiche Richtung.

$\boxed{52}$ **Ableitungspuzzle 2.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g, h. Welche der



Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h? Begründen Sie Ihre Auswahl!



§3 Kleines historisch-philosophisches Intermezzo

Im Anschluss an unsere Diskussion des „Unendlichen“ in Abschnitt D.§2.5 diskutieren wir hier aus einer ähnlichen Perspektive die kurz Differentialrechnung. Natürlich gibt es auch zu diesem Thema eine unüberschaubare Fülle guter Literatur, siehe etwa die einschlägige Darstellung und die Zitate in (Greefrath et al., 2016, Abschn. 4.1).

3.1.1. Das Problem mit dem Tangentenproblem. Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung bildete sich als Tangentenproblem ab dem 17. Jahrhundert heraus: Finde die „Tangente“ in einem Punkt an eine beliebige Kurve. Dabei besteht zunächst das Problem, überhaupt den Begriff einer Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie Kreis und Ellipse und der jeweiligen geometrischen Konstruktion der Tangente zu einer guten Verallgemeinerung für beliebige Kurven gelangen kann bzw. soll.

Es stellt sich heraus, dass der (aus heutiger Sicht) naheliegende Lösungsansatz, die Tangente an eine Kurve als Schmiegegerade zu definieren nicht nur zu einer guten Definition, sondern auch auf eine einfache und konkrete Möglichkeit führt, die Tangente tatsächlich zu berechnen. Wir unterscheiden hier explizit zwischen *Schmiegeggerade*, also jener Geraden die durch Sekanten über immer kleiner werdenden Intervalle approximiert wird und der *Tangente* als aus einem geometrischen Kontext kommenden Geraden, die die Kurve berührt und dort „die gleiche Richtung“ hat. Diese Unterscheidung ist gut dazu geeignet, den Paradigmenwechsel im Kontext des schulmathematischen Zugangs in Abschnitt E.§1.1 erstens zu *erkennen* und ihn dann zu benennen und zu diskutieren.

3.1.2. Kleiner historischer Abriss. Was wir in Definition 2.1.8 locker mittels des Grenzwertbegriffs erledigt haben, stellte die MathematikerInnen bis vor ca. 300 Jahren vor gewaltige technische Probleme. Konkret bestand die Schwierigkeit darin, die Approximationsidee technisch in den Griff zu bekommen: Wie sollte man mit den Sekanten über beliebig kleinen Intervallen hantieren? Erste Ansätze gehen auf Pierre de Fermat (ca. 1600–1665) und René Descartes (1596–1650) zurück und waren algebraischer Natur.
Ende des 17. Jahrhunderts gelang es dann Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) unabhängig voneinander, widerspruchsfreie und funktionierende Kalküle zu entwickeln. Zwischen diesen beiden Wissenschaftern kam es in der Folge zu einem Streit darüber, wer als der (wahre) Erfinder der Infinitesmialrechnung gelten solle, der als Prioritätenstreit in die Wissenschaftsgeschichte einging und selbt nach dem Tod der beiden Protagonisten lange nicht beigelegte werden konnte. Dabei spielten naturgemäß nationale und politische Interessen eine große Rolle.
Während Newton das Problem physikalisch über das Momentangeschwindigkeitsproblem anging, gelangte Leibniz geometrisch über das Tangentenproblem zu seiner Lösung. Beide Kalküle erlaubten das Abstrahieren von rein geometrischen Vorstellungen hin zu einer konkreten rechnerischen Behandlung und werden deshalb oft als eigentlicher Beginn der Analysis betrachtet.

Newton und Leibniz arbeiteten jedoch beide mit „unendlich kleinen“ positiven Zahlen. Diese Vorgehensweise, die zugleich intuitiv aber auch schlecht nachvollziehbar war, wurde bereits von Zeitgenossen kritisiert, z.B. von George Berkeley (1685–1753) in einem Werk mit dem polemischen Titel „The analyst; or, a discourse addressed to an infidel mathematician“. Tatsächlich konnte erst in den 1960ern Abraham Robinson (1918–74) die Verwendung sog. infinitesimaler Größen mathematisch exakt, d.h. axiomatisch fundieren — seine Nichtstandardanalysis ist uns schon in D 2.5.6 begegenet.

Der Hauptstrang der Entwicklung nahm aber einen anderen Weg. Newton hatte seine Version der Infinitesimalrechnung ja im physikalischen Kontext entwickelt und in seiner kurz „Principia“ genannten Schrift „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica[3]“ nicht nur das universelle Gravitationsgesetz formuliert, sondern auch die Bewegungsgesetze, womit er den Grundstein für die klassische Mechanik legte, die deswegen oft auch *Newtonsche Mechanik* genannt wird. Daher wurde die Analysis, getrieben von immer zahlreicheren Anwendungen, trotz der herrschenden Unsicherheiten bzgl. ihrer Grundlagen konsequent weiterentwickelt. So gehen z.B. die heute bekannten Ableitungsregeln vgl. 2.1.14 vor allem auf Werke von Leonhard Euler (1707–83) zurück.
Wie auch in Abschnitt D 2.5.6 dargestellt setzte erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts eine stärkere Exaktifizierung in der Mathematik ein, die in der Analysis ihren Ausgang nahm und schließlich zur Erfindung und später der Axiomatisierung der Mengenlehre führte. Einen Anfang machte Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) (vgl. auch D 2.5.5), der die „unendlich kleinen“ Größen aufgab und die Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen also in moderner Sprache als Differentialqotient definierte. Die weitere Exaktifizierung ist wie ebenfalls schon in 2.5.6 erwähnt besonders eng mit dem Namen Karl Weierstraß (1815–1897) verbun-

[3] Erstmals 1686 erschienen, ist es eines der einflussreichsten Bücher überhaupt.

den.

3.1.3. Leibniz und das Tangentenproblem. Hier kehren wir ganz kurz zu Leibniz' Lösung des Tangentenproblems zurück. Er dachte die Tangentensteigung als Steigung der Hypotheuse in einem „unendlich kleinen" Dreieck, die sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt, siehe Abbildung ♣ `Grafik` ♣. Aus dieser Überlegung aus der Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine vor allem in der Physik verwendete Schreibweise überlebt, die besonders gerne im Kontext von Modellierungen verwendet wird. Bezeichnen wir eine Funktion als sog. „abhängige" Variable y also z.B. $y = x^3 + 2x^2 + 7$, dann schreibt man für die Ableitung y' auch

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x \tag{E.40}$$

und Leibniz hat sich dabei $\frac{dy}{dx}$ wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete dy und Ankathete dx vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein" sind.

3.1.4. Momentangeschwindigkeit und Newtonsche Mechnik. Isaac Newton ging historisch einen anderen Weg als Leibniz. In seinem bereits erwähnten Hauptwerk der „Principia" hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch mathematische Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung ausgehend vom Problem der Momentangeschwindigkeit. Wir geben hier eine einfache Formulierung in moderner Sprache.

Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt t beschreiben wir mit der Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t)$ Unsere Anschauung drängt uns dazu zu glauben, dass P zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Tatsächlich bestimmbar sind aber nur die *Durschschnittgeschwindigkeiten* zwischen den Zeitpunkten t_0 und t, also

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \tag{E.41}$$

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir nun die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten definieren — falls dieser existiert, und endlich ist, d.h. dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten genügend „stabil" sind, falls t „nahe" von t_0 variiert. Also, falls existent und endlich

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \tag{E.42}$$

Z.B. gilt für den freien Fall $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$ mit der Erdbeschleunigung $g \approx 9.81 ms^{-2}$

$$v(t) = \left(\frac{1}{2}\, g\, t^2\right)' = gt. \tag{E.43}$$

Wie auch schon die Notation ausdrückt, wird die Momentangeschwindigkiet v selbt als Funktion der Zeit t aufgefasst, also als Funktion $t \mapsto v(t)$. Die mittlere Beschleunigung von P zwischen t_0 und t ist dann der Differenzenquotient $(v(t) - v(t_0))/(t - t_0)$ und völlig analog zur Momentangeschwindigkeit definieren wir die *Momentanbeschleunigung* zum Zeitpunkt t_0 also

$$b(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}, \tag{E.44}$$

falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Für den freien Fall ergibt sich daher

$$b(t) = v'(t) = (gt)' = g, \tag{E.45}$$

was auch den Namen der Naturkonstanten g erklärt.

Erst diese präzise Definition von Momentangeschwindigkeit und -beschleunigung ermöglichen einen analytischen Zugriff auf Newtons Kraftgesetz oder 2. Newtonsche Axiom „Kraft ist Masse mal Beschleunigung" nämlich

$$F(t) = m\,b(t) \;=\; m\,v'(t) \;=\; m\,s''(t). \tag{E.46}$$

Liest man diese Gleichung als Differentialgleichung für s, so ist ihre Lösung s die Wegfunktion bei gegebener Kraft F und man spricht von einer *Lösung der Bewegungsgleichung.*
Dies ist der Ausgangspunkt der Newtonschen oder klassischen Mechanik, die sich unter den Händen vieler PhysikerInnen und MathematikerInnen zu einer sehr schönen und geometrischen Theorie entwickelt hat, die es erlaubt, alle uns umgebenden mechanischen Phänomene zu beschreiben und in ganz abstrakter Sprache zu fassen. Die klassische Mechanik steht traditionell am Beginn jeder Ausbildung in (theoretischer) Physik und das darauf aufbauende Forschungsgebiet der „klassichen dynamischen Systeme„ hat noch in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bedeutende Resultate hervorgebracht, z.B. den KAM-Satz von Kolmogorow, Arnold und Moser.

Literaturverzeichnis

H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

G. Bleier, J. Lindenberg, A. Lindner, and E. Süss-Stepancik. *Dimensionen — Mathematik 6.* Wien: Verlag E. Dorner, 2018.

W. Blum. Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *MU*, 25:42–50, 1979.

W. Blum and A. Kirsch. Anschauung und Strenge in der Analysis IV. *MU*, 25, 1979.

W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, and O. Köller. *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor, 2006.

Bernard Bolzano. *Paradoxien des unendlichen.* Reclam, 1851.

J.S. Bruner. Der Akt der Entdeckung. In Neber H., editor, *Entdeckendes Lernen.* Weinheim, Basel: Beltz Verlag, 1981.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Elementare Analysis.* BoD–Books on Demand, 2005.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum, Heidelberg, 2006.

Zoltan P Dienes and Edmond W Golding. *Methodik der modernen Mathematik: Grundlagen für Lernen in Zyklen.* Herder, Freiburg, 1970.

Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, volume Band 2. Klett, Stuttgart, 1973.

Hans Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

Stefan Götz. Ein versuch zur analysis-ausbildung von lehramtsstudierenden an der universität wien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, pages 364–367. WTM-Verlag, Münster, 2013.

G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V Ulm, and H.-G. Weigand. *Didaktik der Analysis*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Math. Ann.*, 95(1):161–190, 1926. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01206605. URL `https://doi.org/10.1007/BF01206605`.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer, 2013.

Bertrand Russel. *Philosophie des Abendlandes*. Europa Verlag, Zürich, 1950.

H. Schichl and R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum, Heidelberg, 2018.

Fritz Schweiger. Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2,3), 1992.

Roland Steinbauer. Analysis in einer Variable für LAK, Februar 2013a.

Roland Steinbauer. Einführung in die Analysis, Februar 2013b.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).

Hans-Joachim Vollrath and Hans-Georg Weigand. *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum, Akad. Verlag, 2007.

R. vom Hofe. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1995.

Christof Weber. Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In *Mathematik verständlich unterrichten*. Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1996.

Erich Ch Wittmann, Gerhard N Müller, and Martina Röhr. *Das Zahlenbuch: Mathematik im... Schuljahr. 2: Arbeitsheft"mit Blitzrechnen"*. Klett, 2004.