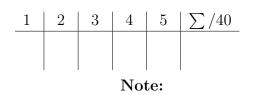
Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):



Analysis in einer Variable für LAK Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

2. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe A

- 1. Definitionen, Sätze & Beweise.
 - (a) Definiere die folgenden Begriffe: (je 1 Punkt) Stammfunktion, uneigentlich integrierbare Funktion auf $[a, \infty)$, Integral einer Treppenfunktion
 - (b) Formuliere die folgenden Resultate (je 2 Punkte): Mittelwertsatz der Integralrechnung, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion
 - (c) Formuliere und beweise die Kettenregel. Zusätzlich beschreibe in Worten kurz Idee und Verlauf des Beweises. (7 Punkte)
- 2. Grundideen.
 - (a) Erkläre anschaulich anhand einer Skizze, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x}f(t)\,dt\right) = f(x)$$

stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)

- (b) Erkläre anschaulich und anhand einer Skizze die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung im vereinfachten Fall ($\varphi = 1$). (2 Punkte)
- (c) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und erkläre seine Aussage anschaulich anhand einer Skizze. (2 Punkte)
- 3. Anwendungen der Differentialrechnung.
 - (a) Extrema. Formuliere und beweise eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer ausreichend differenzierbaren (genaue Formulierung gefragt!) Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. (4 Punkte)
 - (b) Monotonie. Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Zeige:

$$f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f \text{ monoton wachsend auf } [a, b].$$

Gilt auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (4 Punkte)

Bitte umblättern!

- 4. Beispiele und Gegenbeispiele.
 - (a) Gib eine (auf einem geeigneten Intervall definierte) Funktion an, die unbeschränkt aber uneigentlich integrierbar ist. (1 Punkt)
 - (b) Berechne $\int_0^1 x e^x dx$. (1 Punkt)
 - (c) Berechne $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2x) dx$. (2 Punkte)
 - (d) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)
- 5. Richtig oder falsch?

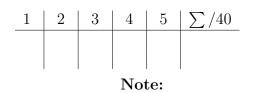
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)

- (a) Eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf (a,b] differenzierbar ist, ist schon auf [a,b] differenzierbar.
- (b) Eine differenzierbare Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nimmt ihr globales Minimum am Rand an.
- (c) Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar.

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):



Analysis in einer Variable für LAK Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

2. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe B

- 1. Grundideen.
 - (a) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und erkläre seine Aussage anschaulich anhand einer Skizze. (2 Punkte)
 - (b) Erkläre anschaulich anhand einer Skizze, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a}^{x} f(t) \, dt \right) = f(x)$$

stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)

- (c) Erkläre anschaulich und anhand einer Skizze die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung im vereinfachten Fall ($\varphi = 1$). (2 Punkte)
- 2. Definitionen, Sätze & Beweise.
 - (a) Definiere die folgenden Begriffe: (je 1 Punkt) striktes lokales Maximum, uneigentlich integrierbare Funktion auf (a, b], Integral einer Treppenfunktion
 - (b) Formuliere und beweise die Kettenregel. Zusätzlich beschreibe in Worten kurz Idee und Verlauf des Beweises. (7 Punkte)
 - (c) Formuliere die folgenden Resultate (je 2 Punkte): Mittelwertsatz der Integralrechnung, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion
- 3. Anwendungen der Differentialrechnung.
 - (a) Monotonie. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Zeige:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f \text{ streng monoton wachsend auf } [a, b].$$

Gilt auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (4 Punkte)

(b) Extrema. Formuliere und beweise eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer ausreichend differenzierbaren (genaue Formulierung gefragt!) Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. (4 Punkte)

Bitte umblättern!

4. Richtig oder falsch?

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)

- (a) Eine differenzierbare Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nimmt ihr globales Maximum am Rand an.
- (b) Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf (a,b] differenzierbar ist, ist schon auf [a,b) stetig.
- (c) Jede auf [a, b] Riemann-integrierbare Funktion ist auf [a, b] auch beschränkt.

5. Beispiele und Gegenbeispiele.

- (a) Gib eine auf einem Intervall der Form $[a, \infty)$ definierte beschränkte Funktion an, die nicht uneigentlich integrierbar ist. (1 Punkt)
- (b) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)
- (c) Berechne $\int_0^1 e^x x dx$. (1 Punkt)
- (d) Berechne $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx$. (2 Punkte)