$\boxed{7}$ (a) zz: $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq 1/k!$ $(1 \leq n,\ k \in \mathbb{N})$

Bemerke für $k > n \Rightarrow ls = 0 \Rightarrow$ Ungleichung immer richtig

Wir müssen uns also nur um den Fall $k \leq n$ kümmern. Dazu rechnen wir (vgl. Anleitung)

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!\,n^k}$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\dots\cdot 2\cdot 1} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

$$= \prod_{j=n-k+1}^{n} j = \prod_{i=1}^{k}(i+n-k)$$

Idee: Das sind k-Stück Terme; will das mit $n^k = n\cdots n$ kombinieren; verschiebe Index so, dass er explizit von 1 bis k läuft: $i = j - n + k \underbrace{\geq 1}_{(\Delta)}$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{1}{n^k}\prod_{i=1}^{k}(n-k+i) = \prod_{i=1}^{k}\frac{n-k+i}{n} \overset{(\Delta\Delta)}{\leq} 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{n!}{n^k(n-k)!\,k!} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{k!} \quad \square$$

(Δ): $n-k+i \geq n-n+i = i \geq 1$ ($k \leq n$!)

$(\Delta\Delta)$: $n \geq 1$!

(b) zz: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \overset{(\otimes)}{\leq} \sum \frac{1}{k!} \Longrightarrow \text{1. Ungl.}$$

bleibt zz: $\sum_{k=0}^{n} 1/k! < 3$

$n \leq 3$: $\sum_{k=0}^{3} 1/k! = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2\frac{2}{3} < 3$ (Δ)

$n \geq 4$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \overset{(\Delta)}{\leq} 2\frac{2}{3} + \sum_{k=4}^{n} 2^{-k}$$

$\boxed{1} \Longrightarrow 2^k < k! \Longleftrightarrow \frac{1}{k!} < 2^{-k}$ für $k \geq 4$

$$= 2\frac{2}{3} + 2^{-4} \sum_{k=0}^{n-4} 2^{-k} = 2\frac{2}{3} + 2^{-4} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1-\frac{1}{2}}$$

beachte ≥ 0

damit $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ verwendet werden kann $[x=\frac{1}{2}]$

$$= 2\frac{2}{3} + 2^{-3}\underbrace{\left(1-2^{-n+3}\right)}_{<1\ [n \geq 4!]}$$

$$< 2\frac{2}{3} + \frac{1}{8} < 3$$

$\square$