§2.3 Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Nachdem die Betrachtungen zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln in Abschnitt zum Grenzwertbegriff geführt haben und in Abschnitt D.§2.2 die fachlichen Grundlagen sowie entscheidende Hinweise zur verbalen Ausformulierung der Grenzwertdefinition diskutiert wurden, sollen hier nun einmal mehr die Aspekte und Grundvorstellungen eines zentralen Begriffs – nämlich jene des Grenzwertbegriffs – betrachtet werden.

§2.3.1 Aspekte des Grnezwertbegriffs

Beim Grenzwertbegriff lassen sich zwei entscheidende Aspekte ausmachen, die in den vorgehenden Ausführungen (D.§2.1, D.§2.2) stellenweise bereits durchgeschimmert sind. Es sind dies der *dynamische* und *statistische Aspekt* des Grenzwertbegriffs. Die beiden Aspekte werden am besten als die zwei Seiten einer Medaille oder als Yin und Yang aufgefasst.

2.3.1. Der dynamische Aspekt. Dem dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs liegt die intuitive Vorstellung eines potenziell unendlichen Vorgangs zugrunde. Solche potenziell unendlichen Vorgänge sind uns in der Vorlesung schon an manchen Stellen begegnet. Zum Beispiel:

- Medikamentenspiegel, 1.2.2: Nach einer Anfangsdosis von 400mg hat sich der Medikamentenspiegel nach sukzessiver Verabreichung und entsprechendem Abbau 1600mg eingependelt.
- Koffeingehalt, 1.3.3: Ebenso verhält es sich bei der Entwicklung des Koffeingehalts, wenn der Vorgang des Kaffeetrinkens Stunde für Stunde sukzessive unter den in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen fortgesetzt wird. Der Koffeingehalt pendelt sich dann bei etwas mehr als 571mg ein.
- Schlangenlinie, 1.3.5: Auch die Schlangenlinie, bei der der Radius der Halbkreise sukzessive halbiert wird, lässt sich theoretisch bzw. gedanklich als unendlicher Vorgang ausführen. Wird für den ersten Radius beispielsweise 1cm gewählt, dann sind die folgenden Radien $0,5\text{cm}, 0,25\text{cm}, 0,125\text{cm}, 0,0625\text{cm}, 0,03125\text{cm}, 0,015625\text{cm}, 0,0078125\text{cm}$ ... lang. Bei zunehmend fortschreitender Halbierung kommen die Radien einer Länge von 0cm beliebig nahe.

Bei allen drei Beispielen lässt sich ein Wert angeben, dem sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig nähern und in dessen Nähe *fast alle* Folgenglieder liegen. Alle drei Folgen erfüllen aber besondere Eigenschaften: Sie sind streng monoton wachsend/fallend und nach oben/unten beschränkt und daher konvergieren sie gegen ihr Supremum/Infimum. Ein anderes Beispiel wäre die Folge $a_n = 2(-1)^n \frac{1}{2^n}$. Sie weist nicht die beiden Eigenschaften (Monotonie und Beschränktheit. Allerdings lässt sich auch ein Wert angeben, dem sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig nähern und in dessen Nähe *fast alle* Folgenglieder liegen.

- Beim Medikamentenspiegel nähern sich die Folgenglieder einer Grenze von 1600mg an und fast alle Glieder der dieser Folge liegen beliebig nahe bei 1600mg.
- Beim Koffeingehalt verhält es sich ebenso. Die Grenze liegt bei etwas mehr als 571mg und fast alle Folgenglieder liegen beliebig nahe bei diesem Wert.
- Auch bei den Radien der Schlangenlinie gibt es eine Grenze, der sich die Folgenglieder annähern. Sie ist 0, darüberhinaus liegen einmal mehr fast alle Folgenglieder beliebig nahe bei 0.

- Und auch für die Werte der Folge $a_n = 2(-1)^n \frac{1}{2^n}$ gibt es eine Grenze, der sich die Werte der Folgenglieder annähern. Sie ist 0, darüberhinaus liegen einmal mehr fast alle Folgenglieder beliebig nahe bei 0.

Historisch betrachtet, hat der dynamische Aspekt des Grenzwertbegriffs lange Tradition — er war schon in der griechischen Antike bekannt und geht (mindestens) auf Aristoteles und seine Vorstellung des Unendlichen zurück (siehe Abschnitt D.§2.5).

2.3.2. Der statische Aspekt. Wenn der dynamische Aspekt des Grenzwertbegriffs die eine Seite der Medaille ist, dann entspricht der statische Aspekt des Grenzwertbegriffs der anderen Seiten der Medaille. Die (dynamische) Sichtweise, dem Grenzwert mit wachsendem n beliebig nahe zu kommen, wird nun *umgekehrt*. Es wird also nun nicht mehr der Wert, um den sich die Folgengliedern einpendeln, „gesucht", sondern „vorgegeben". D.h. Ausgangspunkt der statistischen Sichtweise ist nun ein fester Wert. Ausgehend von diesem festen Wert wird jetzt jenes Folgenglied gesucht, ab dem alle weiteren Folgenglieder in einer vorgegebenen Umgebung des Wertes liegen. Hier fließt also ganz entscheidend die formale Definition des Grenzwerts ein!
Der statische Aspekt ist historisch gesehen wesentlich jünger als der dynamische Aspekt. Weierstraß (1815 – 1897) hat diesen Aspekt formalisiert (siehe Abschnitt D.§2.5).
Für den Mathematikunterricht bedeutet dies, das eine Vorstellung über das Unendliche und den Grenzwert mithilfe des dynamischen Aspekts aufzubauen ist, dass das Verständnis der Grenzwertdefinition aber einen bewussten Perspektivenwechsel hin zum statischen Aspekt dieses Begriffs verlangt. Ganz wie bei den beiden Seiten einer Medaille oder bei Yin und Yang bedarf das eine des jeweils anderen.
In Abschnitt wird der Perspektivenwechsel (vom dynamischen zum statischen Aspekt) bei den Betrachtungen zur Approximationsgüte vollzogen. Davor wird im Sinne des dynamischen Aspekts jener Wert gesucht, dem sich Wurzel $\sqrt{30}$ nähert. Bei 2.1.5 (Approximationsgüte) hingegen wird im Sinne des statischen Aspekts eine Fehlerschranke vorgegeben und ein x_{n_0} gesucht, dass diese Fehlerschranke unterschreitet.

§2.3.2 Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der Analysis sind an dieser Stelle nichts Neues mehr, sie wurden in entsprechendem Umfang schon an mehreren Stellen dieser Schulmathematikvorlesung diskutiert und sollen auch hier wieder inhaltliche Deutungen eines mathematischen Begriffs darlegen, damit der Begriff im Unterricht für die Schülerinnen und Schüler Sinn ergibt.

2.3.3. Annäherungsvorstellung zum Grenzwertbegriff. Die Annäherungsvorstellung steht besonders deutlich mit dem dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs in Verbindung, aber auch mit dem statischen Aspekt. Sie wird wie folgt formuliert:

FdPw-Box 22: Annäherungsvorstellung

Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Ein erstes Arbeiten in Richtung dieser Grundvorstellung kann bereits in der 8. Schulstufe beim näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln erfolgen. Erneut aufgegriffen wird diese Grundvorstellung beim numerischen Lösung von Gleichungen (z.B. Newton-Verfahren).

Wichtig ist im Zusammenhang mit der Änderungsvorstellung, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass unendliche Prozesse einem Grenzobjekt beliebig nahe kommen können. Dabei sollten sowohl grafische als auch numerische Vorstellungen miteinander verbunden werden.

2.3.4. Umgebungsvorstellung zum Grenzwertbegriff. Die Umgebungsvorstellung baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs auf. Sie hängt aber auch, wie die obigen Ausführungen zu den zwei Seiten einer Medaille zeigen, mit dem dynamischen Aspekt zusammen.

FdPw-Box 23: Umgebungsvorstellung

Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Die Umgebungsvorstellung zielt also darauf ab, dass bei einer vorgegebenen Umgebung ein Folgenglied gesucht wird, ab dem die weiteren Folgenglieder in dieser Umgebung liegen. Bei dieser Grundvorstellung ist es entscheidend, dass die Schülerinnen und Schüler einmal mehr grafische und numerische Vorstellungen mit der Umgebung eines Zahlenwertes verbinden und diese auch noch mit den Folgengliedern in Beziehung setzen können. Nach Greefrath et al. (Greefrath et al., 2016, 3.5) ist die Umgebungsvorstellung auch damit verbunden, dass die Schülerinnen und Schüler das Grenzwertverhalten einer Folge verbal und formal beschreiben können.

2.3.5. Objektvorstellung zum Grenzwertbegriff. Zu guter Letzt lässt sich auch zum Grenzwertbegriff eine Objektvorstellung wie folgt formulieren:

FdPw-Box 24: Objektvorstellung

Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch Folgen – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

Die Objektvorstellung soll es Schülerinnen und Schülern ermöglichen,

- Nullfolgen als Prototypen für konvergente Folgen zu sehen,
- an Termdarstellungen das Verhalten von Folgen- und Funktionswerten „im Unendlichen“ und in der Nähe von Defintionslücken zu erkennen,
- Folgen und Funktionen anhand der Folgen- und Funktionsterme bzgl. ihres Grenzwertverhaltens zu klassifizieren,
- das Grenzwertverhalten mithilfe der „Limes-Schreibweise“ anzugeben und
- Grenzwerte berechnen zu können.

Die Objektvorstellung zum Grenzwertbegriff ist also im schulischen Mathematikunterricht äußert relevant. Sie baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs auf und umgekehrt steht der statische Aspekt in direkter Beziehung zur Objektvorstellung des Grenzwertbegriffs.

Summa Summarum ergibt sich für die Wechselbeziehungen der Aspekte und Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff die Darstellung D.23.

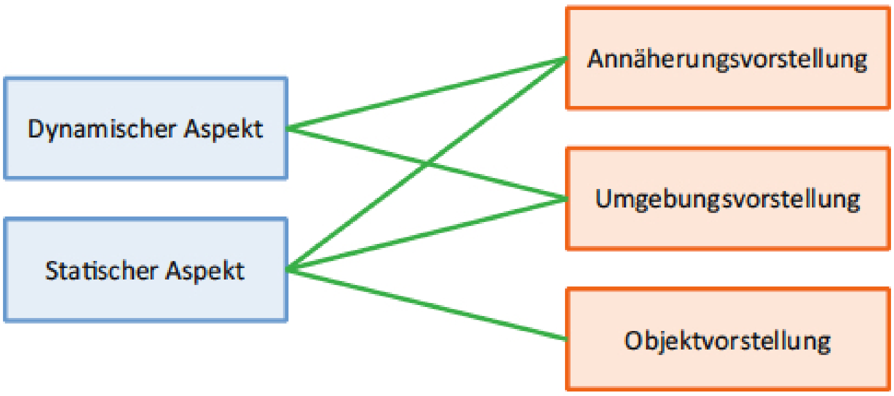

Abb. D.23: Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff in ihrer wechselseitigen Beziehung

§2.4 Der Grenzwert in der Schule - Zugänge im Unterricht

Im Lehrplan der AHS Oberstufe wird der Grenzwert an nur zwei Stellen erwähnt. Einmal im Kompetenzmodul 3 (6. Klasse) *Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)*, das andere Mal im Grundkompetenzkatalog der Handreichung zum Lehrplan mit *FA-L 7.4 Grenzwerte von einfachen Folgen ermitteln können*. Es stellt sich also die Frage, wie kann dem „Herzstück“ der Analysis im Mathematikunterricht Rechnung getragen werden? D.h.: Wie lässt sich also nun unter Berücksichtigung des Lehrplans und der in (siehe Abschnitt D.§2.3) ausgeführten Aspekte und Grundvorstellungen der Grenzwertbegriff im schulischen Mathematikunterricht er- und bearbeiten, sodass die Schülerinnen und Schüler zum einen die entsprechenden (Grund-)Vorstellungen aufbauen, sich das notwendige (Grund-)Wissen zum Grenzwertbegriff aneignen und die zweckmäßigen Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwerts erwerben?

§2.4.1 Zur Ausbildung der Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff in der Schule

Rudolf vom Hofe (2003: Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik lehren 118, S. 4-8) sieht drei Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen. Diese sind

FdPw-Box 25: Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

- Erfassen der Bedeutung des Begriffs – Anknüpfen an bekannte Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen
- Aufbau von mentalen Repräsentationen – ermöglichen operatives Handeln auf der Vorstellungsebene
- Anwenden in neuen Situationen – erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen und Modellieren des Phänomens mithilfe der mathematischen Struktur

2.4.1. Erfassen der Bedeutung des Grenzwertbegriffs. Zum Erfassen der Bedeutung des Grenzwertbegriffs ist – wie oben schon angedeutet – das Anknüpfen an bekannten Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen unabdingbar. Bei diesem Anknüpfen an Bekanntes muss aber gleichzeitig der Wechsel vom dynamischen zum statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs erfolgen. Es gilt also zu überlegen, wie ein Vermittlungsprozess zwischen dem dynamischen und statischen Aspekt unterrichtspraktisch gestaltet werden kann. Exemplarisch soll hier ein solcher Vermittlungsprozess gezeigt werden.

Hinführung zum Grenzwertbegriff auf numerischer und grafischer Ebene mit Wechsel zur Umgebungsbetrachtung Bei der Hinführung zum Grenzwertbegriff auf numerischer und grafischer Ebene können Vorgänge, die wir bereits in den Aufgabenstellungen zum Medikamentenspiegel, zum Koffeingehalt und den geometrischen Mustern bearbeitet haben, erneut – aber mit Fragestellungen, die auf den statischen Aspekt des Grenzwerts abzielen – aufgegriffen werden.

Aufgabensteung: Cholesterinspiegel Der Zielwert für einen gesunden Gesamtcholesterinspiegel liegt bei maximal 190 mg/dl. Bei einem Patienten wurde ein erhöhter Cholesterinspiegel von 500 mg/dl festgestellt. Daraufhin werden dem Patienten eine strikte Diät und ein entsprechendes Medikament verordnet. Der Patient hält über einen längeren Zeitraum die vorgeschriebene Diät ein und nimmt auch das Medikament täglich ein. Die Entwicklung seines Cholesterinspiegels lässt sich aufgrund dieses Verhaltens mit $c_n = 0.8^n\,500 + 38\,\frac{1-0.8^n}{1-0.8}$. beschreiben.

- Stelle die Entwicklung des Cholesterinspiegels als Folge, in Form eine Tabelle sowie grafisch auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Wann erreicht der Patient den Zielwert für einen gesunden Cholesterinspiegel?

Lösungserwartung: $< 500; 438; 338, 4; 348, 72; ... >$

	A	B
1	0	500
2	1	438
3	2	388.4
4	3	348.72
5	4	316.976
6	5	291.581
7	6	271.265
8	7	255.012
9	8	242.009
10	9	231.607
11	10	223.286
12	11	216.629
13	12	211.303
14	13	207.042
15	14	203.634
16	15	200.907

Abb. D.24: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Tabelle 1

27	26	190.937
28	27	190.75
29	28	190.6
30	29	190.48
31	30	190.384
32	31	190.307
33	32	190.246
34	33	190.196
35	34	190.157
36	35	190.126
37	36	190.101
38	37	190.08
39	38	190.064
40	39	190.052
41	40	190.041
42	41	190.033

Abb. D.25: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Tabelle 2

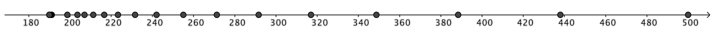

Abb. D.26: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Zahlengerade

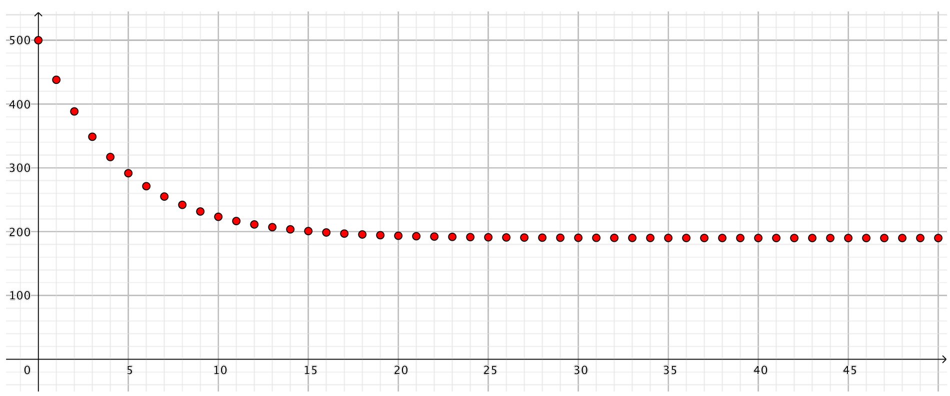

Abb. D.27: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Koordinatensystem

Wann der Patient den Zielwert für einen gesunden Cholesterinspiegel erreicht, hängt von der Genauigkeit bzw. Toleranz der Messung des Cholesterinspiegels ab. Wenn auf drei Nachkommastellen genau gemessen wird, dann hat der Patient am 59 Tag einen Cholesterinspiegel von 190,001 mg/dl und am 60 Tag 190 mg/dl. Wenn auf fünf Nachkommastellen genau gemessen wird, dann hat der Patient am 80 Tag einen Cholesterinspiegel von 190,00001 mg/dl und am 81 Tag 190 mg/dl. Bei großzügigerer Betrachtung könnte man auch den 36. Tag wählen, dort hat der Patient einen Cholesterinspiegel von 190,1006 mg/dl oder den 26. Tag, dort hat der Patient einen Cholesterinspiegel von 190,93692 mg/dl.

Im Anschluss an eine solche Aufgabenstellung ist von der Lehrperson eine Rückschau auf die Aufgabenstellung und ihre Lösung vorzunehmen, um den Schülerinnen und Schülern den Aufbau mentaler Repräsentationen zu ermöglichen. Dabei kann thematisiert werden:

- Werden die Folgenglieder mittels Tabelle dargestellt, dann wird auf der numerischen Ebene gut sichtbar, dass sich die Folgenglieder mit wachsendem n dem Wert 190 beliebig nähern und das fast alle Glieder der Folge in der Nähe von 190 liegen.
- Werden die Folgenglieder im Koordinatensystem dargestellt, dann wird einerseits die Monotonie und Beschränkt der Folge gut sichtbar. Anderseits wird auch deutlich, dass die meisten Punkte in einer Umgebung der Geraden y = 190 liegen.
- Werden die Folgenglieder auf der Zahlengerade dargestellt, dann wird deutlich, dass die Folgenglieder mit fortschreitendem n immer näher zusammenrücken, sich um einen Wert zusammenziehen bzw. an einer Stelle der Zahlengeraden konzentrieren. Außerdem liegen die meisten Folgenglieder bzw. Punkte in einer Umgebung von 190.

Das Anwenden der so herausgearbeiteten Sichtweise auf neuen Situationen – z.B. die Folge $a_n =, \frac{2n-1}{n}$ – rundet das Ausbilden der Annäherungsvorstellung und Umgebungsvorstellung (ersten beiden Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff) ab.

§2.4.2 Grundwissen zum Grenzwert aneignen

Im Anschluss an die Ausbildung der obigen beiden Grundvorstellungen (Annäherung- und Umgebungsvorstellung) zum Grenzwertbegriff müssen sich die Schülerinnen und Schüler Grundwissen zum Grenzwertbegriff aneignen. Zu diesem Grundwissen zählt:

- Epsilon-Umgebung
- Definition des Grenzwerts einer Folge; konvergent, divergent
- Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Das Behalten dieses Grundwissens wird vor allem dann gefördert, wenn es immer wieder verwendet wird (Vergessenskurve).

2.4.2. Epsilon-Umgebung. Beim Begriff der Epsilon-Umgebung gilt es nun Sprechweisen wie *fast alle Glieder der Folge liegen in einer Umgebung von ...* mathematisch genauer zu fassen. Dazu wird das Wissen aus der 9. Schulstufe aufgefrischt. Denn dort werden beim Arbeiten mit Mengen, Zahlen und Rechengesetzen Zahlen, Beträge von Zahlen und Intervalle auf einer Zahlengeraden dargestellt. Für die Epsilon-Umgebung werden also ausgehend von Intervalldarstellungen auf der Zahlengeraden sowie den bisherigen Folgendarstellungen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem Schreib- und Sprechweisen sowie Darstellungen der Epsilon-Umgebung auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem erarbeitet.

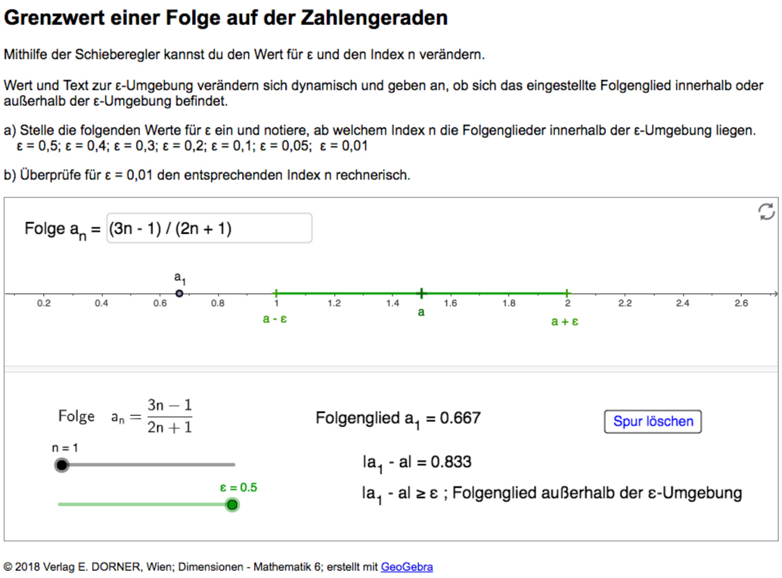

Abb. D.28: Epsilon-Umgebung auf der Zahlengeraden

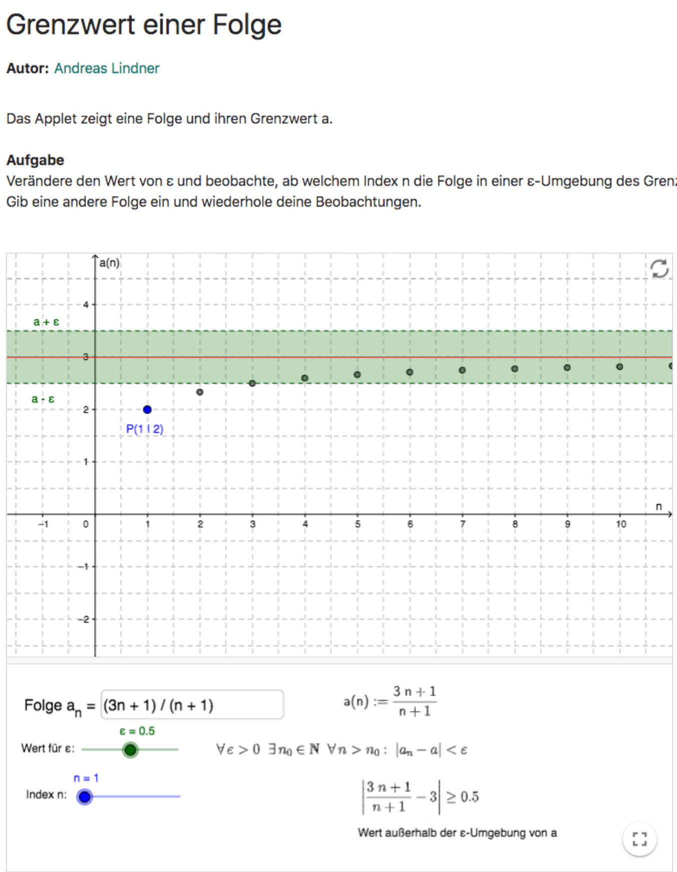

Abb. D.29: Quelle: Dimensionen Mathematik 7 - Seite 195

Der Nachweis, ob ein Folgenglied an innerhalb der Epsilon-Umgebung einer Zahl a liegt, wird dann mit Betragsungleichungen erbracht.

2.4.3. Definition des Grenzwerts einer Folge; konvergent, divergent. Die Definition des Grenzwerts ergibt sich durch die hier vorgestellte Standpunktverlagerung und Herausarbeitung der Epsilon-Umgebung im Unterricht dann fast von selbst. Verlangt der Grenzwert einer Folge ja nichts anders als, dass stets nur endliche viele Folgenglieder außerhalb der Epsilon-Umgebung liegen.
Wie schon in der Mathematischen Faktenbox 8: Grenzwert von Folgen dargestellt, kann also nun im Unterricht die Definition vorgenommen und damit auch die Begriffe konvergent und divergent sowie die Schreib- und Sprechweisen eingeführt werden. An ausgewählten Beispielen wird danach überprüft, ob ein bestimmter Wert der Grenzwert einer Folge ist und mithilfe charakteristischer Darstellungen wird das neue Grundwissen verinnerlicht.

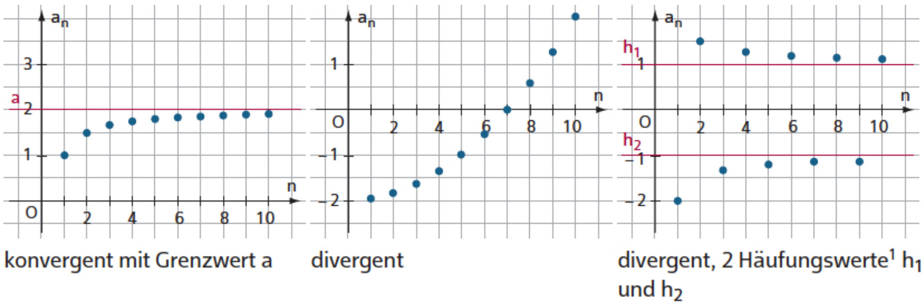

Abb. D.30: Epsilon-Umgebung im Koordinatensystem

2.4.4. Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Zu guter Letzt umfasst das Grundwissen zum Grenzwertbegriff auch das Wissen über den Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Nach dem Prinzip der Variation oder nach dem Prinzip des Kontrasts können Schülerinnen und Schüler erarbeiten, dass

- eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergent ist.
- eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergent ist.

§2.4.3 Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwerts

Nachdem nun in der Schule Grundvorstellungen und Grundwissen zum Grenzwert aufgebaut bzw. angeeignet wurden, bleiben abschließend einige wenige Grundfähigkeiten auszubilden, die das routinehaften Anwenden des Grenzwerts erlauben. Solche routinehaften Tätigkeiten sind uns schon bei den Betrachtungen des Monotonieverhaltens von Folgen begegnet, aber gerade zuvor auch bei der Überprüfung, ob eine bestimmte Zahl a Grenzwert einer Folge an ist. Letzterem steht nun die Berechnung von Grenzwerten gegenüber. Dieser erneute Perspektivenwechsel (überprüfen versus berechnen) muss im Unterricht deutlich gemacht werden. Ein zielführender Unterrichtsgang zum Erwerb der intendierten Grundfähigkeiten zum routinehaften des Grenzwerts erstreckt sich zumindest über folgende Stationen:

- Erarbeitung des Begriffs Nullfolge und prominenter Beispiele (siehe Mathematische Faktenbox 8)

- Berechnung von Grenzwerten einfacher Folgen mithilfe von Nullfolgen; Zusammenhang zwischen Grenzwert und explizite Darstellung von einfachen Folgen erkennen
- Grenzwertsätze – mit konvergenten Folgen als mathematischen Objekten rechnen (siehe Mathematische Faktenbox 10: Konvergente Folgen)
- Grenzwert der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$

Mit der Erarbeitung Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwerts kann das Kapitel beschlossen werden, zudem sind wir nun auch bei der dritten Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff – nämlich der Objektvorstellung – gelandet.

§2.4.4 Rückschau auf den Zugang zum Grenzwertbegriff in der Schule

Wenn wir nun auf den hier vorgestellten Zugang zum Grenzwertbegriff zurückblicken, dann wird eine starke Verzahnung der mathematisch-historischen Entwicklung dieses Begriffs mit dem schulischen Zugang deutlich.

Darüberhinaus wird auch deutlich, dass die Ausbildung von Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff auf dem dynamischen und statistischen Aspekt dieses Begriffs sowie dem bewussten Übergang von einem zum anderen Aspekt beruht. Es bedarf also, wie schon in D 2.3.1 und D 2.3.2 angekündigt, beider Aspekte oder anders gesprochen des Yin und Yangs im Sinne von wechselseitig aufeinander bezogenen Gegensätzlichkeit, die erst zusammen eine Gesamtheit ergeben. Diese beiden Aspekten sowie der Wechsel von einem zum anderen wurden aber auch schon im fachmathematisch orientierten Zugang zum Grenzwertbegriff D 2.1 sichtbar.

Die Erarbeitung des Grundwissens zum Grenzwertbegriff baut auf den Grundvorstellungen auf, präzisiert die dort verwendeten Sprechweisen *fast alle Folgenglieder liegen in einer Umgebung von ...* und führt so zur Grenzwertdefinition mitsamt der Begriffe konvergent und divergent. Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz runden das Grundwissen ab.

Das Entwickeln von Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwerts in der Schule geschieht im Wesentlichen über Nullfolgen und Grenzwertsätze. Damit wird die Relevanz der mathemaischen Faktenboxen 8 und 10 für den schulischen Zugang zum Grenzwertbegriff deutlich.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass ein schulischer Zugang zum Grenzwertbegriff enge Verbindungen zur Fachmathematik hat bzw. in dieser wurzelt und mannigfache dynamische Erfahrungen bzw. Visualisierungen sowie die Berücksichtigung fachdidaktischer Prinzipien und Konzepte braucht.

§2.5 Historisch-philosophischer Exkurs: Über das Unendliche

Das Unendliche ist weit, vor allem gegen Ende.
(Alphonse Allais, Französischer Literat und Humorist, 1854–1905)

Die Idee des „Unendlichen" beschäftigt die Menschen schon seit sehr langer Zeit und hat ihre Phantasie immer wieder beflügelt. Demzufolge gibt es eine Unzahl von Betrachtungen zum „Unendlichen" aus den unterschiedlichsten Blickwinkeln: von der Theologie über die Philosophie zur Kunst und Literatur, den Naturwissenschaften und schließlich zur Mathematik.

> *Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.* (Hilbert, 1926, p. 163)

Eine Umfassende Darstellung ist an dieser Stelle klarerweise weder möglich noch sinnvoll. Wir diskutieren hier lediglich einige grundlegende Ideen und Vorstellungen zum Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik. Dafür haben wir vor allem zwei Gründe: Einerseits gehört unserer Ansicht nach ein Basiswissen zum Unendlichkeitsbegriff zur Allgemeinbildung (angehender) Lehrer/innen. Andererseits (und noch wichtiger) spielen beim Lehren und Lernen des Folgen- und des Grenzwertbegriffs im Rahmen der Schulanalysis die schon vorhandenen (individuellen Grund-)Vorstellungen der Schüler/innen zum „Unendlichen" eine große Rolle. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Vorstellungen und Sichtweisen mit ihren Problemen spiegeln vielfach die Probleme der tatsächlichen historischen Entwicklungen in der Mathematik wieder. Insofern liegt hier auch ein Betätigungsfeld für die didaktische Phänomenologie, vgl. 1.1.2.
Tatsächlich nehmen die Wechselbeziehungen zwischen dem Folgen- und Limesbegriff und dem Unendlichkeitsbegriff sowie ihr Wandel eine wichtige Rolle in der Geschichte der Mathematik ein — genauso wie die damit verbundenen Fehlvorstellungen. So formulierte der wahrscheinlich bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, David Hilbert (1862–1943) noch im Jahre 1925:

> *Die mathematische Literatur findet sich, wenn man darauf acht gibt, stark durchflutet von Ungereimtheiten und Gedankenlosigkeiten, die meist durch das Unendliche verschuldet sind.* (Hilbert, 1926, p. 162)

§2.5.1 Sichtweisen auf das „Unendliche"

Wie bereits angedeutet, durchzieht die Frage nach dem „Wesen der Unendlichkeit" wie ein roter Faden die Geschichte der Mathematik und insbesondere der Analysis. Der Entwicklung der mathematischen Begriffe Unendlich, Folge und Grenzwert, die in enger Wechselbeziehung zueinander stehen, kommt in der Geschichte der Analysis eine tragende Rolle zu wie wir im nächsten Abschnitt etwas genauer diskutieren werden. Hier diskutieren wir — in gebotener Kürze — Vorstellungen zum „Unendlichen".

2.5.1. Das potentiell und das aktual Unendliche. Schon in der Griechischen Antike war die Auseinandersetzung mit dem Unendlichkeitsbegriff ein zentrales Element der Philosopie und der Mathematik. Spätestenens Aristoteles (384–322 v. u. Z.) unterscheidet in seiner Ontologie folgende zwei Vorstellungen vom „Unendlichen":

(1) *Das potentiell Unendliche* ist die in der Vorstellung vorhande Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses, z.B. beim fortlaufenden Zählen, beim Verstreichen der Zeit, beim fortlaufenden Halbieren einer Strecke. In der modernen Sprache von Mengen können wir auch sagen:

> Eine Menge, zu der prinzipiell unendlich viele Objekte hinzufügbar sind, heisst *potentiell unendlich.*

Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen" werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden"; anders das

(2) *Aktual Unendliche*, bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt, z.B. in Form einer Fläche, die durch das Zusammenfügen unendlich vieler Flächenstücke entstanden ist. In moderner Sprache

> heisst eine Menge *aktual unendlich*, falls sie bereits „wirklich unendlich viele" Objekte enthält.

Aristoteles lehnt allerdings die Idee vom aktual Unendlichen ab:

> *Überhaupt existiert das Unendliche nur in dem Sinne, dass immer ein Anderes und wiederum ein Anderes genommen wird, das eben Genommene aber immer ein Endliches, jedoch ein immer Verschiedenes und wieder ein Verschiedenes ist.* (Aristoteles, Metaphysik)

„Unendlich" bezieht sich Aristoteles zufolge nur auf „dasjenige, außerhalb dessen immer noch etwas ist"[13] Für Aristoteles ist die Vorstellung der Möglichkeit des potenziell unendlichen Prozesses *die* zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff, denn „das Unendliche gibt es (nur) im Modus der Möglichkeit".
In moderner Sprache steckt in der Aristotelischen Vorstellung des Unendlichen die Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge. Es handelt sich hier um eine sogenannte *dynamische Vorstellung* einer Folge bzw. des Unendlichen, die als im fortwährenden Aufbau begriffene Objekte gesehen werden. Genau das gilt als eine oder die zentrale Grundvorstellung vom Unendlichkeitsbegriff.

Diese Vorstellung hat allerdings ohne die ergänzende Vorstellung bzw. die Akzeptanz des aktual Unendlichen ihre Probleme, wie z.B. durch die Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea (490–430 v. u. Z.) offensichtlich wird. Eine Analyse von unendlich oft wiederholten Handlungen führt auf Widersprüchlichkeiten, falls sie nur mit dem Begriff des potentiell, nicht aber mit dem des aktual Unendlichen operiert, wie wir auch in der folgenden Übungsaufgabe herausarbeiten.

Übungsaufgabe.

$\boxed{39}$ **Achill und die Schildkröte.** Die Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea decken die Problematik von unendlich oft wiederholten Handlungen (hier Zurücklegen einer bestimmten Teilstrecke) auf, falls sie nur mit dem Begriff des potentiell, nicht aber mit dem des aktual Unendlichen analysiert werden.

[13] Der Ausschluss des aktual Unendlichen wird in der antiken und mittelalterlichen Theologie (z.B. bei Thomas von Aquin) zentraler Bestandteil von Gottesbeweisen: Ein Fortschreiten, das sich prinzipiell ins Unendliche fortsetzt, kann niemals abgeschlossen sein. Daher ist eine Erklärung der (als unendlich angenommenen) Welt, die bei einem bestimmten Objekt beginnt und seine Ursachen anführt und sich so ins Unendliche fortsetzt nicht möglich. Daher muss als *Erstursache* „Gott" angenommen werden.

> Achilleus[14] verfolgt eine Schildkröte, die allerdings einen Vorsprung von, sagen wir 100m hat. Bevor Achill die Schildkröte einholen kann, muss er erst ihren Startpunkt erreichen. In der Zeit, die er dafür benötigt, legt die Schildkröte aber auch wieder einen Weg zurück, sagen wir 1/10 des ursprünglichen Vorsprungs von 100m. Um die Schildkröte zu erreichen, muss Achill (mindestens) diesen neuen Standpunkt der Schildkröte (der bei 110m gelegen ist) erreichen. Dieses Spiel wiederholt sich nun: Jedes Mal, wenn Achill den früheren Standpunkt der Schildkröte erreicht, hat diese wieder ein Stück Weg zurückgelegt und so kann Achill die Schildkröte niemals ereichen.

Klären Sie die Situation, d.h. die Frage ob und wo Achill die Schildkröte einholt auf zwei Arten:

a) Mittels „physikalischer" Argumentation: Benutzen Die dazu die Beschreibung des Wettlaufs mittels zweier gleichförmiger Bewegungen. (Achill legt bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ den Weg $a(t) = v\,t$ zurück, wobei v seine (konstante) Laufgeschwindigkeit ist. Die Schildkröte den Weg $s(t) = (v/10)\,t$, da Achill 10 mal so schnell läuft wie sie.)
b) Mittels mathematischer Argumentation: Berechnen Sie dazu die von Achill bis zum Einholen der Schildkröte zurückgelegte Strecke unter Verwendung einer unendlichen Reihe.

Diskutieren Sie diese beiden Lösungen im Kontext der Begriffe des potentiell und des aktual Unendlichen.

2.5.2. Platonismus, Realismus, Formalismus. Im Gegensatz zu Aristoteles lässt Platon (428/7–348/7 v. u. Z.) im Rahmen seiner Ideenlenhre das aktual Unendliche zu[15]. Im ihrem Rahmen kommt Ideen eine eigenständige Existenz zu, die der Existenz der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet ist. Solche *Platonische Ideen* sind beispielsweise „das Gerechte an sich[16]" oder auch mathematische Begriffe wie „der Kreis an sich". Tatsächlich lässt sich ein perfekter Kreis weder in der Natur finden noch herstellen; selbst bei genauestem Arbeiten mit einem Zirkel wird ein gezeichneter Kreis immer ungenau bleiben. Der „Kreis an sich" ist die dahinterliegende ideale Idee des Kreises — allerdings geht laut Platon diese Idee über die bloße Vorstellungen im menschlichen Geist hinaus; ihr kommt eine objektive metaphysische Realität zu.
Platons Ideenkonzeption steht somit im Gegensatz zu Auffassungen, die Allgemeinbegriffe als reine Konstrukte menschlicher Abstraktion sehen, die haupsächlich zur Klassifizierung und Ordnung von Objekten dienen.

Die auf Platons Ideenlehre zurückgehende Denkschule wird im Kontext der Philosophie der Mathematik als *Platonismus* bezeichnet. Vereinfacht kann die platonische Sichtweise auf die Mathenmatik etwa so ausgedrückt werden: Mathematische Theoreme oder Begriffe werden *entdeckt*, nicht etwa erfunden oder konstruiert. Sie sind unabhängig davon *da*, ob die Mathematker/innen sie entdecken oder nicht.

[14]In der griechischen Mythologie ist Achilleus der stärkste der griechischen Krieger im trojanischen Krieg. Die Ilias des Homer beginnt mit dem Vers „Singe den Zorn, o Göttin, des Peleiaden Achill". Man kann somit behaupten, dass der Zorn die älteste überlieferte Emotion des Abndlandes ist...

[15]Auch hier finden sich Bezüge zur Theologie: Augustinus identifiziert Gott mit dem aktualen Unendlichen. Überhaupt führt eine ideengeschichtliche Spur von den Pythagoräern über Platon zur antiken und mittelalterlichen Theologie, die den säkularen und rationalen Strömungen der griechischen Antike zugegenläuft, vgl. etwa (Russel, 1950, I. und II. Teil)

[16]Vergleiche etwa auch die sprichwörtliche „Platonische Liebe".

Eine Gegenposition im Rahmen der Philosophie der Mathematik ist der *Formalismus*, der davon ausgeht, dass gar keine mathematischen Objekte gibt. Die gesamte Mathematik ist formal und besteht lediglich aus Axiomen, Definitionen und Theoremen — also aus Formeln und formalen Regeln, die besagen, wie man eine Aussage aus einer anderen ableitet. Diese Formeln geben aber keine Auskunft über irgendetwas, sie sind einfach nur Zeichenketten. Erst über die Interpretation einer Formel etwa in einem physikalischen Kontext erhält sie einen Inhalt, der je nach Kontext wahr oder falsch sein kann. Die Mathematik an sich ist eine einzige gigantische Tautologie.

In gewisser Weise eine moderne Spielart des Platonismus ist der *Realismus*: Mathematische Objekten wird zwar keine ontologische oder metaphysische Existenz zugesprochen, aber immerhin eine objektive und interpersonelle. Diese Position geht beispielweise davon aus, dass eine etwaige außerirdische Intelligenz dieselbe Mathematik „entdecken“ würde, wie wir Menschen.

2.5.3. Konstruktivismus.
Eine anderer und extremer Standpunkt, was vor allem seinen Bezug zum „Unendlichen“ betrifft — und uns damit zum eigentlichen Thema unseres Exkurses zurückbringt — ist der *Konstruktivismus*, der allerdings verschiedene Spielarten bzw. Abstufungen kennt. Allgemein ist die Position des Konstruktivismus, dass die Existenz mathematischer Objekte durch ihre Konstruktion begründet werden muss.

Um die Abstufungen des Konstruktivismus und seine Haltungen zum „Unendlichen“ zu diskutieren, betrachten wir die gewissermaßen einfachste unendliche Menge $\mathbb{N}$: Zu jeder natürlichen Zahl kann man einen Nachfolger angeben und so lässt sich jede (noch so große) natürliche Zahl in endlich vielen Schritten angeben. Das gilt aber nicht für die gesamten Menge $\mathbb{N}$ mit *allen* ihren Elementen. Die verschiedenen Stanpunkte sind nun:

(1) Der *Finitismus* besagt: Mathematik ist nur das, was sich durch eine endliche Konstruktion erzeugen lässt. Die Menge $\mathbb{N}$ ist daher nur als potentiell unendliche Menge zulässig.
(2) Noch extremer ist der *Ultrafinitismus*: Schon Mengen der Form $\{1, 2, \ldots, n\}$ können nicht vollständig aufgeschrieben werden, denn für grosse n reichen dazu weder die Lebenszeit eines oder auch alle Mathematiker/innen noch die Zahl der Elementarteilchen im Universum, die mit 10^{80} abgeschätzt werden kann. Hier werden also alle Formen des Unendlichen abgelehnt.
(3) Der *gemäßigte Konstruktivismus* akzeptiert ein mathematisches Objekt, wenn es ein Verfahren gibt, mit dem es in endlich vielen Schritten konstruiert werden kann. In diesem Sinne ist die Menge $\mathbb{N}$ aktual unendlich, weil sie in Form eines Algorithmus existiert, mit dem man jede natürliche Zahl in endlich vielen Schritten erzeugen kann. „Fertig vorliegend“ ist hier allerdings nicht die Menge als Zusammenfassung ihrer Elemente, sondern nur der erzeugende Algorithmus.
Oft vermeidet diese Position daher im aktuellen Zusammenhang den Begriff „aktual unendlich„ und bezeichnet Mengen wie die der natürlichen Zahlen lieber als *„operativ abgeschlossen“*, was bedeutet, dass mittels des zugehörigen Algorithmus jedes Element der Menge früher oder später erzeugt werden kann.
(4) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist dann der klassische Fall einer *nicht* operativ abgeschlossenen Menge. Ein Algorithmus kann nämlich nur Zahlen produzieren, die mit endlich vielen Zeichen darstellbar sind, und damit endliche oder abzählbare Mengen. Die Menge $\mathbb{R}$ ist aber überabzählbar und daher nicht mit Hilfe eines Algorithmus angebbar.

Im Rahmen des Kontruktivismus kann $\mathbb{R}$ daher nicht als „fertig vorliegend“ aufgefasst werden und gilt somit (nur) als potentiell unendliche Menge.

(5) Weil die Menge der reellen Zahlen von überaus großer Bedeutung für die gesamte Mathematik ist, sollte es nicht verwundern, dass es auch eine philosophische Position gibt, die bei einer allgemein kritsichen Haltung gegenüber dem aktual Unendlichen, dennoch $\mathbb{R}$ als aktual unendliche Menge akzeptiert. Hier wird meist mit dem Vorliegen einer speziellen Intuition bezüglich des „Kontinuums“ der reellen Zahlen argumentiert, weshalb diese Position als *Intuitionismus* bezeichnet wird.

2.5.4. Fazit ist, dass es somit in der Philosophie der Mathematik neben der Ablehnung aller Unendlichkeitsbegriffe (Ultrafinitismus) folgende Positionen gibt: Die ausschließliche Akzeptanz des potentiell Unendlichen (Finitismus), darüber hinausgehend die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für operativ abgeschlossene Mengen wie die der natürlichen Zahlen (Konstruktivismus), sowie die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für das Kontinuum (Intuitionismus), während der Platonismus das aktual Unendliche durchgehend akzeptiert. Darüberhinaus können wir wie folgt zusammenfassen:

> Die „Mainstream-Mathematik“ und gleichzeitig die überwiegende Mehrheit der heutigen Mathematiker/innen akzeptiert das aktual Unendliche für alle Mengen, die sich im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel (siehe etwa (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 4.5)) definieren lassen

Die Existenz der Menge der natürliche Zahlen ist dabei axiomatisch im Unendlichkeitsaxiom aufgehoben und die der reellen Zahlen im Potenzmengenaxiom. Auf dieser axiomatischen Grundlage ergibt sich darüber hinaus eine „Hierachie“ aktual unendlicher Mengen, deren „Größe“ durch die unterschiedlichen Kardinalzahlen markiert wird. Die Frage ob die „Gesamtheit“ aller dieser Kardinalzahlen als aktuale Unendlichkeit aufgefasst werden kann, führt allerdings in die (Untiefen der) mathematische(n) Logik: Die Menge der Kardinalzahlen im Sinne der axiomatischen Mengenlehre aufzufassen, führt nämlich auf einen logischen Widerspruch (erste Cantorsche Antinomie).

Insgesamt ist es eine große Stärke der Mathematik (wie auch der Naturwissenschaften allgemein), dass sie „funktioniert“, egal welche philosophische Position man zu ihr einnimmt. Genauer, die Qualität mathematischer Resultate und Theorien ist unabhängig davon, welche philosophische Positionen die Mathematiker/innen, die sie hervorbringen diesbezüglich einnehmen.
Tatsächlich nehmen vermutlich die meisten Mathematiker/innen bewusst oder unbewusst eine Position ein, die irgendwo im Kontinmuum zwischen Platonismus und Formalismus liegen — manchmal sind sie auch unentschieden, wie ein Bonmot, das dem amerikanischen Mathematiker Philip J. Davis zugeschrieben wird: „Der typische Mathematiker ist an Werktagen Platonist und an Sonntagen Formalist“.

§2.5.2 Eine (ganz) kurze Geschichte des Grenzwertbegrifs

Ausgestattet mit einem Grundwissen über die verschiedenen Vorstellungen zum Unendlichkeitsbegriff unternehmen wir nun einen sehr kurzen Abstecher in die Geschichte des Grenzwertbegriffs im Rahmen der Analysis. Natürlich existiert zu diesem Thema eine unüberschaubare Fülle an Literatur; ein Startpunkt ist etwa (Greefrath et al., 2016, Abschn. 3.1) und die dort zitierte Literatur.
In dieser Geschichte traten in wechselnder Abfolge und auch ineinander verschränkt *dynamische* und *statische*, sowie *intuitive* und *formale* Sichtweisen und Vorstellungen des Grenzwerts und des „Unendlichen“ auf. Wir besprechen nur die wesentlichsten Schritte dieser Entwicklungen.

Die in Abschnitt D.§2.5.1 herausgearbeitete weitgehende Akzeptanz des aktual Unendlichen steht in ihrer historischen Entwicklung im Zusammenhang mit der Bemühung, die dynamische Sichtweise des potentiell Unendlichen durch *statische Betrachtungsweisen* zu ersetzen.

2.5.5. Frühe Vorstellungen.
Die Entstehung, Entwicklung und Abgrenzung des Grenzwertsbegriffs in der Mathematik der Neuzeit ist eng mit der Entwicklung der Begriffe von Folgen und Reihen verbunden. Darüberhinaus spielten konkrete Vorstellungen vom Aufzählen und Anneinanderreihen von Folgen- oder Reihengliedern eine große Rolle, ebenso wie Bewegungsvorstellungen.
Etwa schon zu Beginn der Neuzeit im 16. und 17. Jahrhundert wird die (unendliche) Summation der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \tag{D.56}$$

wie in Abbildung D.31 dargestellt. Aus dieser auch heute noch im Unterricht verwendeten Darstellung ist unmittelbar einsichtig, dass die Summe durch 2 beschränkt ist, also endlich bleibt.

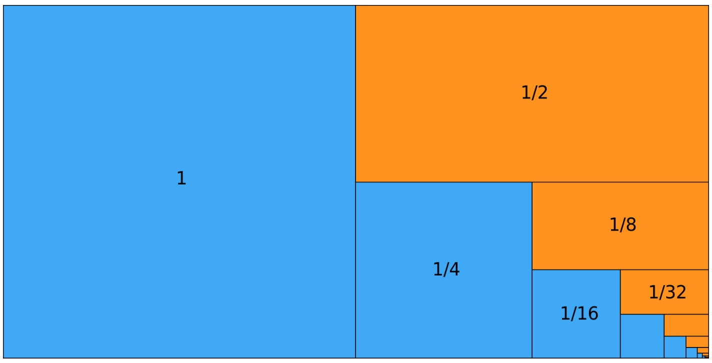

Abb. D.31: Summation der geometrischen Reihe

Isaac Newton (1643–1727), einer der Ko-erfinder der Differentialrechnung und auch Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783)[17] bedienten sich hauptsächlich dynamische oder

[17] D'Alembert war nicht nur Mathematiker und Physiker, sondern auch ein bedeutender Philosoph der Aufklärung. Gemeinsam mit Denis Diderot (1713–1784) war er Herausgeber der monumentalen Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.

kinematische Vorstellungen. Hingegen verwendete der zweite Ko-Erfinder der Differentialrechnung Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ebenso wie Leonhard Euler (1707–1783) „unendlich kleine Größen" bei der Berechnung des Differenzialquotienten und verbinden damit eine eher *statische* Vorstellung. Letzteres kann mit der Terminologie von Abschnitt D.§2.5.1 so formuliert werden, dass mit aktual unendlichen Größen als „realen Objekten" hantiert wird.

Mit Augustin-Louis Cauchys (1789–1857) Lehrbuch „Cours d'Analyse" von 1821 wird der Grenzwertbegriff auch formal zu einem Grundbegriff der Analysis. In einer vielzitierten Stelle definiert Cauchy den Grenzwert (er sagt die „Grenze") einer Folge mit den Worten:

> Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen. (Cauchy 1828, S. 3)

Diese der modernen Definition schon recht nahe Formulierung verwendet eindeutig die dynamische Vorstellung des sich schrittweise Annäherns an den Grenzwert.

2.5.6. Exaktifizierung. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzt sich in der Mathematik und auch in Lehrbüchern immer stärker eine strenge und formale Sichtweise durch. Vor allem unter dem Einfluss von Karl Weierstraß (1815–1897) werden die naiven und intuitiv geprägten Vorstellungen von „unendlich kleinen" und „unendlich großen Größen" aus der Mathematik verbannt[18] Diese werden durch Prozesse ersetzt, die *mit dem Operieren im Endlichen auskommen*, vgl. auch A 1.1.6.
Klar kommt dieser Zugang (fast Auftrag) in folgendem Hilbert-Zitat zum Ausdruck:

> Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig [. . .]. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden [. . .]. (Hilbert 1926, S. 190)

In diesem Sinne formuliert auch Weierstraß zur Summation der geometrischen Reihe:

> Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann. (Weierstraß 1874, S. 60 f.)

Konsequenter Weise führt dieser Zugang auf die ε-N-Definition des Folgen-Grenzwerts (vgl. 2.2.1)

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \exists N : \ \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \varepsilon \tag{D.57}$$

und später auch zur analogen Definition des Grenzwerts für Funktionen.

Damit sind intuitive Vorstellungen vom „Unendlichen" z.B. jene von der unbegrenzten Fortsetzbarkeit eines Prozesses nicht mehr nötig um den Grenzwertbegriff zu fassen bzw. zu definieren. Der Grenzwert tritt in der Definition von Anfang an als „real existierendes" Objekt (genauer eine Zahl) auf, dem eine bestimmte Eigenschaft zukommt. (Nämlich die, dass ihr die

[18]Diese erlebten ab Mitte des 20. Jahrhunderts im Rahmen der (allerdings axiomatisch fundierten) *Nichtstandard-Analysis* eine Wiederbelebung. Die Nichtstandard-Analysis ist heute ein kleines aber nach wie vor aktives Forschungsgebiet der Mathematik.

Folge schließlich beliebig nahe kommt.) Man könnte im Zusammenhang mit dieser Definition etwas pathetisch von der „Verbannung“ oder der „Abschaffung des Unendlichen“ sprechen. Tatsächlich ist es eher eine „Entzauberung“ des Grenzwertbegriffs, denn die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen“ indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff *handhabbar* macht. Und diese Tatsache, also dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom „Unendlichen“ formuliert werden kann, ist der Eckstein der Stärke der modernen Analysis (und Mathematik).

So unverzichtbar, unumstritten und erfolgreich der eben beschriebene Ansatz bzw. Zugang für die moderne Mathematik ist, so sehr ergeben sich beim Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs daraus in natürlicher Wiese Schwierigkeiten. Die Definition (D.57) stellt den Endpunkt einer langen historischen Entwicklung dar und enthält in hochkomprimierter Form nur das minimal logisch notwendige Skelett des Begriffs. Die für den Lernprozesses entscheidende Frage, wie diese hochformale Begrifflichkeit, gegeben je konkrete Vorkenntnisse und Vorerfahrungen am besten verstanden werden kann und welche Rolle intuitive Vorstellungen bzw. Grundvorstellungen dabei spielen können und müssen haben wir in Abschnitt **??** diskutiert. Dazu passt auch unser abschließendes Hilbert-Zitat:

> Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee [...], [die] alle Erfahrung übersteigt. (Hilbert 1926, S. 190)

§2.6 Rückblick, Reihen und eine tiefsinnige Frage

In diesem Abschnitt schauen wir zurück und diskutieren mit geschärftem Blick nocheinmal vor allem fachliche Facetten des Grenzwerbegriffs. Wir führen das im Kontext einer Diskussion der tiefsinnigen und auch im Unterricht relevanten Frage

> „Ist $0.\bar{9}$ wirklich gleich 1?“

durch. Dabei werden wir ganz natürlich auch auf den Reihenbegriff geführt, dessem fachliche Aspekte wir wiederholen und beleuchten.

2.6.1. Gilt wirklich $0.\bar{9} = 1$? Diese Frage tritt tatsächlich häufig unter Lernenden auf und soll uns hier dazu dienen Verständnisschwierigkeiten beim Erfassen der Grenzwertdefinition zu diskutieren und aufzulösen. Für konkrete Äußerungen von Lehramtsstudierenden siehe (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 22), auf den wir auch für weitere Details verweisen. Folgende Aussagen sind Zitate aus Online Mathematik-Foren[19]:

> *A:* Ich habe mal ne kleine und bescheidene frage:
>
> also in einem anderen forum wurde behauptet das 0,9(periode) das selbe wie 1 ist und das ein wert unendlich stark angenährt an 0 auch null sei. Da ist meine frage, stimmt das und wenn ja warum, weil mir der gedanke doch ein bisschen befremdend vorkommt, da man periodische zahlen ja auch als bruch schreiben kann.
>
> *B:* Also ich hab genau das Gleiche mal hier im Forum gelesen und da wurde sogar behauptet, dass es nen mathematischen Beweis dafür gibt. [...]

[19] Usernamen geändert

C: $0,\bar{9}$ ist identisch zu 1.
Beweis: $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 0,\bar{3} + 0,\bar{3} + 0,\bar{3} = 0,\bar{9}$.

Aus den ersten beiden Zitaten spricht eine gewisse Skepsis, ob der vermuteten bzw. behaupteten Gleichheit, wenn nicht sogar eine gewisse Skepsis gegenüber der Mathematik insgesamt. Tatsächlich scheint sich bei Lernenden hier oft etwas zu sträuben: $0.\bar{9} = 0.99999\ldots$ und das kann doch nie und nimmer gleich 1 sein; da fehlt doch immer noch ein zumindest kleines Stückchen, egal wieviele 9-er ich da anhänge!

2.6.2. Mathematische Klärung. Bevor die Thematik weiter diskutieren, nehmen wir eine mathematische Klärung vor. Tatsächlich ist eine solche im Rahmen der Analysis sehr simpel: Die Dezimaldarstellung der periodischen Dezimalzahl $0.\bar{9}$ führt unmittelbar auf die geometrische Reihe und es gilt mit der entsprechenden Summenformel (D.11)

$$\begin{aligned} 0.\bar{9} &= 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009\ldots \\ &= 0.9\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \;=\; 1. \end{aligned} \tag{D.58}$$

Hier tritt in natürlicher Weise der Reihenbegriff auf und wir nehmen das zum Anlass, ihn in einem kleinen Exkurs als einen zentralen Begriff der Analysis ein wenig unter die Lupe zu nehmen. Zur gegenwärtigen Diskussion kehren wir danach in Abschnitt D.§2.6.2 zurück.

§2.6.1 Exkurs: Reihen und Konvergenz

Traditionell gilt der Reihenbegriff im Rahmen der Fachanalysis als eher schwierig. Wir stellen hier seine wesentlichen Facetten kurz und bündig zusammen und beginnen mit eine Auswahl an Beispielen, die auch relevant für unsere spätere Diskussion sind.

2.6.3. Beispiel (Reihen). Viele der in der Praxis auftretenden Folgen haben die spezielle Gestalt einer Summe. Wir betrachten drei davon genauer

(1) *Die geometrische Reihe:* Schon in (D.11) ist uns die endliche geometrische Reihe und ihre Summenformel

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{D.59}$$

begegnet. Um zur Summenformel für die (unendliche) geometrische Reihe für q mit $|q| < 1$ zu gelangen betrachtet man zunächst die *Folge der Partialsummen*

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{D.60}$$

Für q mit $|q| < 1$ gelangt man nun über den den Grenzwert der Folge (s_n)

$$\lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \;=\; \frac{1}{1-q} \tag{D.61}$$

zur (oben verwendeten) Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1}{1-q}. \tag{D.62}$$

Wie wir gleich genauer diskutieren werden, ist das in der letzten Zeile auftretenden Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist per definitionem gleich dem Limes der Partialsummenfolge $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$ und, weil dieser existiert gleich dem konkreten Ausdruck $1/(1-q)$.

(2) *Dezimaldarstellung reeller Zahlen:* Bekanntlich hat jede reelle Zahl eine Dezimalbruchdarstellung (siehe etwa (Heuser, 2003, Nr. 24) oder (Forster, 2016, §5, Sätze 1,2) für $b = 10$), d.h. für jedes a etwa aus $[0,1]$[20] gibt es *Ziffern* $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $(k \in \mathbb{N})$ sodass

$$a \; = \; a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (10)^{-k} \tag{D.63}$$

gilt, was die eigentliche Bedeutung der Schreibweise $a = a_0.a_1a_2a_3\ldots$ ist. Aber auch das bedeutet, wenn wir genauer hinsehen, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \tag{D.64}$$

also a der Limes der Partialsummenfolge (s_n) ist. Bemerke, dass das n-te Glied der Partialsummenfolge (s_n) genau die Zifferndarstellung bis zur n-ten Nachkommastelle ist.

Entscheidend dafür, dass diese Darstellung funktioniert, ist, dass jede Reihe der Form (D.63) konvergiert, was ja nur bedeutet, dass (s_n) aus (D.64) konvergiert. Das folgt aber sofort aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen mittels Monotonieprinzips: (s_n) ist offensichtlich monoton wachsend und außerdem nach oben beschränkt, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} s_n = \; & a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \; \leq \; a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ = \; & a_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) \; = \; a_0 + \frac{9}{10}\,\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \\ < \; & a_0 + \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \; = \; a_0 + 1, \end{aligned} \tag{D.65}$$

wobei wir wieder die Summenformel für die endliche geometrische Reihe verwendet haben. Weil der letzte Ausdruck von n unabhängig ist, gilt die Schranke $a_0 + 1$[21] für alle s_n (($n \in \mathbb{N}$).

(3) *Die Eulersche Zahl e* ist bekanntlich (vgl. etwa (Heuser, 2003, 26.1), (Forster, 2016, §8)) durch die Exponentialreihe gegeben. Genauer für

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} \tag{D.66}$$

gilt

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{D.67}$$

[20] Für allgemeines $a \in \mathbb{R}$ sind Vorzeichen und Zehner- Hunderter- usw. -Stellen zu berücksichtigen, vgl. die angegebenen Zitate. Das ist aber hier nicht der Punkt.

[21] Diese Schranke hätten wir ja auch intuitiv erraten können, oder?

2.6.4. Das Bauprinzip. Alle obigen Beispiele folgen demselben Bauprinzip: Ausgehend von einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (z.B. $a_k = q^k$ in Beispiel 2.6.3(1)) bildet man einen neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{D.68}$$

Also gilt dann

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots \tag{D.69}$$

Derart aufgebaute Folgen treten ausgesprochen häufig in der Mathematik auf und verdienen daher einen eigenen Namen: unendliche *Reihen*. Die Definiton der Konvergenz von Reihen ist damit bereits festgelegt; sie sind ja nur spezielle Folgen. Präzise formuliert man wie folgt.

Mathematische Faktenbox 11: Reihen

2.6.5. Definition (Reihe). Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-te *Partialsumme* (oder Teilsumme)

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{D.70}$$

(2) Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Reihe mit den Gliedern* a_n (nicht s_n!) und wir bezeichnen sie mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{oder kurz} \quad \sum a_k. \tag{D.71}$$

(3) Konvergiert die Folge der Partialsummen (s_n), so sagen wir auch die Reihe $\sum a_k$ konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (kurz $\sum a_k$) und nennen ihn *Summe* oder *Wert* der Reihe.

2.6.6. Bemerkung (Zur Terminologie).

(1) Die hier auftretende aber weithin gebräuchliche *Doppelbedeutung* des Symbols $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (kurz $\sum a_k$) kann anfänglich Verwirrung stiften, daher ganz explizit: Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (kurz $\sum a_k$) steht für zwei unterschiedliche Dinge, nämlich

(a) die Reihe selbst, also die Folge der Partialsummen, d.h.

$$(s_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \tag{D.72}$$

(b) im Falle der Konvergenz von (s_n) auch für den Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{D.73}$$

Diese terminologsiche Festlegung ist sicher etwas unglücklich, mangels Alternativen aber universell gebräuchlich. Mit etwas Erfahrung ist (sollte) es aber nicht so schwierig (sein), sich hier zurecht zu finden.

Mathematische Faktenbox 11 – Fortsetzung

(2) Eine Reihe ist also als eine spezielle (Art von) Folge definiert. Das ist eine mathematisch eleganter „Trick“ um den sehr vagen Begriff einer „Summe von unendlich vielen Summanden“ zu fomalisieren. An diesem sehr schlecht definiereten Begriff festzuhalten ist in vielen Situationen nicht hilfreich und (Heuser, 2003, Nr. 30) spricht sogar von einem „Unbegriff, der nur Verwirrung stiftet“.

(3) Ganz analog zu Folgen betrachtet man auch oft Reihen $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ für beliebige $l \geq 1$.

2.6.7. Beispiel (Reihe). Sei $a_k = \frac{1}{k(k+1}$ $(n \geq 1)$. Die korrespondierende Reihe ist dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}. \tag{D.74}$$

Bemerke, dass $a_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}$ gilt[a] und daher gilt für die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} \right) = \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1} \right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1. \tag{D.75}$$

2.6.8. Bemerkung (Konvergenz von Reihen). Die Untersuchung der Konvergenz von Reihen stellt sich oft als noch schwieriger heraus als für Folgen, vgl. 2.2.8.
Zunächst gilt, dass eine Reihe $\sum a_k$ nur dann konvergieren kann, falls ihre Glieder a_k eine Nullfolge bilden. Diese intuitiv klare Aussage wird meist mittels des Cauchykriteriums für Reihen bewiesen, siehe etwa (Heuser, 2003, Nr. 31). Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, denn die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{k}$ divergiert. Zusammengefasst gilt also die fundamentale Tatsache:

$$\boxed{\sum a_k \quad \text{konvergiert} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad a_k \to 0} \tag{D.76}$$

Um also nachzuweisen, dass eine Folge konvergiert muss man also zeigen, dass a_k *„schnell“* gegen 0 geht. Dafür kennt die Analysis eine Reihe von Tests, z.B. Quotiententest, Wurzeltest, etc. siehe z.B. (Heuser, 2003, Nr. 33), (Forster, 2016), (Steinbauer, 2013b, $\boxed{1}$ §4)). Ist es gelungen die Konvergenz einer Reihe nachzuweisen, kann es weiters noch sehr schwierig sein, den Reihenwert zu berechnen. Das ist in vielen Fällen eine richtige „Kleinkunst“, die dann allerdings eine Fülle von wichtigen und schönen Resultaten liefert, etwa konkrete Darstellungen transzendenter Zahlen, wie etwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}. \tag{D.77}$$

[a] $\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2-(k^2-1)}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

§2.6.2 Fachdidaktische Diskussion: $0.\bar{9}$ ist tatsächlich 1!

In diesem abschließenden Abschnitt von §D.§2 kommen wir auf die oben aufgeworfene und schon positiv beantwortetet Frage: „Ist $0.\bar{9}$ wirklich gleich 1“ zurück und diskutieren sie aus der Sicht der Fachdidaktik. Für eine weitaus detailliertere Darstellung siehe (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.2).

2.6.9. Fertigprodukt und dann? Unsere oben dargestellte mathematische Klärung 2.6.2 stellt in gewisser Weise einen Griff in die Kiste der „mathematischen Fertigprodukte“ dar. Sie ist zwar elegant und fachlich wenig anspruchsvoll (relativ im Kontext der Analysisausbildung im Lehramt), aber in welchem Kontext ist sie auch sinnstiftend?
Die in 2.6.1 zitierten Fragen verweisen darauf, dass es auch um ein Verstehen des Prozesses (bei) der Entstehung des Objekts $0.\bar{9}$ geht, also der Blick auf die Folge der Partialsummen

$$0.9, \quad 0.99 = 0.9 + 0.009, \quad 0.999 = 0.9 + 0.09 + 0.009, \dots \tag{D.78}$$

gerichtet ist. Die formale Antwort 2.6.2 fokussiert dem entgegen auf die Frage nach dem Endprodukt dieses Prozesses, den Grenzwert der Partialsummenfolge.

Hier entsteht ein Spannungsverhältnis zwischen der *prozessorientierten* Frage und der *objektorientierten* Antwort, bzw. in der Terminologie von Abschnitt §2.3 zwischen *dynamischem* und *statischem* Aspekt des Grenzwertbegriffs, in der sich auch das Spannungsverhältnis zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen spiegelt.
An diesem Spannungsverhältnis muss auch jeder Versuch einer verstehensorientierten inhaltlichen Auseinandersetzung ansetzen. Hier kann dies gelingen, indem wir die auch im Alltagsdenken verankerte Figur des hypothetischen Denkens anwenden und uns mit der Frage auseinandersetzten:

> „Welche Konsequenzen hat es, wenn an der Weigerung $0.\bar{9} = 1$ zu akzeptieren, festgehalten wird?“

2.6.10. Konsequenzen aus $0.\bar{9} \neq 1$. Nehmen wir also an, dass $0.\bar{9}$ echt kleiner 1 ist. Dann haben die beiden Zahlen $0.\bar{9}$ und 1 einen positiven Abstand, nennen wir in d. Diese Situation können wir auf dem Zahlenstrahl wie in Abbildung D.32 veranschaulichen.

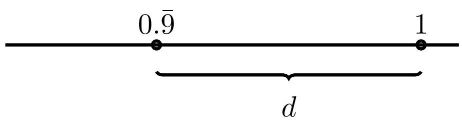

Abb. D.32: Abstand d zwischen $0.\bar{9}$ und 1

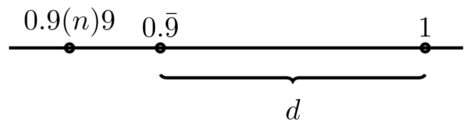

Abb. D.33: $0.9(n)9$ liegt links von $0.\bar{9}$

Jedes endliche Stück (jede endliche Partialsumme) von $0.\bar{9}$ ist kleiner $0.\bar{9}$. Betrachten wir zum Beispiel für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl, die wir durch Abbruch nach der n-ten Nachkommastelle erhalten und bezeichnen wir sie mit $0.9(n)9$. Diese liegt dann links von $0.\bar{9}$ auf dem Zahlenstrahl, siehe Abbildung D.33. Außerdem gilt für den Abstand von $0.9(n)9$ zu 1

$$1 - 0.9(n)9 \;=\; 0.0(n)1 \;=\; \frac{1}{10^n}, \tag{D.79}$$

siehe Abbildung D.34. Mit wachsendem n wird nun der Abstand von $0.9(n)9$ zu 1, nämlich $\frac{1}{10^n}$ immer kleiner. Es ist ja q^n für $q = \frac{1}{10} < 1$ eine Nullfolge. Daher muss $\frac{1}{10^n}$ schließlich auch

d unterschreiten (egal wie klein d auch war)! Das entspricht aber der Situation in Abbildung D.35 und das ist absurd! Denn nun liegt ein endliches Teilstück $0.9(n)9$ von $0.\bar{9}$ *rechts* von $0.\bar{9}$, ist also größer als $0.\bar{9}$.

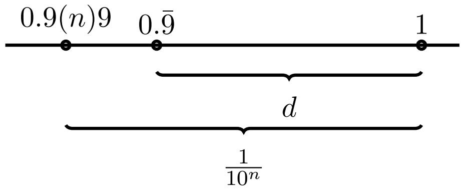

Abb. D.34: Abstand $\frac{1}{10^n}$ zwischen $0.9(n)9$ und 1 für „kleines" n.

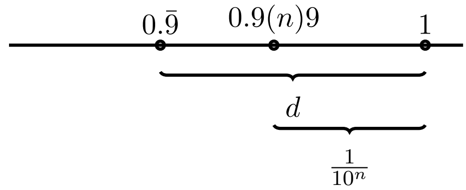

Abb. D.35: Abstand $\frac{1}{10^n}$ zwischen $0.9(n)9$ und 1 für „grosses" n.

Damit sind wir also an einem Widerspruch angelangt nämlich:

> $0.\bar{9}$ ist kleiner als ein endliches Teilstück $0.9(n)9$ seiner selbst.

Um diesen Widerspruch aus der Welt zu schaffen, bleibt uns nur eine Möglichkeit. Wir haben gar keine andere Wahl, als die Annahme (unsere Überzeugung?), dass $0.\bar{9} < 1$ gilt, aufzugeben. Wir müssen also (doch) akzeptieren:

> $0.\bar{9}$ und 1 ist derselbe Punkt auf dem Zahlenstrahl.

2.6.11. Fachdidaktische Abschlussbemerkung. Die Spannung zwischen der innermathematischen Klärung der Tatsache, dass $0.\bar{9} = 1$ gilt und dem ursprünglichen, intuitiven Verstehen sind manifest und unvermeidlich. Die entstehenden Brüche sind beim Lehren von Mathematik geeignet zu thematisieren und inszenieren um sinnstiftende Brücken schlagen zu können, vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, p. 32).
Die Brüche treten besonders im Rahmen der Exaktifizierung des Grenzwertbegriffs zu Tage und unterstreichen unsere Behauptung aus 2.1.1: Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis.
Auch das abschließende Thema für dieses Kapitel, die Vollständigkeit der reellen Zahlen, bestätigt diese Aussagen, wie wir gleich sehen werden.

Übungsaufgabe.

$\boxed{40}$ **Fragen und Antworten.** Kehren Sie zu den Forenbeiträgen in 2.6.1 zurück und bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen *unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Diskussion in der Vorlesung D.§2.6*:

(a) Formulieren Sie in möglichst klarer Sprache, was die jeweiligen Poster fragen bzw. behaupten.
(b) Klären Sie die jeweilige Situation fachlich.
(c) Verfassen Sie jeweils Antwortpostings in denen Sie A, B und C die Situation erklären.

§3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen[22]

3.1.1. Zugänge zu $\mathbb{R}$. Es ist weithin akzeptierte Position der Fachdidaktik, vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.3), dass im schulischen Unterricht im Umgang mit den reellen Zahlen ein intuitiver bzgl. *phänomenologischer* Standpunkt eingenommen werden soll, d.h.

> Man betrachtet die reellen Zahlen als die in natürlicher Weise gegebene Gesamtheit der Punkte auf dem Zahlenstrahl.

Dieser intuitive Zugang im schulischen Kontext entspricht durchaus der historischen Entwicklung: Bis ins 19. Jahrhundert wurde in der Mathematik recht sorglos mit den reellen Zahlen umgegangen und ihre Exaktifizierung stellt gewissermaßen den Schlussstein in der Entwicklung zur heutigen Analysis dar. Das spiegelt sich auch in der Sonderrolle des Kontinuums in Rahmen des Intuitionismus wider, vgl. Abschnitt D.§2.5.1.
Zur Beschreibung des hier propagierten Zugangs zitieren wir Hans Freudenthal (1905–1990), einen niederländischer Mathematiker und einflussreichen Fachdidaktiker:

> Man betrachte die reellen Zahlen als etwas Gegebenes, auf der Zahlengeraden mit den ihr eigentümlichen Operationen. Man analysiere die Zahlengerade mittels der unendlichen Dezimalbrüche.
>
> Man [...] deduziere aus den unendlichen Dezimalbrüchen topologische Eigenschaften der reellen Zahlen, sobald man sie wirklich verwendet.
>
> Dass man sie auch als Cauchyfolge oder Dedekindscher Schnitt definieren kann, ist ein theoretischer Luxus.
> (Freudenthal, 1973, p. 203)

Die hier angesprochenen „Luxusvarianten“ sind zwei tatsächlich verbreitete *konstruktive* Zugänge zu den reellen Zahlen im Rahmen der Hochschulanalysis. Ausgehend vom Axiomensystem (ZFC) von Zermelo-Fraenkel für die Mengelehre (siehe etwa (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 4.5)) werden die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und zuletzt $\mathbb{R}$ konstruiert. Der Zugang, bei dem reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen definiert werden, war womöglich Bestandteil Ihrer Analysisausbildung. Eine Alternative ist die (äquivalente) Definition über die sogenannten Dedkind'schen Schnitte. Dabei ist jedefalls ein langer und anspruchsvoller Weg zurückzulegen, vgl. etwa (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1).
Alternativ und auch durchaus im Rahmen einer Fachanalysis auf Hochschulniveau verbreitet ist der folgende *axiomatische*, von Hilbert vorgeschlagene Zugang[23]: Die Menge $\mathbb{R}$ wird über drei Gruppen von Axiomen definiert, die Körperaxiome (die Grundlagen des „Buchstaberechnens“), die Ordnungsaxiome (die Basis der „Kleiner-Gleich-Beziehung“) und das Vollständigkeitsaxiom (über das wir gleich noch einiges sagen werden). Natürlich sind diese „Axiome“ nur im Rahmen dieses Zugangs Axiome und zwar in dem Sinn, dass die gesamte Analysis aus ihnen alleine heraus logisch abgeleitet wird.

[22] In diesem Paragraphen fehlen in dieser Version des Skriptums noch einige Grafiken, die aber alle in der Vorlesung besprochen wurden. Die entsprechenden Stellen sind mit ♣ ♣ gekennzeichnet.

[23] Dessen Vorzüge gegenüber dem oben erwähnten konstruktiven Zugang wurden von Bertrand Russel mit den Vorzügen von Diebstahl vor ehrlicher Arbeit verglichen (frei zitiert nach (Heuser, 2003, Nr. 30)). Bertrand Russel (1872–1970), der uns schon in einer Fußnote auf Seite 88 begenet ist, war nicht nur Philosoph, Mathematiker, Logiker, Historiker und politischer Aktivist (in Sachen Pazifismus und Solzialismus) sondern auch Literaturnobelpreisträger.

Mathematische Faktenbox 12: Axiomatischer Zugang zu $\mathbb{R}$

Dass der Axiomatische Zugang also diese „Abkürzung“ des konstruktiven Weges wirklich funktioniert, garantiert der folgende Satz, vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 6.4)

3.1.2. Theorem (Richard Dedekind). Es existiert (bis auf Isomorphie) genau ein ordnungsvollständiger geordneter Körper $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt. Wir nennen $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die irrationalen Zahlen.

Liest man diesen Satz als Definition der reellen Zahlen, kann man in der beruhigten Gewissheit das Gebäude der Analysis aufbauen, dass man *sicher* auf den Schultern jener Riesen steht, die $\mathbb{R}$ aus (ZFC) konstruiert haben.

3.1.3. Von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Nun diskutieren wir die im Vollständigkeitsaxiom kodierte intuitiv nicht bzw. nur schwer zu fassende Vorstellung von den

> *dicht* aber *nicht lückenlos* auf dem Zahlenstrahl gelegenen rationalen Zahlen.

Diese ist nicht zuletzt eine erkenntnistheoretische Herausforderung, da die Einführung der reellen Zahlen nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen lässt: Tatsächlich tritt in realen Situationen niemals direkt eine irrationale Zahl auf. Es gibt keinen experimentell-empirischen Nachweis, ob eine gemessene Größe rational oder irrational ist. Damit ist die Erweiterung der rationalen zu den reellen Zahlen eine rein theoretische Angelegenheit!

Dass aber die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um elementargeometrische Zusammenhänge auszudrücken, war schon den Pythagoräern im antiken Griechenland bekannt. So lässt sich bekanntlich weder das Verhältnis zwischen der Seitenlänge eines Quadrat und der Länge seiner Diagonalen durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen (also durch eine rationale Zahl) ausdrücken, noch das Verhältnis zwischen dem Radius eines Kreises und seiner Fläche oder seinem Umfang.

Die Tatsache, dass der Weg von der Entdeckung irrationaler Zahlen bis zur axiomatischen Festlegung der reellen Zahlen mehr als 2 Jahrtausende gebraucht hat, lässt nochmals erkennen, wie schwierig er war—und warum es im Rahmen der Schulanalysis nicht möglich/geraten scheint, hier zu den Grundlagen vorzustoßen. Andererseits wird sich ein intellektuell ehrlicher Unterricht daran messen lassen (müssen), in wie fern er unter Hinweis auf die phänomenologische Basis die Notwendigkeit der Erweiterung des Zahlenbereichs von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ argumentiert und auf ein diebezügliches Verständnis drängt.

3.1.4. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Die am einfachsten zu erfassende analytische Formulierung der geometrsich-anschaulichen „Lückenlosigkeit“ des Zahlenstrahls bzw. der Menge $\mathbb{R}$ ist das *Intervallschachtelungsprinzip.* Dieses besagt anschaulich, dass ein noch so genaues „Hineinzoomen“ auf den Zahlenstrahl kein Loch entdecken kann. Eine mathematische Präzisierung lautet wie folgt:

Mathematische Faktenbox 13: Intervallschachtelungsprinzip

3.1.5. Satz. Sei (I_n) eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eigenschaften

(1) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, und
(2) die Durchmesser von I_n gehen gegen 0[a].

Dann gibt es genau eine reelle Zahl a, die in jedem Intervall I_n liegt.

Eine Veranschaulichung der Situation ist etwa:
♣ `Grafik` ♣

[a] Etwas genauer, falls wir $I_n = [a_n, b_n]$ schreiben gilt $b_n - a_n \to 0$.

Eine Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden „läuft also niemals ins Leere“. Hierbei wird im übrigen wieder auf Folgen als Werkzeuge in einem Näherungsverfahren zurück gegriffen. Schon in der Sekundarstufe 1 werden zumindest intuitiv Intervallschachtelungen bemüht, um etwa Umfänge, Flächen oder Volumina zu berechnen.

Obwohl anschaulich überlegen wird im axiomatischen Aufbau der (Hochschul-)Analysis dem Intervallschachtelungsprinzip meist das Supremumsaxiom vorgezogen, da es in technischen Beweisen leichter einsetzbar ist. Dieses scheint daher meist als Vollständigkeitsaxiom in Rahmen des axiomatischen Zugangs auf, vgl. 3.1.1. Darüberhinaus sind noch weitere äquivalente Formulierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen von fundamentaler Bedeutung in der Analysis. Wir versammeln sie hier in einer mathematischen Faktenbox.

Mathematische Faktenbox 14: Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

3.1.6. Theorem. Die folgenden fünf Aussagen sind äquivalent und charakterisieren daher gleichermaßen die Vollständigkeit der reellen Zahlen:

(1) *Intervallschachtelungsprinzip*, siehe Satz 3.1.5
(2) *Supremumsaxion, Ordnungsvollständigkeit:*
Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.
(3) *Cauchyprinzip:* Jede Cauchyfolge konvergiert.
(4) *Satz oder Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß:*
Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.
(5) *Monotonieprinzip:*
Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert.

Für Beweise und eine weitere Diskussion siehe z.B. (Forster, 2016, §5).

Beachten Sie, dass Folgen in vier der fünf Ausagen, genau in allen die „Prinzipien“ genannt werden, das Hauptwerkzeug darstellen! Sie sind fundamentale Aussagen über die Konvergenz von Folgen, die alle aus der Ordnungsvollständigkeit folgen (und sogar zu ihr äquivalent sind).

Im Schulkontext wichtig ist vor allem das *Monotonieprinzip*, auf das wir schon mehrmals zurückgegriffen haben, z.B. um in 2.6.3(2) zu zeigen, dass jede Deziamlbruchentwicklung konvergiert. Tatsächlich gilt sogar noch mehr, denn

> Eine monoton wachsende Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist. Der Limes ist dann das Supremum.

Das entspricht also genau dem intuitiven Bild, dass eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist, gegen ihr Supremum „gequetscht“ wird, siehe ♣ `Grafik` ♣. Natürlich gilt Analoges für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen.

Zum Abschluss des Paragraphen und des ganzen Kapitels werfen wir noch einen informierten Blick zurück auf B 2.1.1.

3.1.7. Keine vernünftige Analysis auf $\mathbb{Q}$! Wir haben in B 2.1.1 bereits diskutiert, dass der Zwischenwertsatz auf $\mathbb{Q}$ nicht gilt und dass daher auf $\mathbb{Q}$ keine vernünftige Anaylsis möglich ist: Anschaulich völlig klare Sätze sind falsch, wie durch einfache Gegenbeispiel belegt werden kann, vgl. 2.1.1.
Nicht überraschend ist die Tatsache, dass im axiomatischen Aufbau der Analysis der Zwischenwertsatz meist mittels des Intervallschachtelungsprinzip bewiesen wird, also die Vollständigkeit dahinter steckt.
Wir geben nun noch ein Beispiel dieser Bauart:

3.1.8. Monotoniekriterium. Im Zuge von Kurvendiskussionen in der Schulanalysis wird oft die folgende Aussage verwendet:

> Monotoniekriterium: Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit positiver Ableitung ist streng monoton wachsend.

Diese Aussage ist anschaulich sehr evident, wird aber falsch, wenn man sie auf die rationalen Punkte im Intervall $[a, b]$ einschränkt, also nur in diesen eine positive Ableitung verlangt. Ein Gegenbeispiel ist etwa

$$f :\ I := [1, 2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2 - x^2}. \tag{D.80}$$

Tatsächlich ist f auf allen Punkten in I differenzierbar (als rationale Funktion ohne Nullstellen im Nenner) mit positver Ableitung aber nicht monoton steigend, siehe Abbildung ♣ ♣.

Übungsaufgabe.

$\boxed{41}$ **Monotoniekriterium.** Arbeiten Sie die Details des Gegenbeispiels aus 3.1.8 aus, d.h. argumentieren sie, dass $f :\ I := [1, 2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2-x^2}$ das Monotoniekriterium verletzt.

Literaturverzeichnis

H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

G. Bleier, J. Lindenberg, A. Lindner, and E. Süss-Stepancik. *Dimensionen — Mathematik 6.* Wien: Verlag E. Dorner, 2018.

W. Blum. Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *MU*, 25:42–50, 1979.

W. Blum and A. Kirsch. Anschauung und Strenge in der Analysis IV. *MU*, 25, 1979.

W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, and O. Köller. *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor, 2006.

Bernard Bolzano. *Paradoxien des unendlichen.* Reclam, 1851.

J.S. Bruner. Der Akt der Entdeckung. In Neber H., editor, *Entdeckendes Lernen.* Weinheim, Basel: Beltz Verlag, 1981.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum, Heidelberg, 2006.

Zoltan P Dienes and Edmond W Golding. *Methodik der modernen Mathematik: Grundlagen für Lernen in Zyklen.* Herder, Freiburg, 1970.

Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, volume Band 2. Klett, Stuttgart, 1973.

Hans Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

Stefan Götz. Ein versuch zur analysis-ausbildung von lehramtsstudierenden an der universität wien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, pages 364–367. WTM-Verlag, Münster, 2013.

G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V Ulm, and H.-G. Weigand. *Didaktik der Analysis.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis.* B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Math. Ann.*, 95(1):161–190, 1926. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01206605. URL `https://doi.org/10.1007/BF01206605`.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung.* Springer, 2013.

Bertrand Russel. *Philosophie des Abendlandes.* Europa Verlag, Zürich, 1950.

H. Schichl and R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Spektrum, Heidelberg, 2018.

Fritz Schweiger. Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2,3), 1992.

Roland Steinbauer. Analysis in einer Variable für LAK, Februar 2013a.

Roland Steinbauer. Einführung in die Analysis, Februar 2013b.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).

Hans-Joachim Vollrath and Hans-Georg Weigand. *Algebra in der Sekundarstufe.* Spektrum, Akad. Verlag, 2007.

R. vom Hofe. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1995.

Christof Weber. Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In *Mathematik verständlich unterrichten.* Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1996.

Erich Ch Wittmann, Gerhard N Müller, and Martina Röhr. *Das Zahlenbuch: Mathematik im... Schuljahr. 2: Arbeitsheft"mit Blitzrechnen".* Klett, 2004.