1	
2	
3	
4	
G	

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Note:

Prüfung zu "Einführung in das mathematische Arbeiten"

Roland Steinbauer, Sommersemester 2007

(11.1.2008)

1. *(Kurvendiskussion)*
   Gegeben seien die beiden Funktionen f und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$f(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 11x + 8), \qquad g(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

   Die Graphen beider Funktionen schneiden sich zweimal auf der x–Achse. Im größeren der beiden Schnittpunkte schneiden sich die Funktionen rechtwinkelig (d.h. es stehen die Tangenten beider Kurven normal aufeinander).

   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von g. (**4 Punkte**)

   (b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von g. (**2 Punkte**)

   (c) Bestimme Wendepunkte und Wendetangenten von g. (**1 Punkt**)

   (d) Skizziere die Graphen von f und g im Intervall $[-3, 1]$ (**1 Punkt**)

   (e) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und g einschließen. (**2 Punkte**)

2. (a) *(Analytische Geometrie)* Bestimme rechnerisch die Lagebeziehung der drei Ebenen im Raum und fertige eine Skizze an.

   $$\begin{array}{rrcrcrcr} \varepsilon_1: & x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -8 \\ \varepsilon_2: & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \\ \varepsilon_3: & -2x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & -7 \end{array}$$

   (**5 Punkte**)

   (b) *(Gleichung)* Löse das folgende Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} 5^{x-y} &= 25 \\ 5^x 25^y &= 625. \end{aligned}$$

   (**5 Punkte**)

3. (a) (*Algebra*) Definiere die Begriffe *Gruppe* und *abelsche Gruppe* und stelle fest, ob $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$

$$x \circ y := xy - 4x - 4y + 16$$

eine abelsche Gruppe bildet. (**7 Punkte**)

(b) (*Kombinatorik*) Gib eine rekursive Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. (**3 Punkte**)

4. (a) (*Induktion*) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ die Ungleichung

$$n^n \geq e^{n+1}$$

gilt. (**4 Punkte**)

(b) (*Abbildungen*) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektive Abbildungen. Zeige, dass dann auch $g \circ f$ bijektiv ist. (**3 Punkte**)

(c) (*Logik*) Verneine die folgende Aussage ohne Verwendung des Zeichens $\neg$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(**2 Punkte**)

(d) Ein einer dunklen Kiste liegen 12 ununterscheidbare rote Socken, 12 ununterscheidbare blaue Socken und 12 ununterscheidbare grüne Socken. Man kann die Farbe der Socken nicht erkennen, bevor man sie nicht aus der Kiste geholt hat. Sie dürfen einmal in die Kiste greifen und dabei soviele Socken sie wollen herausnehmen. Wie viele Socken müssen Sie mindestens nehmen, damit unter den von Ihnen gewählten Socken sicher ein passendes Paar Socken (d.h. zwei Stück gleicher Farbe) ist. (**1 Punkt**)