# Kapitel B

# Fachdidaktischer Bezugsrahmen

In diesem Kapitel stellen wir einige fachdidaktische Konzepte vor, um einen Überbau und Bezugsrahmen zu schaffen, in dem eine differenzierte Diskussion der *Inhalte* der Schulanalysis erfolgen kann.

Wir beginnen mit den Konzepten der *Grundvorstellungen und Aspekte* mathematischer Begriffe, die uns im Weiteren als Analysewerkzeuge wichtige Dienste leisten werden.

Danach wenden wir uns den *Grunderfahrungen im Mathematikunterricht* zu. Wir beginnen mit einer Analyse der Schwierigkeiten, denen der Analysisunterricht in der Schule begegnet. Diese liegen in der inhaltlichen Komplexität des Gegenstandes begründet und wir skizzieren den fachdidaktischen Diskurs, der sich mit Strategien zur Überwindung dieser Schwierigkeiten befasst. So werden wir zu den drei Winter'schen Grunderfahrungen geführt, die den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterricht fassen. Wir spezialisieren sie für das Gebiet der Analysis, wobei wir insbesondere auf die Verschränkung der Grunderfahrungen eingehen.

## §1 Grundvorstellungen

Im Mathematikunterricht sollen Schüler/innen neue Inhalte tiefgreifend verstehen und internalisieren und diese *nicht* nur auf einer oberflächlichen und unverstandenen symbolischen oder verbalen Ebene wiedergeben können. Guter Unterricht zielt daher darauf ab, dass die Schüler/innen

- *tragfähige Vorstellungen* zu neuen Begriffen aufbauen und
- diesen eine *inhaltliche Bedeutung geben*, um
- mit den Inhalten *verständnisvoll umgehen* zu können.

In der Mathematikdidaktik wird diese Problematik oft aus dem Blickpunkt des sogenannten *Grundvorstellungskonzepts* theoretisch beleuchtet. Das Konzept der Grundvorstellungen hat seinen Ursprung in der deutschen Rechendidaktik des 19. Jahrhunderts und wurde in seiner modernen Fassung vor allem von Rudolf vom Hofe in seiner Dissertation (vom Hofe, 1995) in die fachdidaktische Diskussion eingebracht. Der Kern dieser Betrachtungsweise ist es, Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und der individuellen Begriffsbildung Lernender herzustellen.

## §1.1 Aspekte und Grundvorstellungen

Allgemein liefert das Grundvorstellungskonzept ein didaktisches Modell, das mathematisches Verständnis an inhaltlichen Vorstellungen festmacht. Wir wollen das zunächst an einem Beispiel erläutern, das auch zeigt wie verschiedene Grundvorstellungen Verständnis erleichtern (vgl. (Weber, 2013))

**1.1.1. Beispiel (Dividieren).** In der Grundschule kommen beim (ganzzahligen) Dividieren (ohne Rest) unter anderem die folgenden beiden Grundvorstellungen zum Tragen.

(1) Vorstellung des Verteilens
(2) Vorstellung des Enthaltenseins

Die Aufgabenstellung $21 : 7$ kann mittels beider Grundvorstellungen problemlos gelöst werden. Aber schon an diesem einfachen Beispiel kann man sehen, dass verschiedene Grundvorstellungen verschieden weit tragen und, dass für eine Erweiterung von Begriffen ein Wechsel von Grundvorstellungen hilfreich sein kann. Z. B. kann man die Aufgabe $20 : \frac{1}{2}$ schlecht mit (1) lösen. Mit (2) hingegen funktioniert es ganz einfach: $\frac{1}{2}$ ist in 20 klarerweise 40-mal enthalten. Darüber hinaus kann man auch begründen, weshalb diese Division nicht — wie von den natürlichen Zahlen her gewohnt — verkleinert, sondern vergrößert: Das Ergebnis 40 bezeichnet nicht vierzig Ganze, sondern vierzig Halbe.

In Bezug auf komplexerer mathematischer Inhalte lohnt es sich neben dem Grundvorstellungsbegriff auch noch die Terminologie der *Aspekte eines mathematischen Begriffs* in die Reflexion mit einzubeziehen, siehe (Greefrath et al., 2016, Abschn. 1.1.5). Diese Terminologie entspricht durchaus der alltagssprachlichen Bedeutung, genauer[1]:

**Fachdidakt. Professionswissen. Box 1: Aspekte math. Begriffe**

Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser *fachlich* beschrieben wird (werden kann).

Beispiele für Aspekte etwa des Funktionsbegriffs sind der Zuordnungsaspekt und der Paarmengenaspekt, die wir in Kapitel **??** besprechen werden.
Wichtig ist jedenfalls, dass ein Aspekte ein *fachinhaltlicher* Begriff ist. Die Aspekte eines Begriffs sind durch *mathematische* Fakten gegeben — sie bilden den Kern seiner fachlichen Definition oder Charakterisierung.

Dazu im Gegensatz sind Grundvorstellungen ein Konzept *fachdidaktischer* Art.

**Fachdidakt. Professionswissen. Box 2: Grundvorstellung**

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Die Beziehung zwischen Grundvorstellungen und Aspekten ist nun die folgende: Grundvorstellungen erlauben es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit Bedeutung zu versehen

[1]Die Terminologie in (Greefrath et al., 2016, p. 17) ist etwas unglücklich. Das Wesen eines Aspektes ist es, dass er nicht notwendigerweise den ganzen Begriff erfasst. Genau das wird aber durch Verwenden des Wortes „charakterisiert“ suggeriert, weil in der mathematischen Fachsprache unter einer Charakterisierung eine *äquivalente* Umformulierung verstanden wird, die ja dann *den ganzen* Begriff umfasst.

und so in einen sinnhaltigen Kontext zu setzen. Das wiederum ist eine Voraussetzung für eine verständnisvolles Hantieren mit dem Begriff.
Grundvorstellungen entwickeln sich, wenn Lernende sich mit Phänomenen befassen, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zu einem Aspekt entwickelt werden, aber auch eine Grundvorstellung verschiedene Aspekte des Begriffs berühren.

Wir werden in den folgenden Kapiteln die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen verwenden, um einen entsprechend differenzierten Blick auf die Kernbegriffe der Schulanalysis werfen zu können.
Unmittelbar werden wir aber noch einige notwendige Details dieser Terminologie diskutieren. Eine umfassende Darstellung, die insbesondere den Nutzen dieser Begriffsbildungen betont, findet sich in (Greefrath et al., 2016, Abschn. 1.5).

## §1.2 Verfeinerung des Grundvorstellungskonzepts

Der Begriff der Grundvorstellung kann sowohl in einem *normativen* Kontext, wie auch in einem *individuell* Kontext verwendet werden. Genauer unterscheiden wir zwischen *universellen* und *individuellen* Grundvorstellungen.

**1.2.1. Universelle Grundvorstellungen** haben normativen Charakter. Sie sind das Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und geben Antwort auf die Frage, was sich Lernende generell bzw. idealerweise unter einem mathematischen Begriff vorstellen soll(t)en. Das Ausbilden bestimmter universeller Grundvorstellungen ist also ein Ziel des Mathematikunterrichts, das Lehrer/innen Orientierungshilfen zu Gestaltung des Unterrichts.

**1.2.2. Individuelle Grundvorstellungen** sind Grundvorstellungen, die Lernende zu einem bestimmten Begriff tatsächlich entwickelt haben. Sie sind ebenfalls Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und/oder Beobachtungen und beantworten die Frage, was sich Lernende unter einem bestimmten Begriff vorstellen. Sie geben somit ebenfalls Orientierung für den Mathematikunterricht, indem sie Ausgangspunkt für eine Unterrichtsplanung bzw. Fördermaßnahme sein können, die zum Ziel hat die Lernenden in Richtung universeller Grundvorstellungen zu führen.

Im Folgenden werden wir meist (und falls nicht anders angegeben) Grundvorstellungen in ihrer normativen Form verwenden, also immer von den universellen Grundvorstellungen im Zusammenhang mit (Aspekten) analytischer Begriffe sprechen. Zusammengefasst haben wir:

**Fachdidakt. Professionswissen. Box 3: Universelle vs. Individuelle Grundv.**

**Universelle Grundvorstellungen** haben normativen Charakter und ihre Ausbildung ist Ziel des Unterrichts.

**Individuelle Grundvorstellungen** sind tatsächlich ausgebildete Vorstellungen Lernender und können Ausgangspunkt des Unterrichts sein.

Eine weitere Ausdifferenzierung der Grundvorstellungsbegriffs ist vor allem im Kontext der Schulanalysis hilfreich. Grundvorstellungen wurden ursprünglich vor allem in der Didaktik der Primar- und Sekundarstufe 1 verwendet und meinten wirklich sehr konkrete Vorstellungen, die sich auf alltägliche und anschauliche Dinge bezogen, z. B. im Kontext von Beispiel 1.1.1(1) das gerechte(!) Aufteilen von Gummibärchen unter einer bestimmten Anzahl von Kindern.

Im Kontext der Schulanalysis sind aufgrund des höheren Abstraktionsgrades oft keine adäquaten an das Alltagsdenken anknüpfende Grundvorstellungen möglich oder sinnvoll. Daher wurde der Begriff der *sekundären* Grundvorstellungen kreiert, die sich nicht auf Alltägliches beziehen (diese werden in diesem Kontext dann *primäre* Grundvorstellungen genannt), sondern solche, die sich auf andere, einfachere mathematische Begriffe beziehen. Zusammengefasst ergibt sich also:

**Fachdidakt. Professionswissen. Box 4: Primäre vs. sekundäre Grundvorst.**

**Primäre Grundvorstellungen** verbinden (Aspekte) mathematischer Begriffe mit konkreten Alltagserfahrungen an realen Gegenständen.

**Sekundäre Grundvorstellungen** verbinden (Aspekte) mathematischer Begriffe mit bestehenden Vorstellungen einfacherer mathematischer Begriffe.

## §2 Grunderfahrungen

In diesem Abschnitt erweitern wir unseren fachdidaktischen Referenzrahmen und diskutieren die sogenannten Winter'schen Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts (Winter, 1996). Damit erweitern wir unsere didaktischen Analyse- und Konstruktionsinstrumente.
Dabei nehmen wir zunächst die Diskussion aus Abschnitt A.§1.2 wieder auf und diskutieren die Schwierigkeiten, die beim Unterrichten analytischer Inhalte in der Schule auftreten.

### §2.1 Warum Analysis schwierig zu unterrichten ist

Der fachdidaktische Diskurs zur Schulanalysis kommt im Wesentlichen zu dem Schluss, dass die Schwierigkeiten beim Unterrichten von Analysis inhärent mit der inhaltlichen Schwierigkeit des Gebiets verbunden ist, vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 1.1). Es wird auch von der Sonderrolle der Analysis innerhalb der Schulmathematik gesprochen. Diese äußerst sich in den folgenden drei *Spannungsfeldern*, vgl. (Götz, 2013).

**2.1.1. Anschauung vs. Strenge.**
Die Analysis als mathematische Teildisziplin verfügt über einen kanonischen, strengen und deduktiven Aufbau, vgl. A.§1.1.6, der zum Wissensstand der Lehrer/innen gehört. Andererseits muss der Unterricht viel mehr auf Anschaulichkeit beruhen, der dann auf Kosten der Strenge geht/gehen muss. Der Kern des Problem ist dabei:

*Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis.*

Zum Beispiel garantiert erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen die Gültigkeit des Nullstellensatzes (Zwischenwertsatzes), vgl. (Forster, 2016, §11, Satz 1): Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 - 2, \tag{B.1}$$

hat auf dem Intervall $I = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 \leq x \leq 2\}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ gilt. In nebenstehendem Graph sieht man das nicht unmittelbar.

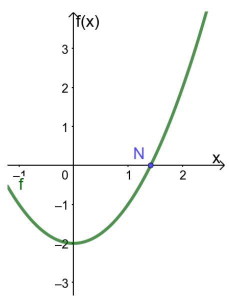


Abbildung B.1: Der Graph von $f(x) = x^2 - 2$.

**Übungsaufgabe.**

$\boxed{5}$ **Zwischenwertsatz: nicht auf $\mathbb{Q}$!** In dieser Aufgabe soll genauer untersucht werden, warum der Nullstellen-/Zwischenwertsatz der Analysis gilt, welche Voraussetzungen wesentlich sind und was das mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen zu tun hat. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

a) Geben Sie eine exakte Formulierung des Zwischenwersatzes.
b) In welcher Weise geht die Stetigkeit der Funktion bzw. die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ im Beweis ein?
c) Geben Sie eine schüler/innengerechte Erklärung des Sachverhalts, evtl. unter Verwendung des Beispiels (B.1) aus der Vorlesung.

**2.1.2. Normative Stoffbilder vs. individuelle Sinnkonstruktionen der Lernenden.** Die obige Problematik tritt auch klar in den Differenzen zwischen den normativen Stoffbildern zu zentralen analytischen Begriffsbildungen und den individuelle Sinnkonstruktionen der Lernenden zu Tage. Mit unserer Terminologie aus Abschnitt B.§1.2 können wir das so ausdrücken:

> *Es besteht oft eine große Differenz zwischen den universellen und den individuellen Grundvorstellungen zu zentralen (Aspekten) analytischer Begriffe.*

Ein Beispiel dafür wäre etwa im Kontext des Stetigkeitsbegriffs für reelle Funktionen das Spannungsverhältnis zwischen der $\varepsilon$-$\delta$-Definition und der Vorstellung, dass der Graph einer stetigen Funktion keine Sprünge hat.

**Übungsaufgabe.**

$\boxed{6}$ **Stetigkeit in verschiedenen Gewändern.** Ziel dieser Aufgabe ist es den Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen zu reflektieren. Bearbeiten Sie die folgenden Punkte:

a) Formulieren Sie den Begriff der Umgebungsstetigkeit, d.h. formulieren Sie die $\varepsilon$-$\delta$-Definition für die Stetigkeit.
b) Geben Sie eine verbale Formulierung dieser Definition.
c) Was stellen Sie sich unter einer stetigen Funktion vor? Was wäre eine adäquate Vorstellung für Schüler/innen etwa in der 7. Klasse?
d) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph keine Sprünge hat“?
e) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph ohne abzusetzen durchgezeichnet werden kann“?

**2.1.3. Systematik vs. Heuristik.** Die hochentwickelte Systematik des Analysisunterrichts weist eine große Kalküllastigkeit auf. Diese geht naturgemäß zu Lasten der Heuristik, was oft eine Sinnstiftung erschwert oder verhindert. Kurz formuliert:

> *Kalkül ist nicht sinnstiftend.*

Insbesondere ist der analytische Kalkül sehr Algebra-intensiv. Schüler/innen scheitern oft schon vor der eigentlichen analytischen Begriffsbildung. Wird z. B. die Differenzierbarkeit einer Funktion mittels Differentialkoeffizienten erklärt, muss sichergestellt sein, dass die Schüler/-innen ausreichende Fähigkeiten aus der Sekundarstufe 1 mitbringen, um zunächst den Differenzenquotienten in seiner Bedeutung erfassen können.

In diesem Kontext können dann auch Fragen wie die folgende auftreten.

**Übungsaufgabe.**

$\boxed{7}$ **Was ist hier passiert?** Betrachten Sie die folgenden beiden Wege eine Stammfunktion für $\sin(2x)$ zu berechnen:

a) $\int \sin(2x)dx = \int \sin(z)\,\frac{1}{2}\,dz = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$, wobei $z = 2x$ substituiert wurde.

b) $\int \sin(2x)dx = \int 2\sin(x)\cos(x)dx = \int 2z\cos(x)\frac{dz}{\cos(x)} = \sin^2(x) + C'$, wobei der Doppelwinkelsatz und die Substitution $z = \sin(x)$ verwendet wurde.

Was ist hier passiert? Stehen diese beiden Rechnungen im Widerspruch zueinander? Sind beide richtig? Wie müssen diese Ergebnisse richtig interpretiert werden?

**2.1.4. Die normative Kraft des Faktischen.** Schließlich geht mit dem traditionellen Unterricht eine hoch entwickelte und oft unhinterfragte *Aufgaben-* und *Prüfungskultur* einher, der sich die einzelne Lehrkraft schwer entziehen kann. Auch diese Kultur ist von einer hohen Kalküllastigkeit geprägt und verkürzt oft echte Anwendungen.

**2.1.5. Fazit: Tendenzen des Analysisunterrichts** sind es

(1) heuristisches Arbeiten und echte Anwendungen zugunsten der entwickelten Theorie zu vernachlässigen und
(2) die Theorie sehr auf den Kalkülaspekt zu verkürzen.

Diese Defizite sind in erster Linie *nicht* den Umständen, den Lehrer/innen oder Schüler/innen anzulasten, sondern liegen in der Schwierigkeit des mathematischen Gebiets Analysis begründet.

## §2.2 Grunderfahrungen

Um die oben beschriebene Problematik besser einordnen zu können, betten wir sie in einen breiteren Rahmen ein: den *allgemeinbildenden Auftrag des Mathematikunterrichts* insgesamt. Ein entsprechender Bezugsrahmen geht auf (Winter, 1996) und die 1990-er Jahre zurück und wird seither im fachdidaktischen Diskurs breit verwendet.

**2.2.1. Die drei Winterschen Grunderfahrungen.** Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht:

**Fachdidakt. Professionswissen. Box 5: Grunderfahrungen**

(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (*mathematischer Blick*),
(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (*mathematische Welt*),
(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben *(heuristische Fähigkeiten)*.

Die Position der Mathematikdidaktik zum Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, einer vertiefte Allgemeinbildung mit Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden ist (Danckwerts and Vogel, 2006, p. 7):

*Erst in der wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2 seine spezifische bildende Kraft entfalten.*

**2.2.2. Die Grunderfahrungen im Bereich der Analysis.** Im Kontext dieser Vorlesung sind wir primär an der Ausgestaltung der Grunderfahrungen in der Analysis interessiert, die wir hier vornehmen.

(G1) Der mathematische Blick wird ermöglicht durch einen Blick auf außermathematische Probleme, die sich mit analytischen Begriffen fassen lassen, z. B. Modellierungen mit Hilfe des Ableitungsbegriffs (lokale Änderungsrate) und des Integralbegriffs (als Rekonstruieren), wie wir in den entsprechenden Kapiteln sehen werden.

(G2) Die Analysis als eigene mathematische Welt kann durch zwei Aspekte erfahrbar gemacht werden. Erstens im Blick auf Begriffsentwicklungen, an deren Ende analytische Begriffe stehen, z. B. Grenzwert, Ableitungs- und Integralbegriff, aber auch die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Zweitens durch die Entwicklung analytischer Kalküle, etwa der Ableitungsregeln oder der Grenzwertsätze.

(G3) Heuristische Fähigkeiten können in der Analysis z. B. durch intuitives Argumentieren mit Grenzwerten erlernt werden. Statt zum Grenzwert überzugehen, kann mit hinreichend kleinen Größen operiert werden.

**2.2.3. Integration der drei Grunderfahrungen: Aber wie?** Um das in 2.2.1 geforderte Ineinandergreifen der drei Grunderfahrungen für Schüler/innen erlebbar zu machen, werden in der fachdidaktischen Diskussion folgende Punkte vorgeschlagen und diskutiert, die wir hier bereits für den Inhaltbereich Analysis konkretisieren.

(1) *Mathematik als Prozess und als Produkt:* Es sollte möglichst eine Balance zwischen den beiden gleichermaßen wichtigen Gesichtspunkten zur Mathematik gewahrt werden, der

*Mathematik als Prozess (G1) und (G3) und der Mathematik als Produkt (G2).*

Zwei analytische Beispiele wären hier etwa die Idee der Ableitung als Übergang von der mittleren zur momentanen Änderung vs. dem Berechnen von Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln und die Idee des Integrals als Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten vs. dem Berechnen von Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln.

(2) *Orientierung an fundamentalen Ideen:* Das ist ein immer wieder betontes fachdidaktisches Prinzip. Dabei haben fundamentale Ideen die drei folgenden charakteristischen Merkmale (vgl. Schweiger (1992)):
- *Weite:* Sie durchziehen den Schulstoff wie ein roter Faden und bieten sich im Sinne des Spiralprinzips auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus zur Konkretisierung an.
- *Tiefe:* Sie geben zumindest teilweise Aufschluss über das Wesen der Mathematik.
- *Sinn:* Sie sind im Alltagsdenken verankert oder lassen eine solche Verankerung zumindest erkennen.

Fundamentale Ideen der Analysis sind etwa
- die Idee des *funktionalen Zusammenhangs*, der die gesamte Analysis durchzieht,
- die Idee des *Messens*, der vom Begriff der reellen Zahl bis zum Differential- und Integralbegriff trägt,
- die Idee der *Approximierens*, die mit dem Grenzwertbegriff einhergeht,
- die Idee der *Änderungsrate*, die sowohl die Differential- als auch die Integralrechnung dominiert, und

- die Idee des *Optimierens*, die im Rahmen des Extremwertkalküls einen zentralen Stellenwert hat.

(3) *Tragfähige Grundvorstellungen:* Wie in Abschnitt B.§1 erklärt, ist der Aufbau von Grundvorstellungen der Kern eines verständnisorientierten Mathematikunterrichts. Darüberhinaus ist es ebenso wichtig, zwischen Grundvorstellungen also Ideen eines mathematischen Begriffs und seiner kalkülhaften Umsetzung zu unterscheiden und diesen beiden Polen zu vermitteln. Wir werden im Verlauf der Vorlesung Grundvorstellungen zu den zentralen analytischen Begriffen ausführlich diskutieren, hier nennen wir nur exemplarisch die Idee der Ableitung als lokale Änderungsrate.

(4) *Inhaltliche Vernetzung:* In einem kumulativen Lerngeschehen wie in der Mathematik ist die Vernetzung von neuen Inhalten mit schon Bekanntem essentiell. Dabei unterscheidet man zwischen *vertikaler* Vernetzung im Sinne des Spiralprinzips und fundamentaler Ideen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets und *horizontaler* Vernetzung, die Brücken zwischen verschiedenen Teilgebieten meint.
Ein analytisches Beispiel für eine vertikale Vernetzung ist etwa die Idee der *Änderung*, die von absoluten und relativen Änderungen über die Prozentrechnung bis zum Ableitungsbegriff trägt. Ein Beispiel für eine horizontale Vernetzung zur Stochastik ist etwa die Behandlung der *Normalverteilung*.

(5) *Anwendungsorientierung* ist zentral für (G1) und (G3). Um aber eine gute Verbindung mit (G2) zu erreichen, ist ein Behandeln „echter“ Anwendungen und das Durchlaufen des gesamten *Modellierungskreislaufs* (Problembeschreibung, Modellierung, Modellberechnung, Interpretation und Validierung) essentiell.
Im Bereich der Analysis bieten sich Modellierungen im kinematischen oder geometrischen Kontext an. Schwieriger wird es, wenn diskrete Probleme in ein kontinuierliches Setting übertragen werden müssen, um sie überhaupt den Werkzeugen der Analysis zugänglich zu machen.

# Literaturverzeichnis


H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

R. Danckwerts and D. Vogel. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum, Heidelberg, 2006.

Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

Stefan Götz. Ein versuch zur analysis-ausbildung von lehramtsstudierenden an der universität wien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, pages 364–367. WTM-Verlag, Münster, 2013.

G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V Ulm, and H.-G. Weigand. *Didaktik der Analysis.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis.* B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung.* Springer, 2013.

Fritz Schweiger. Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2,3), 1992.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).

R. vom Hofe. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1995.

Christof Weber. Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In *Mathematik verständlich unterrichten*. Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1996.