

# **Schulmathematik Analysis**

Vorlesungsskriptum  
Wintersemester 2022/23

Roland Steinbauer  
[roland.steinbauer@univie.ac.at](mailto:roland.steinbauer@univie.ac.at)  
<http://www.mat.univie.ac.at/~stein>  
Universität Wien, Fakultät für Mathematik  
Oskar-Morgenstern-Platz 1  
A-1090 Wien

Sonja Kramer  
[sonja.kramer@kphvie.ac.at](mailto:sonja.kramer@kphvie.ac.at)  
KPH Wien/Krems  
Dr. Gschmeidlerstraße 28  
A-3500 Krems

unter Mitarbeit von  
Evelyn Süss-Stepancik  
PH Wien  
Grenzackerstraße 18  
A-1100 Wien

18. Januar 2023

## Vorwort

Das vorliegende Skriptum begleitet die Vorlesung

### Schulmathematik Analysis

vom Wintersemester 2022/23 an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien. Es ist eine leichte Weiterentwicklung des gleichnamigen Skriptums vom Wintersemester 2020/21 und beruht auf dem Skriptum und der Vorlesungsausarbeitung zur selben Vorlesung vom Wintersemester 2018/19 von Evelyn Süss-Stepancik und Roland Steinbauer.

Die Hauptquellen auf die wir uns stützen sind einerseits die didaktisch ausgezeichneten Bücher zur (Schul-)Analysis (Danckwerts und Vogel, 2005) und (Danckwerts und Vogel, 2006), sowie das Standardwerk zur Didaktik der Analysis (Greefrath et al., 2016). Wenn immer es uns sinnvoll erscheint, beziehen wir auch aktuelle Beiträge aus der fachdidaktischen Literatur mit ein.

Bei allen fachmathematischen Inhalten zur Analysis beziehen wir uns (fast) ausschließlich auf das Skriptum (Steinbauer, 2022) und für zugrundeliegende mathematische Inhalte auf das Buch zur Einführung in das mathematische Arbeiten (Schichl und Steinbauer, 2018).

Viel Inspiration verdanken wir den Skripten und Überlegungen zur Schulmathematik von Stefan Götz und jenen zur Analysis von Günther Hörmann. Mit ihnen und mit Christoph Ableitinger und Kata Seböök tauschen wir uns immer wieder gerne zu (aktuellen) Fragen der Fachdidaktik und der Lehramtsausbildung aus.

Neben ihnen danken wir den vielen Student\*innen, die über die Jahre Fehler und Ungeheimnisse in Vorlesung und Skriptum aufgedeckt und uns mit ihren Fragen herausgefordert haben, noch mehr nach Klarheit zu streben. Diesbezüglich haben wir natürlich auch viel von der Zusammenarbeit mit “unseren” Übungsleiter\*innen profitiert, für sie seien stellvertretend Monika Dörfler und Christian Spreitzer erwähnt.

Klarerweise liegt die Verantwortung für alle verbliebenen Fehler und Schwächen des Texts bei uns alleine und wir freuen uns über einschlägige Hinweise.

Wien im September 2022  
Sonja Kramer & Roland Steinbauer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Analysis zwischen Schule und Universität . . . . .	1
1.1.A Was soll und was will die Analysis . . . . .	1
1.1.B Was soll und was will die Schulanalysis? . . . . .	4
1.2 Ausblick auf die Vorlesung . . . . .	7
<b>2 Fachdidaktischer Bezugsrahmen</b>	<b>11</b>
2.1 Grundvorstellungen . . . . .	11
2.1.A Aspekte und Grundvorstellungen . . . . .	12
2.1.B Verfeinerung des Grundvorstellungskonzepts . . . . .	13
2.2 Grunderfahrungen . . . . .	14
2.2.A Warum Analysis schwierig zu unterrichten ist . . . . .	14
2.2.B Grunderfahrungen . . . . .	16
<b>3 Der Funktionsbegriff</b>	<b>19</b>
3.1 Einleitung . . . . .	19
3.1.A Zur Entstehung des Funktionsbegriffs . . . . .	20
3.2 Zum Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs . . . . .	20
3.2.A Funktionales Denken . . . . .	20
3.2.B Zum Technologieeinsatz bei Funktionen . . . . .	25
3.3 Die Mathematik des Funktionsbegriffs . . . . .	26
3.3.A Der Kern des Funktionsbegriffs . . . . .	26
3.3.B Wichtige Eigenschaften von Funktionen . . . . .	28
3.3.C Weiterführende Bemerkungen . . . . .	29
3.4 Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff . . . . .	32
3.4.A Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff . . . . .	32
3.4.B Aspekte des Funktionsbegriffs . . . . .	33
3.4.C Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff . . . . .	35
<b>4 Folgen, Grenzwert &amp; die Vollständigkeit von <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>37</b>
4.1 Folgen . . . . .	37
4.1.A Fachliche Grundlagen . . . . .	38
4.1.B Rekursive Prozesse und ihre Modellierung . . . . .	41
4.1.C Folgen in der Schule — Zugänge im Unterricht . . . . .	44
4.1.D Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff . . . . .	58

4.2	Der Grenzwertbegriff . . . . .	62
4.2.A	Von der Iteration zum Grenzwertbegriff . . . . .	62
4.2.B	Der Grenzwertbegriff: Fachliche Grundlagen und Formulierungen . . . . .	67
4.2.C	Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff . . . . .	72
4.2.D	Der Grenzwert in der Schule - Zugänge im Unterricht . . . . .	76
4.2.E	Historisch-philosophischer Exkurs: Über das Unendliche . . . . .	82
4.2.F	Rückblick, Reihen und eine tiefsthinige Frage . . . . .	89
4.3	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>101</b>
5.1	Zugänge zum Ableitungsbegriff in der Schule . . . . .	101
5.1.A	Zugang über das Tangentenproblem . . . . .	101
5.1.B	Zugang über Momentangeschwindigkeit . . . . .	106
5.2	Fachliche Begriffsbestimmung . . . . .	110
5.2.A	Ein fachmathematischer Zugang zur Differenzierbarkeit . . . . .	110
5.2.B	Die Ableitung als lineare Bestapproximation . . . . .	121
5.3	Kleines historisch-philosophisches Intermezzo . . . . .	125
5.4	Aspekte und Grundvorstellungen zur Differentialrechnung . . . . .	128
5.4.A	Aspekte des Ableitungsbegriffs . . . . .	128
5.4.B	Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff . . . . .	129
5.4.C	Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff . . . . .	135
5.5	Differentialrechnung in der Schule . . . . .	136
5.5.A	Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln . . . . .	136
5.5.B	Kurvendiskussion . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>151</b>
6.1	Ein kurzer Blick in die Praxis . . . . .	151
6.1.A	Integralrechnung im Lehrplan der AHS und bei der sRP . . . . .	151
6.1.B	Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP . . . . .	153
6.1.C	Fehlvorstellungen: Integral und Fläche . . . . .	157
6.2	Fachmathematische Betrachtungen . . . . .	158
6.2.A	Integrieren ist Rekonstruieren von Funktionen . . . . .	158
6.2.B	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	164
6.2.C	Die Analytische Präzisierung des Integralbegriffs . . . . .	168
6.3	Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff . . . . .	173
6.3.A	Aspekte des Integralbegriffs . . . . .	173
6.3.B	Grundvorstellungen zum Integralbegriff . . . . .	173
6.3.C	Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff . . . . .	174
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>175</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Am Anfang dieser Vorlesung nehmen wir eine Begriffsbestimmung vor: Was ist die Analysis als mathematische Disziplin? Was ist ihr Wesen und was sind ihre zentralen Begriffe und Methoden? Warum ist das so (und nicht anders)? Dabei blicken wir in strukturierter Weise auf die Fachvorlesung „Analysis“ aus dem vergangenen Semester zurück.

Darauf aufbauend nehmen wir eine weitere Begriffsbestimmung vor: Was ist die „Schulanalyse“? Welchen Platz hat die Analysis im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe? Warum ist das so (und nicht anders)? Dabei geben wir einen Ausblick auf die kommende Vorlesung.

### 1.1 Analysis zwischen Schule und Universität

#### 1.1.A Was soll und was will die Analysis<sup>1</sup>

**1.1.1. Analysis - Eine erste Begriffsbestimmung.** Ein Enzyklopädieeintrag für (*mathematische*) *Analysis* könnte in etwa wie folgt lauten<sup>2</sup>:

Die Analysis ist jenes Teilgebiet der Mathematik, in dem Funktionen (und ihre Verallgemeinerungen) mit den Methoden des Grenzwertbegriffs studiert werden.

Ihre Grundlagen wurden von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1643–1726) als Infinitesimalrechnung unabhängig voneinander entwickelt. Als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik neben den klassischen Teilgebieten der Geometrie und der Algebra existiert die Analysis seit Leonhard Euler (1707–83).

Grundlegend für die gesamte Analysis ist der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen (und auch der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen) mitsamt seinen geometrischen, arithmetischen, algebraischen und topologischen Eigenschaften. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

---

<sup>1</sup>vgl. den gleichnamigen Text in (Steinbauer, 2022), Abschnitt 0.0.

<sup>2</sup>vgl. z.B. <https://de.wikipedia.org/wiki/Analysis>

Wir wollen im Folgenden aber etwas mehr in die Breite und Tiefe gehen.

**1.1.2. Analysis - Eine Inhaltsbestimmung.** Inhaltlich beschäftigt sich die Analysis vor allem mit Funktionen, und zwar zunächst mit solchen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Ganz allgemein dienen Funktionen dazu, den Zusammenhang zwischen verschiedenen Größen zu beschreiben. Hier meint „beschreiben“ nicht „erklären“ - das Wort Zusammenhang ist also nicht kausal zu verstehen, sondern es geht darum, welche Werte einer Größe zusammen mit welchen Werten einer anderen Größe auftreten. Alltägliche Beispiele sind etwa Verzinsung (Höhe eines Guthabens oder auch eines Schuldenstands zu einem bestimmten Zeitpunkt), Bremsweg (Länge des Bremswegs eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit), radioaktiver Zerfall (Anzahl strahlender Isotope zu einem bestimmten Zeitpunkt) etc, siehe Abbildung 1.1.

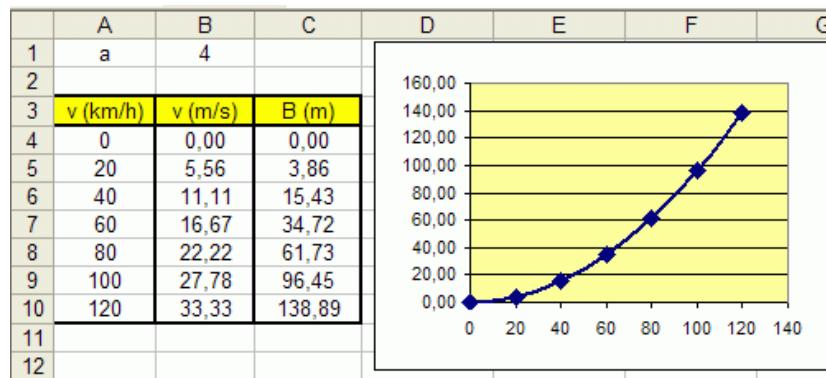


Abb. 1.1: Bremsweg eines PKW in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Ein wichtiger Kunstgriff der Mathematik ist die *Abstraktion*: Es wird von der konkreten Situation bewusst abgesehen und statt mit Bremsweg, Zeit, Energieverbrauch, etc. beschäftigen wir uns mit „anonymen“, universell verwendbaren Größen, den Variablen. Alles was wir über Funktionen herausfinden, ist also universell (in jedem Beispiel) gültig, wobei natürlich eine exakte mathematische Erklärung (sprich Definition), was eine Funktion sein soll, zugrunde gelegt werden muss.

Darauf und auf der Definition der reellen Zahlen aufbauend ist es der rote Faden der Analysis, das Änderungsverhalten von Funktionen zu verstehen, zu beschreiben und zu beherrschen. Etwas technischer formuliert sind die zentralen Fragestellungen beim Studium des *Änderungsverhalten von Funktionen*:

- Welche Begriffe eignen sich am besten dazu das Verhalten von Funktionen „im Kleinen“ zu erfassen?
- Wie kann man aus dieser Kenntnis einer Funktion „im Kleinen“ Aussagen über die Funktion im Ganzen gewinnen?

**1.1.3. Beispiel (Radfahren).** Wie kann aus der Kenntnis der Momentangeschwindigkeit (der Änderung „im Kleinen“) zu jedem Zeitpunkt der Gesamtverlauf der Fahrt (zurückgelegte Strecke, die Funktion „im Großen“) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden diese Größen auf dem Fahrradcomputer (Tachometer bzw. Tageskilometerzähler) angezeigt, aber was bedeuten diese Begriffe *wirklich* und wie kann obige Frage systematisch beantwortet werden. Solche Frage zu beantworten, benötigen wir einen geeigneten Begriffsapparat.

**1.1.4. Der analytische Begriffsapparat.** Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den Begriff des *Grenzwerts* (*Limes*). Dieser Grenzwertbegriff in seinen zahlreichen Erscheinungsformen ist *das* Herzstück der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- und der Integralrechnung zugrunde.

Die Analysis ist jedoch weit mehr als ein Lehrsystem indem diese abstrakten Begriffe zu abstrakten Resultaten verwoben werden. Sie bringt in schier unglaublicher Methodenvielfalt eine Fülle konkreter mathematischer Resultate hervor. Dabei steht oft der Gedanke der Approximation im Zentrum, es ergeben sich eine Unzahl „schöner“ Formeln und Identitäten und immer wieder können überraschende Beziehungen zwischen Begriffen hergestellt werden, die zunächst (scheinbar) nichts miteinander zu tun haben.

#### 1.1.5. Und wozu das Ganze?

Was hat diese zunächst vielleicht etwas trocken erscheinende Materie mit der echten Welt zu tun? Sehr viel!

Das Studium von funktionellem Änderungsverhalten ist, wie schon oben angedeutet, keineswegs ein rein „akademisches Vergnügen“, sondern ist eng verbunden mit dem Bestreben der Menschen, die uns umgebende Welt zu verstehen und zu gestalten. Das zeigt insbesondere die Geschichte der Analysis, deren Entstehen und Meilensteine Hand in Hand gehen mit der Entwicklung der neuzeitlichen Physik durch Newton (1643–1726), Euler (1707–83), Lagrange (1736–1813) und Laplace (1749–1827), um nur die großen Denker des Anfangs zu nennen.

Damit steht die Analysis im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt und Gesellschaft in den letzten vier Jahrhunderten so tiefgreifend und beispiellos verändert hat. Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik, so wie die Schrift, und nimmt folgerichtig einen prominenten Platz in der Schulmathematik ein.

#### 1.1.6. Ja schön, aber wie? Methodik & Axiomatik.

Sie hatten in der Fachausbildung das Glück, die Grundbegriffe der Analysis in einer vergleichsweise verständlichen Form kennen lernen zu können. Das war nicht immer so, denn bis weit ins 19. Jahrhundert waren die Mathematiker/innen auf eine mehr oder weniger gut funktionierende Intuition beim Umgang mit „unendlich kleinen Größen“ angewiesen. Die historische Entwicklung hat jedoch gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist - und es ist in der Mathematik als Wissenschaft selbstverständlich - dass die Analysis wie jedes andere mathematische Gebiet nach der *axiomatische Methode* (Vorgehen nach dem Definition-Satz-Beweis Schema) gelehrt wird. Das trifft weitgehend auch für die Fachausbildung im Lehramt zu.

Die ganze Theorie und alle ihre Aussagen werden in streng logischem Aufbau aus den Grund-eigenschaften der reellen Zahlen aufgebaut. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit aber oft auch ihre Schönheit dieser Methode. Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Warum ist das so?

- (1) Nur so erreicht die Mathematik eine Sicherheit, die von ihr erwartet wird.
- (2) Diese Methode macht das systematische Erlernen eines Gebietes leichter!

Punkt (2) ist kein Witz! Statt in „druidischer“ Weise von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantieren mit „unendlich kleinen Größen“ unterwiesen zu

werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg. Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt definiert, allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert, diese werden durch logische Schlussfolgerungen bewiesen. Ja, aber natürlich bereitet diese Herangehensweise große Schwierigkeiten! Es ist v.a. für Studienanfänger/innen eine Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen der Fantasie und Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen. Von den damit verbundenen Schwierigkeiten beim Lernen und Lehren der Analysis in der Schule wird in dieser Vorlesung noch ausführlich die Rede sein<sup>3</sup>.

### **1.1.7. Eine persönliche Bemerkung.**

Zu sehen, wie aus den wenigen Axiome der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen und die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen und wird nicht ganz ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können). Ähnliches gilt für die Kraft der Anwendungen: Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft.

## **1.1.B Was soll und was will die Schulanalyse?**

Um eine Antwort auf diese – zugegebenermaßen nicht ganz einfache – Frage zu geben, lohnt es sich, einen (intensiven) Blick in die verschiedenen Bereiche zu tun, die regeln und erläutern, was die Schulmathematik an sich soll und will. Das wären zum einen der Lehrplan mitsamt dem Konzept der Reifeprüfung und zum anderen die fachdidaktische Literatur mit ihren aktuellen Forschungsergebnissen.

**1.1.8. (Schul-)Analysis im Lehrplan und im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung.** Es mag erstaunen, aber es ist eine Tatsache, dass im österreichischen *Mathematiklehrplan der AHS-Oberstufe* das Wort „Analysis“ selbst nicht zu finden ist. Dennoch sind typische Themenbereiche der Analysis fest im Lehrplan verankert.

Nach dem Lehrplantext der *7. Klasse (AHS)* werden im ersten Semester die Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen erarbeitet (Differenzen-, Differentialquotient, mittlere/momentane Änderungsrate, Sekanten-/Tangentensteigung, Ableitungsfunktion, Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktion, Monotonie, Krümmung, ... Untersuchung von Polynomfunktionen in inner-/außermathematischen Bereichen) und im zweiten Semester eine Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung vorgenommen (Ableitungsregeln für Exponential- und Winkelfunktionen, Kettenregel, weitere Anwendungen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit).

In der *8. Klasse (AHS)* wird ebenso zweischrittig vorgegangen, zuerst werden die Grundlagen der Integralrechnung erarbeitet (Ober-, Untersumme, bestimmtes Integral, Stammfunktion, elementare Integrationsregeln), später dann die Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung vorgenommen (das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, das unbestimmte Integral).

---

<sup>3</sup>Tatsächlich gibt es in der fachdidaktischen Literatur eine breit angelegte Diskussion über die Diskrepanz zwischen einer rein logischen Präsentation mathematischer Inhalte und der kognitiven Entwicklung Lernender, siehe z.B. (Tall, 2002).

Das allein gibt aber noch keine Antwort auf die eingangs gestellte Frage, was die Schulanalysis soll und will.

Nun hält der Lehrplan neben der Auflistung der Inhalte auch einen allgemeineren Teil bereit und spricht dort die *Bildungs- und Lehraufgaben des gesamten Faches Mathematik* an. Diese sind zwar nicht explizit für die Analysis ausformuliert, geben aber einen Hinweis darauf, was die Schulmathematik an sich will. So sollen die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel erfahren, dass die Mathematik eine spezifische Art ist, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Im Zusammenhang mit der Schulanalysis werden wir in dieser Lehrveranstaltung diskutieren, ob und wie diese Bildungsaufgabe erfüllt werden kann.

Nachdem der allgemeine Teil des Lernplans und die Auflistung der Lehrplaninhalte bisher keine befriedigende Antwort auf die oben gestellte Frage geben, kann die *Handreichung zum Lehrplan* herangezogen werden. Endlich — dort findet sich erstmals der Terminus Analysis. In Teil B: *Erweiterter Grundkompetenzkatalog*, der die Grundkompetenzen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (SRP) und jene Grundkompetenzen, die im Rahmen des Lehrplans neben den Reifeprüfungskompetenzen wesentlich sind, zusammenfasst, ist dann nämlich vom *Inhaltsbereich Analysis* die Rede. Dort wird auch die sogenannte „Bildungstheoretische Orientierung“ aus dem SRP-Konzept angeführt. Diese hält fest, dass die Analysis *Begriffe und Konzepte zur Beschreibung von diskreten und stetigen Änderungsverhalten* bereitstellt, die sowohl in der Mathematik als auch in vielen Anwendungen sehr bedeutend sind. Für die Schulanalysis bedeutet dies: Dass die Schülerinnen und Schüler

- diese mathematischen Begriffe erwerben müssen,
- sie in diversen Anwendungsfällen nutzen und deuten sollen, sowie
- die Zusammenhänge der Fachbegriffe erkennen sollen.

Zusätzlich zu den damit verbundenen Kompetenzen werden in der bildungstheoretischen Orientierung noch die unterschiedlichen *mathematischen Darstellungsarten sowie die symbolischen Schreibweisen und Formalismen der Analysis erwähnt* — auch diese sollen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig genutzt werden können. Dem „Rechnen“ an sich wird in der bildungstheoretischen Orientierung weniger Bedeutung beigemessen, es genügt, sich im Rahmen der SRP auf die einfachsten Regeln (z. B. des Differenzierens) zu beschränken.

Da die SRP aber nur eine Teilmenge des gesamten Lehrplans abprüft, sind im Lehrplan gelegentlich weitere Kompetenzen (z. B. die Kettenregel kennen und anwenden können) aufgelistet.

Der Zusammenhang zwischen Lehrplan und SRP-Konzept wird im dritten Teil der *Handreichung zum Lehrplan* explizit gemacht. In diesem Teil C: *Lehrplan mit Hinweisen auf Grundkompetenzen* werden die Lehrplanformulierungen dann mit den Grundkompetenzen der SRP vernetzt, konkretisiert und durch Hinweise ergänzt, siehe Tabelle 1.1. Auch dort findet sich der Terminus Analysis wieder.

**1.1.9. Schulanalysis im fachdidaktischen Diskurs.** Eine Diskussion der Frage, was soll und will die Schulanalysis aus Sicht der Mathematikdidaktik, kann hier in der ihr gebührenden Breite nicht erfolgen. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf zentrale Grundpositionen dieses Diskurses und räumen gleich zu Beginn ein, dass es keine einfache Aufgabe ist, die Schulanalysis befriedigend zu unterrichten. In der fachdidaktischen Diskussion zur Schulanalysis kristallisieren sich im Wesentlich zwei unterschiedliche Positionen und Ansätze heraus. Vertreterinnen und Vertreter des einen Ansatzes plädieren dafür, die *Anwendungen der Analysis im Unterricht in den Vordergrund* zu stellen und auf einen kanonischen Aufbau der

Kompetenzbereich	Lehrplanformulierung	Konkretisierung und Hinweise auf Grundkompetenzen
Funktionale Abhängigkeiten, Analysis		
Folgen	Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können	<input type="checkbox"/> Zahlenfolgen (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können (FA-L 7.1) <input type="checkbox"/> Zahlenfolgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen (FA-L 7.2) <input type="checkbox"/> Folgen zur Beschreibung von Prozessen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können (FA-L 8.4); (z. B. Kapitalentwicklungen durch geometrische Folgen darstellen können) <input type="checkbox"/> Diskrete und kontinuierliche Modelle vergleichen können (z. B. anhand von Wachstumsmodellen)

Tabelle 1.1: Ausschnitt aus dem Lehrplan, Teil C, S. 32

Analysis zu verzichten. Dabei stehen echte Anwendungsbeispiele im Zentrum des Unterrichts und es werden nur die dafür nötigen Begriffe entwickelt.

Dem gegenüber steht die Position, dass die *Begriffe, Zusammenhänge und Beweise den Kern eines verständnisvollen Umgangs* mit Mathematik ausmachen und daher natürlich auch in der Schulanalyse verankert sein sollen und nicht als lästiges und gegebenenfalls zu vernachlässigendes Übel zu betrachten sind.

Zum Einsatz des Computers meinen die jeweiligen Vertreterinnen und Vertreter:

- Gut, dass es ihn gibt! Er erleichtert einen anwendungsbezogenen Unterricht.
- Der Computer vermag zwar gedankliche Prozesse sichtbar zu machen, damit werden sie möglicherweise leichter verstehbar. Hüten wir uns aber davor, die Gedanken dabei selbst zu vergessen!

Für den Unterricht im Bereich der Schulanalyse steht man also vor dem Dilemma „*Anschaulichkeit versus Strenge*“ D.h. ein Mehr an Anschaulichkeit kann oft auf Kosten der

Exaktheit gehen und umgekehrt. Zusätzlich zu diesem Dilemma zeigt sich in der schulischen Praxis, die dem deduktiven Aufbau der Analysis gerecht werden will, ein enormer Mangel an heuristischen Denk- und Arbeitsweisen. D.h. den Schülerinnen und Schülern wird selten Gelegenheit gegeben Lösungen, Begriffe o. Ä. in der Schulanalysis selbst zu entdecken bzw. selbst zu entwickeln. Zu guter Letzt ist die Schulanalysis oft auch von einer sehr einseitigen Kalkülorientierung geprägt und vernachlässigt dabei eine Verständnisorientierung. Und gerade diese Kalkülorientierung in der Analysis lässt Schülerinnen und Schüler straucheln, wenn ihre algebraischen Fertigkeiten in früheren Jahren nicht entsprechend ausgebildet wurden.

### 1.1.10. Nun — was also soll und will die Schulanalysis wirklich?

- (1) Sie soll und will die für Analysis fundamentalen Ideen und deren Bedeutung verständnisorientiert vermitteln. Dazu zählen die reellen Zahlen, der Ableitungs- und Integralbegriff, der funktionale Zusammenhang, die Idee der Änderungsrate, die Idee des Approximierens und die Idee des Optimierens.
- (2) Sie soll und will inhaltliche Vernetzungen anbieten. Dafür bietet sich besonders die Idee der Änderung an. Sie ist den Schülerinnen und Schülern als absolute und relative Änderung seit der Bruch- und Prozentrechnung vertraut, setzt sich über die mittlere und momentane Änderungsrate bis zum Ableitungsbegriff fort. Darüberhinaus bietet sich aber auch die Vernetzung zu anderen Teilgebieten der Mathematik an. Ein Beispiel dafür ergibt sich in der Stochastik bei der Behandlung der Normalverteilung.
- (3) Sie soll und will anwendungsorientiert sein. D.h. sie soll Problemstellungen aus unterschiedlichsten Kontexten (Wirtschaft, Physik, Kinematik, ...) aufgreifen und bei der Modellbildung besonders sorgfältig mit der Interpretation und Validierung der Ergebnisse umgehen.

## 1.2 Ausblick auf die Vorlesung

In diesem Abschnitt geben wir nun einen Ausblick auf die Inhalte und die Methodik der Vorlesung. Zuerst definieren wir aber die Ziele der Schulmathematik-Lehrveranstaltungen Analysis.

**1.2.1. Ziele der Schulmathematik-Lehrveranstaltungen Analysis.** Als Ziel der Vorlesung und der zugehörigen Übungen formuliert das Curriculum (Universität Wien, 2016):

Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. Sie kennen verschiedene Möglichkeiten für Zugänge zu grundlegenden Themen des Analysis-Schulunterrichts (und ihrer Anwendungen) und können diese bewerten. Die Studierenden können in diesem Gebiet fachdidaktische Konzepte anwenden und Computer in angemessener Weise einsetzen, sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten.

**1.2.2. Schulanalysis vom höheren Standpunkt.** Um diese Ziele zu erreichen, werden wir in der Vorlesung die *Schulanalysis von einem höheren Standpunkt* aus betrachten. Das bedeutet, dass der Hauptstrang der Vorlesung die zentralen Inhalte der Schulanalysis behandelt, aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und ein umfassendes Verständnis der analytischen Kernbegriffe und ihrer Zusammenhänge herstellt.

Diese Kerninhalte sind wenig überraschend ident mit dem Kanon sowohl der Fachvorlesung „Analysis“ als auch der Schulanalyse:

- Funktionsbegriff
- Folgen, Grenzwert und Vollständigkeit der reellen Zahlen
- Differentialrechnung & Integralrechnung plus Anwendungen
- Spezielle Funktionen

### 1.2.3. Drei Anknüpfungs- und Bezugspunkte.

Der Hauptstrang der Vorlesung also „unsere“ Schulanalyse von einem höheren Standpunkt hat drei Anknüpfungs- bzw. Bezugspunkte.

- (1) Die Inhalte und (mathematischen) Methoden der Fachvorlesung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ an die wir direkt anknüpfen.
- (2) Den fachdidaktischen Diskurs zum Lehren und Lernen der Analysis, dessen Diskussionen und Ergebnisse wir an Ort und Stelle einbringen.
- (3) Ausführlich Bezüge zur Unterrichtspraxis, die wir über die ganze Lehrveranstaltung hinweg herstellen.

Um die Punkte (2) und (3) angemessen darstellen zu können, stellen wir in Kapitel 2 einen *fachdidaktischen Begriffsrahmen* zur Verfügung, der es erlaubt, mathematisches Fachwissen zu reflektieren und *mathematikdidaktisches Professionswissen* aufzubauen. Damit sollen die Hörer/innen befähigt werden, einen qualitätsvollen Analysis-Unterricht zu gestalten, der fachlich und fachdidaktisch fundiert ist und sich durch eine reflektierte Unterrichtspraxis auszeichnet.

Um diese Bezugspunkte auch fest in diesem Skriptum zu verankern, wird der Haupttext von zwei Sorten von Boxen unterbrochen: *mathematische Faktenboxen* und Boxen zum *fachdidaktischen Professionswissen* (FD-Boxen), die sowohl wichtige fachdidaktische Begriffsbildungen und Inhalte erklären, wie auch unterrichtspraktische Hinweise geben.

**1.2.4. Hochschuldidaktischer Hintergrund.** Es gibt eine umfangreiche Literatur zum sog. Lehrerprofessionswissen (siehe etwa (Baumert und Kunter, 2013; Krauss et al., 2008)). Durch große empirische Studien ist belegt, dass sich das mathematik-bezogene Lehrer/innenwissen valide in die beiden Teilmereiche *mathematical content knowledge* (MCK) und *pedagogical context knowledge* (PCK) unterteilen lässt. Letzteres könnte man auch kurz „fachdidaktisches Handlungswissen“ nennen und es ist in folgendem Sinn entscheidend: Das PCK der Lehrperson ist Hauptprädiktor für den Lernerfolg ihrer Schüler/innen. MCK der Lehrkraft hat zwar auch einen positiven Einfluss auf die Unterrichtsqualität, reicht aber alleine nicht aus. Allerdings beruht PCK immer auf einer soliden Basis von MCK.

Darüber hinaus sind typische unterrichtliche Handlungsanforderungen an Lehrkräfte ebenfalls gut empirisch erforscht, siehe etwa (Bass und Ball, 2004; Prediger, 2013). Es ergeben sich z.B. folgende mathematische Kernaufgaben, die Lehrer/innen in ihrer täglichen Praxis zu bewältigen haben:

- Anforderungen an Schüler/innen (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können;
- Lernziele setzen und ausschärfen;
- Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten;
- Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren;
- Tests entwickeln und re-skalieren;

- geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln;
- Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren;
- Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren;
- fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren;
- zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln;
- Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen;
- Begriffe und Konzepte erklären und Beziehe herstellen.

Ebenso wird in der Literatur darauf hingewiesen, dass fachliche Inhalte im Bewusstsein der Lehrkräfte geeignet repräsentiert sein müssen, damit diese fähig sind, Aufgaben des obigen Anforderungskatalogs effektiv zu bewältigen.

Die Orientierung an obigen Punkten liefert uns ein leitendes Prinzip, um die Inhalte und ihre konkrete Ausgestaltung, die Methoden und den Geist der Vorlesung praxisnahe zu gestalten. In der Vorlesung, aber vor allem in den Übungen werden wir diese Kernaufgaben trainieren und ein Bewusstsein für die mathematischen Tätigkeiten schaffen, die die Unterrichtspraxis bestimmen.



## Kapitel 2

# Fachdidaktischer Bezugsrahmen

In diesem Kapitel stellen wir einige fachdidaktische Konzepte vor, um einen Überbau und einen Bezugsrahmen zu schaffen, in dem eine *differenzierte Diskussion* der *Inhalte* der Schulanalysis erfolgen kann.

Wir beginnen mit den Konzepten der *Grundvorstellungen und Aspekte* mathematischer Begriffe, die uns im Weiteren als Analysewerkzeuge wichtige Dienste leisten werden.

Danach wenden wir uns den *Grunderfahrungen im Mathematikunterricht* zu. Wir beginnen mit einer Analyse der Schwierigkeiten, denen der Analysisunterricht in der Schule begegnet. Diese liegen in der inhaltlichen Komplexität des Gegenstandes begründet und wir skizzieren den fachdidaktischen Diskurs, der sich mit Strategien zur Überwindung dieser Schwierigkeiten befasst. So werden wir zu den drei Winter'schen Grunderfahrungen geführt, die den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterricht prägnant zusammenfassen. Wir spezialisieren sie für das Gebiet der Analysis, wobei wir insbesondere auf das Ineinandergreifen der Grunderfahrungen eingehen.

### 2.1 Grundvorstellungen

Im Mathematikunterricht sollen Schüler/innen neue Inhalte tiefgreifend verstehen und internalisieren und diese *nicht* nur auf einer oberflächlichen und unverstandenen symbolischen oder verbalen Ebene wiedergeben können. Verständnisorientierter Unterricht zielt daher darauf ab, dass die Schüler/innen

- *tragfähige Vorstellungen* zu neuen Begriffen aufbauen und
- diesen eine *inhaltliche Bedeutung* geben, um
- mit den Inhalten *verständnisvoll umgehen* zu können.

In der deutschsprachigen<sup>1</sup> Mathematikdidaktik wird diese Problematik oft mit Hilfe des so genannten *Grundvorstellungskonzepts* theoretisch beleuchtet. Das Konzept der Grundvorstellungen hat seinen Ursprung in der deutschen Rechendidaktik des 19. Jahrhunderts und wurde in seiner modernen Fassung vor allem von Rudolf vom Hofe in seiner Dissertation (Hofe, 1995) in die fachdidaktische Diskussion eingebracht. Der Kern dieser Betrachtungsweise ist es, Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und der individuellen Begriffsbildung Lernender

---

<sup>1</sup>Vor allem im englischsprachigen Diskurs wird alternativ oft die Konzeption „concept image“ und „concept definition“ nach (Tall und Vinner, 1981) verwendet. Diese Begrifflichkeit wurde stärker aus der Lernpraxis entwickelt, während das Grundvorstellungskonzept seinen Ursprung in der Stoffdidaktik hat, vgl. (Vom Hofe und Werner Blum, 2016).

herzustellen.

### 2.1.A Aspekte und Grundvorstellungen

Allgemein liefert das Grundvorstellungskonzept ein didaktisches Modell, das mathematisches Verständnis an inhaltlichen Vorstellungen festmacht. Wir wollen das zunächst an einem einfachen Beispiel erläutern, das auch zeigt, wie verschiedene Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff dessen Verständnis befördern, vgl. (Weber, 2013).

**2.1.1. Beispiel (Dividieren).** In der Grundschule kommen beim (ganzzahligen) Dividieren (ohne Rest) unter anderem die folgenden beiden Grundvorstellungen zum Tragen:

- (1) Vorstellung des Verteilens  
(Z.B. das gerechte(!) Aufteilen von 21 Gummibärchen auf 7 Kinder);
- (2) Vorstellung des Enthaltsenseins  
(Z.B., wie oft können 7 Gummibärchen aus einer Packung mit 21 Stück herausgenommen werden?).

Die Aufgabenstellung  $21 : 7$  kann mittels beider Grundvorstellungen problemlos gelöst werden. Aber schon an diesem einfachen Beispiel kann man sehen, dass verschiedene Grundvorstellungen verschieden weit tragen und, dass für eine Erweiterung von Begriffen ein Wechsel von Grundvorstellungen hilfreich sein kann. Z. B. kann man die Aufgabe  $20 : \frac{1}{2}$  schlecht mit (1) lösen. Mit (2) hingegen funktioniert es ganz einfach:  $\frac{1}{2}$  ist in 20 klarerweise 40-mal enthalten. Darüber hinaus kann man auch begründen, weshalb diese Division nicht — wie von den natürlichen Zahlen her gewohnt — verkleinert, sondern vergrößert: Das Ergebnis 40 bezeichnet nicht vierzig Ganze, sondern vierzig Halbe.

In Bezug auf komplexerer mathematischer Inhalte lohnt es sich neben dem Grundvorstellungsbegriff auch noch die Terminologie der *Aspekte eines mathematischen Begriffs* in die Reflexion mit einzubeziehen, siehe Greefrath et al., 2016, Abschn. 1.1.5. Diese Terminologie entspricht durchaus der alltagssprachlichen Bedeutung, genauer<sup>2</sup>:

#### FD-Box 1: Aspekte mathematischer Begriffe

Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser *fachlich* beschrieben werden kann.

Wir erläutern die Terminologie von „Aspekten“ und „Grundvorstellungen“ am Beispiel der Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $\xi \in \mathbb{R}$ . Die Ableitung  $f'(\xi)$  lässt sich fachlich sowohl als Grenzwert des Differenzenquotienten (vgl. (Steinbauer, 2022), 3.1.8(ii)) oder als lineare Bestapproximation<sup>3</sup> an die Funktion nahe  $\xi$  (vgl. (Steinbauer, 2022), 3.1.22)) beschreiben. Dies sind somit zwei Aspekte des Ableitungsbegriffs und stellen wiederum die Basis für unterschiedliche Grundvorstellungen dar, wie zum Beispiel die Grundvorstellungen „Tangentensteigung“, „lokale Änderungsrate“ und „Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“, die wir in Abschnitt 5.4 ausführlich diskutieren werden.

<sup>2</sup>Die Terminologie in Greefrath et al., 2016, p. 17 erscheint uns etwas unglücklich. Das Wesen eines Aspektes ist es, dass er nicht notwendigerweise den Begriff in seiner Gesamtheit erfasst. Genau das wird aber durch Verwenden des Wortes „charakterisiert“ suggeriert, weil in der mathematischen Fachsprache unter einer Charakterisierung eine äquivalente Umformulierung verstanden wird, die ja dann den Begriff in seiner Gesamtheit erfasst.

<sup>3</sup>In der fachdidaktischen Literatur wird oft vom Aspekt der lokalen lineare Approximation gesprochen.

Wichtig ist jedenfalls, dass ein Aspekt sich immer auf *fachmathematische* Inhalte bezieht. Die Aspekte eines Begriffs sind durch *mathematische* Fakten gegeben — sie bilden den Kern seiner fachlichen Definition, Beschreibung oder Charakterisierung.

Im Gegensatz dazu sind Grundvorstellungen ein Konzept das sich auf *fachdidaktische* Überlegungen bezieht.

#### FD-Box 2: Grundvorstellung

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Die Beziehung zwischen Grundvorstellungen und Aspekten ist die folgende: Grundvorstellungen erlauben es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit einer Bedeutung zu versehen und so in einen sinnhaltigen Kontext zu setzen. Das wiederum ist eine Voraussetzung für ein verständnisvolles Hantieren mit dem Begriff.

Grundvorstellungen entwickeln sich, wenn Lernende sich mit Phänomenen befassen, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zu einem Aspekt entwickelt werden, aber auch eine Grundvorstellung verschiedene Aspekte des Begriffs berühren.

Wir werden in den folgenden Kapiteln die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen verwenden, um einen entsprechend differenzierten Blick auf die Kernbegriffe der Schulanalyse werfen zu können.

Unmittelbar werden wir aber noch einige notwendige Details dieser Terminologie diskutieren. Eine umfassende Darstellung, die insbesondere den Nutzen dieser Begriffsbildungen betont, findet sich z.B. in Greefrath et al., 2016, Abschn. 1.5, eine fachdidaktische Beleuchtung des Begriffs findet sich z.B. in (Vom Hofe und Werner Blum, 2016).

### 2.1.B Verfeinerung des Grundvorstellungskonzepts

Der Begriff der Grundvorstellung kann sowohl in einem *normativen* Kontext, wie auch in einem *individuellen* Kontext verwendet werden. Genauer unterscheiden wir zwischen *universellen* und *individuellen* Grundvorstellungen.

**2.1.2. Universelle Grundvorstellungen** haben normativen Charakter. Sie sind das Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und geben Antwort auf die Frage, was sich Lernende generell bzw. idealerweise unter einem mathematischen Begriff vorstellen soll(t)en. Das Ausbilden bestimmter universeller Grundvorstellungen ist also ein Ziel des Mathematikunterrichts, das Lehrer/innen Orientierungshilfen zu Gestaltung des Unterrichts bietet.

**2.1.3. Individuelle Grundvorstellungen** sind Grundvorstellungen, die Lernende zu einem bestimmten Begriff tatsächlich entwickelt haben. Sie sind ebenfalls Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und/oder Beobachtungen und beschreiben, was sich Lernende unter einem bestimmten Begriff vorstellen. Sie haben einen deskriptiven Charakter und geben somit ebenfalls Orientierung für den Mathematikunterricht, indem sie Ausgangspunkt für eine Unterrichtsplanung bzw. Fördermaßnahme sein können, die zum Ziel hat die Lernenden in Richtung universeller Grundvorstellungen zu führen.

Im Folgenden werden wir meist (und falls nicht anders angegeben) Grundvorstellungen in ihrer normativen Form verwenden, also immer von den universellen Grundvorstellungen im Zusammenhang mit (Aspekten) analytischer Begriffe sprechen. Zusammengefasst haben wir:

### FD-Box 3: Universelle vs. Individuelle Grundvorstellungen

**Universelle Grundvorstellungen** haben einen normativen Charakter und ihre Ausbildung ist Ziel des Unterrichts.

**Individuelle Grundvorstellungen** sind tatsächlich ausgebildete Vorstellungen Lernernder und haben daher einen deskriptiven Charakter. Sie können Ausgangspunkt des Unterrichts bzw. der Unterrichtsplanung sein.

Eine weitere Ausdifferenzierung des Grundvorstellungsbegriffs ist vor allem im Kontext der Schulanalyse hilfreich. Grundvorstellungen wurden ursprünglich vor allem in der Didaktik der Primar- und Sekundarstufe 1 verwendet und meinten wirklich sehr konkrete Vorstellungen, die sich auf alltägliche und anschauliche Dinge bezogen, z. B. im Kontext von Beispiel 2.1.1(1) das Aufteilen von Gummibärchen unter einer bestimmten Anzahl von Kindern.

Im Kontext der Schulanalyse sind aufgrund des höheren Abstraktionsgrades oft keine adäquaten an das Alltagsdenken anknüpfende Grundvorstellungen möglich oder sinnvoll. Daher wurde der Begriff der *sekundären* Grundvorstellungen kreiert, die sich nicht auf Alltägliches beziehen (diese werden in diesem Kontext dann *primäre* Grundvorstellungen genannt), sondern solche, die sich auf andere, einfachere mathematische Begriffe beziehen. Zusammengefasst ergibt sich also:

### FD-Box 4: Primäre vs. sekundäre Grundvorst.

**Primäre Grundvorstellungen** verbinden (Aspekte) mathematische(r) Begriffe mit konkreten Alltagserfahrungen an realen Gegenständen.

**Sekundäre Grundvorstellungen** verbinden (Aspekte) mathematische(r) Begriffe mit bestehenden Vorstellungen einfacherer mathematischer Begriffe.

## 2.2 Grunderfahrungen

In diesem Abschnitt erweitern wir unseren fachdidaktischen Referenzrahmen und diskutieren die sogenannten Winter'schen Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts, vgl. (Winter, 1996). Damit steht uns ein weiteres didaktisches Analyse- und Konstruktionsinstrument zur Verfügung.

Dabei nehmen wir zunächst die Diskussion aus Abschnitt 1.1.B wieder auf und diskutieren die Schwierigkeiten, die beim Unterrichten analytischer Inhalte in der Schule auftreten.

### 2.2.A Warum Analysis schwierig zu unterrichten ist

Der fachdidaktische Diskurs zur Schulanalyse kommt im Wesentlichen zu dem Schluss, dass die Schwierigkeiten beim Unterrichten von Analysis inhärent mit der inhaltlichen Schwierigkeit des Gebiets verbunden ist, vgl. (Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 1.1). Es wird auch von der Sonderrolle der Analysis innerhalb der Schulmathematik gesprochen. Diese äußerst sich in den folgenden drei *Spannungsfeldern*, vgl. (Götz, 2013).

**2.2.1. Anschauung vs. Strenge.** Die Analysis als mathematische Teildisziplin verfügt über einen kanonischen, strengen und deduktiven Aufbau, vgl. 1.§1.1.6, der zum Wissensstand der

Lehrer/innen gehört. Andererseits muss der Unterricht viel mehr auf Anschaulichkeit beruhen, der dann auf Kosten der Strenge geht/gehen muss. Der Kern des Problem ist dabei:

*Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis.*

Zum Beispiel garantiert erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen die Gültigkeit des Nullstellensatzes (Zwischenwertsatzes), vgl. (Steinbauer, 2022, 2.2.2 ff): Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 - 2, \quad (2.1)$$

hat auf dem Intervall  $I = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 2\}$  keine Nullstelle, obwohl  $f(0) = -2 < 0$  und  $f(2) = 2 > 0$  gilt. In nebenstehendem Graph sieht man das nicht unmittelbar.

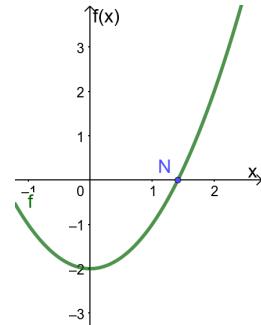


Abb. 2.1: Der Graph von  $f(x) = x^2 - 2$ .

**2.2.2. Normative Stoffbilder vs. individuelle Sinnkonstruktionen der Lernenden.** Die obige Problematik tritt auch klar in den Differenzen zwischen den normativen Stoffbildern zu zentralen analytischen Begriffsbildungen und den individuellen Sinnkonstruktionen der Lernenden zu Tage. Mit unserer Terminologie aus Abschnitt 2.1.B können wir das so ausdrücken:

*Es besteht oft eine große Differenz zwischen den universellen und den individuellen Grundvorstellungen zu zentralen (Aspekten) analytischer Begriffe.*

Ein Beispiel dafür wäre etwa im Kontext des Stetigkeitsbegriffs für reelle Funktionen das Spannungsverhältnis zwischen der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition und der Vorstellung, dass der Graph einer stetigen Funktion keine Sprünge hat.

**2.2.3. Systematik vs. Heuristik.** Die hochentwickelte Systematik des Analysisunterrichts weist eine große Kalküllastigkeit auf. Diese geht naturgemäß zu Lasten der Heuristik, was oft eine Sinnstiftung erschwert oder verhindert. Kurz formuliert:

*Kalkül ist nicht sinnstiftend.*

Insbesondere ist der analytische Kalkül sehr Algebra-intensiv. Schüler/innen scheitern oft schon vor der eigentlichen analytischen Begriffsbildung. Wird z. B. die Differenzierbarkeit einer Funktion mittels Differentialkoeffizienten erklärt, muss sichergestellt sein, dass die Schüler/innen ausreichende Fähigkeiten aus der Sekundarstufe 1 mitbringen, um zunächst den Differenzenquotienten in seiner Bedeutung als Bruch erfassen können.

In diesem Kontext können dann auch Fragen wie die folgende auftreten.

**2.2.4. Beispiel (Was ist hier passiert?).** Betrachten Sie die folgenden beiden Wege eine Stammfunktion für  $\sin(2x)$  zu berechnen<sup>4</sup>:

- a)  $\int \sin(2x)dx = \int \sin(z) \frac{1}{2} dz = -\frac{1}{2} \cos(2x)$ , wobei  $z = 2x$  substituiert wurde.
- b)  $\int \sin(2x)dx = \int 2 \sin(x) \cos(x) dx = \int 2z \cos(z) \frac{dz}{\cos(z)} = \sin^2(x)$ , wobei der Doppelwinkelsatz und die Substitution  $z = \sin(x)$  verwendet wurde.

<sup>4</sup>Wir verwenden hier die Konvention (Steinbauer, 2022, 4.2.11) für das sogenannte „unbestimmte Integral“.

Was ist hier passiert? Stehen diese beiden Rechnungen im Widerspruch zueinander? Sind beide richtig? Wie müssen diese Ergebnisse richtig interpretiert werden?

**2.2.5. Die normative Kraft des Faktischen.** Schließlich geht mit dem traditionellen Unterricht eine hoch entwickelte und oft unhinterfragte *Aufgaben-* und *Prüfungskultur* einher, der sich die einzelne Lehrkraft schwer entziehen kann. Auch diese Kultur ist von einer hohen Kalküllastigkeit geprägt und verkürzt oft echte Anwendungen.

**2.2.6. Fazit: Tendenzen des Analysisunterrichts** sind es

- (1) heuristisches Arbeiten und echte Anwendungen zugunsten der entwickelten Theorie zu vernachlässigen und
- (2) die Theorie sehr auf den Kalkülaspekt zu verkürzen.

Diese Defizite sind in erster Linie *nicht* den Umständen, den Lehrer/innen oder Schüler/innen anzulasten, sondern liegen in der Schwierigkeit des mathematischen Gebiets Analysis begründet.

## 2.2.B Grunderfahrungen

Um die oben beschriebene Problematik besser einordnen zu können, betten wir sie in einen breiteren Rahmen ein: den *allgemeinbildenden Auftrag des Mathematikunterrichts* insgesamt. Ein entsprechender Bezugsrahmen geht auf Winter (1996) zurück und wird seither im fachdidaktischen Diskurs breit verwendet.

**2.2.7. Die drei Winterschen Grunderfahrungen.** Der Mathematikunterricht ist nach Winter dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht:

### FD-Box 5: Grunderfahrungen

- (G1) (*Mathematischer Blick*<sup>5</sup>) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen;
- (G2) (*Mathematische Welt*) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen;
- (G3) (*Heuristische Fähigkeiten*) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.

Die Position der Mathematikdidaktik zum Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, einer vertiefte Allgemeinbildung mit Wissenschaftsprädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden ist nach Danckwerts und Vogel (2006, p. 7):

*Erst in der wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2 seine spezifische bildende Kraft entfalten.*

**2.2.8. Die Grunderfahrungen im Bereich der Analysis.** Im Kontext dieser Vorlesung sind wir primär an der Ausgestaltung der Grunderfahrungen in der Analysis interessiert, die wir hier vornehmen, vgl. (Danckwerts und Vogel, 2006, Kap. 1).

<sup>5</sup>Die Titel von (G1)–(G3) haben wir hinzugefügt, um die Terminologie prägnanter zu machen.

- (G1) Der mathematische Blick wird ermöglicht durch einen Blick auf außermathematische Probleme, die sich mit analytischen Begriffen fassen lassen, z. B. Modellierungen mit Hilfe des Ableitungsbegriffs (lokale Änderungsrate) und des Integralbegriffs (als Rekonstruieren), wie wir in den entsprechenden Kapiteln 5 und 6 sehen werden.
- (G2) Die Analysis als eigene mathematische Welt kann durch zwei Aspekte erfahrbar gemacht werden. Erstens im Blick auf Begriffsentwicklungen, an deren Ende analytische Begriffe stehen, z. B. Grenzwert, Ableitungs- und Integralbegriff (vgl. Kapitel 4, 5 und 6 respektive), aber auch die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (vgl. Abschnitt 4.3). Zweitens durch die Entwicklung analytischer Kalküle, etwa der Ableitungsregeln (vgl. 5.2.13) oder der Grenzwertsätze (vgl. Abschnitt 4.2.B).
- (G3) Heuristische Fähigkeiten können in der Analysis z. B. durch intuitives Argumentieren mit Grenzwerten erlernt werden. Statt zum Grenzwert überzugehen, kann mit hinreichend kleinen Größen operiert werden (vgl. Kapitel 5).

**2.2.9. Integration der drei Grunderfahrungen: Aber wie?** Um das in 2.2.7 geforderte Ineinandergreifen der drei Grunderfahrungen für Schüler/innen erlebbar zu machen, werden in der fachdidaktischen Diskussion folgende Punkte vorgeschlagen und diskutiert, die wir hier bereits für den Inhaltbereich Analysis konkretisieren.

- (1) *Mathematik als Prozess und als Produkt:* Es sollte möglichst eine Balance zwischen den beiden gleichermaßen wichtigen Gesichtspunkten zur Mathematik gewahrt werden, der

*Mathematik als Prozess (G1) und (G3) und der Mathematik als Produkt (G2).*

Ein analytisches Beispiel wäre hier etwa die Idee der Ableitung als Übergang von der mittleren zur lokale Änderungsrate vs. dem Berechnen von Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln, oder die Idee des Integrals als Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten vs. dem Berechnen von Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln.

- (2) *Orientierung an fundamentalen Ideen:* Dabei handelt es sich um ist ein immer wieder betontes fachdidaktisches Prinzip. Fundamentale Ideen haben die drei folgenden charakteristischen Merkmale, vgl. (Schweiger, 1992):

- *Weite:* Sie durchziehen den Schulstoff wie ein roter Faden und bieten sich im Sinne des Spiralprinzips auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus zur Konkretisierung an.
- *Tiefe:* Sie geben zumindest teilweise Aufschluss über das Wesen der Mathematik.
- *Sinn:* Sie sind im Alltagsdenken verankert oder lassen eine solche Verankerung zumindest erkennen.

Fundamentale Ideen der Analysis sind etwa

- die Idee des *funktionalen Zusammenhangs*, der die gesamte Analysis durchzieht,
- die Idee des *Messens*, der vom Begriff der reellen Zahl bis zum Differential- und Integralbegriff trägt,
- die Idee des *Approximierens*, die mit dem Grenzwertbegriff einhergeht,
- die Idee der *Änderungsrate*, die sowohl die Differential- als auch die Integralrechnung dominiert, und
- die Idee des *Optimierens*, die im Rahmen des Extremwertkalküls einen zentralen Stellenwert hat.

- (3) *Tragfähige Grundvorstellungen:* Wie in Abschnitt 2.1 erklärt, ist der Aufbau von belastbaren Grundvorstellungen der Kern eines verständnisorientierten Mathematikunterrichts. Darüberhinaus ist es ebenso wichtig, zwischen Grundvorstellungen also den

inhaltlichen Deutungen eines mathematischen Begriffs und seiner kalkülhaften Umsetzung zu unterscheiden und zwischen diesen beiden Polen zu vermitteln. Wir werden im Verlauf der Vorlesung Grundvorstellungen zu den zentralen analytischen Begriffen ausführlich diskutieren, hier nennen wir nur exemplarisch die Idee der Ableitung als lokale Änderungsrate.

- (4) *Inhaltliche Vernetzung:* In einem kumulativen Lerngeschehen wie in der Mathematik ist die Vernetzung von neuen Inhalten mit schon Bekanntem essentiell. Dabei unterscheidet man zwischen *vertikaler Vernetzung* im Sinne des Spiralprinzips und *fundamentaler Ideen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets* und *horizontaler Vernetzung*, die Brücken zwischen verschiedenen Teilgebieten meint. Ein analytisches Beispiel für eine vertikale Vernetzung ist etwa die Idee der *Änderung*, die von absoluten und relativen Änderungen über die Prozentrechnung bis zum Ableitungsbegriff trägt. Ein Beispiel für eine horizontale Vernetzung zur Stochastik ist etwa die Behandlung der *Normalverteilung*.
- (5) *Anwendungsorientierung* ist zentral für (G1) und (G3). Um aber eine gute Verbindung mit (G2) zu erreichen, ist ein Behandeln „echter“ Anwendungen und das Durchlaufen des gesamten *Modellierungskreislaufs* (Problembeschreibung, Modellierung, Modellberechnung, Interpretation und Validierung) essentiell. Im Bereich der Analysis bieten sich Modellierungen im kinematischen oder geometrischen Kontext an. Schwieriger wird es, wenn diskrete Probleme in ein kontinuierliches Setting übertragen werden müssen, um sie überhaupt erst den Werkzeugen der Analysis zugänglich zu machen.

# Kapitel 3

## Der Funktionsbegriff

In diesem Abschnitt behandeln wir den Funktionsbegriff. Im Kanon der Schulmathematik Vorlesungen und im Curriculum (Studienplan) ist das Thema „funktionale Abhängigkeiten“ der Schulmathematik Arithmetik und Algebra (Modul: UF MA 08) zugeordnet. Da aber der Funktionsbegriff allen Themen der Schulanalysis zugrunde liegt und daher in der Vorlesung eine tragende Rolle spielt, gehen wir hier in gebotener Kürze auf ihn ein, wobei wir seine analytischen Aspekte betonen.

Nach einer kurzen Einleitung besprechen wir zuerst in einem didaktischen Abschnitt das Lehren und Lernen von sog. „funktionalen Abhängigkeiten“, erst danach besprechen wir die Mathematik des Funktionsbegriffs. Im abschließenden Paragraphen §4 fassen wir unsere Erkenntnisse in der mathematikdidaktischen Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen aus Kapitel 2 zusammen. Mit diesem Vorgehen wollen wir den Blick auf diese Terminologie als fachdidaktischem Analysewerkzeug richten, das eine fundierte(re) Diskussion fachlicher und didaktischer Inhalte ermöglicht.

### 3.1 Einleitung

Der Begriff der *Funktion* bzw. der *Abbildung*<sup>1</sup> ist zentral für die gesamte Mathematik. Er ist ein sehr allgemeiner Begriff und gerade, weil er so allgemein ist, ist es schwierig, seine Substanz zu verstehen und zu vermitteln. Darauf werden wir in unserer Darstellung fokussieren.

Wir beginnen aber mit der Definition einer reellen Funktion, also jenem Typ von Funktionen, die in der Schulanalyse die Hauptrolle spielen. Die Definition allgemeiner Funktionen zwischen Mengen folgt in 3.3.3. Eine reelle Funktion  $f$  ordnet jedem Element  $x \in \mathbb{R}$  genau ein Element  $y \in \mathbb{R}$  zu und wir schreiben

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f(x) & = & y. \end{array}$$

Für das dem Element  $x \in \mathbb{R}$  zugeordnete Element  $y \in \mathbb{R}$  schreiben wir also  $f(x)$ . Ein einfaches Beispiel ist etwa die Funktion, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet, also  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Reelle Funktionen können sehr anschaulich durch ihre Graphen dargestellt werden. Dazu werden die Wertepaare  $(x, f(x))$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  „in kartesischen Koordinaten dargestellt“, siehe auch Abbildung 3.10, unten.

---

<sup>1</sup>Die beiden Bezeichnungen werden in der Fachmathematik meist synonym verwendet, wir werden aber, weil das in der Schulmathematik weiter verbreitet ist, meist von Funktionen sprechen.

### 3.1.A Zur Entstehung des Funktionsbegriffs

Obwohl der Begriff der Abbildung einer der wichtigsten Begriffe der modernen Mathematik ist, wurde er erst sehr spät, nämlich im zwanzigsten Jahrhundert formalisiert. Natürlich wussten die Mathematiker/innen schon lange davor, was eine Funktion ist. Der Begriff wurde allerdings in verschiedenen Gebieten in verschiedenen speziellen Ausformungen verwendet und seine abstrakte Definition hat sich erst sehr spät herausgebildet.

Diese Tatsache spiegelt sich auch in der Vielzahl von Bezeichnungen wider, mit der (Spezialfälle von) Funktionen in den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verwendet werden, vgl. etwa Schichl und Steinbauer, 2018, p. 165, graue Box.

**3.1.1. Zur Geschichte des Funktionsbegriffs.** Es gibt aufgrund der oben angedeuteten langen Geschichte der Begriffsentwicklung auch eine Fülle von mathematisch-historischer Literatur zum Funktionsbegriff, seiner Entstehungsgeschichte, seinen Vorformen und seiner Verwendung in den Werken einflussreicher Mathematiker. Einen ersten Überblick bietet etwa Greefrath et al., 2016, Aschn. 2.1 und wir belassen es hier mit diesem Hinweis.

**3.1.2. Didaktische Phänomenologie.** Die Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Mathematik eignet sich aufgrund ihrer Geschichte besonders gut für einen speziellen didaktischen Zugang, der *didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen* genannt wird und auf (Freudenthal, 1983) zurückgeht. Aufbauend auf fachwissenschaftlichen und historisch-genetischen Überlegungen sowie der Beziehung der Mathematik zur realen Welt besteht dieses Konzept darin, den historischen Weg im Unterricht gewissermaßen und zumindest teilweise nachzuvollziehen:

Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind. (Freudenthal, 1983, S. IX)

Dieser Zugang kann insbesondere gut verwendet werden, um tragfähige Grundvorstellungen zu entwickeln.

## 3.2 Zum Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs

### 3.2.A Funktionales Denken

In der fachdidaktischen Literatur wird im Allgemeinen<sup>2</sup> unter dem Begriff „Funktionales Denken“ der gedankliche Umgang mit Funktionen verstanden. Ziel des Mathematikunterrichts dabei ist es, dass die Schülerinnen und Schüler die drei nachstehenden Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff entwickeln können. An vielen Stellen des Unterrichts können im Themenbereich der Funktionen die sekundären Grundvorstellungen aus den primären Grundvorstellungen entwickelt werden.

**3.2.1. Grundvorstellung 1: Die Zuordnungsvorstellung.** In der Literatur finden sich dazu die folgenden Beschreibungen:

<sup>2</sup>In der mathematikdidaktischen Genderforschung erhält das „Funktionale Denken“ eine weitere Bedeutung. Dort steht es im Gegensatz zum „Prädiktiven Denken“. Siehe z.B. <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm033a2.pdf>

*Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen. (Vollrath und Weigand, 2007)*

*Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu. Mit dem Mengenbegriff formuliert bedeutet dies: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Zielmenge zu. (Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)*

Im Unterricht können Experimente, bei denen Schülerinnen und Schüler selbstständig Messungen vornehmen und diese aufzeichnen, zur Ausbildung dieser Grundvorstellung beitragen. Dazu besprechen wir eine mögliche Aufgabenstellung.

**3.2.2. Beispiel (Abkühlvorgang von Tee).** Miss im Minutentakt die Temperatur eines frisch gekochten Tees und halte in einer Tabelle die Messzeitpunkte und die Temperatur fest. Stelle anschließend die Wertepaare  $(t|^\circ\text{C})$  im Koordinatensystem dar.

Tee ist trinkbar, wenn er auf etwa  $60^\circ$  abgekühlt ist. Nach welcher Zeit ist der frisch gekochte Tee soweit abgekühlt, dass er trinkbar ist?

Eine **exemplarische Lösung** dazu kann wie folgt aussehen:

Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in $^\circ\text{C}$	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Abb. 3.1: Messwerte zum Abkühlvorgang

Nach 5 Minuten ist der Tee trinkbar, da die Temperatur zwischen der vierten und fünften Minute auf unter  $60^\circ$  absinkt.

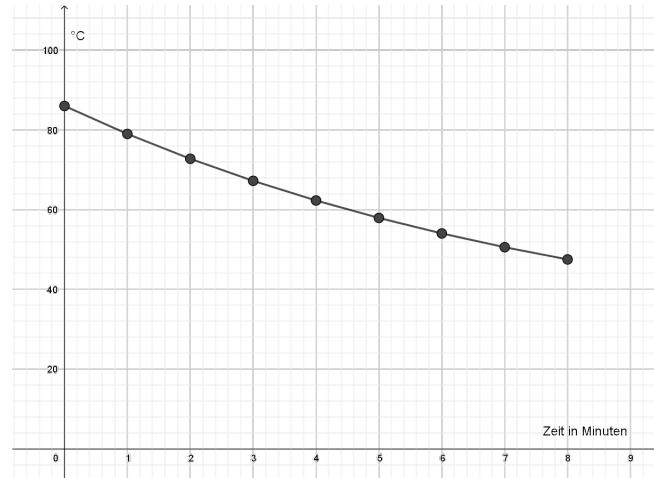


Abb. 3.2: Grafische Darstellung des Abkühlvorgangs

In diesem Fall erfahren die Schülerinnen und Schüler, dass jedem Messzeitpunkt (genau) eine Temperatur zugeordnet wird. Das Protokollieren der Temperaturnmessung in Form einer Tabelle stützt die Zuordnungs-Grundvorstellung bzw. den „Zuordnungscharakter“.

**Dynamische Darstellung.** Um den Zuordnungscharakter an der grafischen Darstellung deutlich zu machen, eignen sich dynamische Lernobjekte, die den Zusammenhang am Graphen der Funktion sichtbar machen (siehe Abbildung 3.3).

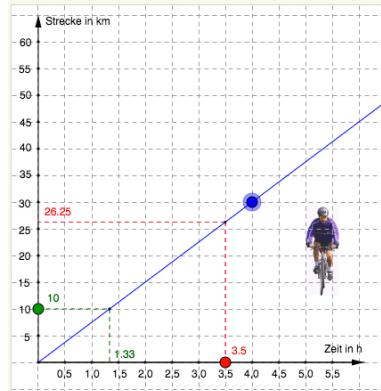


Abb. 3.3: Zuordnungscharakter — Quelle: <https://realmath.de/Neues/Klasse6/proportion/fahrrad.php>

Zeit	Temp in °C
0	86
1	79
2	73
3	67
4	62
5	58
6	54
7	51

Abb. 3.4: Zuordnungsvorstellung und Wertetabelle.

Entscheidend ist, dass mit der Zuordnungsvorstellung ein funktionaler Zusammenhang punktuell betrachtet wird. Dabei werden Wertepaare der Wertetabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in horizontaler Richtung gelesen.

Von Interesse sind z.B. bei der Aufgabenstellung zum Abkühlvorgang von Tee die einzelnen Wertepaare — also einzelne Zeitpunkte und die ihnen zugeordnete Temperatur (siehe Abbildung 3.4).

**3.2.3. Grundvorstellung 2: Die Kovariationsvorstellung.** Diese Grundvorstellung wird in der Literatur wie folgt beschrieben:

*Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.*  
(Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)

Als Fortsetzung der Aufgabenstellung „Abkühlvorgang von Tee“ bieten sich im Sinne der zweiten Grundvorstellung folgende Fragen an:

#### 3.2.4. Beispiel (Abkühlvorgang von Tee — Fortsetzung).

- (1) Wie verläuft die absolute Änderung der Temperatur des Tees in gleichen Zeitschritten?
- (2) Ändert sich die Temperatur gleichmäßig oder nimmt sie zunächst stärker ab und dann immer weniger stark?
- (3) Belege deine Aussagen zur Temperaturänderung mit Werten aus der Tabelle bzw. Abschnitten des Graphen.

Eine **exemplarische Lösung** dazu kann wie folgt aussehen:

- (1) Die absolute Änderung der Temperatur ist in gleichen Zeitschritten unterschiedlich groß.

Im Zeitintervall $[0; 1]$	sinkt die Temperatur um $7^{\circ}\text{C}$
In $[1; 2]$	sinkt die Temperatur um $7^{\circ}\text{C}$
In $[2; 3]$	sinkt die Temperatur um $6^{\circ}\text{C}$
In $[3; 4]$	sinkt die Temperatur um $5^{\circ}\text{C}$
In $[4; 5]$	sinkt die Temperatur um $4^{\circ}\text{C}$
In $[5; 6]$	sinkt die Temperatur um $4^{\circ}\text{C}$
In $[6; 7]$	sinkt die Temperatur um $3^{\circ}\text{C}$
In $[7; 8]$	sinkt die Temperatur um $3^{\circ}\text{C}$

- (2) Die Temperatur nimmt mit der Zeit immer weniger stark ab. Zu Beginn sinkt sie rasch, danach langsamer.  
 (3) Am Graphen zeigt sich das bei der unterschiedlichen Abnahme der Funktionswerte in gleichen Zeitintervallen.

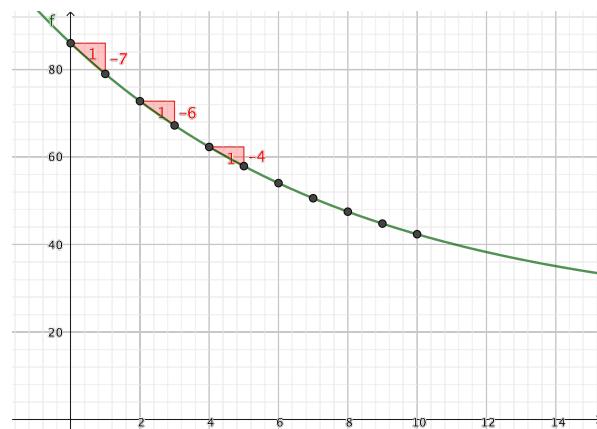


Abb. 3.5: Graphische Darstellung — Abkühlvorgang von Tee

Sowohl in der Wertetabelle (Abbildung 3.6) als auch am Graphen (Abbildung 3.7) kann die Kovariationsvorstellung sichtbar gemacht werden.

Variation

Zeit	Temp in °C
0	86
1	79
2	73
3	67
4	62
5	58
6	54
7	51

Kovariation

Abb. 3.6: Kovariationsvorstellung an der Wertetabelle

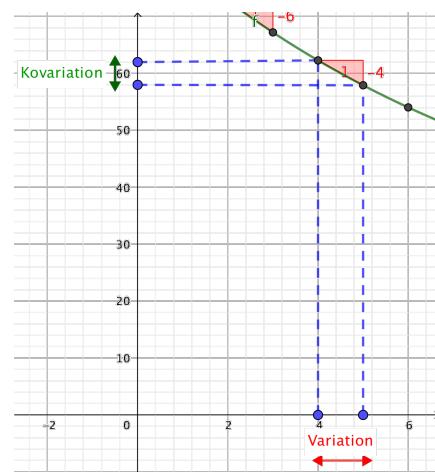


Abb. 3.7: Kovariationsvorstellung am Graphen

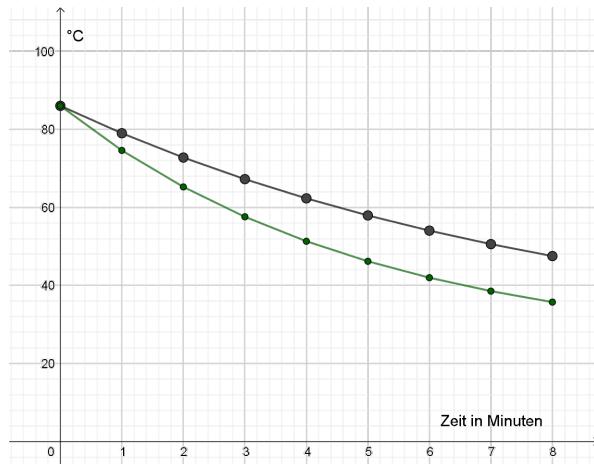


Abb. 3.8: Vergleich zweier Abkühlvorgänge

Das Entscheidende beim Kovariationsaspekt ist, dass es nicht mehr genügt, einzelne Wertepaare zu betrachten. Viel mehr müssen jeweils mehrere benachbarte Werte bzw. Wertepaare zueinander in Beziehung gesetzt werden. Bei der Kovariationsvorstellung wird also der Blick darauf gerichtet, wie die Änderung der „abhängigen Variablen“ (hier die Temperatur, meist der „y-Wert“) mit der Änderung der „unabhängigen Variablen“ (hier die Zeit, meist der „x-Wert“) zusammenhängt. Hierbei wird also die Wertetabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in vertikaler Richtung betrachtet, siehe nochmal Abbildung 3.6.

**3.2.5. Grundvorstellung 3: Die Objektvorstellung.** Diese dritte Grundvorstellung, die man als die Sicht auf die Funktion als Ganzes bezeichnen kann, wird wie folgt beschrieben:

*Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder gestiften Zusammenhang als Ganzes. (Vollrath & Weigand, 2007)*

*Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt. (Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)*

Hier wird ein wesentlicher Abstraktionsschritt durchgeführt: Nicht mehr die Zuordnung von einzelnen Werten zueinander steht im Zentrum der Betrachtung, sondern diese Zuordnung *als Ganzes*. Eine Funktion wird nicht länger als Prozess der Zuordnungen verstanden, sondern der gesamte Prozess wird als eine Einheit, als *ein* (eigenständiges) Objekt verstanden. Betrachtet man Funktionen von diesem Standpunkt, also als eigenständige Objekte, dann fällt es leicht Aussagen über Funktionen bzw. ihre Eigenschaften wie etwa Monotonie zu treffen. Auch der Graph wird als Ganzes betrachtet und somit sind Aussagen über seinen gesamten Verlauf möglich.

Als weitere Fortsetzung der Aufgabenstellung „Abkühlvorgang von Tee“ bietet sich im Sinne der dritten Grundvorstellung ein Vergleich von verschiedenen Abkühlvorgängen an, siehe Abbildung 3.8.

### 3.2.B Zum Technologieeinsatz bei Funktionen

Moderne Softwarepakete — wie zum Beispiel GeoGebra<sup>3</sup> — bieten die Möglichkeit, die drei zentralen Darstellungsformen einer Funktion (Funktionsgleichung, Tabelle, Graph) gleichzeitig zu verwenden (s. Abbildung 3.9). Damit lassen sich einerseits die unterschiedlichen Darstellungsformen auf Knopfdruck erzeugen, andererseits können damit aber auch Eigenschaften von Funktionen, die Auswirkungen von Parametervariationen, etc. in allen drei Darstellungsformen studiert und erfasst werden.

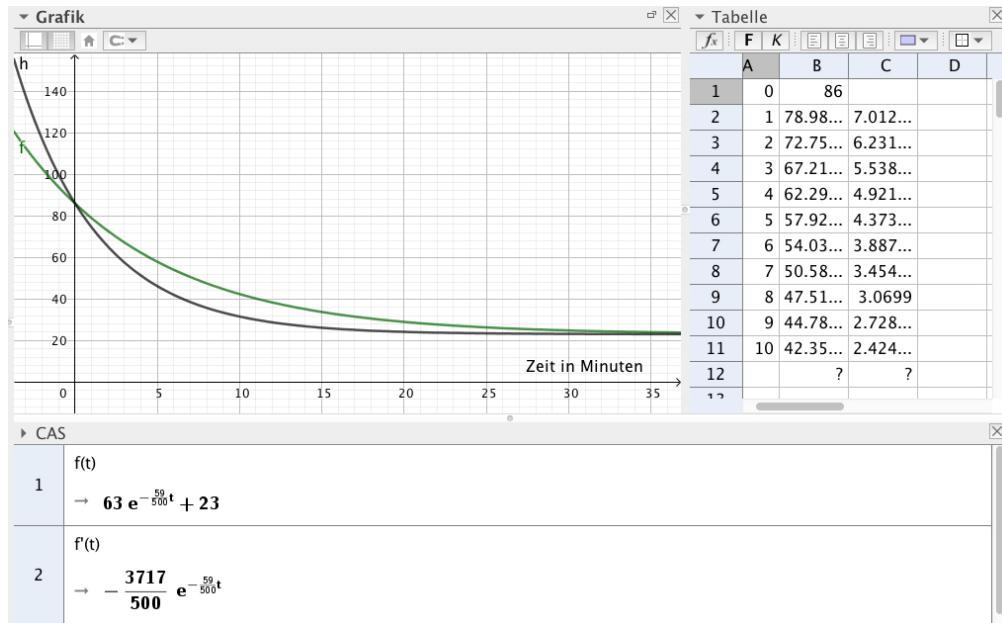


Abb. 3.9: GeoGebra mit Grafik-, Tabellen- und CAS-Fenster

Des Weiteren kann der Einsatz von Technologie — vor allem durch Nutzung von Computeralgebra systemen — den Aufwand bei schematischen Abläufen wie z.B. dem Ermitteln von Nullstellen erheblich reduzieren. In solchen Fällen muss der Interpretation der Lösung dann größere Bedeutung zukommen.

Darüberhinaus erleichtert der Computer das Entdecken mathematischer Zusammenhänge sowie das Bearbeiten von Modellierungsaufgaben. Zu guter Letzt macht es der Computer auch möglich, erhaltene Lösungen zu überprüfen oder zu kontrollieren.

<sup>3</sup>Andere auch wissenschaftlich genutzte Systeme sind z. B. Mathematica und Maple.

### 3.3 Die Mathematik des Funktionsbegriffs

Hier wollen wir nun die wichtigsten fachmathematischen Facetten des Funktionsbegriffs diskutieren.

#### 3.3.A Der Kern des Funktionsbegriffs

**3.3.1. Erste Begriffsbestimmung.** Kolloquial formuliert ist eine Funktion eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die *jedem* Element der einen Menge (Argument, unabhängige Variable) *genau ein* Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable) zuordnet. In der Literatur finden sich unterschiedlich abstrakte Definitionen des Funktionsbegriffs, die aber alle äquivalent sind. Der Kern des Begriffs ist das „*Jedem*“ und das „*Genau-Ein*“ in der Zuordnung.

**3.3.2. Die fundamentale Bedeutung des Funktionsbegriffs in der Mathematik.** Abstrakt gesprochen, besteht ein großer Teil der modernen Mathematik aus der Analyse von abstrakten Strukturen. Diese Strukturen bestehen aus Objekten und den Beziehungen zwischen diesen Objekten. Diese Objekte werden meist zu Mengen zusammengefasst, sodass Mengen für die allermeisten Strukturen die Basis bilden. Funktionen sind nun die mathematische Formalisierung für die Beziehungen zwischen diesen Objekten. Daher bildet der Begriff einer *Funktion zwischen Mengen* das Fundament der gesamten sogenannten Strukturmathematik, vgl. (Schichl und Steinbauer, 2018, Kap. 5).

Wir geben nun die mathematische Definition, mit der wir im folgenden arbeiten werden, siehe dazu auch Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 4.3. Wir werden — als Ergänzung — an einigen Stellen Verweise (mittels QR-Code bzw. Link) auf die Erklärvideos anbringen, die im Zusammenhang mit der 3. Auflage von Schichl und Steinbauer, 2018 produziert wurden.

#### Mathematische Faktenbox 1: Funktion

**3.3.3. Definition (Funktion).** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine *Funktion*  $f$  von  $A$  nach  $B$  ist eine Vorschrift, die *jedem*  $a \in A$  *genau ein*  $b \in B$  zuordnet.

► Video  Funktionen, Teil 1

**3.3.4. Übliche Sprech- und Schreibweisen** sind:

- (1) Die Menge  $A$  wird als *Definitionsmenge* oder *Definitionsbereich* von  $f$  bezeichnet und  $B$  als *Zielmenge* oder *Zielbereich* von  $f$ .
- (2) Das einem  $a \in A$  zugeordnete Element  $b$  bezeichnen wir mit  $f(a)$  und nennen es den Wert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  oder das Bild von  $a$  unter  $f$ ;  $a$  wird umgekehrt als *ein Urbild* von  $b$  unter  $f$  bezeichnet.
- (3) Die Menge von geordneten Paaren

$$G(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B \quad (3.1)$$

heißt *Graph* von  $f$  und ist die abstrakte Version der Zusammenstellung der  $a$ -Werte und der zugehörigen Funktionswerte  $f(a)$  in einer Wertetabelle, siehe Abschnitt 3.2.A.

### Mathematische Faktenbox 1 – Fortsetzung

- (4) Das Symbol „ $a \mapsto f(a)$ “ (lies „ $a$  geht über (in)  $f(a)$ “) drückt aus, dass die Funktion  $f$  dem Element  $a$  des Definitionsbereichs das Bild  $f(a)$  im Zielbereich zuordnet. Oft wird dieses Symbol auch zur Bezeichnung der Funktion selbst verwendet und man spricht von „der Funktion  $a \mapsto f(a)$ “. Die ausführlichste und genaueste Darstellung einer Funktion erfolgt durch die Notation

$$\begin{array}{ccc} f : A & \rightarrow & B \\ a & \mapsto & \dots \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} f : A & \rightarrow & B \\ f(a) & = & \dots \end{array}$$

- (5) Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aber auch  $f : D \rightarrow Z$  mit  $D, Z \subseteq \mathbb{R}$  werden als *reelle Funktionen* bezeichnet.

#### 3.3.5. Beispiel (Funktionen).

Einfache Funktionen sind etwa

- (1)  $f : A \rightarrow B$  mit  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{a, b\}$  gegeben durch  $f : 1 \mapsto a$ ,  $f : 2 \mapsto b$  und  $f : 3 \mapsto a$ . Der Graph von  $f$  ist dann die Menge  $G(f) = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ .
  - (2) Sei  $A = \mathbb{R} = B$ . Wir betrachten nochmals die Funktion  $f : x \mapsto x^2$ . Dann gilt
- $$G(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (3.2)$$
- d.h. z.B.  $(0, 0) \in G$ ,  $(1, 1) \in G$ ,  $(2, 4) \in G$ ,  $(-1, 1) \in G$ .

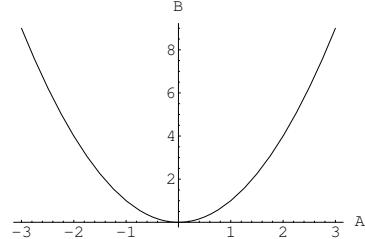


Abb. 3.10: Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ .

#### 3.3.6. Funktionen auf $\mathbb{R}$ und ihr Graph.

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, ist es üblich und sehr anschaulich die Graphen reeller Funktionen der Form

$$f : I \rightarrow J \quad (I, J \text{ Intervalle oder andere „schöne“ Teilmengen von } \mathbb{R}), \quad (3.3)$$

die ja Teilmengen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  sind, „in kartesischen Koordinaten darzustellen“, siehe Abbildung 3.10. Bedenken Sie aber, dass für allgemeine Definitionsmengen und Zielmengen eine solche Darstellung nicht möglich ist, vgl. auch Abschnitt 3.3.C, unten.

#### 3.3.7. Der Kern des Funktionsbegriffs.

Wie schon oben angedeutet, besteht der inhaltliche Kern des Funktionsbegriffs im „Jeden“ und im „Genau ein“, etwas ausführlicher in der Tatsache, dass

- (F1) *jedem* Element der Definitionsmenge *genau ein* Element der Zielmenge zugeordnet wird.

Das ist gewissermaßen das hochverdichtete Konzentrat einer sehr lange andauernden Begriffsbildung und so allgemein und abstrakt, dass gerade darin die Schwierigkeit liegt, den Begriff zu erfassen und zu verstehen.

Wir werden uns dem Begriff zunächst anhand von sog. *Pfeildiagrammen* annähern, mit denen sich Funktionen zwischen *endlichen* Mengen sehr bequem darstellen lassen, siehe Abbildung

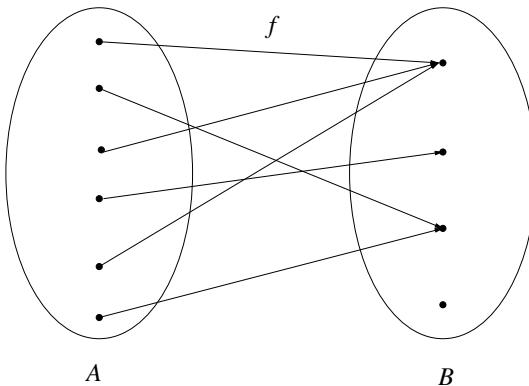


Abb. 3.11: Pfeildiagramm einer Funktion  $f : A \rightarrow B$  zwischen endlichen Mengen.

**3.11.** In diesem Diagramm bezeichnen die Punkte die verschiedenen Elemente der Mengen  $A$  bzw.  $B$ , und die Pfeile symbolisieren die Zuordnung durch die Funktion  $f$ .

Die Tatsache, dass nach Definition 3.3.3 *jedem*  $a \in A$  *genau ein*  $b \in B$  zugeordnet wird, bedeutet, dass von jedem Element von  $A$  *genau ein* Pfeil wegführt. Das bedeutet auch, dass

- (1) von *keinem*  $a \in A$  mehr als ein Pfeil startet und
- (2) von *keinem*  $a \in A$  kein Pfeil startet.

Andererseits können die Elemente von  $B$  von mehreren Pfeilen getroffen werden, oder auch von gar keinem. Ob das der Fall ist oder nicht, hat *nichts mit dem Funktionsbegriff* zu tun, sondern mit der Frage, ob die Funktion die Eigenschaften injektiv, surjektiv bzw. bijektiv hat, die wir unten genauer besprechen werden. An dieser Stelle ist es aber essentiell zu bemerken, dass beim Funktionsbegriff Definitions- und Zielmenge *nicht „gleichrangig“* behandelt werden und daher ihre Rollen nicht einfach vertauscht werden können.

### 3.3.B Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Wir diskutieren zunächst die grundlegenden Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv, vor allem, um sie klar vom Kern des Funktionsbegriffs (**F1**) abzugrenzen und etwaige Missverständnisse aufzuklären.

#### Mathematische Faktenbox 2: Injektiv, surjektiv, bijektiv

**3.3.8. Definition (Injektiv, surjektiv, bijektiv).** Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt

- (1) *injektiv* wenn *jedes* Element  $b \in B$  *höchstens ein* Urbild hat (kolloquial: von  $f$  *höchstens einmal* getroffen wird),
- (2) *surjektiv* wenn *jedes* Element  $b \in B$  (mindestens) *ein* Urbild hat (kolloquial: *überhaupt* von  $f$  *getroffen* wird),
- (3) *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

► Video



Injektiv, surjektiv, bijektiv, I



Injektiv, surjektiv, bijektiv, II

**3.3.9. Bijektive Funktionen** haben also die Eigenschaft, dass jedes  $b$  in der Zielmenge genau einmal getroffen wird. Daher sind bijektive Funktionen in gewisser Weise „fad“, weil sie eine Eins-zu-eins Zuordnung der Elemente von  $A$  und  $B$  sind (beachte (3.1) gilt ja sowieso): Die Funktion ordnet alle Elemente von  $A$  und alle Elemente von  $B$  einander in eindeutiger Weise zu. Im Falle endlicher Mengen  $A$  und  $B$  ist eine bijektive Abbildung „nur“ eine Umbenennung der Elemente.

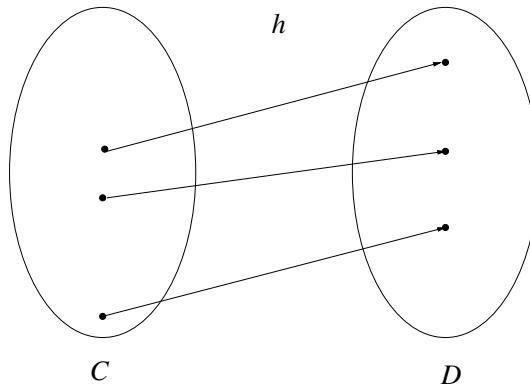


Abb. 3.12: Das „fad“ Pfeildiagramm einer bijektiven Funktion.

Schließlich sind bijektive Funktionen  $f : A \rightarrow B$  auch umkehrbar, d.h. es gibt die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  mit

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad (3.4)$$

für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$ .

**3.3.10. Funktionsdefinition: Häufige Fehler.** Folgende Fallgruben im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff sind besonders „beliebt“ und daher heben wir sie besonders hervor:

- (1) Zur Festlegung einer Funktion **muss** man ausdrücklich Definitions- und Zielmenge angeben. Die Angabe der Zuordnungsvorschrift alleine ist keinesfalls ausreichend, weil die Eigenschaften der Funktion *wesentlich* von Definitions- und Zielmenge abhängen!
- (2) Es ist wichtig, zwischen der Funktion  $f$  und den Werten  $f(x)$  einer Funktion zu unterscheiden. Falsch ist etwa

„Die Abbildung  $f(x)$  ist injektiv.“

Korrekte Formulierungen sind etwa

„Die Abbildung  $f$  ist injektiv“, oder „Die Abbildung  $x \mapsto f(x)$  ist injektiv“.

### 3.3.C Weiterführende Bemerkungen

Obwohl in der Schulmathematik hauptsächlich Funktionen von (Intervallen in)  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  auftreten, ist es wichtig im Blick zu behalten, dass der Funktionsbegriff *viel* allgemeiner ist. Wir diskutieren zwei Beispiele, die in der klassischen Analysis wichtig sind und eine „Anwendung“ des Funktionsbegriffs „auf höherer Ebene“.

**3.3.11. Ebene Kurven** sind Abbildungen von (Intervallen in)  $\mathbb{R}$  in den  $\mathbb{R}^2$ . Das Erzbeispiel ist der Kreis, mathematisch auch  $S^1$  genannt,

$$k : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad k(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterdarstellung#/media/File:Parametric-representation-of-unit-circle.svg>

Von .gs8 (talk) — Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18961072>

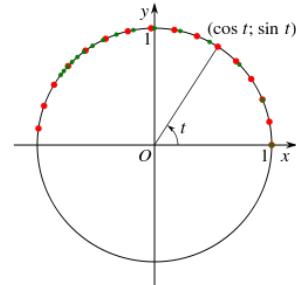


Abb. 3.13: Der Kreis

Für derartige Funktionen ist es *nicht* möglich den Graphen im  $\mathbb{R}^2$  darzustellen; er ist ja per Definition eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ . Eine gute Veranschaulichung von Kurven gelingt, indem man ihr *Bild* (vgl. Schichl und Steinbauer, 2018, 4.3.11 f.) als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  darstellt. Im obigen Beispiel (3.8) erhalten wir für das Bild  $k([0, 2\pi))$  den Einheitskreis in der Ebene, siehe Abbildung 3.13.

Die klassische Theorie der Kurven ist sehr reichhaltig und kennt viele „schöne“ Beispiele, etwa die Kardioide (Herzkurve)  $c : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(\varphi) = \begin{pmatrix} 2a(1 - \cos(\varphi)) \cos(\varphi) \\ 2a(1 - \cos(\varphi)) \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

die durch das Abrollen eines Kreises auf einem Kreis mit demselben Radius entsteht, siehe Abbildung 3.14.

Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kardioide#/media/File:Kardioide.svg> von Ag2gaeh — Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46189703>

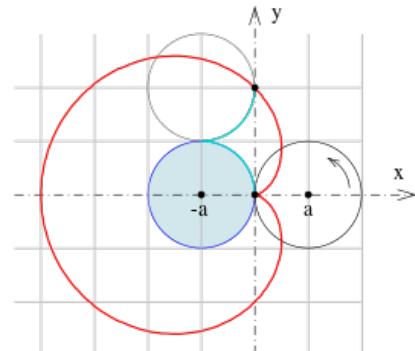


Abb. 3.14: Die Kardioide

**3.3.12. Flächen, Landschaften.** Der Graph von Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann als eine Fläche im Raum dargestellt werden, siehe Abbildung 3.15.

Ein praktisches Beispiel einer solchen Funktion wäre etwa die Temperaturfunktion, die jedem Punkt in Wien (das wir der Einfachheit halber als Teil der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ansehen) die (vorhergesagte) Tiefstemperatur der kommenden Nacht zuordnet.

Verständnisfrage: Was würde es in diesem Kontext bedeuten, falls Teile des Graphen „unterhalb“ der  $(x, y)$ -Ebene liegen?

Ein weiteres einfaches Beispiel ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) &= \sin(2x) \cos(y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

deren Graph links dargestellt ist.

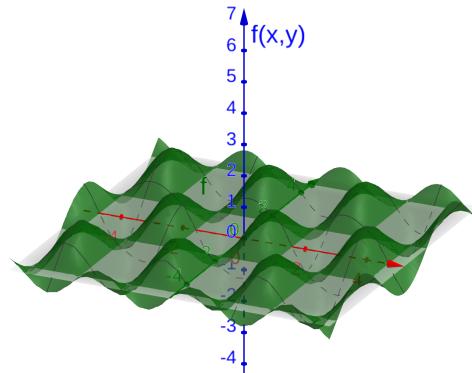


Abb. 3.15: Graph der Funktion (3.6).

**3.3.13. Ableitungsoperator.** Eine äußerst interessante Begriffsbildung sind auch Funktionen, die Funktionen neue Funktionen zuordnen, d.h. Definitions- und Zielbereich sind selbst Mengen von Funktionen. Man spricht dann meist von *Operatoren*. Ein instruktives Beispiel ist der *Ableitungsoperator* etwa in der folgenden Form:

$$D : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'. \quad (3.7)$$

Hier bezeichnet  $C^1(\mathbb{R})$  die Menge (sogar den Vektorraum) der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$  und  $C(\mathbb{R})$  die Menge (ebenfalls Vektorraum) der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Der Operator  $D$  ordnet dann jeder  $C^1$ -Funktion ihre (stetige) Ableitungsfunktion zu. Mit dieser Begriffsbildung kann man nun Tatsachen/Sätze der Analysis in Termen der Eigenschaften des Operators  $D$  kodieren, aber das führt uns hier zu weit ...

Es sei aber angemerkt, dass man die aus dem Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung abgeleitetet Aussage, dass Differenzieren und Integrieren zueinander „im wesentlichen“ inverse Operationen sind, in Termen des Ableitungs- und des Integraloperators präzise machen kann, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 4.2.9).

Für alle diese Überlegungen ist es essentiell sich der Objektvorstellung von Funktionen bedienen zu können.

### 3.4 Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 3 werfen wir einen informierten Blick zurück und verwenden verstkt die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen (siehe Abschnitt 2.1) um unsere fachmathematische und -didaktische Diskussion des Funktionsbegriffs abzurunden.

#### 3.4.A Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Wir haben in Abschnitt 3.2.A bereits die drei Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

- (1) Zuordnungsvorstellung,
- (2) Kovariationsvorstellung und
- (3) Objektvorstellung

kennengelernt und im schulpraktischen Kontext beschrieben. Wir fassen sie hier im Folgenden noch einmal kurz zusammen.

**3.4.1. Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff.** Dieser ersten Grundvorstellung sind wir in 3.2.1 begegnet. Sie kann prägnant wie folgt formuliert werden.

#### FD-Box 6: Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff

Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.

Diese Vorstellung spielt also unmittelbar auf den Kern des Funktionsbegriffs (F1) an. In dieser Vorstellung knnen wir den durch eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  gegebenen Zusammenhang zwischen Größen in der Definitionsmenge  $A$  und der Zielmenge  $B$  aus zwei Perspektiven betrachten. Um das auch konkret zu diskutieren, betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(r) = 2\pi r, \quad (3.8)$$

die jeder Zahl  $r$  den Umfang des Kreises vom Radius  $r$  zuordnet.

- (1) *Perspektive der Definitionsmenge:* Gegeben ist ein  $a \in A$ . Welches  $b \in B$  wird diesem  $A$  zu geordnet? Im Kontext von Beispiel (3.8) bedeutet das: Welchen Umfang hat ein Kreis vom Radius  $r$ ?  
Bemerke, dass diese Frage *immer genau eine Antwort* hat!
- (2) *Perspektive der Zielmenge:* Gegeben ist ein  $b \in B$ . Welche  $a$  in  $A$  werden diesem  $b$  zugeordnet? Im Kontext von (3.8): Welchen Radius hat ein Kreis bei gegebenem Umfang?  
Bemerke, dass im Beispiel die Antwort zwar eindeutig ausflt; das *muss aber nicht so sein* — außer die Funktion ist injektiv. Ebenfalls muss es überhaupt *nicht immer eine* Antwort geben — außer die Funktion ist surjektiv.

**3.4.2. Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff.** Etwas weniger präzise bzw. formal ist die zweite Grundvorstellung aus 3.2.3.

#### FD-Box 7: Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff

Mit Funktionen wird erfasst, wie sich nderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.

Hier steht also das „Miteinander-Variieren“ der beiden Größen im Zentrum. Beispielsweise nimmt der Umfang eines Kreises mit wachsendem Radius zu, die Funktion ist also monoton wachsend. Umgekehrt verhält es sich etwa beim Abkühlen des Tees.

Um Fehlvorstellungen zu vermeiden, ist es wichtig drauf hinzuweisen, dass „beeinflusst“ nicht im kausalen Sinne zu verstehen ist, sondern lediglich deskriptiv, vgl. auch [1.1.2](#).

Auch hier können wir wieder die beiden Perspektiven aus [3.4.1](#) einnehmen.

- (1) *Perspektive der Definitionsmenge:* Variiert wird  $a \in A$ . Wie verhält sich dann die „abhängige Variable“  $b = f(a)$ ? Im Kontext von Beispiel [\(3.8\)](#): Wie verändert sich der Umfang eines Kreises wenn der Radius variiert, z.B. vergrößert wird?
- (2) *Perspektive der Zielmenge:* Betrachtet wird die die „abhängige Variable“  $b = f(a)$ . Wie muss sich  $a \in A$  verändern, dass sich  $b = f(a)$  in einer bestimmten Weise verhält, z. B. einen bestimmten Wert erreicht, oder einen oder Extremwert annimmt?

**3.4.3. Objektvorstellung des Funktionsbegriffs.** Die abstrakteste (und auch sekundäre) Grundvorstellung zum Funktionsbegriff ist die Objektvorstellung, die neben dem schulpraktischen Kontext vor allem in höheren Jahrgangsstufen (vgl. Abschnitt [3.2.5](#)) und auch in der Analysis an sich eine tragende Rolle spielt.

#### FD-Box 8: Objektvorstellung zum Funktionsbegriff

Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Betrachtet man Funktionen als Objekte, dann können ihnen in natürlicher Weise Eigenschaften zugeschrieben werden, wie z. B. Monotonie, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc. Außerdem erlaubt es die Objektvorstellung in natürlicher Weise, mit Funktionen *als ganzes* Operationen durchzuführen, etwa eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu skalieren oder zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu addieren:

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \text{und} \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x). \quad (3.9)$$

Diese Sichtweise erlaubt es auch das mathematische Gebäude weiter aufzubauen und „höhere“ Begriffsbildungen vorzunehmen, wie etwa den Ableitungsoperator [3.3.13](#). In diesem Fall spielen reelle Funktionen dann die Rolle von Punkten in einer Menge (von Funktionen), auf denen der Operator definiert ist.

#### 3.4.B Aspekte des Funktionsbegriffs

Beim Funktionsbegriff lassen sich *zwei* fachliche Aspekte unterscheiden. Einen davon haben wir in der obigen Darstellung besonders hervorgehoben und insbesondere in [3.3.3](#) verwendet, um den Funktionsbegriff zu definieren.

**3.4.4. Der Zuordnungsaspekt** ist genau das, was wir als Kern des Funktionsbegriffs ([F1](#)) identifiziert und schon ausführlich thematisiert haben.

#### FD-Box 9: Zuordnungsaspekt des Funktionsbegriffs

Eine Funktion ist eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen  $A$  und  $B$ , wobei jedem Element von  $A$  genau ein Element von  $B$  zugeordnet wird.

**3.4.5. Der Paarmengenaspekt.** Der zweite Aspekt des Funktionsbegriffs ist ebenfalls oben bereits angeklungen, wurde aber nicht in der Weise ins Zentrum gerückt wie der Zuordnungsaspekt. Der Paarmengenaspekt tritt in der Definition des Graphen einer Funktion 3.3.4(3) zu Tage: Der Graph  $G(f)$  einer Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist die Menge von *geordneten Paaren*

$$G(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \quad (3.10)$$

und daher Teilmenge des kartesischen Produkts  $A \times B$  (das ja die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  ist, vgl. Schichl und Steinbauer, 2018, 4.1.38f.).

Dieser Aspekt kann und wird im fachmathematischen Kontext auch oft als alternative (aber äquivalente) Definition herangezogen, was dann etwa die folgende Form annimmt (vgl. Schichl und Steinbauer, 2018, 4.3.4 f. ► Video  Funktionen, Teil 2 )

**3.4.6. Definition (Funktion mengentheoretisch).** Eine *Funktion* ist ein Tripel  $f = (A, B, G)$  bestehend aus einer Menge  $A$ , genannt Definitionsbereich, einer Menge  $B$ , genannt Zielbereich und einer Teilmenge  $G$  des Produkts  $A \times B$  mit den Eigenschaften:

- (1) Jedes  $a \in A$  tritt als erste Komponente eines Paares in  $G$  auf.
- (2) Stimmen die ersten Komponenten eines Paares in  $G$  überein, dann auch die zweiten.

Die beiden Eigenschaften in dieser Definition kodieren zusammen genau den Kern des Funktionsbegriffs (F1) und  $G$  ist natürlich dieselbe Menge wie (in der Terminologie von Definition 3.3.3) der Graph  $G(f)$ . Daher sind die beiden Definitionen 3.3.3 und 3.4.6 mathematisch äquivalent.

Außerdem können wir den Paarmengenaspekt des Funktionsbegriffs nun wie folgt herausstellen:

#### FD-Box 10: Paarmengenaspekt des Funktionsbegriffs

Eine Funktion ist gegeben durch Teilmenge  $G$  des kartesischen Produkts zweier Mengen  $A$  und  $B$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  existiert, sodass  $(a, b) \in G$ .

**3.4.7. Die Rolle der beiden Aspekte des Funktionsbegriffs.** Gemäß unserer Darstellung in Abschnitt 2.1.A ist ein Aspekt eines mathematischen Begriffs eine seiner Facetten, mit der er *fachlich* beschrieben wird. Im Falle des Funktionsbegriffs können beide Aspekte sogar herangezogen werden um den Begriff vollständig zu charakterisieren, vgl. die Definitionen 3.3.3, und 3.4.6, die jeweils einen Aspekt benutzen, um den Begriff in seiner Gesamtheit zu erfassen und so zu definieren.

Wie wir in Abschnitt 3.2 gesehen haben steht in der schulischen Praxis, die sich ja bevorzugt auf Phänomene basierend dem Funktionsbegriff nähert, der Zuordnungsaspekt im Vordergrund. Der Paarmengenaspekt wird aber in den höheren Jahrgangsstufen an Relevanz gewinnen.

### 3.4.C Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Wie sieht es nun mit den Bezügen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff aus? Wie in Abschnitt 3.2 dargestellt lernen Schüler/innen das funktionale Denken in der Sekundarstufe 1 über Phänomene kennen und bauen so die Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff allmählich auf. Bis etwa zum Ende der Sekundarstufe 1 ist dabei eine formale Definition des Funktionsbegriffs aus unserer Sicht nicht zwingend nötig. Wird dann eine formale Definition gegeben, so baut sie meist auf dem Zuordnungsaspekt auf, der sich wesentlich unmittelbarer vor allem aus den ersten beiden Grundvorstellungen ergibt und auch weniger formalen Aufwand erfordert, z. B. kann der Begriff des geordneten Paares vermieden werden.

Allerdings eignen sich beide Aspekte, den gesamten Begriff zu erfassen (vgl. 3.4.7) und insbesondere dazu *alle drei* Grundvorstellungen weiterzuentwickeln. Schematisch stellt Abbildung 6.11 die Bezüge zwischen den beiden Aspekten und den drei Grundvorstellungen dar (vgl. (Greefrath et al., 2016, Abschnitt 2.4)), wobei hier die Stärke der Verbindungen durch die Dicke der Verbindungslinien angedeutet wird.

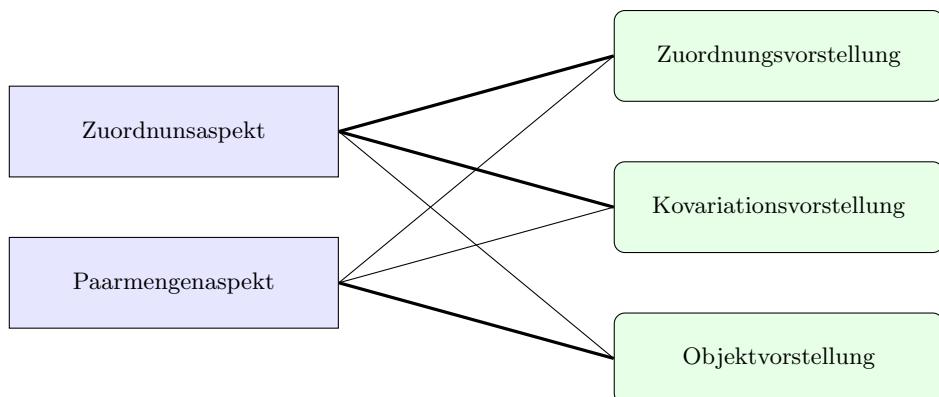


Abb. 3.16: Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen



## Kapitel 4

# Folgen, Grenzwert & die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem „Herzstück“ der Analysis, dem *Grenzwertbegriff*, vgl. 11.1.4. Genauer werden wir uns dem Grenzwertbegriff in seiner analytisch am einfachsten zu fassenden Form nähern, nämlich dem *Grenzwert reeller Folgen*.

Dazu diskutieren wir zunächst den *Folgenbegriff*, wobei wir den Schwerpunkt auf den Iterationsaspekt von Folgen legen, d.h. die Rolle von Folgen in der *diskreten Modellierung* iterativer Prozesse betonen. Darüber hinaus stellen wir aber alle Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff vor und diskutieren Zugänge zu Folgen im Unterricht.

Danach lassen wir uns in natürlicher Weise vom Iterationsaspekt zum *Konvergenzbegriff* führen und diskutieren ihn zunächst aus fachlicher Perspektive, bevor wir Zugänge zum Grenzwert im Unterricht inklusive des propädeutischen Grenzwertbegriffs diskutieren. In einem historisch-philosophischen Exkurs diskutieren wir dynamische und statische Vorstellungen zum Grenzwertbegriff und auch die damit zusammenhängenden *Vorstellungen vom „Unendlichen“*. Schließlich diskutieren wir konkret die tiefsthinige Frage: Ist  $0.\bar{9} = 1$ ? Sie wird uns auch mit dem Begriff konvergenter *Reihen* in Berührung bringen.

Schließlich wenden wir uns einem weiteren, eng mit dem Konvergenzbegriff verbundenen Eckstein der gesamten Analysis zu: Der Vollständigkeit der reellen Zahlen, vgl. 22.2.1.

### 4.1 Folgen

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Begriff der (unendlichen) Folgen. Wir diskutieren seine fachlichen Grundlagen, seine Aspekte und die damit verbundenen Grundvorstellungen sowie Zugänge im Unterricht. Hauptsächlich verwenden wir Folgen aber als Werkzeug, das uns zum zentralen Begriff des Grenzwerts führt.

### 4.1.A Fachliche Grundlagen

#### 4.1.1. Was sind Folgen?

Ein Enzyklopädieeintrag könnte etwa so aussehen:

Eine Folge ist eine Auflistung von unendlich vielen<sup>1</sup> fortlaufend nummerierten Objekten.

Die wesentliche Eigenschaft einer Folge ist, dass die „Objekte“, genannt *Folgenglieder, fortlaufend nummeriert* sind. Das steht im Gegensatz zu Objekten, die zu einer bloßen Menge zusammengefasst werden: Die Elemente einer Menge sind *nicht* nummeriert oder sonst irgendwie geordnet. (Das einzige charakteristische am Begriff einer Menge ist, dass es sich um eine Ansammlung von Objekten handelt, wobei eindeutig feststeht, welche Objekte dazugehören und welche nicht, vgl. (Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 4.1). Wir können also salopp sagen, dass eine Menge ein „Sauhaufen“ von Objekten ist, eine Folge aber aus *durchnummerierten* Objekten besteht.

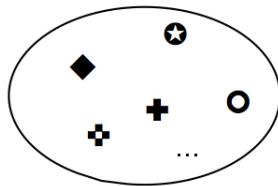


Abb. 4.1: Eine Menge ist ein „Sauhaufen“ von Objekten.

1:	◆
2:	★
3:	✗
4:	○
5:	✚
	...

Abb. 4.2: Eine Folge besteht aus einer geordneten Liste von Objekten.

Ein weiterer Wesenzug einer Folge ist, dass es sich um eine Auflistung von *unendlich vielen* fortlaufend nummerierten Objekten handelt, was in den Abbildungen durch die Punkte ... angedeutet ist. Das bedeutet mathematisch ausgedrückt, dass es sich um *abzählbar viele* Objekte handelt, also genau um „genau so viele“ Objekte, wie die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  Elemente haben. Für Details zur Mächtigkeit von  $\mathbb{N}$  und dem Begriff abzählbar (unendliche) Menge siehe Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 4.4.

► Video Mächtigkeit, Teil I (Gleichmächtigkeit von Mengen)

Hier wiederholen wir nur das Wichtigste und insbesondere die mathematische Terminologie, die nämlich nicht selbsterklärend ist und das Potential hat, Verwirrung zu stiften.

- *Endliche Mengen* sind Mengen, die  $n$  Elemente besitzen, wobei  $n$  eine (beliebige) natürliche Zahl ist.
- *Unendliche Mengen* sind Mengen, die *nicht endlich* sind.

Des Weiteren ist es eine wesentliche Tatsache der Mengenlehre, dass es „verschieden große“ unendliche Mengen gibt. Die kleinste solche ist die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen und alle Mengen, die „gleich groß“ im Sinne der Mächtigkeit sind, heißen *abzählbar*. Diese Terminologie ist an die Idee angelehnt, dass man die natürlichen Zahlen abzählen könnte (wenn man nur

<sup>1</sup>Es gibt auch endlich Folgen, wir werden uns aber hier nur mit sogenannten unendlichen Folgen beschäftigen und nennen sie einfach Folgen.

genügend Zeit dafür hätte). Genauer, jede natürliche Zahl ist in endlich vielen Abzählsschritten erreichbar.

Wir haben also endliche Mengen und die kleinste „Klasse“ unendlicher Mengen, die abzählbaren Mengen. Leider werden erstere auch oft *abzählbar endlich* genannt und zweitere *abzählbar unendlich*, sodass man mit der Bezeichnung „abzählbar“ vorsichtig sein muss. Meistens — und so werden wir das immer halten — bedeutet abzählbar ohne Zusatz abzählbar unendlich.

Eine mathematische Präzisierung der obigen Beschreibung von Folgen erfolgt am bequemsten über den Funktionsbegriff. Eine Folge ist eine spezielle Funktion, nämlich eine solche mit Definitionsmenge  $\mathbb{N}$ : Die Folgenglieder werden mit den natürlichen Zahlen durchnummieriert. Wir wiederholen die formale Definition und auch die üblichen Schreibweisen für Folgen.

### Mathematische Faktenbox 3: Folgen

**4.1.2. Definition (Folge).** Sei  $M$  eine Menge. Eine *Folge* in  $M$  ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow M. \quad (4.1)$$

Meist werden wir den Fall  $M = \mathbb{R}$  betrachten; man sagt dann,  $a$  ist eine *reelle Folge*.

**4.1.3. Terminologie (Lästiges zur Definition von  $\mathbb{N}$ ).** In weiten Teilen der mathematischen Literatur herrscht Uneinigkeit darüber, ob 0 Element der natürlichen Zahlen ist oder nicht. Letztlich ist das eine Geschmacksfrage und wir verwenden in diesem Skriptum  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ , was auch mit der DIN-Norm 5473 konform geht. Für die positiven natürlichen Zahlen schreiben wir dann  $\mathbb{N}^*$  oder  $\mathbb{N}^+$ .

**4.1.4. Terminologie (Folgen).** Zunächst ist eine Folge eine Funktion mit einem speziellen Definitionsbereich, nämlich  $\mathbb{N}$ . Daher ist alles, was wir über Funktionen wissen auch für Folgen gültig!

Insbesondere wird (vgl. Abschnitt 3.3.A) jeder natürlichen Zahl genau ein Folgenglied zugeordnet; also liegt es am „Kern“ des Funktionsbegriffs, dass eine Folge wirklich aus abzählbare vielen durchnummierten Objekten besteht.

Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich auch spezielle Schreibweisen eingebürgert:

- (1) Statt  $a(0), a(1), a(2)$ , usw. schreibt man für die Funktionswerte von  $a$  meist  $a_0, a_1, a_2$ , usw. und nennt sie *Folgenglieder*.
- (2) Die gesamte Folge wird in der mathematischen Literatur meist mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)_{n=0}^\infty$  oder kürzer  $(a_n)_n$  bzw. nur mit  $(a_n)$  bezeichnet. In der Schulliteratur werden stattdessen meist Spitzklammern verwendet und Folgen meist mit  $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$  bezeichnet. Außerdem kann man auch  $\langle a_n \rangle_{n=1}^\infty$ ,  $\langle a_n \rangle_n$  bzw.  $\langle a_n \rangle$  schreiben. Wir werden im Folgenden alle diese Schreibweisen synonym verwenden.
- (3) Hin und wieder treten Folgen auf, die erst mit  $n = 1$  oder „noch später“ beginnen, siehe (Steinbauer, 2022, 1.2.2). Für diese schreiben wir dann z.B.  $(a_n)_{n=1}^\infty$  oder  $\langle a_n \rangle_{n=7}^\infty$ .

**4.1.5. Beispiel (Folgen).** Ganz einfache Beispiele von reellen Folgen sind etwa

- (1)  $(a_n)_n = (2n)_n = (0, 2, 4, 6, \dots)$ , die Folge der geraden natürlichen Zahlen.
- (2)  $(b_n)_n = (x)_n = \langle x, x, x, \dots \rangle$  für ein  $x$  in  $\mathbb{R}$ , die konstante Folge.
- (3)  $(c_n)_{n=1}^\infty = (\frac{1}{n})_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

**4.1.6. Veranschaulichung von Folgen.** Eine instruktive Art, Folgen zu veranschaulichen, ergibt sich direkt aus ihrer Definition 4.1.2. Eine Folge  $(a_n)$  kann als Spaziergang in einer Menge  $M$  aufgefasst werden. Jedem Schritt entspricht ein Folgenglied:  $a_0$  bzw.  $a_1$  entspricht dem nullten bzw. ersten Schritt oder auch dem nullten bzw. ersten Fußabdruck usw., siehe Abbildung 4.3.

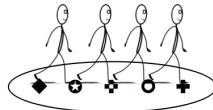


Abb. 4.3: Eine Folge als Spaziergang in einer Menge.

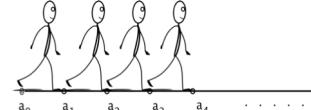


Abb. 4.4: Eine reelle Folge als Spaziergang auf der Zahlengeraden.

Im Falle einer *reellen* Folge  $(a_n)$  ergibt sich in diesem Bild also ein Spaziergang auf der Zahlengeraden, vgl. Abbildung 4.4, den wir veranschaulichen, in dem wir die „Schritte“  $a_0$ ,  $a_1$ , usw. einzeichnen. Mathematisch gesprochen werden die Werte der Folgenglieder auf der Zahlengeraden aufgetragen, also das *Bild* (vgl. Schichl und Steinbauer, 2018, 4.3.11 f. ➤

**Video** der Folge in  $\mathbb{R}$  eingezeichnet, siehe Abbildung 4.5. Alternativ können wir auch den Graphen der Abbildung  $a$  zeichnen. Dabei wird das  $n$ -te Folgenglied als Punkt mit den Koordinaten  $(n, a_n)$  im  $\mathbb{R}^2$  dargestellt, wie wir das von Funktionen schon gewohnt sind (vgl. 3.3.4(3)), siehe Abbildung 4.6.



Abb. 4.5: Das Bild einer reellen Folge  $(a_n)$ .

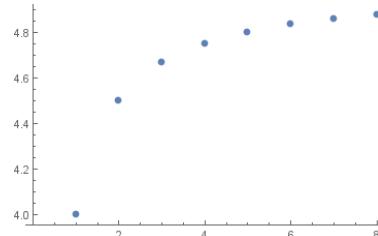


Abb. 4.6: Graph einer reellen Folge  $(a_n)$ .

Offensichtlich hängen die beiden Darstellungen zusammen. Aus dem Graphen in Abbildung 4.6 erhält man den Spaziergang in Abbildung 4.5 durch Projektion auf die  $y$ -Achse. Genauer, nimmt man diese Projektion und legt sie auf die  $x$ -Achse, so erhält man den Spaziergang, siehe Abbildung 4.7.

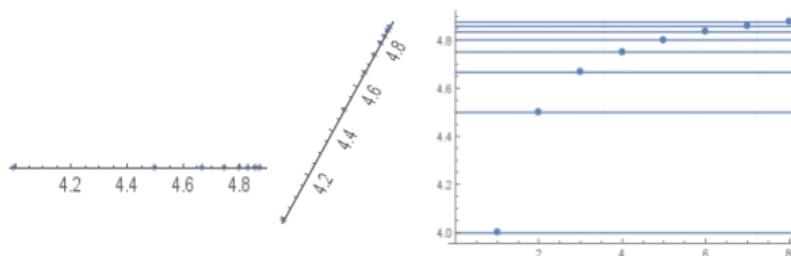


Abb. 4.7: Zusammenhang der Darstellungen reeller Folgen.

### 4.1.B Rekursive Prozesse und ihre Modellierung

Wir beginnen nun den Folgenbegriff als analytisches Werkzeug zu nutzen, nämlich im Kontext der Modellierung rekursiver Prozesse. Zuvor beantworten wir aber eine Frage zur Schulanalyse.

**4.1.7. Wo gehören Folgen hin?** In der Schulmathematik gab es lange die Tradition den Grenzwertbegriff systematisch auf dem Folgenbegriff aufzubauen und so eine solide Basis für die Differential- und Integralrechnung zu legen, in der der Grenzwertbegriff ja die zentrale Rolle spielt. Das ist sicherlich ein mathematisch fundierter Zugang, der allerdings den Nachteil hat, dass ein „langer Marsch durch das Reich der Folgen“, vgl. Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.1 angetreten werden muss. In einem solchen Zugang haben Folgen ihren kanonischen Platz im Curriculum. Neben dem offensichtlichen Nachteil, dass ein solcher Zugang viel Zeit in Anspruch nimmt, haben Blum und Kirsch in fachdidaktischen Arbeiten (W. Blum und A. Kirsch, 1979; W. Blum, 1979) schon früh aufgezeigt, dass die Differential- und Integralrechnung in „intellektuell ehrlicher Weise“ (Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.1) auf einem intuitiven Grenzwertbegriff aufgebaut werden und zugleich „der Weg für einen späteren analytische Präzisierung offen gehalten werden kann“ (ebd.).

Damit ist der traditionelle Zugang nicht (mehr) alternativlos und es stellt sich die Frage, ob und wie sich Folgen als eigenständiges Thema der Schulanalysis legitimieren lassen. In dieser Frage propagieren wir im Einklang mit Danckwerts und Vogel, 2006 den Standpunkt, dass

*Folgen als natürliches Instrument zur Beschreibung iterativer Prozesse*

einen Platz im Unterricht haben können und sollen. Damit gelingt nämlich in natürlicher Weise die Modellierung von Wachstumsprozessen (die wir im nächsten Abschnitt konkret mathematisch behandeln werden) und auch eine ebenso natürliche Hinführung zum Grenzwertbegriff.

Im Folgenden behandeln wir nun die Modellierung iterativer Prozesse anhand eines Beispiels, danach nehmen wir den Faden der gegenwärtigen Diskussion im Punkt 4.1.7 in informierter(er) Weise wieder auf.

**4.1.8. Aufgabenstellung (Medikamentenspiegel im Körper, vgl. Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.1.1.)** Die wirksame Anfangsdosis von einem Schmerzmittels beträgt  $d = 400$  mg und wird alle 6 Stunden erneut verabreicht. Innerhalb dieser 6 Stunden werden 25% des Wirkstoffs vom Körper abgebaut. Wie entwickelt sich im Lauf der Zeit der Wirkstoffspiegel im Körper?

**Lösungsvorschlag.** Wir legen zunächst die Notation für unsere rekursive Beschreibung fest. Mit  $m_n$  bezeichnen wir die nach  $n$  Perioden zu 6 Stunden im Körper vorhandene Menge des Wirkstoffs in mg. Der Anfangswert ist mit

$$m_0 = d = 400 \quad (4.2)$$

festgelegt. Für  $m_1$ , also die Wirkstoffmenge nach 6 Stunden gilt

$$m_1 = \frac{3}{4} m_0 + d = 300 + 400 = 700. \quad (4.3)$$

Bezeichnen wir mit  $r = \frac{3}{4}$  die Rate des nach 6 Stunden noch im Körper vorhandenen Wirkstoffs, so gilt des weiteren

$$m_2 = r m_1 + d, \quad m_3 = r m_2 + d \quad (4.4)$$

und allgemein

$$\boxed{m_{n+1} = r m_n + d} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4.5)$$

Die *rekursiv* definierte Folge  $(m_n) = (m_0, m_1, \dots)$  aus (4.5) mit  $m_0 = d = 400$  stellt also den gesuchten zeitlichen Verlauf des Medikamentenspiegels im Körper dar. Eine Folge  $(m_n)$  heißt dabei *rekursiv* oder *rekursiv definiert*, falls die Folgenglieder  $m_n$  mit Hilfe ihres Vorgängers  $m_{n-1}$  (oder manchmal auch mit Hilfe mehrere oder aller ihrer Vorgänger  $m_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ ) definiert sind.

**4.1.9. Darstellung des Prozesses — Langzeitverhalten.** In natürlicher Weise ergibt sich nun die Frage nach der langfristigen Entwicklung des oben beschriebenen Prozesses. Dazu können wir unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms eine Wertetabelle der Folge  $(m_n)$  erstellen oder sie durch ihren Graphen illustrieren, siehe Abbildungen 4.8 und 4.9.

	A	B
1	0	400,0
2	1	700,0
3	2	925,0
4	3	1093,8
5	4	1220,3
6	5	1315,2
7	6	1386,4
8	7	1439,8
9	8	1479,9
10	9	1509,9
11	10	1532,4
12	11	1549,3
13	12	1562,0
14	13	1571,5
15	14	1578,6
16	15	1584,0
17	16	1588,0
18	17	1591,0
19	18	1593,2
20	19	1594,9

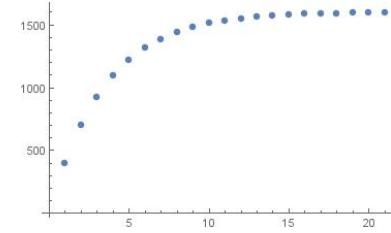


Abb. 4.9: Graph der Folge  $(m_n)$

Abb. 4.8: Wertetabelle der Folge  $(m_n)$

Die Darstellung der Folge in einer Wertetabelle stützt sich auf die *Zuordnungsvorstellung* zum Funktionsbegriff<sup>2</sup>. Es lässt sich besonders leichter ablesen, welche Wirkstoffmenge nach welcher Zeit vorhanden ist. Die Darstellung des Graphen der Folge korreliert mit der *Objektvorstellung* zum Funktionsbegriff. Damit lassen sich leichter Aussagen über den Verlauf der Entwicklung machen.

**4.1.10. Explizite Darstellung.** Aus praktischer und aus theoretischer Sicht ist es wünschenswert, neben der rekursiven Darstellung der Folge  $(m_n)$  aus Gleichung (4.5) auch eine *explizite Darstellung* zur Verfügung zu haben. Schließlich ermöglicht eine solche das direkte Ausrechnen des Medikamentenspiegels  $m_n$  nach  $n$  Perioden zu 6 Stunden, ohne den oben betriebenen Aufwand.

Um eine solche Darstellung zu gewinnen, starten wir mit der Rekursionsformel (4.5)

$$m_{n+1} = r m_n + d \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.6)$$

<sup>2</sup>Nachdem Folgen spezielle Funktionen sind (vgl. 4.1.2), können wir nicht nur unser fachliches Wissen über Funktionen verwenden (vgl. 4.1.4), sondern auch das fachdidaktisches und so insbesondere jenes über Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff aus Abschnitt 3.4.A.

und setzen sukzessive wie folgt ein

$$m_1 = r m_0 + d \quad (4.7)$$

$$m_2 = r m_1 + d = r(r m_0 + d) + d = r^2 m_0 + d(r + 1) \quad (4.8)$$

$$m_3 = r m_2 + d = r(r^2 m_0 + d(r + 1)) + d = r^3 m_0 + d(r^2 + r + 1). \quad (4.9)$$

Daraus können wir die folgende Darstellung für  $m_n$  ablesen

$$m_n = m_0 r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1). \quad (4.10)$$

Jetzt können wir noch die Summenformel für die endliche geometrische Reihe<sup>3</sup>, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 1.1.6)

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1) \quad (4.11)$$

verwenden, um die rechte Seite zu vereinfachen. Die Einschränkung  $r \neq 1$  spielt für unsere Überlegungen keine Rolle; das würde ja dem Fall entsprechen, dass das Medikament gar nicht abgebaut wird. Dieser Fall ist im Anwendungszusammenhang sinnlos und im Übrigen mathematisch ganz einfach zu lösen. Es gilt dann  $m_n = m_0 + nd = (n + 1)d$ .

Da ein negatives  $r$  im gegenwärtigen Anwendungskontext ebenso sinnlos ist, wie ein  $r > 1$ , legen wir im Folgenden fest, dass  $0 < r < 1$  gilt.

Schließlich ergibt sich die folgende explizite Darstellung für die Folge  $(m_n)$

$$m_n = m_0 r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) = m_0 r^n + d \sum_{k=0}^{n-1} r^k = m_0 r^n + d \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad (4.12)$$

also

$$m_n = m_0 r^n + d \frac{1 - r^n}{1 - r}. \quad (4.13)$$

Gehen wir nun zum obigen Beispiel zurück und setzen entsprechenden ein, d.h.  $r = 3/4$ ,  $m_0 = d = 400$ , so ergibt sich für den Wirkstoffspiegel

$$m_n = 400 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1600 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 400 \left(4 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right). \quad (4.14)$$

**4.1.11. Diskussion des Kontexts.** Zum Schluss dieses Abschnitts kommen wir zurück zur Diskussion von 4.1.7 und greifen sie im Licht der obigen Überlegungen wieder auf. Zunächst sehen wir, dass im Kontext der diskreten Modellierung der Folgenbegriff in natürlicher Weise auftritt. Weiters sind die folgenden Themen ebenfalls in natürlicher Weise aufgetreten:

- Vor- und Nachteile der rekursiven und der expliziten Darstellung von Folgen,
- Umschreiben von rekursiver in explizite Darstellung von Folgen,
- die endliche geometrische Reihe im Anwendungskontext.

---

<sup>3</sup>Die Summenformel können wir an dieser Stelle im Kontext unserer „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ verwenden; im Schulkontext wäre das in geeigneter Form zu behandeln.

Außerdem tritt die Frage nach dem Langzeitverhalten bzw. dem Grenzwert von Folgen (und Reihen!) in prominenter und natürlicher Weise auf. Wir werden diese aber erst im nächsten Kapitel aufgreifen und uns im folgenden mit der Unterrichtspraxis zum Folgenbegriff beschäftigen. Auch hier werden wir an mehreren Stellen den Grenzwertbegriff am Horizont auftauchen sehen.

Schließlich werden wir in 4.1.C.2 sehen, dass die in der Schule prominenten Beispiele der arithmetischen und der geometrischen Folge sich als Spezialfälle obiger Rekursion ergeben.

#### 4.1.C Folgen in der Schule — Zugänge im Unterricht

Im folgenden Abschnitt gehen wir konkret auf Folgen im Schulunterricht ein. An den Beginn stellen wir Formalia, d.h. die Vorgaben des Lehrplans und des Katalogs der Grundkompetenzen.

**4.1.12. Folgen in Lehrplan und Grundkompetenzkatalog.** Der *Lehrplan AHS 2016*<sup>4</sup> sieht Folgen in der 6. Klasse vor (1. Semester, Kompetenzmodul 3). Folgende zwei Punkte werden genannt:

- Zahlenfolgen als auf  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$  definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)

Im *Grundkompetenzkatalog* der Handreichung zum Lehrplan 2016<sup>5</sup> treten Folgen im Rahmen der Grundkompetenzen aus dem Inhaltbereich *Funktionale Abhängigkeiten* (FA) auf, konkret als Punkt *FA 7 Folgen*, mit den Unterpunkten:

- FA-L 7.1 Zahlenfolgen (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können
- FA-L 7.2 Zahlenfolgen als Funktionen über  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$  auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen
- FA-L 7.3 Definitionen monotoner und beschränkter Folgen kennen und anwenden können
- FA-L 7.4 Grenzwerte von einfachen Folgen ermitteln können

In der Folge diskutieren wir einige konkrete Zugänge zum Folgenbegriff für den Unterricht.

**4.1.13. Phasenmodell zum Erarbeiten des Folgenbegriffs im Unterricht.** Wenn in der 10. Schulstufe (AHS) Folgen behandelt werden, dann lernen die Schülerinnen und Schüler damit einen neuen mathematischen Begriff kennen, bei dessen Einführung das Durchlaufen von vier Phasen zielführend ist. Mathematische Begriffe und die Bedeutung eines Begriffs erschließen sich den Lernen nicht durch eine bloße Mitteilung oder Definition des Begriffs. Ein tieferes Verständnis eines mathematischen Begriffs wird erst durch eine sorgfältige Erarbeitung des Begriffs, bei der gleichzeitig angemessene Vorstellungen aufgebaut werden können, erreicht. Die vier Phasen sind:

- (1) Einstieg  $\rightsquigarrow$  (2) Erarbeitung  $\rightsquigarrow$  (3) Sicherung  $\rightsquigarrow$  (4) Vertiefung

<sup>4</sup>[https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/bgbla\\_2016\\_i1\\_219\\_mathematik.pdf](https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/bgbla_2016_i1_219_mathematik.pdf)

<sup>5</sup>[https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/handreichung\\_lehrplan\\_mathematik\\_2016\\_bmb.pdf](https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/handreichung_lehrplan_mathematik_2016_bmb.pdf)

#### 4.1.C.1 Einstieg (Phase 1)

Bei der ersten Phase – dem Einstieg zum Themenfeld Folgen – geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler erste Vorstellungen des Begriffs aufbauen, den Namen und wichtige Merkmale des neuen Begriffs kennen lernen. Dabei arbeiten die Lernenden mit entsprechenden Repräsentanten (Beispielen) und Darstellungen dieses neuen Begriffs. Die nachfolgenden Ausführungen zeigen mögliche Ausgestaltungen der Einstiegsphase. Charakteristisch ist für alle drei, dass der Folgenbegriff in ganz natürlicher Weise auftritt und die Frage nach der Konvergenz in den Aufgabenstellungen bereits angelegt ist.

**4.1.14. Einstieg im Kontext — Folgen als diskrete Modellierung rekursiver Prozesse.** In Analogie zur Aufgabe Medikamentenspiegel im Körper kann in der Schule zum Einstieg in die Begriffserarbeitung ebenfalls ein „praktisches“ (Alltags-)Problem herangezogen werden. Damit wird signalisiert, dass mathematische Modelle aus einem praktischem Problem erwachsen und Alltagsbezug haben können. Gleichzeitig wird damit die Grunderfahrung (*G1*), *mathematischer Blick* angesprochen.

**Aufgabenstellung: Kaffeingehalt.** Angenommen eine Kaffeeliebhaberin trinkt an einem langen 12-Stunden-Arbeitstag gleich nach dem Betreten des Arbeitsplatzes eine Tasse Kaffee und dann jede weitere Stunde wieder eine Tasse Kaffee. Pro Stunde werden etwa 7% des Kaffeingehaltes abgebaut und eine Tasse Kaffee enthält rund 40mg Koffein. Wie entwickelt sich der Kaffeingehalt im Laufe des Arbeitstages?

**Lösungserwartung.** Dieser Prozess lässt sich rekursiv sehr gut in einer Tabelle beschreiben.

Zu Beginn des Arbeitstages wird eine Tasse Kaffee getrunken.	Anfangswert: $k_0 = 40$
Nach einer Stunde sind 7% der 40mg Koffein abgebaut also noch 93% vorhanden. Also sind von der ersten Tasse Kaffee noch $0,93 \cdot 40$ mg im Körper vorhanden, aber es werden auch wieder 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach einer Stunde: $\begin{aligned} k_1 &= 0,93 \cdot k_0 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 40 + 40 \\ &= 77,2 \end{aligned}$
Nach einer weiteren Stunde sind nun 7% von 77,2 mg abgebaut, also noch $0,93 \cdot 77,2$ mg vorhanden. Außerdem werden auch wieder 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach zwei Stunden: $\begin{aligned} k_2 &= 0,93 \cdot k_1 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 77,2 + 40 \\ &= 111,796 \end{aligned}$
Noch eine weitere Stunde später sind noch $0,93 \cdot 111,796$ mg vorhanden, und es werden wiederum 40mg Koffein zugeführt.	Wert nach drei Stunden: $\begin{aligned} k_3 &= 0,93 \cdot k_2 + 40 \\ &= 0,93 \cdot 111,796 + 40 \\ &= 143,97028 \end{aligned}$

Allgemein lässt sich die Entwicklung des Koffeingehalt mit

$$\begin{aligned} k_0 &= 40 \quad \text{und} \\ k_{n+1} &= 0,93 \cdot k_n + 40 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.15}$$

angeben. Die Folge  $(k_n) = k_0, k_1, k_2, \dots$  beschreibt also die zeitliche Entwicklung des Koffeingehalts.

Mit Hilfe eines Tabellenkalkulations-Programms kann die Entwicklung des Koffeingehalts sehr rasch dargestellt werden.

A	B	C	D	E	
1	Stunde	Koffeingehalt vor Zufuhr	nach Abbau	Zufuhr	Koffeingehalt neu - nach Zufuhr
2	0	0	0	40	40
3	1	40	37,2	40	77,2
4	2	77,2	71,796	40	111,796
5	3	111,796	103,97028	40	143,97028
6	4	143,97028	133,89236	40	173,8923604
7	5	173,8923604	161,719895	40	201,7198952
8	6	201,7198952	187,599503	40	227,5995025
9	7	227,5995025	211,667537	40	251,6675373
10	8	251,6675373	234,05081	40	274,0508097
11	9	274,0508097	254,867253	40	294,867253
12	10	294,867253	274,226545	40	314,2265453
13	11	314,2265453	292,230687	40	332,2306872

Abb. 4.10: Kaffeegehalt: tabellarische Darstellung

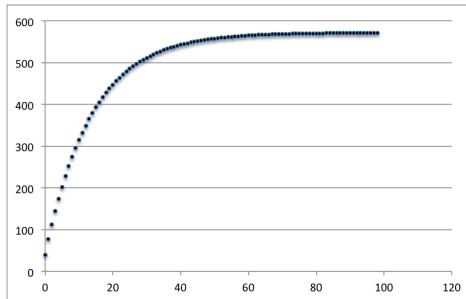


Abb. 4.11: Kaffeegehalt: Graph der Folge  $(k_n)$

Sowohl die Tabelle als auch die grafische Darstellung lassen erkennen, dass sich der Koffeingehalt bei etwas mehr als 571mg einpendelt.

#### FD-Box 11: Lösungserwartung

Unter einer Lösungserwartung verstehen wir eine Musterlösung einer Aufgabe im Sinne einer Ausarbeitung wie sie im Idealfall von der besten Schülerin/dem besten Schüler einer Klasse erwartet werden könnte. Dementsprechend sollte eine Ausarbeitung der Lehrkraft im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung etwa dieselbe Form haben.

Vergleichen Sie diese im vorliegenden Fall mit der knapperen Beschreibung der Rekursion, die wir im fachmathematischen Kontext in Abschnitt 4.1.B gegeben haben! Dabei wird deutlich, wie derselbe Inhalt auf verschiedenen Verständnisniveaus (hier: SchülerInnen der Schulstufe 10 vs. Lehramtsstudierende im 5. Semester) sinnvoll dargestellt werden kann.

**4.1.15. Einstieg mit Experimenten.** Für den Einstieg in den Begriffsbildungsprozess zu Folgen eignet sich aber auch ein experimenteller Zugang. Dazu können beispielsweise verschiedene Experimente in Form eines Gruppenpuzzles (Expertenmodell <https://de.wikipedia.org/wiki/Gruppenpuzzle>) bearbeitet werden.

**Aufgabenstellung: Immer kürzer — und doch kein Ende in Sicht.** Beginnend mit einem Papierstreifen der Länge 100 cm werden Papierstreifen, die jeweils die halbe Länge des vorhergehenden Streifens haben, auf ein Plakat geklebt.

- (1) Wie lange lässt sich dieses Experiment theoretisch fortsetzen?
- (2) Wie entwickeln sich die Längen der Papierstreifen?
- (3) Was lässt sich über die Gesamtlänge aller aufgeklebten Papierstreifen sagen, selbst wenn das Experiment sehr lange fortgesetzt wird?

**4.1.16. Einstieg mit Mustern und Strukturen.** Das Arbeiten mit Mustern und Strukturen ist vielen Schülerinnen und Schülern aus der Primarstufe bekannt. Dort werden bereits erste Gesetzmäßigkeiten anhand von Zahlenmustern (siehe Abbildung 4.12) untersucht.

**Forschen und Finden: Zahlenmuster**

**• 1 Dreieckszahlen.**

1. 2. 3. 4.

a) Setzt fort. Zeichnet die nächsten Dreieckszahlen.  
b) Rechnet. Wie viele Punkte hat jede Dreieckszahl?

**• 2**

1. 2. 3. 4.

a) Setzt fort. Zeichnet die nächsten Treppenzahlen.  
b) Rechnet. Wie viele Punkte hat jede Treppenzahl? Was fällt euch auf?  
c) Vergleicht die Zahlen mit den Dreieckszahlen. Was fällt euch auf?

Abb. 4.12: Zahlenmuster aus Wittmann, Müller und Röhr, 2004

In den deutschen, englischen und amerikanischen Bildungsstandards wird das auch explizit deutlich gemacht.

- Deutschland, Primarstufe<sup>6</sup>:
  - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen,
  - arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.
- US, Grade 3-5<sup>7</sup> :
  - describe, extend, and make generalizations about geometric and numeric patterns;
  - represent and analyze patterns and functions, using words, tables, and graphs.
- UK, Primary School<sup>8</sup>:
  - Pupils recognise and describe number patterns, and relationships including multiple, factor and square. They begin to use simple formulae expressed in words.

In der Unterstufe haben die Schülerinnen und Schüler eventuell Pythagorasbäume und kreisförmige Muster konstruiert und untersucht – dies kann hier erneut aufgegriffen und fortgesetzt werden, siehe Abbildung 4.13, 4.14 und 4.15.

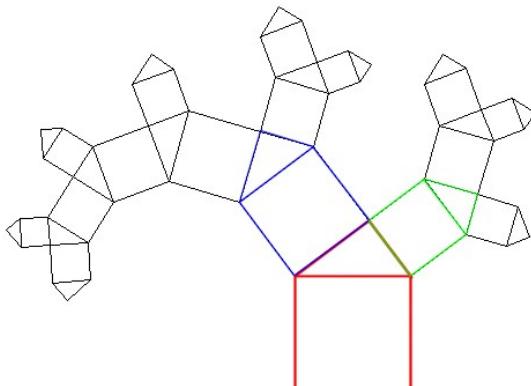


Abb. 4.13: Pythagorasbaum

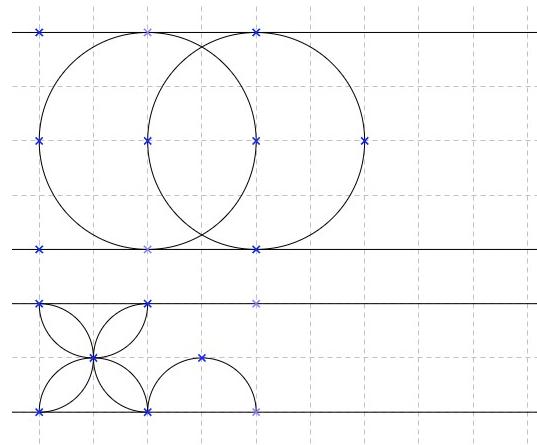


Abb. 4.14: Kreismuster

**Aufgabenstellung: Schlangenlinie.** Konstruiere mit Zirkel und Lineal oder mit einem elektronischen Tool die abgebildete Figur. Beginne mit einem Halbkreis oberhalb einer Hilfslinie. Hänge daran einen Halbkreis mit halb so großem Radius unterhalb der Hilfslinie. Setze die Konstruktion so lange wie möglich fort. Wie viel Platz benötigst du für die Konstruktion maximal?

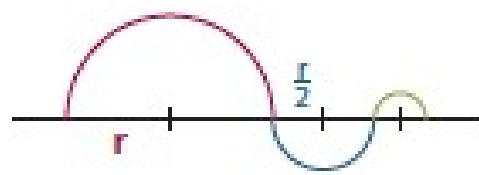


Abb. 4.15: Schlangenlinien

<sup>6</sup>[https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2004/2004\\_10\\_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf)

<sup>7</sup><https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra/>

<sup>8</sup><http://www.cliftonprimary.bham.sch.uk/pdfs/ageexpectations/maths-145.pdf>

### 4.1.C.2 Erarbeitung (Phase 2)

Bei der Erarbeitungsphase werden Umfang und Inhalt des Begriffs herausgearbeitet. Dazu zählen:

- Explizite und rekursive Darstellung von Folgen
- Grafische Darstellung von Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem
- Arithmetische und geometrische Folge
- Eigenschaften von Folgen (Monotonie und Beschränktheit)

#### 4.1.17. Explizite und rekursive Darstellung von Folgen.

Beim Erarbeiten der expliziten und rekursiven Darstellung von Folgen kann auf aufwendige außermathematische Kontexte verzichtet werden, da das algebraische Beschreiben von Folgen im Vordergrund steht. Zuerst allerdings müssen die für Folgen typischen Schreibweisen und Begriffe (Glied einer Folge, Bedeutung der Indizes, endliche/unendliche Folge, ...) eingeführt werden.

**Aufgabenstellung.** Die ersten vier Glieder einer unendlichen Folge sind mit  $\langle 1, 4, 9, 16, \dots \rangle$  gegeben. Wie könnte die Folge weitergehen?

- Beschreibe ein mögliches Bildungsgesetz in Worten.

Lösungserwartung: „Es handelt sich um Quadratzahlen.“ oder „Ausgehend vom ersten Folgenglied mit dem Wert 1 entstehen die weiteren Folgenglieder durch Addition der ungeraden Zahlen 3, 5, 7, …“

- Gib das gefundene Bildungsgesetz in formaler Schreibweise an.

Lösungserwartung: „Explizite Darstellung:  $a_n = n^2$ “ oder „Rekursive Darstellung:  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$ “

Im Unterricht schaffen solche Aufgabenstellungen, die keine eindeutige Lösung haben, Kommunikationsanlässe.

**4.1.18. Grafische Darstellung von Folgen.** Zur grafischen Darstellung von Folgen bieten sich (wie in 4.1.6 erklärt) die Zahlengerade und das zweidimensionale Koordinatensystem an.

Abb. 4.16: Bild einer Folge, Spaziergang

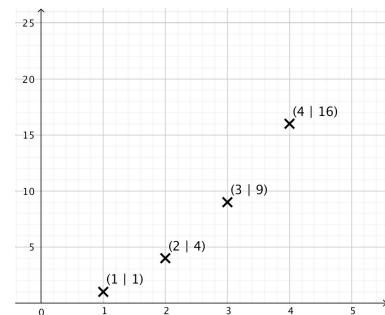
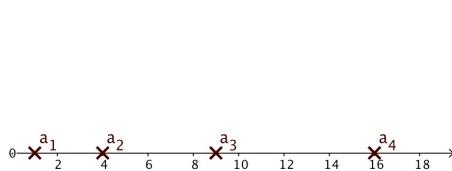


Abb. 4.17: Graph einer Folge

Beide Formen der Darstellung sind den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt. Die Zahlengerade wird von der Grundstufe bis zur 9. Schulstufe zur Darstellung von Zahlen genutzt. Die zweidimensionale Darstellung von Folgen wird Schülerinnen und Schülern vom Arbeiten mit Funktionen her vertraut sein. Insgesamt können die rekursive und explizite Darstellung mit der grafischen Darstellung gemeinsam erarbeitet werden.

**4.1.19. Arithmetische und geometrische Folge.** Beim Erarbeiten der Begriffe arithmetische und geometrische Folge geht es einerseits um das Entdecken gewisser Merkmale von

Folgen sowie um das Erkunden dieser beiden Folgenarten. Wir klären zuerst die mathematischen Fakten.

#### Mathematische Faktenbox 4: Arithmetische und geometrische Folge

**4.1.20. Definition (Arithmetische Folge).** Eine arithmetische Folge ist eine reelle Folge  $(a_n)$  mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Aus der Definition gewinnt man sofort die rekursive Darstellung ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (4.16)$$

wobei wir die konstante Differenz zwischen je zwei benachbarten Folgengliedern  $d$  genannt haben. Daraus ergibt sich wiederum mühelos die explizite Darstellung, wobei wir das Anfangsglied mit  $a_0$  bezeichnen

$$a_n = a_0 + n \cdot d. \quad (4.17)$$

Eine arithmetische Folge ist also durch Angabe von zwei Zahlen, des Anfangsglieds  $a_0$  und der konstanten Differenz benachbarter Folgenglieder  $d$  eindeutig festgelegt.

Beachte, dass die beiden Darstellungen Spezialfälle der rekursiven Darstellung (4.5) bzw. der expliziten Darstellung (4.13) aus Abschnitt 4.1.B für  $r = 1$  sind.

**4.1.21. Definition (Geometrische Folge).** Eine geometrische Folge ist eine reelle Folge  $(a_n)$  mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Wiederum ergibt sich mühelos die rekursive sowie die explizite Darstellung zu ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a_{n+1} = a_n \cdot r, \quad \text{bzw.} \quad a_n = a_0 \cdot r^n \quad (4.18)$$

und eine geometrische Folge ist ebenfalls eindeutig bestimmt durch Angabe von zwei Zahlen, ihres Anfangsglieds  $a_0$  und des konstanten Quotienten benachbarter Folgenglieder  $r$ .

Wiederum sind die beiden Darstellungen Spezialfälle von (4.5) bzw. (4.13), nun mit  $d = 0$ .

Zum Erfassen der Merkmale arithmetischer und geometrischer Folgen im Unterricht bietet sich das sogenannte entdeckende Lernen an, siehe Bruner, 1981. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern eine Vielfalt von Objekten angeboten, die bestimmte Merkmale gemeinsam haben bzw. sich in bestimmten Merkmalen unterscheiden. Fragen nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden lenken die Aufmerksamkeit auf die Merkmale. Dabei kann nach folgenden beiden Prinzipien vorgegangen werden, in Anlehnung an Dienes und Golding, 1970:

#### FD-Box 12: Prinzip der Variation

Beim Lehren von Begriffen nach dem Prinzip der Variation sind genügend viele verschiedene Objekte vorzulegen, die das charakteristische Merkmal des Begriffs gemeinsam haben, um das Wesentliche dieses Begriffs herauszuarbeiten. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler zumindest zu zweit zusammenarbeiten, um ihre Entdeckungen auszutauschen. Mit Plakaten oder auch im Plenum sind abschließend die entdeckten Merkmale

### Fachdidaktische Bemerkung 12 – Fortsetzung

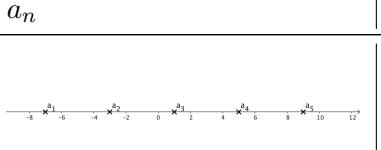
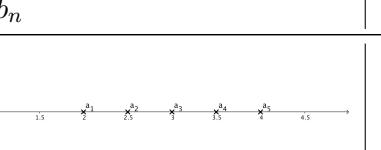
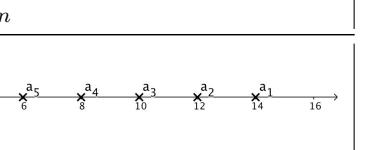
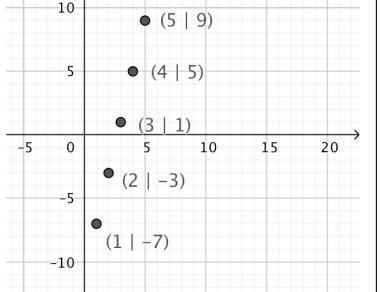
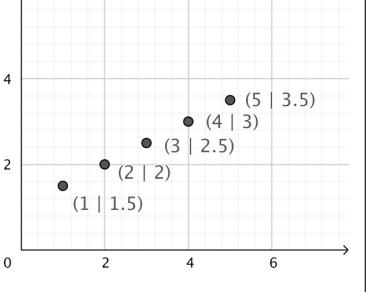
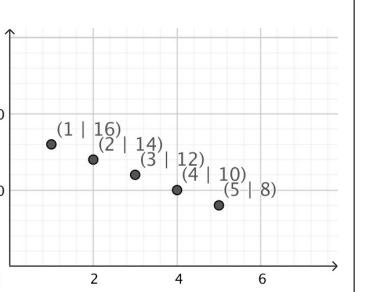
zu sammeln und von der Lehrperson gegebenenfalls zu ergänzen. (ICH-DU-WIR bzw. Think-Pair-Share: [http://www.sinus-transfer.de/module/modul\\_8kooperatives\\_lernen/methoden/ich\\_du\\_wir.html](http://www.sinus-transfer.de/module/modul_8kooperatives_lernen/methoden/ich_du_wir.html))

Die nachstehende Aufgabenstellung kann z.B. gemäß diesem Prinzip für die Erarbeitung arithmetischer Folgen herangezogen werden. Für geometrische Folgen können analoge Aufgabenstellungen formuliert oder den Schulbüchern entnommen werden. Entscheidend ist, die Leitfragen so zu stellen, dass die Lernenden zu den entdeckenden Merkmalen geleitet werden.

**Aufgabenstellung.** Gegeben sind die drei Zahlenfolgen  $a_n = \langle -7, -3, 1, 5, 9, \dots \rangle$ ,  $b_n = \langle 2; 2, 5; 3; 5; 4; \dots \rangle$  und  $c_n = 16 - 2n$ .

- Stelle die drei Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Gib sowohl rekursive als auch explizite Darstellungen an.
- Beschreibe, wodurch sich zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden und vergleiche mit der rekursiven und expliziten Darstellung.

**Lösungserwartung.**

$a_n$	$b_n$	$c_n$
		
		
$a_1 = -7, a_{n+1} = a_n + 4$	$b_1 = 2, b_{n+1} = b_n + 0,5$	$c_1 = 12, c_{n+1} = c_n - 2$
$a_n = -11 + 4n$	$b_n = 1,5 + 0,5n$	$c_n = 16 - 2n$
Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist 4.	Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist 0,5.	Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist -2.
Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.	Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.	Dieser Wert findet sich in der rekursiven und expliziten Darstellung.

Bei der Darstellung dieser Folgen im Koordinatensystem wird für die Schülerinnen und Schüler, die ja bereits mit linearen Funktionen vertraut sind, sichtbar, dass die Folgenglieder „gleichmäßig“ wachsen/fallen. Auch die Analogie der expliziten Darstellungen zur linearen

Funktion werden die Lernenden entdecken. Die dort schon kennen gelernten Parameter  $k$  und  $d$ , finden sich auch in der expliziten Darstellung wieder und sind nun im Zusammenhang von Folgen zu interpretieren.

Sobald die Schülerinnen und Schüler die charakteristischen Eigenschaften von arithmetischen Folgen erkennen und formulieren können, ist es ihnen auch möglich arithmetische Folgen selbstständig zu definieren. Dazu benötigen die Lernenden ein wenig Übung und müssen wissen, dass sie Oberbegriffe (z.B. Zahlenfolge) zur Definition (hier arithmetische Folge) verwenden sollen. Auch *Signalwörter* („... nennt man ...“, „... bezeichnet man als ...“, „... so sagt man ...“, „... wird als ... bezeichnet.“) helfen den Schülerinnen und Schülern beim selbstständigen Definieren.

In der Erarbeitungsphase von Begriffen bietet sich aber neben dem Prinzip der Variation auch das *Prinzip des Kontrasts* an. Es setzt, wie der Name schon sagt, an den *kontrastierenden Merkmalen* der Begriffe an.

#### FD-Box 13: Prinzip des Kontrasts

Beim Lehren von Begriffen gemäß dem Prinzip des Kontrasts sind ebenso ausreichend viele Objekte vorzulegen, bei denen das charakteristische Merkmal nun eben nicht gegeben ist. Zum Begriff, der erarbeitet werden soll, sind also geeignete Beispiele und Gegenbeispiele (Kontrastmaterial) vorzulegen. Die Gegenbeispiele sollen sich hierbei vom zu erarbeitenden Begriff nur in einem wesentlichen Merkmal unterscheiden.

Für die Erarbeitung der Begriffe arithmetische und geometrische Folge gemäß dem Prinzip des Kontrasts könnten beispielsweise in einer Aufgabenstellung wie oben

- arithmetische und geometrische Folgen oder
- arithmetische/geometrische und alternierende (die Folgenglieder sind abwechselnd positiv und negativ) Folgen angegeben werden.

Auch hier es wichtig, dass von der Lehrperson Fragestellungen für die Schülerinnen und Schüler formuliert werden, die deren Aufmerksam auf die charakteristischen Merkmale (und deren Unterschiede) lenken.

Nach der Erarbeitung der Definition von arithmetischen und geometrischen Folgen (gemäß einem der oben ausgeführten Prinzipien) ist es wichtig, die arithmetische und geometrische Folge in unterschiedlichen Aufgabenstellungen (inner- und außermathematisch) anzuwenden und somit weitere Grunderfahrungen zu ermöglichen.

**4.1.22. Eigenschaften von Folgen — Monotonie und Beschränktheit.** Ein weiterer Aspekt der Erarbeitungsphase (Phase 2) ist das Ausloten (einfacher) Eigenschaften von Folgen, die natürlich im Kontext etwa von Beispielen auftreten. Wir wiederholen zuerst die mathematischen Begriffe und beginnen mit der Monotonie.

#### Mathematische Faktenbox 5: Monotone Folgen

**4.1.23. Definition (Monotonie).** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt

- (1) (streng) *monoton wachsend* oder *steigend*, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1}) \quad \text{gilt.} \quad (4.19)$$

### Mathematische Faktenbox 5 – Fortsetzung

- (2) (streng) *monoton fallend*, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \text{gilt.} \quad (4.20)$$

- (3) Falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass (4.19) oder (4.20) nur für alle  $n \geq N$  gilt, so sagen wir  $(a_n)$  hat die entsprechende Eigenschaft *ab*  $N$ .

#### 4.1.24. Beispiel (nicht-monotone Folgen).

- (1)  $a_n = n$  ist streng monoton wachsend. Jede konstante Folge, d.h.  $a_n = c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  ist monoton wachsend *und* monoton fallend; keine der beiden Eigenschaften ist aber streng erfüllt.
- (2)  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ) ist streng monoton fallend. Die Folge  $a_0 = 17$ ,  $a_1 = 27$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 2$ ) ist streng monoton fallend ab  $n = 1$ .
- (3) Die „Vorzeichenmaschine“  $a_n = (-1)^n$  ist weder monoton wachsend noch monoton fallend, auch nicht ab irgendeinem  $N$ .

Als nächstes erinnern wir an den Begriff einer beschränkten Folge.

### Mathematische Faktenbox 6: Beschränkte Folgen

#### 4.1.25. Definition (Beschränkte Folge).

- Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge.  
(1)  $(a_n)$  heißt nach oben (bzw. nach unten) *beschränkt*, falls es eine reelle Zahl  $K$  gibt, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq K \quad (\text{bzw. } a_n \geq K) \quad \text{gilt.} \quad (4.21)$$

Jedes solche  $K$  heißt obere (bzw. untere) *Schranke* von  $(a_n)$ .

- (2) Ist eine Folge *nicht* nach oben (bzw. unten) beschränkt (gibt es also kein solches  $K$ ), dann heißt sie nach oben (bzw. unten) *unbeschränkt*.
- (3) Ist eine Folge  $(a_n)$  sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so heißt sie *beschränkt*.

Eine beschränkte Folge  $(a_n)$  ist „eingesperrt“; es gilt ja nach Definition, dass es ein  $C$  gibt, sodass für alle  $n$

$$-C \leq a_n \leq C, \quad \text{also} \quad |a_n| \leq C \quad \text{gilt.} \quad (4.22)$$

So ein  $C$  erhält man z.B. als  $C = \max\{|K_1|, |K_2|\}$  wobei  $K_1$  untere und  $K_2$  obere Schranke von  $(a_n)$  ist.

Abbildung 4.18 zeigt die graphische Darstellung einer beschränkten Folge in den beiden Veranschaulichungen von 4.1.6.

#### 4.1.26. Beispiel (un-beschränkte Folgen).

- (1)  $a_n = n$  ist nach unten durch  $K = 0$  beschränkt (aber etwa auch durch  $-5$ , nicht aber durch  $1$ ) und nach oben unbeschränkt.
- (2)  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n > 0$ ) ist beschränkt. Nach oben ist sie durch  $1$  beschränkt (aber auch durch  $7$  oder  $17$ ), nach unten durch  $0$ .

### Mathematische Faktenbox 6 – Fortsetzung

**4.1.27. Bemerkung (Monotonie und Schranken).** Eine monoton wachsende Folge  $(a_n)$ , die zusätzlich nach oben beschränkt ist, ist schon beschränkt. Klar, denn sei  $K$  obere Schranke, dann gilt mit der Monotonie

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq K. \quad (4.23)$$

Es ist eine fundamental wichtige Tatsache, dass solche Folgen sogar konvergieren, wie wir später diskutieren werden.

Der Begriff der Monotonie sowie das Untersuchen von Funktionen hinsichtlich ihres Monotonieverhaltens ist den Schülerinnen und Schülern der 10. Schulstufe bereits bekannt. Ein kurzes Auffrischen der damit verbundenen Vorkenntnisse und Fähigkeiten ist empfehlenswert. Auch die Monotonie und Beschränktheit kann mit dem Prinzip der Variation bzw. dem Prinzip des Kontrasts erarbeitet und eine Definition vorgenommen werden.

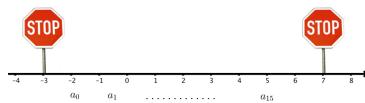
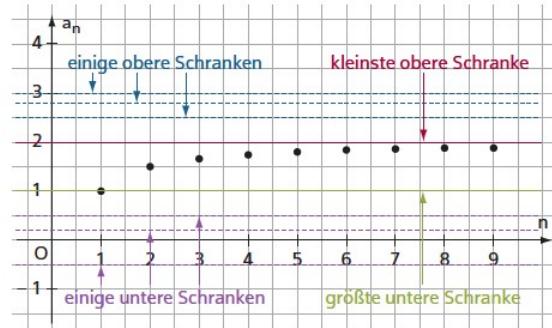


Abb. 4.18: Bild (oben) und Graph (rechts) einer beschränkten Folge



Die Präzisierung der Begriffe „kleinste obere Schranke“ und „größte untere Schranke“ muss von der Lehrperson angeleitet werden. Tatsächlich handelt es sich dabei um mathematisch nicht ganz einfache Begriffe!

### Mathematische Faktenbox 7: Supremum und Infimum

In natürlicher Weise stellt sich die Frage nach der „besten“ oberen bzw. unteren Schranke einer Folge. Das führt auf die Begriffe *Supremum* und *Infimum*, die wir praktischer Weise gleich allgemein für Teilmengen von  $\mathbb{R}$  definieren — statt speziell für die Menge der Folgenglieder  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  einer Folge  $(a_n)$  sprich ihrem Bild.

**4.1.28. Definition (Supremum und Infimum).** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von  $M$ , falls

- (1)  $s$  obere Schranke von  $M$  ist (d.h.  $s \geq x \quad \forall x \in M$ ), und
- (2) keine Zahl  $r < s$  obere Schranke von  $M$  ist.

Wir schreiben dann  $s = \sup M$ . Der Begriff des Infimums ist analog definiert und wir schreiben  $\inf M$ .

Das Supremum einer reellen Folge  $(a_n)$  ist definiert als

$$\sup(a_n) := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.24)$$

### Mathematische Faktenbox 7 – Fortsetzung

also als das Supremum der Menge der Folgenglieder. Das Infimum einer reellen Folge ist analog definiert. Graphisch können wir Supremum und Infimum einer Menge wie in Abbildung 4.18 (links) darstellen.

#### 4.1.29. Beispiel (Supremum und Infimum).

- (1)  $\inf \mathbb{N} = 0$  und  $\mathbb{N}$  hat kein sup.
- (2)  $\inf((0, 1]) = 0 = \inf([0, 1])$  und  $\sup((0, 1]) = 1 = \sup([0, 1])$
- (3)  $\sup((1/n)_{n \geq 1}) = 1$ ,  $\inf((1/n)_{n \geq 1}) = 0$

#### 4.1.30. Bemerkung (Supremum und Infimum).

- (1) Offensichtlich muss eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  nach oben beschränkt sein, um ein Supremum besitzen zu können. Die Tatsache, dass jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt (also die sogenannte *Supremumseigenschaft*) ist fundamental für die ganze Analysis und wir werden noch darauf zurückkommen.
- (2) Zunächst einmal halten wir fest, dass Suprema und Infima, falls sie existieren, eindeutig bestimmt sind. (Das folgt leicht aus der Definition: Seien  $s$  und  $s'$  Suprema von  $M$ , dann folgt aus 4.1.28(1), dass beide obere Schranken sind. Daher kann nach 4.1.28(2) weder  $s' < s$  noch  $s < s'$  gelten, also folgt  $s = s'$ .) Daher ist es immer legitim von *dem* Supremum oder *dem* Infimum einer Menge zu sprechen.
- (3) Bei allem oben Gesagten ist es völlig egal, ob  $\sup M$  oder  $\inf M$  Elemente der Menge  $M$  sind oder nicht! Ist das der Fall, d.h. gilt  $s = \sup M \in M$  ( $s = \inf M \in M$ ), so verwendete man eine eigene Terminologie und sagt  $s$  ist *Maximum* (*Minimum*) von  $M$  und schreibt  $s = \max M$  ( $s = \min M$ ).

#### 4.1.31. Beispiel (Maximum und Minimum).

- (1)  $\min \mathbb{N} = 0$  und  $\mathbb{N}$  hat kein max.
- (2)  $\max((0, 1]) = 1 = \max([0, 1])$ ,  $\min([0, 1]) = 0$  aber  $(0, 1]$  hat kein min.
- (3)  $\max((1/n)_{n \geq 1}) = 1$ , aber  $(1/n)_{n \geq 1}$  hat kein min.

Für die algebraischen Umformungen zum Nachweis der Monotonie und Beschränktheit wird das Lösen von Ungleichungen benötigt. Diese Fertigkeiten sollten die Schülerinnen und Schüler schon vorher (ebenfalls in der 10. Schulstufe) erworben haben.

Für die verstehensorientierte Erarbeitung von Verfahren im Allgemeinen bzw. Lösungsverfahren im Konkreten gilt, dass diese mit den Lernenden zu erarbeiten sind. D. h. es braucht im Unterricht an solchen Stellen mehr als das bloße Vorzeigen einzelner Bearbeitungsschritte. Lösungsverfahren können gemäß der nachstehenden Schrittfolge erarbeitet werden.

#### FD-Box 14: Erarbeitung von Lösungsverfahren

Beim Erarbeiten von Lösungsverfahren gilt es,

- die Schrittfolgen, die abzuarbeiten sind, zu begründen und deutlich zu machen,
- die Beiträge der einzelnen Lösungsschritte auf das Ziel hin deutlich zu machen,
- mit zunehmendem Alter die Lösungsschritte so zu notieren, dass sie als Algorithmen durch einen Computer ausgeführt werden können,

### Fachdidaktische Bemerkung 14 – Fortsetzung

- die Lernenden anzuhalten, über alternative Verfahren/Wege nachzudenken.

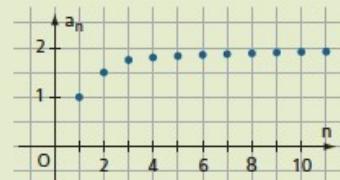
Zu guter Letzt müssen die so einsichtig gemachten Verfahren von den Schülerinnen und Schülern angewendet und gelernt werden.

Das folgende Beispiel 4.19 zeigt, wie im Schulbuch (Bleier et al., 2018) versucht wird, das Lösungsverfahren zumindest ein stückweit für Schülerinnen und Schüler einsichtig zu machen.

**Beispiel:**

Untersuche die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{2n-1}{n}$ , für  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- hinsichtlich der Art der Monotonie,
- hinsichtlich möglicher Schranken.



**Lösung:**

Bestimme einige Folgenglieder.

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{5}{3}, a_4 = \frac{7}{4}, \dots, a_{100} = \frac{199}{100}$$

- a) Betrachte die Folgenglieder und stelle eine Vermutung zur Monotonie auf.

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_{100}$$

**Vermutung:** Die Folge ist streng monoton steigend.

**Beweis<sup>1</sup>:** Es muss für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gelten:

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{Drücke } a_n \text{ und } a_{n+1} \text{ durch die entsprechenden Terme aus.}$$

$$\frac{2n-1}{n} < \frac{2(n+1)-1}{n+1} \quad | \cdot n \cdot (n+1) \quad \text{Es gilt } n \cdot (n+1) > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(2n-1) \cdot (n+1) < (2n+1) \cdot n$$

$$2n^2 + n - 1 < 2n^2 + n \quad | -2n^2$$

$$n - 1 < n$$

Dies ist für alle  $n$  eine wahre Aussage, weil die linke Seite um 1 kleiner ist als die rechte Seite.

⇒ Die Vermutung ist richtig. Die Folge ist streng monoton steigend.

- b) Betrachte die Folgenglieder und stelle eine Vermutung zu möglichen Schranken auf.

**Vermutung:** Eine obere Schranke ist:  $S_0 = 2$

**Beweis:** Es muss  $a_n \leq S_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gelten.

$$a_n \leq 2 \quad \text{Drücke an durch den entsprechenden Term aus.}$$

$$\frac{2n-1}{n} \leq 2 \quad | \cdot n \quad \text{Es gilt } n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2n - 1 \leq 2n \quad \text{Dies ist für alle } n \text{ eine wahre Aussage.}$$

⇒ Die Vermutung ist richtig. 2 ist daher eine obere Schranke.

Der Nachweis, dass 2 auch die kleinste obere Schranke ist, ist schwieriger und wird erst im nächsten Abschnitt behandelt.

1 ist die größte untere Schranke, da die Folge streng monoton steigend ist.

<sup>1</sup> Der Beweis wird eigentlich in die falsche Richtung geführt, weil er mit der zu beweisenden Eigenschaft beginnt und daraus eine richtige Tatsache abgeleitet wird. Da aber nur Äquivalenzumformungen verwendet werden, könnte der Beweis umgekehrt (von unten nach oben) gelesen werden, wodurch aus einer bekannten richtigen Tatsache die zu beweisende Eigenschaft hergeleitet wird.

Abb. 4.19: Lösungsverfahren - Dimensionen Mathematik 6, 2018

Auch hier - also nach der Erarbeitung des Verfahrens - empfiehlt es sich auch diese Begriffe wiederum in inner- und außermathematischen Aufgabenstellungen anzuwenden.

**4.1.32. Bemerkung (Umformungen — Stil und Fallen).** Formulierungen wie im Beweis in Abbildung 4.19 sind in der Schul(buch)literatur üblich, aber schlechter mathematischer Stil. Führt man den Beweis gemäß der obigen Fußnote aus, ergibt sich etwa folgende Darstellung, die viel klarer ist:

Um die vermutete Monotonie, also  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  zu zeigen, müssen wir

$$\frac{2n-1}{n} < \frac{2(n+1)-1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \quad (4.25)$$

nachweisen. Wir schreiben also

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{n} &\stackrel{?}{<} \frac{2(n+1)-1}{n+1} \quad | \cdot n \cdot (n+1) \\ (2n-1)(n+1) &\stackrel{?}{<} (2n+1)n \quad | \text{ ausmultiplizieren} \\ 2n^2 + n - 1 &\stackrel{?}{<} 2n^2 + n \quad | - 2n^2 \\ n - 1 &\stackrel{?}{<} n. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich korrekt und weil alle Umformungen in unserer Rechnung Äquivalenzumformungen sind, können wir aus der korrekten letzten Zeile auf die Gültigkeit der ersten Zeile schließen. Damit ist die behauptete Monotonie nachgewiesen.

Der mathematische Hintergrund ist hier der folgende: Nach den Regeln der Logik, implizieren falsche Aussagen durchaus wahre Aussagen (natürlich auch falsche, aber um das geht es uns hier nicht). Man sagt „Ex falso [sequitur] quodlibet“ — Lateinisch für: „aus Falschem [folgt] Beliebiges“, siehe etwa Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 3.2.2.1. Daher können wir im obigen Beispiel die Monotonie *nicht* dadurch nachweisen, dass wir aus der vermuteten und zu zeigenden Ungleichung eine wahre Aussage herleiten: Das wäre ja auch möglich, falls die vermutete Aussagen *falsch* ist!

Im obigen Beispiel geht alles gut, da tatsächlich nur Äquivalenzumformungen verwendet werden und daher aus der offensichtlich korrekten Aussage in der letzten Zeile die zu beweisende Ungleichung in der ersten Zeile folgt und diese damit ebenfalls korrekt ist.

Es muss aber nicht immer alles gut ausgehen! Beispiele von Fallgruben finden sich etwa in den folgenden Übungsaufgaben oder in Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 2.4, siehe auch

► **Video**  Gleichungsumformungen: Stil und Fallen .

### 4.1.C.3 Sicherung (Phase 3)

Auch wenn bereits wie oben ausgeführt die unterschiedlichen Begriffe nach ihrer Einführung angewendet wurden, gilt es, eine explizite Phase der Sicherung im Unterricht zu implementieren. Diese Phase der Sicherung beginnt mit dem Sammeln, Ordnen und Strukturieren der neu erworbenen Begriffe z. B. in Form einer Mindmap, Conceptmap (siehe beispielsweise: [http://www.ahs-vwa.at/pluginfile.php/2981/mod\\_page/content/106/Concept%20Map\\_NEU.pdf](http://www.ahs-vwa.at/pluginfile.php/2981/mod_page/content/106/Concept%20Map_NEU.pdf)) oder Begriffslandkarte (siehe beispielsweise: <http://www.pfm.ehb-schweiz1>

[.ch/fileadmin/Schienen/CAS\\_PFM\\_3\\_BL/Concept\\_Map-2\\_01.pdf](#)). Nach dem Sammeln, Ordnen und Strukturieren werden Beispiele und Gegenbeispiele behandelt, so dass der Begriff (auch) gegen andere Begriffe abgegrenzt wird.

#### 4.1.C.4 Vertiefung (Phase 4)

In der Vertiefungsphase werden Querverbindungen zu anderen Begriffen hergestellt und es können auch Spezialfälle betrachtet werden.

**4.1.33. Querverbindung – Folgen als Funktionen über  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$ .** Im Sinne der Querverbindung zu anderen Begriffen können nun Folgen als Funktionen über  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$  behandelt werden. Gemäß dem oben beschriebenen Unterrichtsgang ergibt sich der Zusammenhang zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie der zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen ganz natürlich.

**4.1.34. Spezialfall — Die Fakultät  $n!$ .** Als Spezialfall kann die Folge  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n(n+1)$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  betrachtet und mit der expliziten Darstellung  $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$  von  $n!$  erarbeitet werden.

### 4.1.D Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

In diesem letzten Abschnitt werfen wir einen informierten Blick zurück und verwenden die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen (siehe Abschnitt B), um unsere fachdidaktische Diskussion des Folgenbegriffs abzurunden.

#### 4.1.D.1 Aspekte des Folgenbegriffs

Beim Folgenbegriff lassen sich *drei* verschiedene Aspekte unterscheiden. Es sind dies der *Iterationsaspekt*, der *Aufzählungsaspekt* und der *Zuordnungsaspekt*.

**4.1.35. Der Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt.** Wie bereits in 4.1.8 erklärt, spricht man von einer rekursiven Darstellung einer Folge  $(a_n)$ , wenn die einzelnen Folgenglieder mit Hilfe ihres Vorgängers (oder auch mehrerer Vorgänger) angegeben werden. Der Einfachheit halber besprechen wir hier nur ersten Fall und formulieren genauer: Gegeben ist ein Startwert  $a_0$  und eine Vorschrift, wie aus  $a_n$  sein Nachfolger  $a_{n+1}$  konstruiert werden kann. Diese „Vorschrift“ können wir mit Hilfe einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  weiter formalisieren. Dann sind für alle  $n \geq 1$  die Folgenglieder mittels  $a_{n+1} = f(a_n)$  gegeben und die ganze Iterationsfolge nimmt die Form

$$a_0, a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots$$

an.

Weniger formal halten wir fest:

#### FD-Box 15: Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt des Folgenbegriffs

Jedes Folgenglied (außer dem ersten) wird sukzessive aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) konstruiert.

Mit digitalen Werkzeugen lässt sich die Idee der Iteration besonders gut im Mathematikunterricht zeigen, da aus dem Anfangsglied und der Iterationsvorschrift die rekursiv definierte Folge erzeugt werden kann.

Der Iterationsaspekt kann den Schülerinnen und Schülern durchaus vertraut sein, z.B. aus der Zinseszinsberechnung und der Bearbeitung von Dreieckszahlen. Besonders wichtig ist beim Iterationsaspekt, dass die Schülerinnen und Schüler die funktionale Beziehung zwischen zwei Folgengliedern erkennen.

#### 4.1.36. Der Aufzählungsaspekt.

##### FD-Box 16: Aufzählungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge wird als sukzessive Auflistung, Aneinanderreihung, Reihenfolge oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten betrachtet.

Beim Aufzählungsaspekt handelt sich um einen Aspekt des Folgenbegriffs, der Schülerinnen und Schülern aus vielfältigen (Alltags-)Erfahrungen bereits seit langem vertraut ist. Wichtig ist im Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt, dass die Objekte nicht in einer beliebigen Reihenfolge aufgezählt werden, sondern dass das Ordnen und Auflisten in Form einer Reihenfolge erfolgt. So können Spielkarten beispielsweise nach ihrer Wertigkeit geordnet werden: Herz-Bube, Herz-Dame, Herz-König, Herz-As. Während geometrische Figuren beispielsweise nach ihrer Eckenanzahl geordnet werden können: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, ...

#### 4.1.37. Der Zuordnungsaspekt.

##### FD-Box 17: Zuordnungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert zuordnet.

Dieser Aspekt wird in Anbetracht der mathematischen Faktenbox 3: Folgen wenig überraschen, Folgen lassen sich ja als (spezielle) Funktionen interpretieren, ja wir haben sie sogar als solche definiert: Jeder natürlichen Zahl  $k$  wird ein Wert  $a_k$  Element aus  $\mathbb{R}$  zugeordnet. Der Zuordnungsaspekt lässt sich wie schon bei Funktionen an Tabellen und Graphen veranschaulichen.

Mathematisch gesprochen ist der Zuordnungsaspekt charakterisierend und wird in der Analysis verwendet, um den Folgenbegriff zu definieren. Der Aufzählungsaspekt ist eine etwas weniger formale Beschreibung desselben Inhalts. Der Rekursionsaspekt hingegen ist nicht charakterisierend — nicht jede Folge kann rekursiv angegeben werden, z.B. die Folge der Primzahlen. Nichtsdestotrotz sind rekursive Folgen fundamental wichtige mathematische Objekte und die Formulierung von (diskreten) Iterationsprozessen mittels des Folgenbegriffs drängt sich in natürlicher Weise auf und ist eine zentrale Motivation für den Folgenbegriff, vgl. 4.1.7.

#### 4.1.D.2 Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

Wir haben bereits in Abschnitt C.§4.1 Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff erläutert. Alle drei (Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung) können auf den Folgenbegriff übertragen werden und eine weitere – vierte – Grundvorstellung kommt hinzu.

**4.1.38. Reihenfolgenvorstellung zum Folgenbegriff.** Dieser ersten Grundvorstellung begegnen wir bereits in der Aufgabenstellung Koffeingehalt, dort wird die Entwicklung des Koffeingehalts durch eine Aneinanderreihung der zunehmenden Koffeingehalte beschrieben. Aus der anfänglich zugenommen Koffeinmenge ergeben sich sukzessive die nachfolgenden. Und jeder vollen Stunde wird genau ein bestimmter Koffeingehalt zugeordnet. Damit wird deutlich,

dass diese Grundvorstellung auf dem Iterations-, Aufzählungs- und Zuordnungsaspekt beruht. Sie wird wie folgt formuliert.

#### FD-Box 18: Reihenfolgenvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge wird als Aneinanderreihung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge angesehen.

**4.1.39. Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff.** Die Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff baut hauptsächlich auf dem Iterationsaspekt auf und verwendet die Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff, allerdings indirekt. Sie wird ins Spiel gebracht, um die Zuordnung(svorstellung) von einem von einem Folgenglied zum nächsten zu erfassen.

#### FD-Box 19: Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge erfasst, wie sich Werte von einem Folgenglied zum nächsten ändern.

Besonders gut sichtbar wird diese Vorstellung im Unterricht bei der rekursiven Darstellung von arithmetischen und geometrischen Folgen, durch die Formeln  $a_{n+1} = a_n + d$  bzw.  $b_{n+1} = b_n \cdot q$ . Damit wird deutlich, dass die Kovariationsvorstellung eng auf den Iterationsaspekt bezogen ist.

Die Kovariationsvorstellung zeigt sich aber auch schon bei der Aufzählung von Folgengliedern. Z.B.  $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rangle$ . D. h. die Kovariationsvorstellung steht auch in Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt.

**4.1.40. Zuordnungsvorstellung zum Folgenbegriff.** Die Zuordnungsvorstellung baut unmittelbar auf dem Zuordnungsaspekt auf. Wie schon bei Funktionen wird sie besonders gut an grafischen Darstellungen und Wertetabellen sichtbar. Sie wird wie folgt formuliert.

#### FD-Box 20: Zuordnungsvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge ordnet jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zu.

**4.1.41. Objektvorstellung zum Folgenbegriff.** Auch diese Grundvorstellung wurde bereits für Funktionen erläutert und dort schon als die abstrakteste Grundvorstellung bezeichnet. Analoges gilt für die Objektvorstellung des Folgenbegriffs. Sie wird wie folgt formuliert.

#### FD-Box 21: Objektvorstellung zum Folgenbegriff

Eine Folge wird als Ganzes betrachtet.

Diese Vorstellung ist insbesondere dann nützlich, wenn mit Folgen als Ganzes operiert wird, etwa im Kontext der Grenzwertsätze, vgl. 4.2.15(3) unten.

**4.1.42. Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff.** Insgesamt also kann der Zusammenhang zwischen den Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriffs wie folgt dargestellt werden.

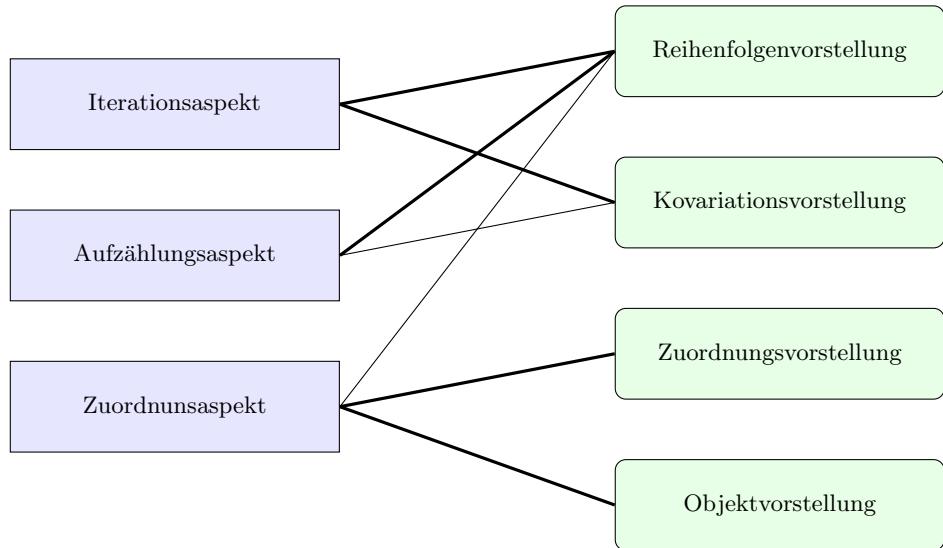


Abb. 4.20: Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen

## 4.2 Der Grenzwertbegriff

In diesem Abschnitt besprechen wir *den* zentralen Begriff der Analysis, den *Grenzwertbegriff*. Wie angekündigt nähern wir uns dem Grenzwertbegriff über den Begriff der Iteration, den wir im vorigen Abschnitt ausführlich diskutiert haben.

### 4.2.A Von der Iteration zum Grenzwertbegriff

Wie versprochen, werden wir in diesem Abschnitt über das Betrachten eines Iterationsprozesses, genauer der näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln, in ganz natürlicher Weise auf den Grenzwertbegriff geführt. Tatsächlich ist im Abschnitt 4.1 der Grenzwertbegriff schon mehrmals am Horizont aufgetaucht. Hier machen wir das explizit; aber nicht nur das! Wir werden sogar in ganz natürlicher Weise auf die *formale Definition* des Grenzwerts mit ihrer „Epsilontik“ geführt.

**4.2.1. Babylonisches Wurzelziehen konkret, vgl. Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.1.2.** Das folgende Verfahren zum näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln geht historisch auf die Babylonier zurück und ist damit ca. 3000 Jahre alt!

Stellen wir uns die Aufgabe  $\sqrt{30}$  zu berechnen. In der Nähe der gesuchten Zahl liegt sicherlich (als erste Näherung) die Zahl  $x_1 = 5$ , denn  $5 \cdot 5 = 25$ . Es bleibt aber noch ein Rest  $r$  und wir können schreiben

$$\sqrt{30} = 5 + r. \quad (4.26)$$

Jetzt wollen wir natürlich  $r$  näher bestimmen. Dazu quadrieren wir (4.26) und erhalten

$$30 = 25 + 10r + r^2. \quad (4.27)$$

Das ist eine quadratische Gleichung für  $r$ , die aber nicht dazu taugt,  $r$  zu berechnen. Tasächlich ergibt sich durch Umformung

$$r^2 + 10r - 5 = 0 \quad \text{also} \quad r = 5 \pm \sqrt{30}, \quad (4.28)$$

was uns also nicht weiterbringt — um  $r$  aus (4.28) zu bestimmen, müssten wir  $\sqrt{30}$  bereits kennen!

Wir müssen daher einen anderen Weg einschlagen, um  $r$  zumindest näherungsweise zu berechnen. Der Schlüssel ist es, den quadratischen Term in (4.27) los zu werden. Dazu überlegen wir: Es gilt sicherlich  $r < 1$ , denn wäre der Rest 1 dann hätten wir  $5 + r = 6$  und  $6^2 = 36$  ist bereits größer als 30. Wenn aber  $r < 1$  gilt, dann ist  $r^2$  noch kleiner und wir lassen den quadratischen Term einfach unter den Tisch fallen. Die ultimative und a-posteriori Rechtfertigung für diesen Schritt ist natürlich, dass das Verfahren (trotzdem) gut funktioniert, wie wir gleich sehen werden.

Unsere Überlegung führt also auf folgende ungefähre Gleichung

$$30 \approx 25 + 10r \quad (4.29)$$

als „Ersatz“ für (4.27). Um den Rest  $r$  näherungsweise durch ein Iterationsschema zu bestimmen, machen wir den folgenden Ansatz für die erste Näherung  $r_1$  für  $r$ .

$$30 = 25 + 10r_1, \quad \text{woraus sich ohne Mühe} \quad r_1 = \frac{5}{10} = 0.5 \quad (4.30)$$

ergibt. Damit haben wir aber nach  $x_1 = 5$  einen neuen, besseren Näherungswert

$$x_2 = x_1 + r_1 = 5 + 0.5 = 5.5 \quad (4.31)$$

gefunden. Nun gilt aber  $x_2^2 = 5.5^2 = 30.25$  und wir haben offensichtlich über das Ziel hinausgeschossen. Um noch besser an  $\sqrt{30}$  heranzukommen, wiederholen wir unsere obige Vorgehensweise mit  $x_2 = 5.5$  statt  $x_1 = 5$  und nennen den „neuen Rest“  $r'$ . Wir erhalten

$$\sqrt{30} = x_2 + r', \quad \text{also} \quad 30 = x_2^2 + 2x_2 r' + (r')^2 \approx x_2^2 + 2x_2 r', \quad (4.32)$$

wobei wir den quadratischen Term  $(r')^2$  wieder weggelassen haben. Analog zu (4.30) ergibt sich für die 2. Näherung  $r_2$  für den Rest  $r$

$$30 = x_2^2 + 2x_2 r_2, \quad \text{also} \quad r_2 = \frac{30 - x_2^2}{2x_2}. \quad (4.33)$$

Damit erhalten wir für den nächsten Näherungswert  $x_3$  an  $\sqrt{30}$

$$x_3 = x_2 + r_2 = \frac{2x_2^2 + 30 - x_2^2}{2x_2} = \frac{30 + x_2^2}{2x_2} \quad (4.34)$$

Setzen wir  $x_2 = 5.5$  ein, so ergibt sich numerisch  $r_2 = -0.125/5.5 \approx -0,022\,727\,273$  (also wie erwartet ein negativer Wert) und

$$x_3 \approx 5.5 - 0,022\,727\,273 \approx 5,477\,272\,727. \quad (4.35)$$

Im nächsten Schritt erhalten wir, vgl. (4.34), in völliger Analogie

$$x_4 = \frac{30 + x_3^2}{2x_3} \quad \text{mit dem numerischen Wert } x_4 \approx 5,477\,225\,575\,25. \quad (4.36)$$

Die babylonische Methode erweist sich als sehr effektiv, denn das Quadrat von  $x_4$  hat den numerischen Wert  $x_4^2 \approx 30,000\,000\,002\,2$ , ist also schon auf 8 Nachkommastellen nahe am Wert 30. Außerdem ist der nächste Näherungswert  $x_5 = 5,477\,225\,575\,05$  und also die Näherung bereits in der 9. Nachkommastelle stabil.

**4.2.2. Babylonisches Wurzelziehen abstrakt — Das Heron Verfahren.** Nun wollen wir obiges Verfahren etwas genauer analysieren. Zunächst lässt sich aus (4.36) die allgemeine Formel für die Iteration zu

$$x_{n+1} = \frac{30 + x_n^2}{2x_n} \quad (4.37)$$

ablesen. Wenn wir uns nun noch vom konkreten Wert  $\sqrt{30}$  lösen und allgemein die Quadratwurzel  $\sqrt{a}$  einer beliebigen positiven Zahl  $a$  annähern wollen, so erhalten wir offensichtlich die folgende Näherungsfolge  $(x_n)$  in rekursiver Darstellung

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}). \quad (4.38)$$

Wenn wir diese Darstellung geringfügig umformen zu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad (4.39)$$

erkennen wir übrigens einen alten Bekannten: das *Heron-Verfahren*, siehe z.B. (Steinbauer, 2022, 1.3.24), Forster, 2016, §6.

Mit der Formel (4.39) ist auch eine klare und einprägsame geometrische Veranschaulichung verbunden: Wir interpretieren die Zahl  $a$ , deren Wurzel wir ja suchen, als die Fläche eines Rechtecks  $R_1$  mit den Seitenlängen

$$x_1 \text{ (also dem Startwert) und } y_1 = \frac{a}{x_1}. \quad (4.40)$$

Die Aufgabe ist es nun das zu  $R_1$  flächengleiche Quadrat  $Q$  zu finden, das dann natürlich die Seitenlänge  $\sqrt{a}$  haben muss. Die Iteration funktioniert nun so (siehe auch Abbildung 4.21), dass die neue Seitenlänge  $x_2$  als Mittelwert zwischen  $x_1$  und  $y_1$  angesetzt wird, also als

$$x_2 = \frac{1}{2} (x_1 + y_1) = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{a}{x_1} \right). \quad (4.41)$$

Das liefert uns ein zu  $R_1$  flächengleiches Rechteck  $R_2$  mit den Seitenlängen

$$x_2 \text{ und } y_2 = \frac{a}{x_2}, \quad (4.42)$$

dessen Seitenlängen bereits näher beieinander liegen, d.h. das näher an einem Quadrat ist. Weitere Iteration führt dann auf Rechtecke  $R_n$  mit den iterativ gegebenen Seitenlängen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n + y_n) = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \text{ und } y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}, \quad (4.43)$$

also genau auf die Iteration (4.39).

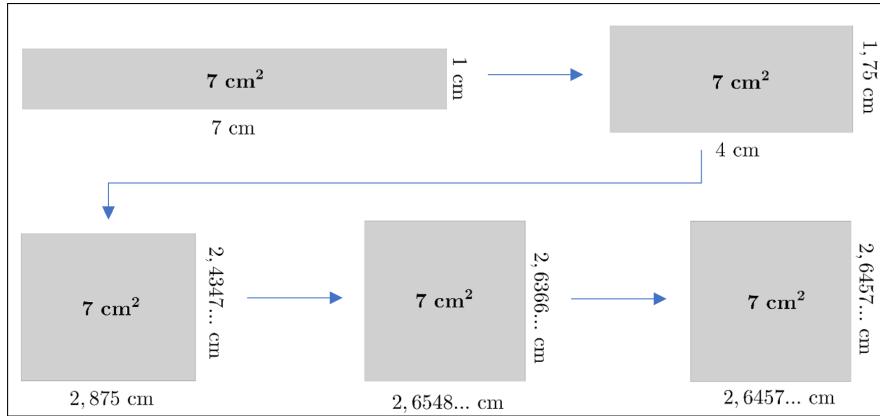


Abb. 4.21: Geometrische Veranschaulichung des Heron Verfahrens zur Berechnung von  $\sqrt{7}$ .

**4.2.3. Eine natürliche Fragestellung.** Nun stellt sich mit einiger Dringlichkeit die Frage: *Funktioniert das Verfahren immer?* Präziser formuliert: Kommt die Näherungsfolge  $(x_n)$  der Zahl  $\sqrt{a}$  mit wachsendem  $n$  immer näher und was heißt das genau?

**4.2.4. Fehlerabschätzung.** Um eine erste Antwort zu finden untersuchen wir das Verhalten des Fehlers  $z_n$  in jedem Schritt der Iteration, also von

$$z_n = \sqrt{a} - x_n \quad (n \geq 1). \quad (4.44)$$

Aus (4.38) ergibt sich sofort

$$z_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{a + x_n^2}{2x_n} = -\frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = -\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = -\frac{z_n^2}{2x_n}. \quad (4.45)$$

Diese Gleichung besagt zunächst, dass alle Fehler  $z_n$  (für  $n \geq 2$ ) negativ sind, weil ja alle Näherungen  $x_n$  positiv sind; letztere sind also (für  $n \geq 2$ ) immer größer als  $\sqrt{a}$ , genauer

$$x_n > \sqrt{a} \quad \text{für } n \geq 2. \quad (4.46)$$

Nun werden wir mit Hilfe der Gleichung (4.45) zeigen, dass sich der Fehler *in jedem Schritt mindestens halbiert*. Tatsächlich folgt aus (4.45) zunächst

$$z_{n+1} = -\frac{z_n}{2x_n} z_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right) z_n. \quad (4.47)$$

Nun gilt, wie in (4.46) bemerkt, dass  $x_n > \sqrt{a}$  für  $n \geq 2$ , also  $0 < \sqrt{a}/(2x_n) < 1/2$  und daher

$$|z_{n+1}| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} \right| |z_n| < \frac{1}{2} |z_n|, \quad (4.48)$$

also ist der „neue“ Fehler  $z_{n+1}$  höchstens halb so groß wie der „alte“ Fehler  $z_n$ . Wenn wir diese Ungleichung iterieren, dann erhalten wir die Abschätzung

$$|z_{n+1}| < \frac{1}{2} |z_n| < \frac{1}{2} \frac{1}{2} |z_{n-1}| < \cdots < \frac{1}{2^n} |z_1|, \quad (4.49)$$

und somit

$$|z_n| < \frac{1}{2^{n-1}} |z_1| \quad (n \geq 2). \quad (4.50)$$

Diese Formel besagt auch, dass sich in jedem Schritt der Approximation die Anzahl der gültigen Dezimalstellen (näherungsweise) verdoppelt — eine Tatsache, die empirisch erfahrbar ist, wenn man das Verfahren explizit durchführt und die uns im Folgenden zur Grenzwertdefinition führen wird.

**4.2.5. Approximationsgüte.** Angenommen wir wollen mit dem Heron-Verfahren die Quadratwurzel  $\sqrt{a}$  bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen. Das bedeutet, dass wir eine Fehler schranke von  $10^{-7}$  unterschreiten müssen in dem Sinn, dass wir ein  $x_{n_0}$  finden, für das

$$|\sqrt{a} - x_{n_0}| < 10^{-7} \quad (4.51)$$

gilt. Die Fehlerabschätzung (4.50) hilft uns dabei, denn es gilt

$$|\sqrt{a} - x_n| = |z_n| < |z_1| \frac{1}{2^{n-1}} \quad (4.52)$$

und wir müssen also nur einen Index  $n_0$  finden, sodass

$$|z_1| \frac{1}{2^{n_0-1}} < 10^{-7} \quad \text{also} \quad 2^{n_0-1} > 10^7 |z_1| \quad \text{gilt.} \quad (4.53)$$

Das können wir leicht erreichen, indem wir z.B.  $n_0 > 2 \cdot 10^7 |z_1|$  wählen, denn wegen  $2^k \geq k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )<sup>9</sup> gilt dann

$$2^{n_0-1} = \frac{1}{2} 2^{n_0} \geq \frac{1}{2} n_0 > \frac{1}{2} 2 \cdot 10^7 |z_1| = 10^7 |z_1|. \quad (4.54)$$

Wegen der Ursprünglichen Fehlerabschätzung (4.50) ist dann im übrigen auch sichergestellt, dass für alle  $n_0$  nachfolgenden Indizes, also für alle  $n > n_0$  die gewünschte Fehlerschranke (4.51) gilt.

Mehr noch, auf diese Weise können wir

zu jeder beliebig vorgegebene Fehlerschranke einen (von ihr abhängigen) Index  $n_0$  angeben, ab dem die Näherungsfolge  $(x_n)$  die Fehlerschranke unterschreitet, d.h. im geforderten „Toleranzintervall“ um  $\sqrt{a}$  liegt.

Genau diese Vorstellung liegt aber der Grenzwertdefinition zugrunde, die wir im Lichte der obigen Diskussion wie folgt formulieren:

Eine reelle Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder (noch so kleinen) Toleranz  $\varepsilon > 0$  einen (i.a. von  $\varepsilon$  abhängigen) Index  $n_0$  gibt, sodass alle Folgenglieder  $x_n$  mit Index  $n \geq n_0$  im entsprechenden Toleranzintervall  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  liegen, also

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad (4.55)$$

gilt.

Bevor wir im nächsten Abschnitt genauer auf den Grenzwertbegriff eingehen machen wir eine

#### 4.2.6. Mathematische Zwischenbemerkung.

- (1) Dass die Wahl  $n_0 > 2 \cdot 10^7 |z_1|$  (unter Gleichung (4.53)) tatsächlich möglich ist, folgt im deduktiven Aufbau der Analysis aus dem Archimedischen Axiom, siehe z.B. (Steinbauer, 2022, 0.1.11). Dieses besagt ja gerade, dass es zu jeder (beliebig großen) reellen Zahl eine natürliche Zahl gibt, die diese übertrifft. Daraus folgt im Übrigen auch, dass  $1/n$  eine Nullfolge ist, vgl. (Steinbauer, 2022, 1.1.3). Dass dieser fundamentalste alle Grenzwerte im deduktiven Aufbau der Analysis im Archimedischen Axiom kodiert ist, ist natürlich kein Thema für den Unterricht; zu wissen lohnt es sich für Lehrer/innen aber allemal.
- (2) Tatsächlich ist für die Konvergenz des Heron-Verfahrens der Startwert irrelevant. Genauer, die Approximationsfolge  $(x_n)$  konvergiert für jeden positiven Startwert  $x_1$  gegen  $\sqrt{a}$ . Das sieht man aus der Fehlerabschätzung (4.50), denn der Fehler  $z_n$  wird beliebig klein, egal, wie groß der „Start-Fehler“  $|z_1| = |\sqrt{a} - x_1|$  ist.

---

<sup>9</sup>Wenn nicht offensichtlich, lässt sich das mit Induktion in einer Zeile zeigen:  
 $2^0 = 1 \geq 0, 2^1 = 2 \geq 1; k \mapsto k + 1 : 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k \geq k + 1$  für  $k \geq 1$ .

#### 4.2.B Der Grenzwertbegriff: Fachliche Grundlagen und Formulierungen

Wir beginnen mit einer mathematischen Präzisierung und der komprimierten Form der Definition des Grenzwerts von Folgen.

##### Mathematische Faktenbox 8: Grenzwert von Folgen

**4.2.7. Definition (Limes).** Eine reelle Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen ein  $x \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad |x - x_n| < \varepsilon. \quad (4.56)$$

In diesem Fall heisst  $x$  *Grenzwert* oder *Limes* der Folge  $(x_n)$  und wir sagen  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$ . Hat eine Folge  $(x_n)$  einen Grenzwert, so nennen wir sie *konvergent*, andernfalls heißt sie *divergent*.

**4.2.8. Schreib- und Sprechweisen.** Die folgenden Schreib- und Sprechweisen sind üblich:

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{oder kürzer} \quad x_n \rightarrow x \\ \text{„}(x_n)\text{ geht/konvergiert gegen } x \text{ (für } n \text{ gegen unendlich)}\text{“}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oder kürzer} \quad \lim x_n = x \\ \text{„Limes von } x_n \text{ ist } x\text{“ oder „}x \text{ ist Limes von } (x_n)\text{“}. \end{aligned}$$

Falsch hingegen ist :  $\lim x_n \rightarrow x$ , „Limes  $(x_n)$  geht gegen  $x$ “.

##### 4.2.9. Beispiel (Konvergente und divergente Folgen).

- (1) Konstante Folgen konvergieren trivialerweise,  $x_n = a \rightarrow a$ ; dafür hätte man den Grenzwertbegriff aber nicht erfinden müssen!
- (2) Das Erzbeispiel einer (nicht-trivial) konvergenten Folge ist  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ . Sie ist eine Nullfolge, d.h. sie konvergiert gegen 0,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , was wie oben gesagt aus dem Archimedischen Axiom folgt.
- (3) Weitere prominente Nullfolgen sind  $\frac{1}{n^p}$  und  $\frac{1}{q^n}$  für jedes (fixe)  $p \in \mathbb{N}$  und  $q^n$  für jedes feste  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ .
- (4) Weitere prominente konvergente Folgen sind:  $\sqrt[p]{a}$  für jedes feste  $a \in \mathbb{R}$  und sogar  $\sqrt[n]{n}$  gehen gegen 1,  $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ ,  $1 + q + q^2 + \dots + q^n \rightarrow \frac{1}{1-q}$  für jedes feste  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ .
- (5) Folgen können aus zwei Gründen divergieren: entweder sind sie unbeschränkt wie  $x_n = n$  oder sie haben (mindestens) zwei Häufungswerte wie die „Vorzeichenmaschine“  $x_n = (-1)^n$ .

**4.2.10. Grenzwert und Häufungswert.** Ein gutes Verständnis des Grenzwertbegriffs ergibt sich auch in seiner Abgrenzung zum Begriff Häufungswert (manchmal auch Häufungspunkt<sup>10</sup>) einer Folge. Dabei ist ein Häufungswert intuitiv ein Punkt, dem die Folge immer wieder beliebig nahe kommt, aber sich dazwischen wieder von ihm entfernen kann. Die Folge muss also *nicht* ab einem bestimmten Index *immer* nahe dem Häufungswert sein, sondern es

<sup>10</sup>Es gibt einen mathematischen Grund, der gegen diese Bezeichnung spricht: Ein Häufungswert einer Folge ist *nicht* immer auch Häufungspunkt der Menge der Folgenglieder, z.B. für konstante Folgen, vgl. (Steinbauer, 2022, 1.3.29).

sind „Ausreißer“ erlaubt. Wir geben unten eine mathematische Präzisierung dieser Beschreibung. Alternativ werden Häufungswerte einer Folge auch oft als Grenzwerte von Teilfolgen definiert, vgl. etwa (Steinbauer, 2022, 1.3.6).

### Mathematische Faktenbox 9: Häufungswert

**4.2.11. Definition(Häufungswert).** Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}$  heißt *Häufungswert* der reellen Folge  $(x_n)$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n' \geq n_0 : \quad |x - x_{n'}| < \varepsilon. \quad (4.57)$$

**4.2.12. Beispiele & Bemerkung (Häufungswert).** Neben dem obigen einfachen Beispiel der „Vorzeichenmaschine“ hat etwa auch die Folge  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  die beiden Häufungswerte  $\pm 1$ . Überdies ist natürlich der Grenzwert einer Folge immer auch ein Häufungswert. Die Umkehrung ist offensichtlich falsch. (Es gilt sogar: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. Dieser ist dann auch der Grenzwert, vgl. Heuser, 2003, Satz 28.5.)

**4.2.13. Grenzwert: Formulierungen, Sprechweisen & Veranschaulichungen.** Es haben sich noch viele weitere Sprechweisen eingebürgert, die besonders griffige bzw. anschauliche Formulierungen der Grenzwertbedingung 4.2.7 ermöglichen. Wir besprechen die wichtigsten davon und beginnen mit den folgenden Redeweisen:

- (1) Für  $x \in \mathbb{R}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir das offene Intervall  $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  als  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ , siehe Abbildung 4.22.

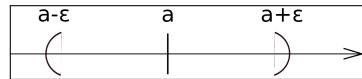


Abb. 4.22: Eine  $\varepsilon$ -Umgebung der Zahl  $a$  am Zahlenstrahl.

- (2) Wir sagen, dass *fast alle* Glieder der Folge  $(x_n)$  in einer Menge  $M$  liegen, wenn  $x_n \in M$  für alle Indizes  $n$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gilt, d.h. wenn  $x_n \notin M$  für höchstens endlich viele  $n$  gilt.

Wenn es aber nur endlich viele solcher „Ausnahme-Folgenglieder“ gibt, die nicht in  $M$  liegen, dann gibt es auch ein „spätestes“ (d.h. mit höchstem Index) unter ihnen, sagen wir  $a_{n_0}$ . Alle „späteren“ Folgenglieder, d.h. alle  $x_n$  mit  $n > n_0$  liegen dann in  $M$ .

Wenn wir diese beiden Sprechweisen kombinieren, können wir die Konvergenzbedingung 4.2.7 wie folgt umformulieren:

- (F2) Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x \in \mathbb{R}$ , falls in jeder (noch so kleinen)  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  fast alle Folgenglieder von  $(x_n)$  liegen.

Mit dieser Formulierung ist das Bild des „Hineinzoomens“ verbunden: Egal wie stark man in die Nähe von  $x$  (etwa mit einem Mikroskop) hineinzoomt, man sieht immer fast alle Folgenglieder (d.h. nur endlich viele liegen jeweils außerhalb des Bildausschnitts des Mikroskops).

**Warnung:** Fast alle Folgenglieder sind „mehr“ als nur unendlich viele. Liegen bloß unendlich viele Folgenglieder einer Folge  $(x_n)$  in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}$ , dann ist  $x$  zwar

Häufungswert von  $(x_n)$  (vgl. 4.2.11), aber *nicht* notwendiger Weise Grenzwert. Ein Beispiel ist wieder die „Vorzeichenmaschine“  $x_n = (-1)^n$  mit ihren beiden Häufungswerten 1 und  $-1$ . In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von 1 liegen unendlich viele Folgenglieder, nämlich alle mit geradem Index, da  $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ebenso liegen unendlich viele Glieder in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $-1$ , nämlich alle mit ungeradem Index, denn  $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Richtig ist die folgende Formulierung

- (F3) Ein  $x \in \mathbb{R}$  ist Häufungswert einer Folge  $(x_n)$ , falls in jeder (noch so kleinen)  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  unendlich viele Folgenglieder von  $(x_n)$  liegen.

Eine weitere gute und anschauliche Formulierung der Grenzwertbedingung macht sich die Sprechweise des „Schließlich“ zu Nutze. Sie erlaubt eine Umformulierung des „fast alle“ von oben.

- (3) Wir sagen eine Folge  $(x_n)$  bleibt schließlich in einer Menge  $M$ , wenn alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index, sagen wir  $n_0$ , in  $M$  liegen, also wiederum  $x_n \in M$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

Damit ergibt sich nun klarerweise die Formulierung:

- (F4) Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x \in \mathbb{R}$ , falls sie schließlich in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  bleibt.

Zu den Formulierungen (F2) und (F4) passen die folgenden unmittelbaren Veranschaulichungen im Bilde der Folge als „Spaziergang“ in  $\mathbb{R}$  (Abbildung 4.23) und am Graphen der Folge (Abbildung 4.24).

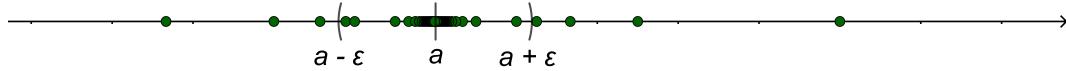


Abb. 4.23: Eine  $\varepsilon$ -Umgebung um den Grenzwert: Darstellung am Zahlenstrahl

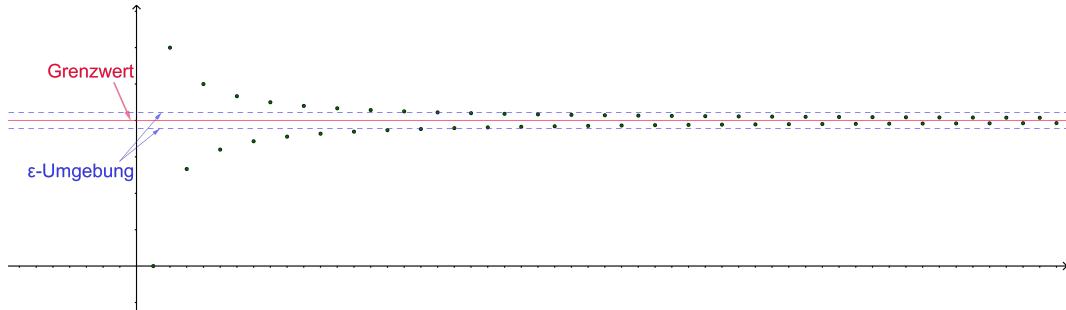


Abb. 4.24: Eine  $\varepsilon$ -Umgebung um den Grenzwert: Darstellung im Koordinatensystem

Dabei ist zu beachten, dass ein wesentlicher Aspekt der Definition in den Veranschaulichungen nicht unmittelbar ersichtlich ist. Es muss ja *für alle* (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  ein entsprechender Folgenindex  $n_0$  existieren, sodass alle späteren Folgenglieder (also alle  $x_n$  mit  $n > n_0$ ) in der  $\varepsilon$ -Umgebung liegen.

Dieser wichtige Punkt kann besonders anschaulich in Form eines Spiels ausgedrückt werden: Die erste Spielerin gibt beliebig ein  $\varepsilon$  bzw. eine  $\varepsilon$ -Umgebung um den vermuteten Grenzwert  $x$  vor. Beliebig, also beliebig klein, kann in diesem Kontext als „möglichst gemein“ verstanden werden, um es der zweiten Spielerin möglichst schwer zu machen. Diese soll nämlich die Konvergenz von  $(x_n)$  gegen  $x$  zeigen, d.h. sie/er muss zu jeder noch so „gemeinen“  $\varepsilon$ -Vorgabe *immer noch* ein  $n_0$  finden, sodass alle späteren Folgenglieder  $\varepsilon$ -nahe am Grenzwert liegen.

Natürlich kann ein solches Spiel nicht in alle Ewigkeit durchgeführt werden, um wirklich *für alle  $\varepsilon$*  ein geeignetes  $n_0$  zu finden — hier ist dann im „wirklichen Leben“ ein mathematischer Beweis von Nöten!

Über die hier vorgestellten Formulierungen hinaus gibt es natürlich auf verschiedenen Exaktheitsstufen gute und weniger gute (Um-)Formulierungen der Grenzwertdefinition. Dabei ist eine Formulierung dann gut, wenn sie den Sachverhalt präzise wiedergibt und in ihrer verbalen Formulierung klar und anschaulich ist, ohne Fehlvorstellungen zu provozieren.

#### 4.2.14. Grenzwertberechnungen — praktische Aspekte.

Der Grenzwertbegriff ist in gewisser Weise das *Herzstück* der gesamten Analysis. Daher kommt dem Berechnen von Grenzwerten eine große Bedeutung zu. Wie Sie aus Ihrer Analysis-Ausbildung sicher mitgenommen haben, kann das aber ganz schön unangenehm sein!

Genauer: Es kann oft ganz trickreich werden, wenn man nachweisen soll, dass eine gegebene Folge konvergiert und dann auch noch der Grenzwert bestimmt werden soll. Nur in den allerseltesten Fällen, wird man damit erfolgreich sein, direkt die Definition des Grenzwerts zu verwenden. Daher *vermeidet man es möglichst Grenzwerte in diesem Sinne „direkt“* zu berechnen und nimmt stattdessen zwei Hilfsmittel zur Hand

- (1) Wissen über die Eigenschaften konvergenter bzw. divergenter Folgen
- (2) Grenzwertsätze, die es erlauben aus der Konvergenz einfacher Folgen auf die Konvergenz komplizierterer Folgen zu schließen *und ganz konkret* ihren Limes aus den Limiten der einfacheren „Bausteine“ zu berechnen.

Diese Werkzeuge werden in der Analysis zu einem wirkungsvollen Kalkül ausgebaut, dessen Anfangsgründe im schulischen Kontext besonders geeignet sind die zweite der Winterschen Grunderfahrungen (mathematische Welt, vgl. 2.2.7) zu vermitteln. Darüberhinaus lassen diese beiden Werkzeuge eine gute Intuition entstehen, wie konvergente/divergente Folgen „aussehen“. Wir präzisieren diese Hilfsmittel wie folgt.

#### Mathematische Faktenbox 10: Konvergente Folgen

**4.2.15. Faktensammlung: konvergente Folgen.** Folgende Tatsachen zu Grenzwerten sind fundamental:

- (1) Eine konvergente Folge hat *genau einen* Grenzwert. Somit hat jede Folge *höchstens* einen Grenzwert, vgl. etwa (Steinbauer, 2022, 1.2.21)<sup>a</sup>.
- (2) Konvergente Folgen sind beschränkt, die Umkehrung ist falsch, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 1.2.17 ff)<sup>b</sup>.
- (3) (Grenzwertsätze) Konvergieren die Folgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$ , dann konvergieren auch die Folgen  $(x_n \pm y_n)$ ,  $(x_n \cdot y_n)$  und, falls  $y_n \neq 0$  auch  $(x_n/y_n)$  und es gilt (vgl. z.B.

### Mathematische Faktenbox 10 – Fortsetzung

(Steinbauer, 2022, 1.2.23 ff))

$$\begin{aligned}\lim(x_n \pm y_n) &= \lim x_n \pm \lim y_n, \\ \lim(x_n \cdot y_n) &= \lim x_n \cdot \lim y_n \quad \text{und} \quad \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.\end{aligned}\quad (4.58)$$

- (4) (Sandwichlemma) Gilt für die drei Folgen  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  und  $(z_n)$ , dass  $x_n \leq y_n \leq z_n$  für alle  $n$  und  $x_n \rightarrow x$ , sowie  $z_n \rightarrow x$ , dann konvergiert auch  $(y_n)$  und es gilt  $\lim y_n = x$ , vgl. etwa (Steinbauer, 2022, 1.2.29).

<sup>a</sup>Der Beweis dieser fundamentalen Tatsache ist einfach und beruht auf folgender Idee: Gäbe es zwei verschiedene Limiten, dann wären fast alle Folgenglieder in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung beider Grenzwerte und damit jeder der beiden in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung des anderen. Daher sind sie aber gleich.

<sup>b</sup>Auch hier ist die Beweisidee sehr einfach: Konvergiert eine Folge, so sind alle späten Glieder, sagen wir  $\varepsilon = 1$ -nahe am Grenzwert, also beschränkt. Die endlich vielen Ausnahmen sind klarerweise auch beschränkt. Die Umkehrung ist falsch, wie z.B. die „Vorzeichenmaschine“ zeigt.

**4.2.16. Technologieeinsatz.** Natürlich ist die Berechnung von Folgengrenzwerten mittels Technologie möglich. Sowohl Geogebra als auch alle anderen verbreiteten CAS (Computer-algebra-Systeme) wie Mathematica und Maple verfügen über mächtige Funktionen, die es erlauben, Grenzwerte einfach zu berechnen.

Trotzdem ist ein gewisses Maß an Grundwissen über Grenzwerte einfacher Folgen für Lehrer/innen unerlässlich. Daraus ergibt sich vor allem ein Gefühl für verschieden starkes Wachstum, wie es auch die folgenden Übungsaufgaben vermitteln.

**4.2.17. Die Notwendigkeit der Präzisierung.** Zum Abschluss streichen wir heraus, dass die in der Definition des Grenzwerts vorgenommene und in unserer Diskussion dargestellte Präzisierung des Grenzwertbegriffs unerlässlich ist, um den Begriff *genau* zu erfassen. Es gibt nämlich zahlreiche Beispiele, die schmerzlich aufzeigen, wie eng die Grenzen eines intuitiven Verständnis des Grenzwertbegriffs tatsächlich sind. Eine sehr frühe Sammlung solcher Beispiele enthält z.B. (Bolzano, 1851). Wir erwähnen hier kurz zwei der am verbreitetsten.

- (1) *Treppenstufen:* Die „Treppenfolge“ in Abbildung 4.25 nähert sich optisch der Diagonale des Einheits-Quadrats beliebig an: Die „späten“ Treppen bleiben sogar als ganzes beliebig nahe an der Diagonalen. Trotzdem ist die Gesamtlänge jeder Treppe immer 2, aber die Länge der Diagonale gleich  $\sqrt{2}$ . D.h. genauer, obwohl die Treppen optisch (und in einem geeigneten mathematischen Sinn als Kurven) gegen die Diagonale konvergieren, konvergieren die Längen der „Treppenkurven“ *nicht* gegen die Länge der Diagonalen<sup>11</sup>.
- (2) *Halbkreisbögen:* Analog gilt für die in den Einheitskreis eingeschriebenen Halbkreisbögen in Abbildung 4.26, dass sie sich graphisch immer mehr der Sehne mit Länge 2 annähern. Aber die Summe der Umfänge der Halbkreisbögen mit gleichem Radius bleibt immer konstant gleich  $\pi$  ist.

<sup>11</sup>Mit diesem Beispiel steht im Zusammenhang, dass in der Theorie der Längenräume (Eine mathematische Theorie, die das Konzept der Länge von Kurven möglichst abstrakt fasst und viele Anwendungen in der (metrischen) Geometrie hat.) Längen unterhalbstetig sind: Kurven können nur von einer Folge *längerer* Kurven gleichmäßig approximiert werden.

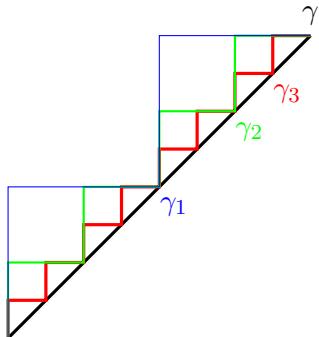


Abb. 4.25: Die Länge der Treppen ist konstant 2, die Länge der Diagonale aber  $\sqrt{2}$ .

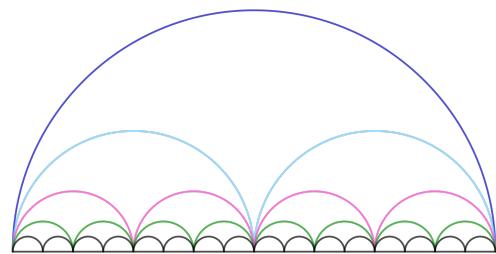


Abb. 4.26: Die Summe der Längen der Halbkreisbögen ist  $\pi$ , aber die Länge der Sehne ist 2.

### 4.2.C Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Nachdem uns die Betrachtungen zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln in Abschnitt 4.2.A zum Grenzwertbegriff geführt haben und wir in Abschnitt 4.2.B die fachlichen Grundlagen sowie entscheidende Hinweise zur verbalen Ausformulierung der Grenzwertdefinition diskutiert haben, sollen hier nun systematisch die Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriffs betrachtet werden.

#### 4.2.C.1 Aspekte des Grenzwertbegriffs

Beim Grenzwertbegriff lassen sich zwei entscheidende Aspekte ausmachen, die in den vorgehenden Ausführungen in Abschnitt 4.2.A und 4.2.B stellenweise bereits durchgeschimmert sind. Es sind dies der *dynamische* und der *statische Aspekt* des Grenzwertbegriffs. Die beiden Aspekte sind, obwohl in ihrem Ansatz gegensätzlich, natürlich eng miteinander verknüpft und werden am besten als die zwei Seiten ein und derselben Medaille aufgefasst.

**4.2.18. Der dynamische Aspekt.** Dem dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs liegt die intuitive Vorstellung eines unendlich wiederholbaren Vorgangs zugrunde. Solche potenziell unendlichen Vorgänge sind uns in der Vorlesung schon an manchen Stellen begegnet. Zum Beispiel:

- Medikamentenspiegel, 4.1.8: Nach einer Anfangsdosis von 400mg hat sich der Medikamentenspiegel nach sukzessiver Verabreichung und entsprechendem Abbau bei 1600mg eingependelt.
- Koffeingehalt, 4.1.14: Ebenso verhält es sich bei der Entwicklung des Koffeingehalts, wenn der Vorgang des Kaffeetrinkens Stunde für Stunde sukzessive unter den in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen fortgesetzt wird. Der Koffeingehalt pendelt sich dann bei etwas mehr als 571mg ein.
- Schlangenlinie, 4.1.16: Auch die Schlangenlinie, bei der der Radius der Halbkreise sukzessive halbiert wird, lässt sich theoretisch bzw. gedanklich als unendlicher Vorgang ausführen. Wird für den ersten Radius beispielsweise 1cm gewählt, dann sind die folgenden Radien 0.5cm, 0.25cm, 0.125cm, 0.0625cm, 0.03125cm, 0.015625cm, 0.0078125cm ... lang. Bei zunehmend fortschreitender Halbierung kommen die Radien einer Länge von 0cm beliebig nahe.

Bei allen drei Beispielen lässt sich ein Wert angeben, dem sich die Folgenglieder mit wachsendem  $n$  beliebig nähern und in dessen Nähe *fast alle* Folgenglieder liegen. Alle drei Folgen erfüllen aber besondere Eigenschaften: Sie sind streng monoton wachsend/fallend und nach oben/unten beschränkt und daher konvergieren sie gegen ihr Supremum/Infimum.

Ein anderes Beispiel wäre die Folge  $a_n = (-1)^n / 2^n$ . Sie ist zwar nicht monoton, aber trotzdem lässt sich auch ein Wert angeben, dem sich die Folgenglieder mit wachsendem  $n$  beliebig nähern und in dessen Nähe *fast alle* Folgenglieder liegen.

Historisch betrachtet, hat der dynamische Aspekt des Grenzwertbegriffs lange Tradition — er war schon in der griechischen Antike bekannt und geht (mindestens) auf Aristoteles und seine Vorstellung des Unendlichen zurück (siehe Abschnitt 4.2.E).

**4.2.19. Der statische Aspekt.** Im statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs wird die (dynamische) Sichtweise, dass eine Folge dem Grenzwert mit wachsendem  $n$  beliebig nahe kommt gewissermaßen *umgekehrt*. Es wird nun nicht mehr der Wert, um den sich die Folgengliedern „einpendeln“ *gesucht*, sondern ein fester Wert wird *vorgegeben* und auf seine Eigenschaften bezüglich der Folge untersucht. D.h. Ausgangspunkt der statischen Sichtweise ist ein fester Wert und es wird jenes Folgenglied gesucht, ab dem alle weiteren Folgenglieder in einer vorgegebenen Umgebung dieses Wertes liegen. Hier kommt also ganz offensichtlich eine enge Beziehung zur formale Definition des Grenzwerts zum Vorschein.

Der statische Aspekt ist historisch gesehen wesentlich jünger als der dynamische und wurde erst von Karl Weierstraß (1815 – 1897) formalisiert, siehe auch Abschnitt 4.2.E.

**4.2.20. Aspekte des Grenzwerts im Mathematikunterricht.** Die fachdidaktische Literatur ist sich weitgehend darin einig (vgl. etwa Bender, 1991), dass eine tragfähige Vorstellung über das „Unendliche“ und den Grenzwert

- (1) mithilfe des dynamischen Aspekts aufzubauen ist,  
dass der Aufbau eines tiefen Verständnisses der Grenzwertdefinition aber
- (2) einen *bewussten Perspektivenwechsel* hin zum statischen Aspekt  
des Begriffs verlangt. Des weiteren wird in der Literatur auf die Schwierigkeit hingewiesen, den dynamischen Aspekt in den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung auszuschalten und sie dann wieder zuzulassen.

In unserem Zugang haben wir den Perspektivenwechsel vom dynamischen zum statischen Aspekt in Abschnitt 4.2.A bei den Betrachtungen zur Approximationsgüte vollzogen. Davor wird im Sinne des dynamischen Aspekts *jener Wert gesucht*, dem sich Wurzel  $\sqrt{30}$  annähert. In 4.2.5 (Approximationsgüte) hingegen wird dann im Sinne des statischen Aspekts für den (vermuteten) *Grenzwert eine Fehlerschranke vorgegeben* und ein  $x_{n_0}$  gesucht, ab dem die Folge diese Fehlerschranke unterschreitet.

### 4.2.C.2 Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Hier besprechen wir die Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, die diesem — wie in Kapitel 2 im allgemeinen besprochen — eine inhaltliche Deutung geben und damit für den Unterricht eine Leitlinie darstellen.

**4.2.21. Annäherungsvorstellung zum Grenzwertbegriff.** Die Annäherungsvorstellung steht besonders deutlich mit dem dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs in Verbindung und wird wie folgt formuliert:

**FD-Box 22: Annäherungsvorstellung**

Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Aufgrund der Betonung des Grenzwerts als „festen Wert“ bestehen aber auch (schwächere) Bezüge zwischen der Annäherungsvorstellung und dem statischen Aspekt.

Ein erstes Arbeiten in Richtung dieser Grundvorstellung kann bereits in der 8. Schulstufe beim näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln erfolgen. Erneut aufgegriffen wird diese Grundvorstellung beim numerischen Lösen von Gleichungen (z.B. Newton-Verfahren).

Wichtig ist im Zusammenhang mit der Änderungsvorstellung, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass unendliche Prozesse einem Grenzobjekt beliebig nahe kommen können. Dabei sollten sowohl grafische als auch numerische Vorstellungen miteinander verbunden werden.

**4.2.22. Umgebungsvorstellung zum Grenzwertbegriff.** Die Umgebungsvorstellung baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs auf und wird wie folgt formuliert:

**FD-Box 23: Umgebungsvorstellung**

Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Die Umgebungsvorstellung zielt also darauf ab, dass bei einer vorgegebenen Umgebung ein Folgenglied gesucht wird, ab dem alle weiteren Folgenglieder in dieser Umgebung liegen. Bei dieser Grundvorstellung ist es entscheidend, dass die Schülerinnen und Schüler einmal mehr grafische und numerische Vorstellungen mit der Umgebung eines Zahlenwertes verbinden und diese auch noch mit den Folgengliedern in Beziehung setzen können. Nach Greefrath et al., 2016, S. 3.5 ist die Umgebungsvorstellung auch damit verbunden, dass die Schülerinnen und Schüler das Grenzwertverhalten einer Folge verbal und formal beschreiben können.

**4.2.23. Objektvorstellung zum Grenzwertbegriff.** Zu guter Letzt lässt sich auch zum Grenzwertbegriff eine Objektvorstellung formulieren:

**FD-Box 24: Objektvorstellung**

Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch Folgen – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

Die Objektvorstellung soll es Schülerinnen und Schülern unter anderem ermöglichen,

- Nullfolgen als Prototypen für konvergente Folgen zu sehen,
- Folgen anhand der Folgenterme bzgl. ihres Grenzwertverhaltens zu klassifizieren,
- das Grenzwertverhalten mithilfe der „Limes-Schreibweise“ anzugeben und
- Grenzwerte berechnen zu können.

Die Objektvorstellung zum Grenzwertbegriff ist also im schulischen Mathematikunterricht äußert relevant. Sie baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs auf und umgekehrt steht der statische Aspekt in direkter Beziehung zur Objektvorstellung des Grenzwertbegriffs.

Summa Summarum ergibt sich für die Wechselbeziehungen der Aspekte und Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff die Darstellung 4.27.

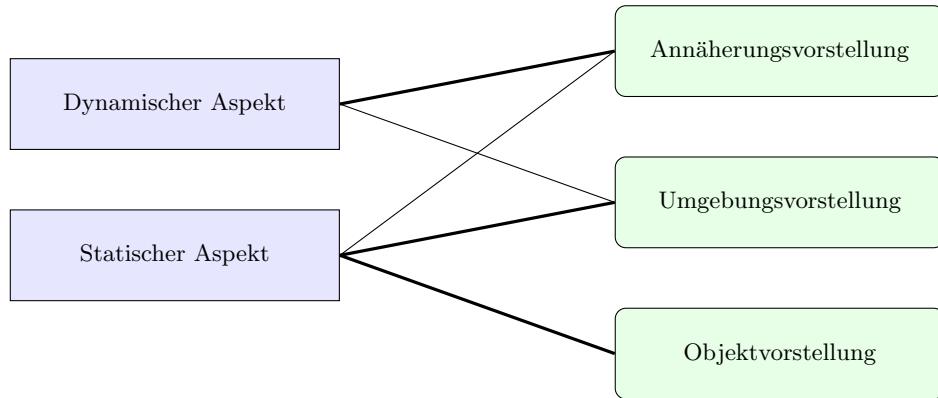


Abb. 4.27: Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen

#### 4.2.D Der Grenzwert in der Schule - Zugänge im Unterricht

Im Lehrplan der AHS Oberstufe wird der Grenzwert an nur zwei Stellen erwähnt. Einmal im Kompetenzmodul 3 (6. Klasse) *Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)*, das andere Mal im Grundkompetenzkatalog der Handreichung zum Lehrplan mit *FA-L 7.4 Grenzwerte von einfachen Folgen ermitteln können*. Es stellt sich also die Frage, wie kann dem „Herzstück“ der Analysis im Mathematikunterricht gebührend Rechnung getragen werden? D.h.: Wie lässt sich also nun unter Berücksichtigung des Lehrplans und der in (siehe Abschnitt 4.2.C) ausgeführten Aspekte und Grundvorstellungen der Grenzwertbegriff im schulischen Mathematikunterricht er- und bearbeiten, sodass die Schülerinnen und Schüler zum einen die entsprechenden (Grund-)Vorstellungen aufbauen, sich das notwendige (Grund-)Wissen zum Grenzwertbegriff aneignen und die zweckmäßigen Grundfähigkeiten zum Arbeiten mit dem Grenzwerts erwerben?

##### 4.2.D.1 Zur Ausbildung der Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff in der Schule

Allgemein sieht Rudolf vom Hofe, Rudolf, 2003 drei Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen. Diese sind

###### FD-Box 25: Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

- Erfassen der Bedeutung des Begriffs – Anknüpfen an bekannte Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen
- Aufbau von mentalen Repräsentationen – ermöglichen operatives Handeln auf der Vorstellungsebene
- Anwenden in neuen Situationen – erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen und Modellieren des Phänomens mithilfe der mathematischen Struktur

Im Folgenden werden wir diese drei Punkte für den Fall des Grenzwertbegriffs spezifizieren.

**4.2.24. Erfassen der Bedeutung des Grenzwertbegriffs.** Zum Erfassen der Bedeutung des Grenzwertbegriffs ist – wie oben schon angedeutet – das Anknüpfen an bekannten Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen unabdingbar. Bei diesem Anknüpfen an Bekanntes muss aber gleichzeitig der Wechsel vom dynamischen zum statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs erfolgen. Es gilt also zu überlegen, wie ein Vermittlungsprozess zwischen dem dynamischen und statischen Aspekt unterrichtspraktisch gestaltet werden kann. Exemplarisch soll hier ein solcher Vermittlungsprozess gezeigt werden.

**4.2.25. Hinführung zum Grenzwertbegriff auf numerischer und grafischer Ebene mit Wechsel zur Umgebungsbetrachtung.** Bei der Hinführung zum Grenzwertbegriff auf numerischer und grafischer Ebene können Vorgänge, die wir bereits in den Aufgabenstellungen zum Medikamentenspiegel, zum Koffeingehalt und den geometrischen Mustern bearbeitet haben, erneut – aber mit Fragestellungen, die auf den statischen Aspekt des Grenzwerts abzielen – aufgegriffen werden.

**Aufgabenstellung: Cholesterinspiegel.** Der Zielwert für einen gesunden Gesamtcholesterinspiegel liegt bei maximal 190 mg/dl. Bei einem Patienten wurde ein erhöhter Cholesterinspiegel von 500 mg/dl festgestellt. Daraufhin werden dem Patienten eine strikte Diät und

ein entsprechendes Medikament verordnet. Der Patient hält über einen längeren Zeitraum die vorgeschriebene Diät ein und nimmt auch das Medikament täglich ein. Die Entwicklung seines Cholesterinspiegels lässt sich aufgrund dieses Verhaltens mit

$$c_n = 0.8^n \cdot 500 + 38 \cdot \frac{1 - 0.8^n}{1 - 0.8} \quad (4.59)$$

beschreiben, wobei  $n$  die Anzahl der Tage nach Therapiebeginn ist

- Stelle die Entwicklung des Cholesterinspiegels als Folge, in Form einer Tabelle sowie grafisch auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Wann erreicht der Patient den Zielwert für einen gesunden Cholesterinspiegel?

### Lösungserwartung:

	A	B						
1	n	c(n)	25	24	191.46393	50	49	190.00553
2	1	438	26	25	191.17115	51	50	190.00442
3	2	388.4	27	26	190.93692	52	51	190.00354
4	3	348.72	28	27	190.74953	53	52	190.00283
5	4	316.976	29	28	190.59963	54	53	190.00227
6	5	291.5808	30	29	190.4797	55	54	190.00181
7	6	271.26464	31	30	190.38376	56	55	190.00145
8	7	255.01171	32	31	190.30701	57	56	190.00116
9	8	242.00937	33	32	190.24561	58	57	190.00093
10	9	231.6075	34	33	190.19649	59	58	190.00074
11	10	223.286	35	34	190.15719	60	59	190.00059
12	11	216.6288	36	35	190.12575	61	60	190.00048
13	12	211.30304	37	36	190.1006	62	61	190.00038
14	13	207.04243	38	37	190.08048	63	62	190.0003
15	14	203.63394	39	38	190.06438	64	63	190.00024
16	15	200.90716	40	39	190.05151	65	64	190.00019
17	16	198.72572	41	40	190.04121	66	65	190.00016
18	17	196.98058	42	41	190.03296	67	66	190.00012
19	18	195.58446	43	42	190.02637	68	67	190.0001
20	19	194.46757	44	43	190.02111	69	68	190.00008
21	20	193.57406	45	44	190.01688	70	69	190.00006
22	21	192.85925	46	45	190.0135	71	70	190.00005
23	22	192.2874	47	46	190.0108	72	71	190.00004
24	23	191.82992	48	47	190.00864	73	72	190.00003
			49	48	190.00691	74	73	190.00003

Abb. 4.28: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Tabelle

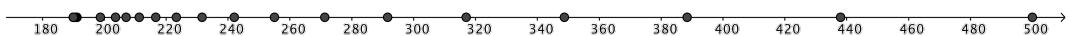


Abb. 4.29: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Zahlengerade

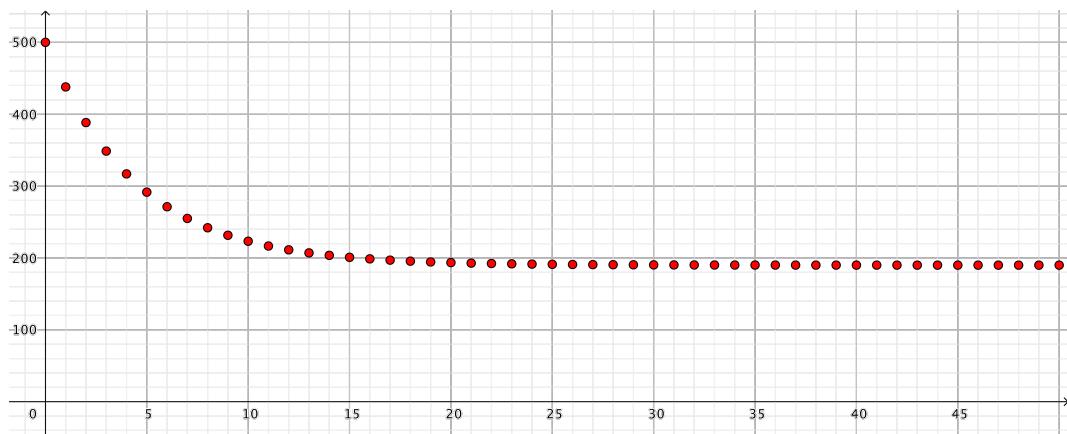


Abb. 4.30: Entwicklung des Cholesterinspiegels - Koordinatensystem

Wann der Patient den Zielwert für einen gesunden Cholesterinspiegel erreicht, hängt von der Genauigkeit bzw. Toleranz der Messung des Cholesterinspiegels ab. Wenn auf eine Nachkommastelle gemessen und gerundet wird, dann erreicht der Patient am 29. Tag einen Cholesterinspiegel von 190,4797 mg/dl und gerundet von 190 mg/dl. Wenn auf drei Nachkommastellen genau gemessen wird, dann hat der Patient am 59. Tag einen Cholesterinspiegel von 190,001 mg/dl und am 60. Tag 190 mg/dl. Bei großzügigerer Betrachtung könnte man auch den 36. Tag wählen, dort hat der Patient einen Cholesterinspiegel von 190,1006 mg/dl oder den 26. Tag, dort hat der Patient einen Cholesterinspiegel von 190,93692 mg/dl.

Im Anschluss an eine solche Aufgabenstellung ist von der Lehrperson eine Rückschau auf die Aufgabenstellung und ihre Lösung vorzunehmen, um den Schülerinnen und Schülern den Aufbau mentaler Repräsentationen zu ermöglichen. Dabei kann thematisiert werden:

- Werden die Folgenglieder mittels Tabelle dargestellt, dann wird auf der numerischen Ebene gut sichtbar, dass sich die Folgenglieder mit wachsendem  $n$  dem Wert 190 beliebig nähern und das fast alle Glieder der Folge in der Nähe von 190 liegen.
- Werden die Folgenglieder im Koordinatensystem dargestellt, dann wird einerseits die Monotonie und Beschränktheit der Folge gut sichtbar. Andererseits wird auch deutlich, dass die meisten Punkte in einer Umgebung der Geraden  $y = 190$  liegen.
- Werden die Folgenglieder auf der Zahlengerade dargestellt, dann wird deutlich, dass die Folgenglieder mit fortschreitendem  $n$  immer näher zusammenrücken, sich um einen Wert zusammenziehen bzw. an einer Stelle der Zahlengeraden konzentrieren. Außerdem liegen die meisten Folgenglieder bzw. Punkte in einer Umgebung von 190.

Das Anwenden der so herausgearbeiteten Sichtweise auf neue Situationen — z.B. die Folge  $a_n = \frac{2n-1}{n}$  — rundet das Ausbilden der Annäherungsvorstellung und Umgebungsannahme ab.

#### 4.2.D.2 Grundwissen zum Grenzwert aneignen

Im Anschluss an die Ausbildung der obigen beiden Grundvorstellungen (Annäherungs- und Umgebungsannahme) zum Grenzwertbegriff müssen sich die Schüler\*innen Grundwissen zum Grenzwertbegriff aneignen. Zu diesem Grundwissen zählt:

- Begriff der Epsilon-Umgebung

- Definition des Grenzwerts einer Folge; konvergent, divergent
- Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Das Behalten dieses Grundwissens wird vor allem dann gefördert, wenn es immer wieder verwendet wird (Vergessenskurve).

**4.2.26. Epsilon-Umgebung.** Im Kontext des Begriffs der Epsilon-Umgebung gilt es Sprechweisen wie *fast alle Glieder der Folge liegen in einer Umgebung von ...* mathematisch genauer zu fassen. Dazu kann das Wissen aus der 9. Schulstufe herangezogen werden. Denn dort werden beim Arbeiten mit Mengen, Zahlen und Rechengesetzen Zahlen, Beträge von Zahlen und Intervalle auf einer Zahlengeraden dargestellt. Für die Epsilon-Umgebung werden also ausgehend von Intervalldarstellungen auf der Zahlengeraden sowie den bisherigen Folgendarstellungen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem Schreib- und Sprechweisen sowie Darstellungen der Epsilon-Umgebung auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem erarbeitet. Wir geben dazu Beispiele aus einem aktuellen Schulbuch.

### Grenzwert einer Folge auf der Zahlengeraden

Mithilfe der Schieberegler kannst du den Wert für  $\epsilon$  und den Index  $n$  verändern.

Wert und Text zur  $\epsilon$ -Umgebung verändern sich dynamisch und geben an, ob sich das eingestellte Folgenglied innerhalb oder außerhalb der  $\epsilon$ -Umgebung befindet.

- Stelle die folgenden Werte für  $\epsilon$  ein und notiere, ab welchem Index  $n$  die Folgenglieder innerhalb der  $\epsilon$ -Umgebung liegen.  
 $\epsilon = 0,5; \epsilon = 0,4; \epsilon = 0,3; \epsilon = 0,2; \epsilon = 0,1; \epsilon = 0,05; \epsilon = 0,01$
- Überprüfe für  $\epsilon = 0,01$  den entsprechenden Index  $n$  rechnerisch.

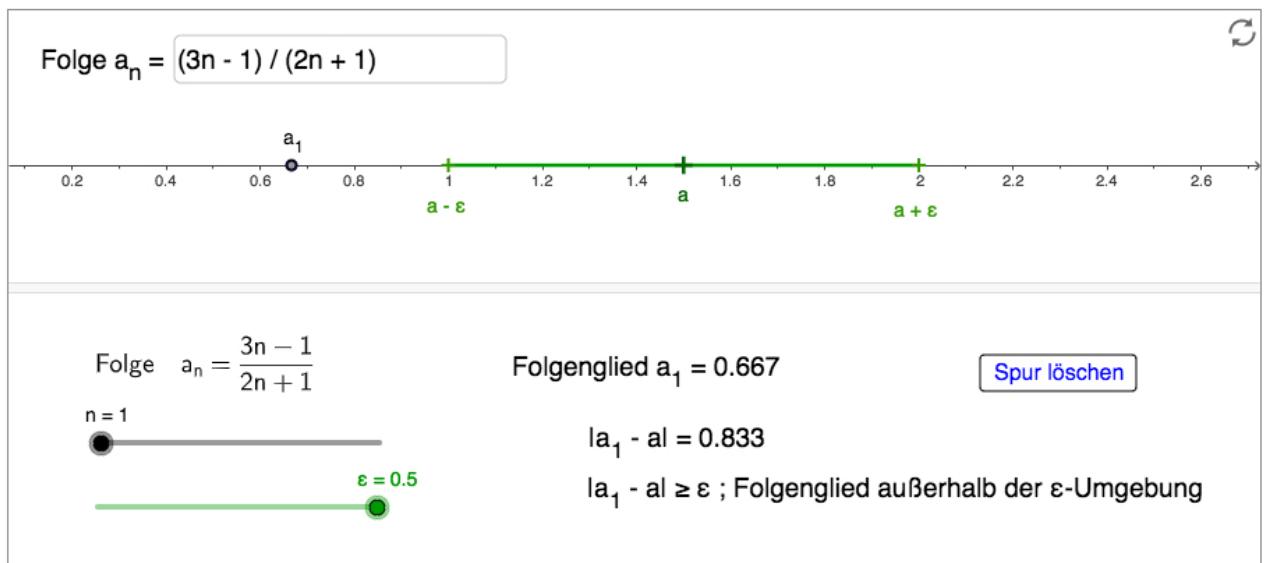


Abb. 4.31: Epsilon-Umgebung auf der Zahlengeraden

## Grenzwert einer Folge

**Autor:** Andreas Lindner

Das Applet zeigt eine Folge und ihren Grenzwert  $a$ .

### Aufgabe

Verändere den Wert von  $\varepsilon$  und beobachte, ab welchem Index  $n$  die Folge in einer  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwerts liegt. Gib eine andere Folge ein und wiederhole deine Beobachtungen.

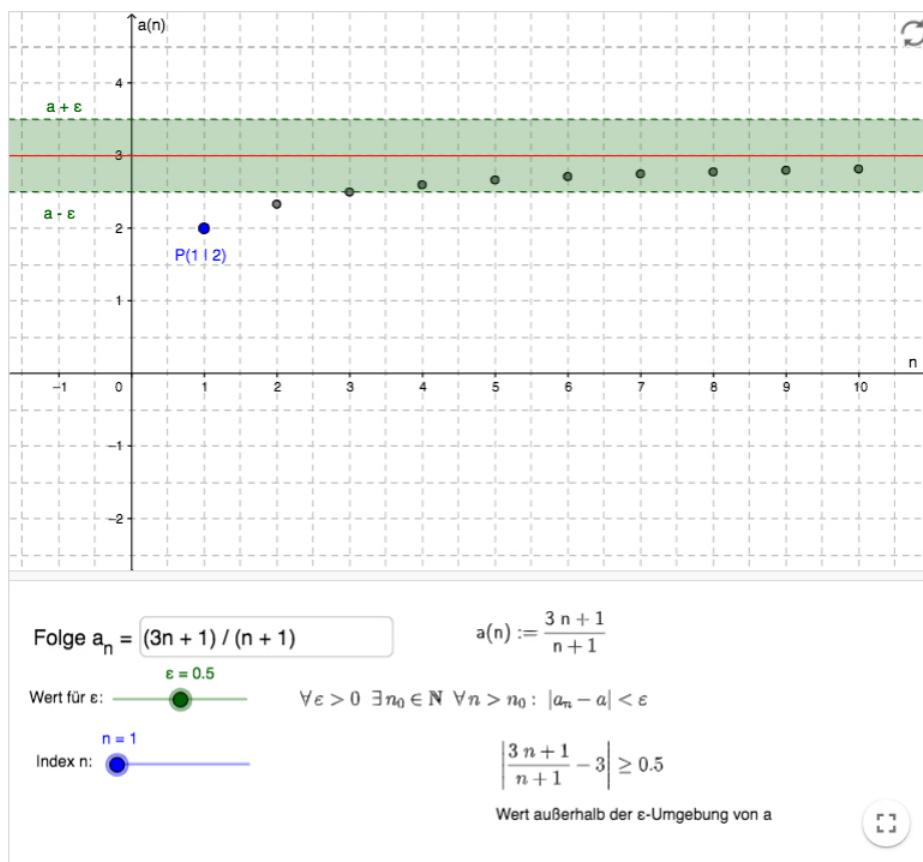


Abb. 4.32: Quelle: Dimensionen Mathematik 7 - Seite 195

Der (mathematisch korrekte) Nachweis, dass ein Folgenglied und alle weiteren innerhalb einer vorgegebenen Epsilon-Umgebung einer Zahl  $a$  liegt, kann dann mittels Lösen von Betragungleichungen erbracht werden.

**4.2.27. Definition des Grenzwerts einer Folge; konvergent, divergent.** Die Definition des Grenzwerts ergibt sich durch die hier vorgestellte Standpunktverlagerung und das Herausarbeiten des Begriffs der Epsilon-Umgebung im Unterricht dann fast von selbst. Verlangt die Definition des Grenzwerts einer Folge ja nichts anders als, dass stets nur endliche viele Folgenglieder außerhalb jeder Epsilon-Umgebung liegen.

Wie schon in der Mathematischen Faktenbox 8 (Grenzwert von Folgen) dargestellt, können also im Unterricht die Definition vorgenommen und damit auch die Begriffe konvergent und

divergent sowie die Schreib- und Sprechweisen eingeführt werden. An ausgewählten Beispielen wird danach überprüft, ob ein bestimmter Wert der Grenzwert einer Folge ist und mithilfe charakteristischer Darstellungen wird das neue Grundwissen verinnerlicht.

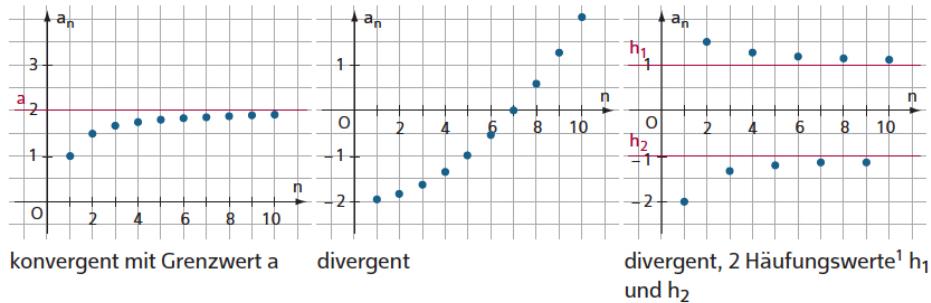


Abb. 4.33: Konvergente und divergente Folgen

**4.2.28. Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.** Zu guter Letzt umfasst das Grundwissen zum Grenzwertbegriff auch das Wissen über den Zusammenhang zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Nach dem Prinzip der Variation oder nach dem Prinzip des Kontrasts können Schülerinnen und Schüler erarbeiten, dass

- eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergent ist, wobei der Grenzwert ihr Supremum ist;
- eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergent ist, wobei der Grenzwert ihr Infimum ist.

#### 4.2.D.3 Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwertbegriffs

Nachdem im Unterricht Grundvorstellungen und Grundwissen zum Grenzwert aufgebaut bzw. angeeignet wurden, bleiben abschließend einige wenige Grundfähigkeiten auszubilden, die das routinehaften Verwenden des Grenzwertbegriffs erlauben. Solche routinehaften Tätigkeiten sind uns schon bei den Betrachtungen des Monotonieverhaltens von Folgen begegnet, aber gerade zuvor auch bei der Überprüfung, ob eine bestimmte Zahl  $a$  Grenzwert einer Folge  $a_n$  ist. Letzterem steht nun die Berechnung von Grenzwerten gegenüber. Dieser erneute Perspektivenwechsel (überprüfen versus berechnen) muss im Unterricht deutlich gemacht werden. Ein zielführender Unterrichtsgang zum Erwerb der intendierten Grundfähigkeiten zum routinehaften Verwenden des Grenzwertbegriffs erstreckt sich zumindest über folgende Stationen:

- Erarbeitung des Begriffs Nullfolge und prominenter Beispiele (siehe Mathematische Faktenbox 8)
- Berechnung von Grenzwerten einfacher Folgen beginnend mit Nullfolgen; Zusammenhang zwischen Grenzwert und expliziter Darstellung von einfachen Folgen erkennen
- Grenzwertsätze – mit konvergenten Folgen als mathematischen Objekten rechnen (siehe Mathematische Faktenbox 10: Konvergente Folgen)
- Grenzwert der Folge  $(1 + \frac{1}{n})^n$

Mit der Erarbeitung Grundfähigkeiten zum routinehaften Anwenden des Grenzwertbegriffs kann das Kapitel beschlossen werden, zudem sind wir nun auch bei der dritten Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff – nämlich der Objektvorstellung – gelandet.

#### 4.2.E Historisch-philosophischer Exkurs: Über das Unendliche

*Das Unendliche ist weit, vor allem gegen Ende.*

(Alphonse Allais, Französischer Literat und Humorist, 1854–1905)

Die Idee des „Unendlichen“ beschäftigt die Menschen schon seit sehr langer Zeit und hat ihre Phantasie immer wieder beflogen. Demzufolge gibt es eine Unzahl von Betrachtungen zum „Unendlichen“ aus den unterschiedlichsten Blickwinkeln: von der Theologie über die Philosophie zur Kunst und Literatur, den Naturwissenschaften und schließlich zur Mathematik.

*Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.* Hilbert, 1926, p. 163

Eine umfassende Darstellung ist an dieser Stelle klarerweise weder möglich noch sinnvoll. Wir diskutieren hier einige grundlegende Ideen und Vorstellungen zum Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik. Dafür haben wir vor allem zwei Gründe: Einerseits gehört unserer Ansicht nach ein Basiswissen zum Unendlichkeitsbegriff zur Allgemeinbildung (angehender) Lehrer\*innen. Andererseits (und noch wichtiger) spielen beim Lehren und Lernen des Folgen- und des Grenzwertbegriffs im Rahmen der Schulanalysis die schon vorhandenen (individuellen Grund-)Vorstellungen der Schüler\*innen zum „Unendlichen“ eine große Rolle. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Vorstellungen und Sichtweisen mit ihren Problemen spiegeln vielfach die Probleme der tatsächlichen historischen Entwicklungen in der Mathematik wieder. Insofern liegt hier auch ein Betätigungsfeld für die didaktische Phänomenologie, vgl. 3.1.2.

Tatsächlich nehmen die Wechselbeziehungen zwischen dem Folgen- und Limesbegriff und dem Unendlichkeitsbegriff sowie ihr Wandel eine wichtige Rolle in der Geschichte der Mathematik ein — genauso wie die damit verbundenen Fehlvorstellungen. So formulierte der wahrscheinlich bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, David Hilbert (1862–1943) noch im Jahre 1925:

*Die mathematische Literatur findet sich, wenn man darauf acht gibt, stark durchflutet von Ungereimtheiten und Gedankenlosigkeiten, die meist durch das Unendliche verschuldet sind.* Hilbert, 1926, p. 162

##### 4.2.E.1 Sichtweisen auf das „Unendliche“

Wie bereits angedeutet, durchzieht die Frage nach dem „Wesen der Unendlichkeit“ wie ein roter Faden die Geschichte der Mathematik und insbesondere der Analysis. Der Entwicklung der mathematischen Begriffe Unendlich, Folge und Grenzwert, die in enger Wechselbeziehung zueinander stehen, kommt in der Geschichte der Analysis eine tragende Rolle zu wie wir im nächsten Abschnitt etwas genauer diskutieren werden. Hier diskutieren wir — in gebotener Kürze — Vorstellungen zum „Unendlichen“.

**4.2.29. Das potentiell und das aktual Unendliche.** Schon in der Griechischen Antike war die Auseinandersetzung mit dem Unendlichkeitsbegriff ein zentrales Element der Philosophie und der Mathematik. Spätestens Aristoteles (384–322 v. u. Z.) unterscheidet in seiner Ontologie folgende zwei Vorstellungen vom „Unendlichen“:

- (1) *Das potentiell Unendliche* ist die in der Vorstellung vorhandene Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses, z.B. beim fortlaufenden Zählen, beim Verstreichen der Zeit, beim fortlaufenden Halbieren einer Strecke.

In der Sprache von Mengen können wir auch sagen:

Eine Menge, zu der prinzipiell unendlich viele Objekte hinzufügbar sind, heisst *potentiell unendlich*.

Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn zwar „vorstellbar“ aber nicht „wirklich vorhanden“; anders das

- (2) *Aktual Unendliche*, bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt, z.B. in Form einer Fläche, die durch das Zusammenfügen unendlich vieler Flächenstücke entstanden ist.

In der Sprache der Mengenlehre

heisst eine Menge *aktual unendlich*, falls sie bereits „wirklich unendlich viele“ Objekte enthält.

Aristoteles lehnt allerdings die Idee vom aktual Unendlichen ab:

*Überhaupt existiert das Unendliche nur in dem Sinne, dass immer ein Anderes und wiederum ein Anderes genommen wird, das eben Genommene aber immer ein Endliches, jedoch ein immer Verschiedenes und wieder ein Verschiedenes ist.*  
(Aristoteles, Metaphysik)

„Unendlich“ bezieht sich Aristoteles zufolge nur auf „dasjenige, außerhalb dessen immer noch etwas ist“<sup>12</sup> Für Aristoteles ist die Vorstellung der Möglichkeit des potentiell unendlichen Prozesses die zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff, denn „das Unendliche gibt es (nur) im Modus der Möglichkeit“.

In moderner Sprache steckt in der Aristotelischen Vorstellung des Unendlichen die Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge. Es handelt sich hier um eine sogenannte *dynamische Vorstellung* einer Folge bzw. des Unendlichen, die als im fortwährenden Aufbau begriffene Objekte gesehen werden. Genau das gilt als eine oder die zentrale Grundvorstellung vom Unendlichkeitsbegriff.

Diese Vorstellung hat allerdings ohne die ergänzende Vorstellung bzw. die Akzeptanz des aktual Unendlichen ihre Probleme, wie z.B. durch die Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea (490–430 v. u. Z.) offensichtlich wird. Eine Analyse von unendlich oft wiederholten Handlungen führt schnell zu Widersprüchlichkeiten, falls sie nur mit dem Begriff des potentiell, nicht aber mit dem des aktual Unendlichen operiert.

---

<sup>12</sup>Der Ausschluss des aktual Unendlichen wird in der antiken und mittelalterlichen Theologie (z.B. bei Thomas von Aquin) zentraler Bestandteil von Gottesbeweisen: Ein Fortschreiten, das sich prinzipiell ins Unendliche fortsetzt, kann niemals abgeschlossen sein. Daher ist eine Erklärung der (als unendlich angenommenen) Welt, die bei einem bestimmten Objekt beginnt und seine Ursachen anführt und sich so ins Unendliche fortsetzt nicht möglich. Daher muss als *Erstursache* „Gott“ angenommen werden.

**4.2.30. Platonismus, Realismus, Formalismus.** Im Gegensatz zu Aristoteles lässt Platon (428/7–348/7 v. u. Z.) im Rahmen seiner Ideenlehre das aktual Unendliche zu<sup>13</sup>. In ihrem Rahmen kommt Ideen eine eigenständige Existenz zu, die der Existenz der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet ist. Solche *Platonische Ideen* sind beispielsweise „das Gerechte an sich“<sup>14</sup> oder auch mathematische Begriffe wie „der Kreis an sich“. Tatsächlich lässt sich ein perfekter Kreis weder in der Natur finden noch herstellen; selbst bei genauestem Arbeiten mit einem Zirkel wird ein gezeichneter Kreis immer ungenau bleiben. Der „Kreis an sich“ ist die dahinterliegende ideale Idee des Kreises — allerdings geht laut Platon diese Idee über die bloße Vorstellungen im menschlichen Geist hinaus; ihr kommt eine objektive metaphysische Realität zu.

Platons Ideenkonzeption steht somit im Gegensatz zu Auffassungen, Allgemeinbegriffe als reine Konstrukte menschlicher Abstraktion zu sehen, die hauptsächlich zur Klassifizierung und Ordnung von Objekten dienen.

Die auf Platons Ideenlehre zurückgehende Denkschule wird im Kontext der Philosophie der Mathematik als *Platonismus* bezeichnet. Vereinfacht kann die platonische Sichtweise auf die Mathematik etwa so ausgedrückt werden: Mathematische Theoreme oder Begriffe werden *entdeckt*, nicht etwa erfunden oder konstruiert. Sie sind unabhängig davon *einfach da*, egal ob die Mathematiker\*innen sie entdecken oder nicht.

Eine Gegenposition im Rahmen der Philosophie der Mathematik ist der *Formalismus*, der davon ausgeht, dass es gar keine mathematischen Objekte gibt. Die gesamte Mathematik ist formal und besteht lediglich aus Axiomen, Definitionen und Theoremen — also aus Formeln und formalen Regeln, die besagen, wie man eine Aussage aus einer anderen ableitet. Diese Formeln geben aber keine Auskunft über irgendetwas, sie sind einfach nur Zeichenketten. Erst über die Interpretation einer Formel etwa in einem physikalischen Kontext erhält sie einen Inhalt, der je nach Kontext wahr oder falsch sein kann. Die Mathematik an sich ist eine einzige gigantische Tautologie.

In gewisser Weise eine moderne Spielart des Platonismus ist der *Realismus*: Mathematischen Objekten wird zwar keine ontologische oder metaphysische Existenz zugesprochen, aber immerhin eine objektive und interpersonelle. Diese Position geht beispielweise davon aus, dass eine etwaige außerirdische Intelligenz dieselbe Mathematik „entdecken“ würde, wie wir Menschen.

#### 4.2.31. Konstruktivismus.

Ein anderer und extremer Standpunkt, was vor allem seinen Bezug zum „Unendlichen“ betrifft — und uns damit zum eigentlichen Thema unseres Exkurses zurückbringt — ist der *Konstruktivismus*, der allerdings verschiedene Spielarten bzw. Abstufungen kennt. Allgemein ist die Position des Konstruktivismus, dass die Existenz mathematischer Objekte durch ihre Konstruktion begründet werden muss.

Um die Abstufungen des Konstruktivismus und seine Haltungen zum „Unendlichen“ zu diskutieren, betrachten wir die gewissermaßen einfachste unendliche Menge  $\mathbb{N}$ : Zu jeder natürlichen Zahl kann man einen Nachfolger angeben und so lässt sich jede (noch so große) natürliche

<sup>13</sup>Auch hier finden sich Bezüge zur Theologie: Augustinus identifiziert Gott mit dem aktuellen Unendlichen. Überhaupt führt eine ideengeschichtliche Spur von den Pythagoräern über Platon zur antiken und mittelalterlichen Theologie, die den säkularen und rationalen Strömungen der griechischen Antike zugegenläuft, vgl. etwa Russel, 1950, I. und II. Teil

<sup>14</sup>Vergleiche etwa auch die sprichwörtliche „Platonische Liebe“.

Zahl in endlich vielen Schritten angeben. Das gilt aber nicht für die gesamten Menge  $\mathbb{N}$  mit *allen* ihren Elementen. Die verschiedenen Standpunkte sind nun:

- (1) Der *Finitismus* besagt: Mathematik ist nur das, was sich durch eine endliche Konstruktion erzeugen lässt. Die Menge  $\mathbb{N}$  ist daher nur als potentiell unendliche Menge zulässig.
- (2) Noch extremer ist der *Ultrafinitismus*: Schon Mengen der Form  $\{1, 2, \dots, n\}$  können nicht vollständig aufgeschrieben werden, denn für grosse  $n$  reichen dazu weder die Lebenszeit eines oder auch alle Mathematiker\*innen noch die Zahl der Elementarteilchen im Universum, die mit  $10^{80}$  abgeschätzt werden kann. Hier werden also alle Formen des Unendlichen abgelehnt.
- (3) Der *gemäßigte Konstruktivismus* akzeptiert ein mathematisches Objekt, wenn es ein Verfahren gibt, mit dem es in endlich vielen Schritten konstruiert werden kann. In diesem Sinne ist die Menge  $\mathbb{N}$  aktual unendlich, weil sie in Form eines Algorithmus existiert, mit dem man jede natürliche Zahl in endlich vielen Schritten erzeugen kann. „Fertig vorliegend“ ist hier allerdings nicht die Menge als Zusammenfassung ihrer Elemente, sondern nur der erzeugende Algorithmus.  
Oft vermeidet diese Position daher im aktuellen Zusammenhang den Begriff „aktual unendlich“, und bezeichnet Mengen wie die der natürlichen Zahlen lieber als „*operativ abgeschlossen*“, was bedeutet, dass mittels des zugehörigen Algorithmus jedes Element der Menge früher oder später erzeugt werden kann.
- (4) Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist dann der klassische Fall einer *nicht operativ abgeschlossenen* Menge. Ein Algorithmus kann nämlich nur Zahlen produzieren, die mit endlich vielen Zeichen darstellbar sind, und damit endliche oder abzählbare Mengen. Die Menge  $\mathbb{R}$  ist aber überabzählbar und daher nicht mit Hilfe eines Algorithmus angebbar. Im Rahmen des Konstruktivismus kann  $\mathbb{R}$  daher nicht als „fertig vorliegend“ aufgefasst werden und gilt somit (nur) als potentiell unendliche Menge.
- (5) Weil die Menge der reellen Zahlen von überaus großer Bedeutung für die gesamte Mathematik ist, sollte es nicht verwundern, dass es auch eine philosophische Position gibt, die bei einer allgemein kritischen Haltung gegenüber dem aktual Unendlichen, dennoch  $\mathbb{R}$  als aktual unendliche Menge akzeptiert. Hier wird meist mit dem Vorliegen einer speziellen Intuition bezüglich des „Kontinuums“ der reellen Zahlen argumentiert, weshalb diese Position als *Intuitionismus* bezeichnet wird.

**4.2.32. Fazit** ist, dass es somit in der Philosophie der Mathematik neben der Ablehnung aller Unendlichkeitsbegriffe (Ultrafinitismus) folgende Positionen gibt: Die ausschließliche Akzeptanz des potentiell Unendlichen (Finitismus), darüber hinausgehend die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für operativ abgeschlossene Mengen wie die der natürlichen Zahlen (Konstruktivismus), sowie die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für das Kontinuum (Intuitionismus), während der Platonismus das aktual Unendliche durchgehend akzeptiert. Darüberhinaus können wir wie folgt zusammenfassen:

Die „Mainstream-Mathematik“ und gleichzeitig die überwiegende Mehrheit der heutigen Mathematiker\*innen akzeptiert das aktual Unendliche für alle Mengen, die sich im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel (siehe etwa Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 4.5) definieren lassen.

Die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen ist dabei axiomatisch im Unendlichkeitsaxiom aufgehoben und die der reellen Zahlen im Potenzmengenaxiom. Auf dieser axiomatischen

Grundlage ergibt sich darüber hinaus eine „Hierarchie“ aktual unendlicher Mengen, deren „Größe“ durch die unterschiedlichen Kardinalzahlen ausgedrückt wird. Die Frage ob die „Gesamtheit“ aller dieser Kardinalzahlen als aktuale Unendlichkeit aufgefasst werden kann, führt allerdings in die (Untiefen der) mathematische(n) Logik: Die Menge der Kardinalzahlen im Sinne der axiomatischen Mengenlehre aufzufassen, führt nämlich auf einen logischen Widerspruch (erste Cantorsche Antinomie).

Insgesamt ist es eine große Stärke der Mathematik (wie auch der Naturwissenschaften allgemein), dass sie „funktioniert“, egal welche philosophische Position man zu ihr einnimmt. Genauer, die Qualität mathematischer Resultate und Theorien ist unabhängig davon, welche philosophischen Positionen die Mathematiker\*innen, die sie hervorbringen diesbezüglich einnehmen.

Tatsächlich nehmen vermutlich die meisten Mathematiker\*innen bewusst oder unbewusst eine Position ein, die irgendwo im Kontinuum zwischen Platonismus und Formalismus liegen — manchmal sind sie auch unentschieden, wie ein Bonmot, das dem amerikanischen Mathematiker Philip J. Davis zugeschrieben wird, belegt: „Der typische Mathematiker ist an Werktagen Platonist und an Sonntagen Formalist“.

#### 4.2.E.2 Eine (ganz) kurze Geschichte des Grenzwertbegriffs

Ausgestattet mit einem Grundwissen über die verschiedenen Vorstellungen zum Unendlichkeitsbegriff unternehmen wir nun einen sehr kurzen Abstecher in die Geschichte des Grenzwertbegriffs im Rahmen der Analysis. Natürlich existiert zu diesem Thema eine unüberschaubare Fülle an Literatur; ein Startpunkt ist etwa Greifraht et al., 2016, Abschn. 3.1 und die dort zitierte Literatur.

In dieser Geschichte traten in wechselnder Abfolge und auch ineinander verschränkt *dynamische* und *statische*, sowie *intuitive* und *formale* Sichtweisen und Vorstellungen des Grenzwerts und des „Unendlichen“ auf. Wir besprechen nur die wesentlichsten Schritte dieser Entwicklungen.

Die in Abschnitt 4.2.E.1 herausgearbeitete weitgehende Akzeptanz des aktual Unendlichen steht in ihrer historischen Entwicklung im Zusammenhang mit der Bemühung, die dynamische Sichtweise des potentiell Unendlichen durch *statische Betrachtungsweisen* zu ersetzen.

#### 4.2.33. Frühe Vorstellungen.

Die Entstehung, Entwicklung und Abgrenzung des Grenzwertsbegriffs in der Mathematik der Neuzeit ist eng mit der Entwicklung der Begriffe von Folgen und Reihen verbunden. Darüberhinaus spielten konkrete Vorstellungen vom Aufzählen und Anneinanderreihen von Folgen- oder Reihengliedern eine große Rolle, ebenso wie Bewegungsvorstellungen.

Etwa schon zu Beginn der Neuzeit im 16. und 17. Jahrhundert wird die (unendliche) Summation der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \quad (4.60)$$

wie in Abbildung 4.34 dargestellt. Aus dieser auch heute noch im Unterricht verwendeten Darstellung ist unmittelbar einsichtig, dass die Summe durch 2 beschränkt ist, also endlich bleibt.

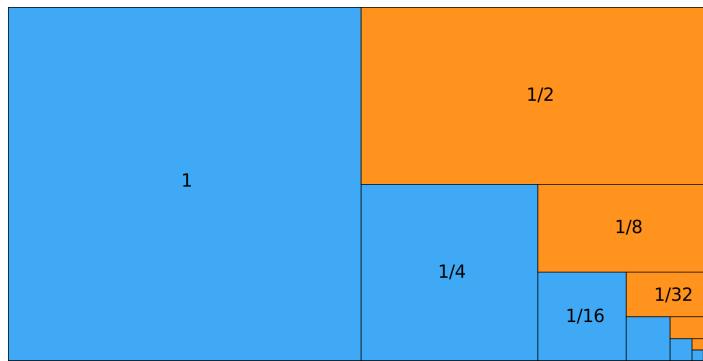


Abb. 4.34: Summation der geometrischen Reihe

Isaac Newton (1643–1727), einer der Ko-erfinder der Differentialrechnung und auch Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783)<sup>15</sup> bedienten sich hauptsächlich dynamischer oder kinematischer Vorstellungen. Hingegen verwendete der zweite Ko-Erfinder der Differentialrechnung Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ebenso wie Leonhard Euler (1707–1783) „unendlich kleine Größen“ bei der Berechnung des Differenzialquotienten und verbinden damit eine eher *statische* Vorstellung. Letzteres kann mit der Terminologie von Abschnitt 4.2.E.1 so formuliert werden, dass mit aktual unendlichen Größen als „realen Objekten“ hantiert wird.

Mit Augustin-Louis Cauchys (1789–1857) Lehrbuch „Cours d'Analyse“ von 1821 wird der Grenzwertbegriff auch formal zu einem Grundbegriff der Analysis. In einer vielzitierten Stelle definiert Cauchy den Grenzwert (er spricht von der „Grenze“) einer Folge mit den Worten:

Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen. (Cauchy 1828, S. 3)

Diese Formulierung ist der der modernen Definition schon recht nahe, verwendet allerdings eindeutig die dynamische Vorstellung des sich schrittweise Annäherns an den Grenzwert. Allerdings klingt auch schon die Umgebungsannahme im „so wenig verschieden [...] als man irgend will“ an und mit ihr der statische Aspekt. Man könnte an dieser Stelle also von der Verbindung des dynamischen mit dem statischen Aspekt sprechen bzw. historisch vom Übergang von der dynamischen zur statischen Sichtweise.

**4.2.34. Exaktifizierung.** Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzt sich in der Mathematik und auch in Lehrbüchern immer stärker eine strenge und formale Sichtweise durch. Vor allem unter dem Einfluss von Karl Weierstraß (1815–1897) werden die naiven und intuitiv geprägten Vorstellungen von „unendlich kleinen“ und „unendlich großen Größen“ aus der Mathematik verbannt<sup>16</sup>. Diese werden durch ein *Operieren im Endlichen ersetzt*, vgl. auch 1.1.6.

Klar kommt dieser Zugang (fast Auftrag) in folgendem Hilbert-Zitat zum Ausdruck:

<sup>15</sup>D'Alembert war nicht nur Mathematiker und Physiker, sondern auch ein bedeutender Philosoph der Aufklärung. Gemeinsam mit Denis Diderot (1713–1784) war er Herausgeber der monumentalen Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.

<sup>16</sup>Diese erlebten ab Mitte des 20. Jahrhunderts im Rahmen der (allerdings axiomatisch fundierten) *Nichtstandard-Analysis* eine Wiederbelebung. Die Nichtstandard-Analysis ist heute ein kleines aber nach wie vor aktives Forschungsgebiet der Mathematik.

Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig [...]. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden [...]. (Hilbert 1926, S. 190)

In diesem Sinne formuliert auch Weierstraß zur Summation der geometrischen Reihe:

Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann. (Weierstraß 1874, S. 60 f.)

Konsequenter Weise führt dieser Zugang auf die  $\varepsilon$ - $N$ -Definition des Folgen-Grenzwerts (vgl. 4.2.7)

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \quad (4.61)$$

und später auch zur analogen Definition des Grenzwerts für Funktionen.

Damit sind intuitive Vorstellungen vom „Unendlichen“ z.B. jene von der unbegrenzten Fortsetzbarkeit eines Prozesses nicht mehr nötig um den Grenzwertbegriff zu fassen bzw. zu definieren. Der Grenzwert tritt in der Definition von Anfang an als „real existierendes“ Objekt (genauer eine Zahl) auf, dem eine bestimmte Eigenschaft zukommt. Nämlich die, dass ihr die Folge schließlich beliebig nahe kommt. Man könnte im Zusammenhang mit dieser Definition etwas pathetisch von der „Verbannung“ oder der „Abschaffung des Unendlichen“ sprechen. Tatsächlich ist es eher eine „Entzauberung“ des Grenzwertbegriffs, denn die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen“ indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff *handhabbar* macht. Und diese Tatsache, also dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom „Unendlichen“ formuliert werden kann, ist der Eckstein der Stärke der modernen Analysis (und Mathematik). Siehe dazu auch (Steinbauer, 2021).

So unverzichtbar, unumstritten und erfolgreich der eben beschriebene Ansatz bzw. Zugang für die moderne Mathematik ist, so sehr ergeben sich beim Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs gerade daraus in natürlicher Weise Schwierigkeiten. Die Definition (4.61) stellt den Endpunkt einer langen historischen Entwicklung dar und enthält in hochkomprimierter Form nur das minimal logisch notwendige Skelett des Begriffs. Die für den Lernprozess entscheidende Frage, wie diese hochformale Begrifflichkeit, bei gegebenen konkreten Vorkenntnissen und Vorerfahrungen, am besten verstanden werden kann, und welche Rolle intuitive Vorstellungen bzw. Grundvorstellungen dabei spielen können und müssen, haben wir in Abschnitt 4.2.C diskutiert. Dazu passt auch unser abschließendes Hilbert-Zitat:

Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee [...], [die] alle Erfahrung übersteigt. (Hilbert 1926, S. 190)

#### 4.2.F Rückblick, Reihen und eine tiefsinnige Frage

In diesem Abschnitt schauen wir zurück und diskutieren mit geschärftem Blick noch einmal vor allem fachliche Facetten des Grenzwertbegriffs. Wir führen das im Kontext einer Diskussion der tiefsinnigen und auch im Unterricht relevanten Frage

„Ist  $0.\bar{9}$  wirklich gleich 1?“

durch. Dabei werden wir ganz natürlich auch auf den Reihenbegriff geführt, dessen fachliche Aspekte wir wiederholen und beleuchten.

**4.2.35. Gilt wirklich  $0.\bar{9} = 1$ ?** Diese Frage tritt tatsächlich häufig unter Lernenden auf und soll uns hier dazu dienen, Verständnisschwierigkeiten beim Erfassen der Grenzwertdefinition zu diskutieren und aufzulösen. Für konkrete Äußerungen von Lehramtsstudierenden siehe Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 22, auf den wir auch für weitere Details verweisen. Folgende Aussagen sind verschiedenen Online Mathematik-Foren entnommen:

A: Ich habe mal ne kleine und bescheidene frage:

also in einem anderen forum wurde behauptet das  $0.\bar{9}$ (periode) das selbe wie 1 ist und das ein wert unendlich stark angenähert an 0 auch null sei. Da ist meine frage, stimmt das und wenn ja warum, weil mir der gedanke doch ein bisschen befremdend vorkommt, da man periodische zahlen ja auch als bruch schreiben kann.

B: Also ich hab genau das Gleiche mal hier im Forum gelesen und da wurde sogar behauptet, dass es nen mathematischen Beweis dafür gibt. [...]

C:  $0.\bar{9}$  ist identisch zu 1.

Beweis:  $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 0.\bar{3} + 0.\bar{3} + 0.\bar{3} = 0.\bar{9}$ .

Aus den ersten beiden Zitaten spricht eine gewisse Skepsis, ob der vermuteten bzw. behaupteten Gleichheit, wenn nicht sogar eine gewisse Skepsis gegenüber der Mathematik insgesamt. Tatsächlich scheint sich bei Lernenden hier oft etwas zu sträuben:  $0.\bar{9} = 0.99999\dots$  und das kann doch nie und nimmer gleich 1 sein; da fehlt doch immer noch ein zumindest kleines Stückchen, egal wieviele 9-er ich da anhänge!

**4.2.36. Mathematische Klärung.** Bevor wir die Thematik weiter diskutieren, nehmen wir eine mathematische Klärung vor. Tatsächlich ist eine solche im Rahmen der Analysis sehr simpel: Die Dezimaldarstellung der periodischen Dezimalzahl  $0.\bar{9}$  führt unmittelbar auf die geometrische Reihe und es gilt mit der entsprechenden Summenformel (4.11)

$$0.\bar{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009\dots$$

$$= 0.9 \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1. \quad (4.62)$$

Hier tritt in natürlicher Weise der Reihenbegriff auf und wir nehmen das zum Anlass, ihn in einem kleinen Exkurs als einen zentralen Begriff der Analysis ein wenig unter die Lupe zu nehmen. Zur gegenwärtigen Diskussion kehren wir danach in Abschnitt 4.2.F.2 zurück.

#### 4.2.F.1 Exkurs: Reihen und Konvergenz

Traditionell gilt der Reihenbegriff im Rahmen der Fachanalysis als eher schwierig. Wir stellen hier seine wesentlichen Facetten kurz und bündig zusammen und beginnen mit einer Auswahl an Beispielen, die auch relevant für unsere spätere Diskussion sind (Steinbauer, 2022, 1.4.26).

**4.2.37. Beispiel (Reihen).** Viele der in der Praxis auftretenden Folgen haben die spezielle Gestalt einer Summe. Wir betrachten drei davon genauer

- (1) *Die geometrische Reihe:* Schon in (4.11) ist uns die endliche geometrische Reihe und ihre Summenformel

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.63)$$

begegnet. Um zur Summenformel für die (unendliche) geometrische Reihe für  $q$  mit  $|q| < 1$  zu gelangen betrachtet man zunächst die *Folge der Partialsummen*

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.64)$$

Für  $q$  mit  $|q| < 1$  gelangt man nun über den Grenzwert der Folge  $(s_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad (4.65)$$

zur (oben verwendeten) Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}. \quad (4.66)$$

Wie wir gleich genauer diskutieren werden, ist das in der letzten Zeile auftretenden Symbol  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist per definitionem gleich dem Limes der Partialsummenfolge  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$ . Und, weil dieser Limes existiert bezeichnet nach Konvention  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  auch gleich diesen, also hier konkreten den Ausdruck  $1/(1 - q)$ .

- (2) *Dezimaldarstellung reeller Zahlen:* Bekanntlich hat jede reelle Zahl eine Dezimalbruchdarstellung (siehe etwa (Steinbauer, 2022, 1.4.26 ff), Heuser, 2003, Nr. 24 oder Forster, 2016, §5, Sätze 1, 2 für  $b = 10$ ), d.h. für jedes  $a$  zwischen<sup>17</sup> 0 und 10 gibt es *Ziffern*  $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sodass

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (10)^{-k} \quad (4.67)$$

gilt, was die eigentliche Bedeutung der Schreibweise  $a = a_0.a_1a_2a_3\dots$  ist. Aber das bedeutet, wenn wir genauer hinsehen, dass

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \quad \text{gilt,} \quad (4.68)$$

---

<sup>17</sup>Für allgemeines  $a \in \mathbb{R}$  sind Vorzeichen und Zehner- Hunderter- usw. -Stellen zu berücksichtigen, vgl. die angegebenen Zitate. Das ist aber hier nicht der Punkt.

also  $a$  der Limes der Partialsummenfolge  $(s_n)$  ist. Bemerke, dass das  $n$ -te Glied der Partialsummenfolge  $(s_n)$  genau die Zifferndarstellung bis zur  $n$ -ten Nachkommastelle ist.

Entscheidend dafür, dass diese Darstellung „funktioniert“, ist, dass jede Reihe der Form (4.67) konvergiert, was ja genau bedeutet, dass  $(s_n)$  aus (4.68) konvergiert. Das folgt aber sofort aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen mittels Monotonieprinzips, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 1.3.25):  $(s_n)$  ist offensichtlich monoton wachsend und außerdem nach oben beschränkt, denn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= a_0 + \frac{9}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) = a_0 + \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &< a_0 + \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = a_0 + 1, \end{aligned} \quad (4.69)$$

wobei wir wieder die Summenformel für die endliche geometrische Reihe verwendet haben. Weil der letzte Ausdruck von  $n$  unabhängig ist, gilt die Schranke<sup>18</sup>

$$s_n < a_0 + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.70)$$

- (3) Die Eulersche Zahl  $e$  ist bekanntlich (vgl. etwa (Steinbauer, 2022, 1.4.37), Heuser, 2003, S. 26.1, Forster, 2016, §8) durch die Exponentialreihe gegeben. Genauer für

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (4.71)$$

gilt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (4.72)$$

**4.2.38. Das Bauprinzip.** Alle obigen Beispiele folgen demselben Bauprinzip: Ausgehend von einer Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (z.B.  $a_k = q^k$  in Beispiel 4.2.37(1)) bildet man einen neuen Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Form

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k. \quad (4.73)$$

Also gilt dann

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \dots \quad (4.74)$$

Derart aufgebaute Folgen treten ausgesprochen häufig in der Mathematik auf und verdienen daher einen eigenen Namen: unendliche Reihen. Die Definition der Konvergenz von Reihen ist damit bereits festgelegt; sie sind ja nur spezielle Folgen. Präzise formuliert man wie folgt.

<sup>18</sup>Diese Schranke hätten wir ja auch intuitiv erraten können, oder?

### Mathematische Faktenbox 11: Reihen

**4.2.39. Definition (Reihe).** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge.

- (1) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $n$ -te *Partialsumme* (oder Teilsumme)

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k. \quad (4.75)$$

- (2) Die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *Reihe mit den Gliedern  $a_n$*  (nicht  $s_n$ !) und wir bezeichnen sie mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{oder kurz} \quad \sum a_k. \quad (4.76)$$

- (3) Konvergiert die Folge der Partialsummen  $(s_n)$ , so sagen wir auch die Reihe  $\sum a_k$  konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  ebenfalls mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (kurz  $\sum a_k$ ) und nennen ihn *Summe* oder *Wert* der Reihe.

**4.2.40. Bemerkung (Zur Terminologie).**

- (1) Die hier auftretende aber weithin gebräuchliche *Doppelbedeutung* des Symbols  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (kurz  $\sum a_k$ ) kann anfänglich Verwirrung stiften, daher ganz explizit: Das Symbol  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (kurz  $\sum a_k$ ) steht für zwei unterschiedliche Dinge, nämlich

- (a) die Reihe selbst, also die Folge der Partialsummen, d.h.

$$(s_n)_{n=0}^{\infty} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \right)_{n=0}^{\infty} =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad (4.77)$$

- (b) im Falle der Konvergenz von  $(s_n)$  auch für den Grenzwert, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (4.78)$$

Diese terminologische Festlegung ist sicher etwas unglücklich, mangels Alternativen aber universell gebräuchlich. Mit etwas Erfahrung ist (sollte) es aber nicht so schwierig (sein), sich hier zurecht zu finden.

- (2) Eine Reihe ist also als eine spezielle (Art von) Folge definiert. Das ist eine mathematisch eleganter „Trick“ um den sehr vagen Begriff einer „Summe von unendlich vielen Summanden“ zu formalisieren. An diesem sehr schlecht definierten Begriff festzuhalten ist in vielen Situationen nicht hilfreich und (Heuser, 2003, Nr. 30) spricht sogar von einem „Unbegriff, der nur Verwirrung stiftet“.

- (3) Ganz analog zu Folgen betrachtet man auch oft Reihen  $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$  für beliebige  $l \geq 1$ .

**4.2.41. Beispiel (Reihe).** Sei  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  ( $n \geq 1$ ). Die korrespondierende Reihe ist dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}. \quad (4.79)$$

### Mathematische Faktenbox 11 – Fortsetzung

Bemerke, dass  $a_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}$  gilt <sup>a</sup> und daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} \right) = \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left( \frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1} \right) + \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1. \quad (4.80)$$

**4.2.42. Bemerkung (Konvergenz von Reihen).** Die Untersuchung der Konvergenz von Reihen stellt sich oft als noch schwieriger heraus als für Folgen, vgl. 4.2.14.

Zunächst gilt, dass eine Reihe  $\sum a_k$  nur dann konvergieren kann, falls ihre Glieder  $a_k$  eine Nullfolge bilden. Diese intuitiv klare Aussage wird meist mittels des Cauchy-Kriteriums für Reihen bewiesen, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 1.4.5), (Heuser, 2003, Nr. 31). Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, denn die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{k}$  divergiert. Zusammengefasst gilt also die fundamentale Tatsache

$$\boxed{\sum a_k \text{ konvergiert} \iff a_k \rightarrow 0.} \quad (4.81)$$

Um also nachzuweisen, dass eine Folge konvergiert muss man also zeigen, dass  $a_k$  „schnell“ gegen 0 geht. Dafür kennt die Analysis eine Reihe von Tests, z.B. Quotiententest, Wurzeltest, etc. siehe z.B. (Heuser, 2003, Nr. 33), (Steinbauer, 2022), Abschnitt 1.4.

Ist es gelungen die Konvergenz einer Reihe nachzuweisen, kann es weiters noch sehr schwierig sein, ihren Limes, also den Reihenwert zu berechnen. Das ist in vielen Fällen eine richtige „Kleinkunst“, die dann allerdings eine Fülle von wichtigen und schönen Resultaten liefert, etwa konkrete Darstellungen transzenter Zahlen, wie etwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (4.82)$$

---


$$a_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2 - (k^2 - 1)}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

### 4.2.F.2 Fachdidaktische Diskussion: $0.\bar{9}$ ist tatsächlich 1!

In diesem abschließenden Abschnitt von §4.2 kommen wir auf die oben aufgeworfene und schon positiv beantwortete Frage: „Ist  $0.\bar{9}$  wirklich gleich 1“ zurück und diskutieren sie aus der Sicht der Fachdidaktik. Für eine weitaus detailliertere Darstellung siehe Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.2.

**4.2.43. Fertigprodukt und dann?** Unsere oben dargestellte mathematische Klärung 4.2.36

stellt in gewisser Weise einen Griff in die Kiste der „mathematischen Fertigprodukte“ dar. Sie ist zwar elegant und fachlich wenig anspruchsvoll (im Kontext der Analysisausbildung im Lehramt), aber in welchem Kontext ist sie auch sinnstiftend?

Die in 4.2.35 zitierten Fragen verweisen darauf, dass es auch um ein Verstehen des Prozesses (bei) der Entstehung des Objekts  $0.\bar{9}$  geht, also der Blick auf die Folge der Partialsummen

$$0.9, \quad 0.99 = 0.9 + 0.09, \quad 0.999 = 0.9 + 0.09 + 0.009, \quad \dots \quad (4.83)$$

gerichtet ist. Die formale Antwort 4.2.36 fokussiert dem entgegen auf die Frage nach dem Endprodukt dieses Prozesses, den Grenzwert der Partialsummenfolge.

Hier entsteht ein Spannungsverhältnis zwischen der *prozessorientierten* Frage und der *objektorientierten* Antwort, bzw. in der Terminologie von Abschnitt §2.3 zwischen *dynamischem* und *statischem* Aspekt des Grenzwertbegriffs, in der sich auch das Spannungsverhältnis zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen spiegelt.

An diesem Spannungsverhältnis muss auch jeder Versuch einer verstehensorientierten inhaltlichen Auseinandersetzung ansetzen. Hier kann dies gelingen, indem wir die auch im Alltagsdenken verankerte Figur des hypothetischen Denkens anwenden und uns mit der Frage auseinandersetzen:

„Welche Konsequenzen hat es, wenn an der Weigerung  $0.\bar{9} = 1$  zu akzeptieren, festgehalten wird?“

**4.2.44. Konsequenzen aus  $0.\bar{9} \neq 1$ .** Nehmen wir also an, dass  $0.\bar{9}$  echt kleiner 1 ist. Dann haben die beiden Zahlen  $0.\bar{9}$  und 1 einen positiven Abstand, nennen wir ihn  $d$ . Diese Situation können wir auf dem Zahlenstrahl wie in Abbildung 4.35 veranschaulichen.

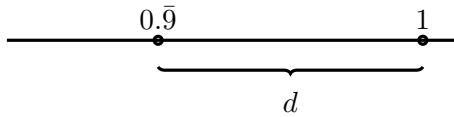


Abb. 4.35: Abstand  $d$  zwischen  $0.\bar{9}$  und 1

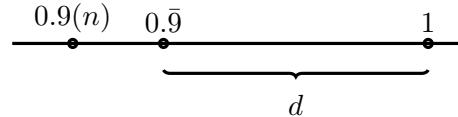


Abb. 4.36:  $0.9(n)$  liegt links von  $0.\bar{9}$

Jedes endliche Stück (jede endliche Partialsumme) von  $0.\bar{9}$  ist klarerweise kleiner als  $0.\bar{9}$  selbst. Betrachten wir zum Beispiel für ein fixes  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl, die wir durch Abbruch nach der  $n$ -ten Nachkommastelle erhalten und bezeichnen wir sie mit  $0.9(n)$ . Diese liegt dann links von  $0.\bar{9}$  auf dem Zahlenstrahl, siehe Abbildung 4.36. Außerdem gilt für den Abstand von  $0.9(n)$  zu 1

$$1 - 0.9(n) = 0.0(n-1)1 = \frac{1}{10^n}, \quad (4.84)$$

siehe Abbildung 4.37. Mit wachsendem  $n$  wird nun der Abstand von  $0.9(n)$  zu 1, nämlich  $\frac{1}{10^n}$  immer kleiner. Es ist ja  $q^n$  für  $q = \frac{1}{10} < 1$  eine Nullfolge. Daher muss  $\frac{1}{10^n}$  schließlich auch  $d$  unterschreiten (egal wie klein  $d$  auch war)! Das entspricht aber der Situation in Abbildung 4.38 und das ist absurd! Denn nun liegt ein endliches Teilstück  $0.9(n)$  von  $0.\bar{9}$  rechts von  $0.\bar{9}$ , ist also größer als  $0.\bar{9}$ .

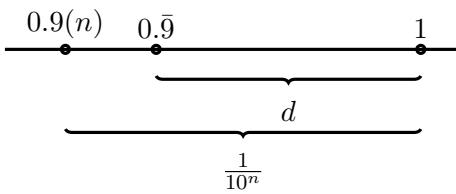


Abb. 4.37: Abstand  $\frac{1}{10^n}$  zwischen  $0.9(n)$  und  $1$  für „kleines“  $n$ .

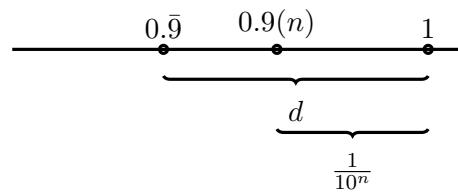


Abb. 4.38: Abstand  $\frac{1}{10^n}$  zwischen  $0.9(n)$  und  $1$  für „grosses“  $n$ .

Damit sind wir also an einem Widerspruch angelangt, nämlich:

$0.\bar{9}$  ist kleiner als ein endliches Teilstück  $0.9(n)$  seiner selbst.

Um diesen Widerspruch aus der Welt zu schaffen, bleibt uns nur eine Möglichkeit. Wir haben gar keine andere Wahl, als die Annahme (unsere Überzeugung?), dass  $0.\bar{9} < 1$  gilt, aufzugeben. Wir müssen also (doch) akzeptieren:

$0.\bar{9}$  und  $1$  ist derselbe Punkt auf dem Zahlenstrahl.

**4.2.45. Fachdidaktische Abschlussbemerkung.** Die Spannung zwischen der innermathematischen Klärung der Tatsache, dass  $0.\bar{9} = 1$  gilt und dem ursprünglichen, intuitiven Verstehen sind manifest und unvermeidlich. Die entstehenden Brüche sind beim Lehren von Mathematik geeignet zu thematisieren und inszenieren, um sinnstiftende Brücken schlagen zu können, vgl. (Danckwerts und Vogel, 2006, p. 32).

Diese Brüche treten besonders im Rahmen der Exaktifizierung des Grenzwertbegriffs zu Tage und unterstreichen unsere Behauptung aus 2.2.1: Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis.

Auch das abschließende Thema für dieses Kapitel, die Vollständigkeit der reellen Zahlen, bestätigt diese Aussagen, wie wir gleich sehen werden.

### 4.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

**4.3.1. Zugänge zu  $\mathbb{R}$ .** Es ist weithin akzeptierte Position der Fachdidaktik, vgl. (Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 2.3), dass im schulischen Unterricht im Umgang mit den reellen Zahlen ein intuitiver bzgl. *phänomenologischer* Standpunkt eingenommen werden soll, d.h.

Man betrachtet die reellen Zahlen als die in natürlicher Weise gegebene Gesamtheit der Punkte auf dem Zahlenstrahl.

Dieser intuitive Zugang im schulischen Kontext entspricht durchaus der historischen Entwicklung: Bis ins 19. Jahrhundert wurde in der Mathematik recht sorglos mit den reellen Zahlen umgegangen und ihre Exaktifizierung stellt gewissermaßen den Schlussstein in der Entwicklung zur heutigen Analysis dar. Das spiegelt sich auch in der Sonderrolle des Kontinuums in Rahmen des Intuitionismus wider, vgl. Abschnitt 4.2.E.1.

Zur Beschreibung des hier propagierten Zugangs im Mathematikunterricht zitieren wir Hans Freudenthal (1905–1990), einen niederländischen Mathematiker und einflussreichen Fachdidaktiker:

Man betrachte die reellen Zahlen als etwas Gegebenes, auf der Zahlengeraden mit den ihr eigentümlichen Operationen. Man analysiere die Zahlengerade mittels der unendlichen Dezimalbrüche.

Man [...] deduziere aus den unendlichen Dezimalbrüchen topologische Eigenschaften der reellen Zahlen, sobald man sie wirklich verwendet.

Dass man sie auch als Cauchyfolge oder Dedekindscher Schnitt definieren kann, ist ein theoretischer Luxus.

(Freudenthal, 1973, p. 203)

Die hier angesprochenen „Luxusvarianten“ sind zwei tatsächlich verbreitete *konstruktive* Zugänge zu den reellen Zahlen im Rahmen der (Hochschul-)Analysis. Ausgehend vom Axiomensystem (ZFC) von Zermelo-Fraenkel für die Mengenlehre (siehe etwa Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 4.5) werden die Zahlemengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und zuletzt  $\mathbb{R}$  konstruiert. Der Zugang, bei dem reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen definiert werden, war womöglich Bestandteil Ihrer Analysisausbildung. Eine Alternative ist die (äquivalente) Definition über die sogenannten Dedekind'schen Schnitte. Dabei ist jedefalls ein langer und anspruchsvoller Weg zurückzulegen, vgl. etwa (Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1) oder, für eine viel ausführlichere Darstellung (Kuba und Götz, 2015).

Alternativ und auch durchaus im Rahmen einer Fachanalysis auf Hochschulniveau verbreitet ist der folgende *axiomatische*, von Hilbert vorgeschlagene Zugang<sup>19</sup>: Die Menge  $\mathbb{R}$  wird über drei Gruppen von Axiomen definiert, die Körperaxiome (die Grundlagen des „Buchstaberechnens“), die Ordnungsaxiome (die Basis der „Kleiner-Gleich-Beziehung“) und das Vollständigkeitsaxiom (über das wir gleich noch einiges sagen werden). Natürlich sind diese „Axiome“ nur im Rahmen dieses Zugangs Axiome und zwar in dem Sinn, dass die gesamte

<sup>19</sup>Dessen Vorzüge gegenüber dem oben erwähnten konstruktiven Zugang wurden von Bertrand Russel mit den Vorzügen von Diebstahl vor ehrlicher Arbeit verglichen (frei zitiert nach Heuser, 2003, Nr. 30). Bertrand Russel (1872–1970), der uns schon in einer Fußnote auf Seite 84 begegnet ist, war nicht nur Philosoph, Mathematiker, Logiker, Historiker und politischer Aktivist (in Sachen Pazifismus und Sozialismus) sondern auch Literaturnobelpreisträger und überhaupt einer der prägenden Denker des 20. Jahrhunderts.

Analysis aus ihnen alleine heraus logisch abgeleitet wird. Sie können aber ihrerseits aus den Axiomen von (ZFC) abgeleitet werden.

#### Mathematische Faktenbox 12: Axiomatischer Zugang zu $\mathbb{R}$

Dass der Axiomatische Zugang also diese „Abkürzung“ des konstruktiven Weges wirklich funktioniert, garantiert der folgende Satz, vgl. Schichl und Steinbauer, 2018, Abschn. 6.4

**4.3.2. Theorem (Richard Dedekind).** Es existiert (bis auf Isomorphie) genau ein ordnungsvollständiger geordneter Körper  $\mathbb{R}$ , der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Unterkörper besitzt. Wir nennen  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen und die Elemente der Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  die irrationalen Zahlen.

Liest man diesen Satz als Definition der reellen Zahlen, kann man in der beruhigten Gewissheit das Gebäude der Analysis aufbauen, dass man *sicher* auf den Schultern jener Riesen steht, die  $\mathbb{R}$  aus (ZFC) konstruiert haben.

**4.3.3. Von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$ .** Nun diskutieren wir die im Vollständigkeitsaxiom kodierte intuitiv nicht bzw. nur schwer zu fassende Vorstellung von den

dicht aber *nicht lückenlos* auf dem Zahlenstrahl gelegenen rationalen Zahlen.

Diese ist nicht zuletzt eine erkenntnistheoretische Herausforderung, da die Einführung der reellen Zahlen nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen lässt: Tatsächlich tritt in realen Situationen niemals direkt eine irrationale Zahl auf. Es gibt keinen experimentell-empirischen Nachweis, ob eine gemessene Größe rational oder irrational ist. Damit ist die Erweiterung der rationalen zu den reellen Zahlen eine rein theoretische Angelegenheit!

Dass aber die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um elementargeometrische Zusammenhänge auszudrücken, war schon den Pythagoräern im antiken Griechenland bekannt. So lässt sich bekanntlich weder das Verhältnis zwischen der Seitenlänge eines Quadrat und der Länge seiner Diagonalen durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen (also durch eine rationale Zahl) ausdrücken, noch das Verhältnis zwischen dem Radius eines Kreises und seiner Fläche oder seinem Umfang.

Die Tatsache, dass der Weg von der Entdeckung irrationaler Zahlen bis zur axiomatischen Festlegung der reellen Zahlen mehr als 2 Jahrtausende gebraucht hat, lässt nochmals erkennen, wie schwierig er war — und warum es im Rahmen der Schulanalyse nicht möglich/geraten scheint, hier zu den Grundlagen vorzustoßen. Andererseits wird sich ein intellektuell ehrlicher Unterricht daran messen lassen (müssen), in wie fern er unter Hinweis auf die phänomenologische Basis die Notwendigkeit der Erweiterung des Zahlenbereichs von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  argumentiert und auf ein diebezügliches Verständnis drängt.

**4.3.4. Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .** Die am einfachsten zu erfassende analytische Formulierung der geometrisch-anschaulichen „Lückenlosigkeit“ des Zahlenstrahls bzw. der Menge  $\mathbb{R}$  ist das *Intervallschachtelungsprinzip*. Dieses besagt anschaulich, dass ein noch so genaues „Hineinzoomen“ auf den Zahlenstrahl kein Loch entdecken kann. Eine mathematische Präzisierung lautet wie folgt, vgl. (Steinbauer, 2022, 1.3.34):

### Mathematische Faktenbox 13: Intervallschachtelungsprinzip

**4.3.5. Satz.** Sei  $(I_n)$  eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eigenschaften

- (1)  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ , und
- (2) die Durchmesser von  $I_n$  gehen gegen  $0^a$ .

Dann gibt es genau eine reelle Zahl  $a$ , die in jedem Intervall  $I_n$  liegt.

Eine Veranschaulichung der Situation ist etwa Abbildung 4.39.

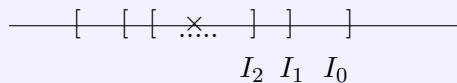


Abb. 4.39: Eine Intervallschachtelung „fängt“ genau einen Punkt.

<sup>a</sup>Etwas genauer, falls wir  $I_n = [a_n, b_n]$  schreiben gilt  $b_n - a_n \rightarrow 0$ .

Eine Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden „läuft also niemals ins Leere“. Hierbei wird im übrigen wieder auf Folgen als Werkzeuge in einem Näherungsverfahren zurück gegriffen. Im Mathematikunterricht werden schon in der Sekundarstufe 1 zumindest intuitiv Intervallschachtelungen bemüht, um etwa Umfänge, Flächen oder Volumina zu berechnen.

Obwohl anschaulich überlegen, wird im axiomatischen Aufbau der (Hochschul-)Analysis dem Intervallschachtelungsprinzip meist das Supremumsaxiom vorgezogen, da es in technischen Beweisen leichter einsetzbar ist. Dieses scheint daher meist als Vollständigkeitsaxiom in Rahmen des axiomatischen Zugangs auf, vgl. 4.3.1. Dariüberhinaus sind noch weitere äquivalente Formulierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen von fundamentaler Bedeutung in der Analysis. Wir versammeln sie hier in einer mathematischen Faktenbox.

### Mathematische Faktenbox 14: Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

**4.3.6. Theorem.** Die folgenden fünf Aussagen sind äquivalent und charakterisieren daher gleichermaßen die Vollständigkeit der reellen Zahlen:

- (1) *Intervallschachtelungsprinzip*, siehe Satz 4.3.5
- (2) *Supremumsaxiom, Ordnungsvollständigkeit*:  
Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Supremum.
- (3) *Cauchyprinzip*: Jede Cauchyfolge konvergiert.
- (4) *Satz oder Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß*:  
Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.
- (5) *Monotonieprinzip*:  
Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert.

Für Beweise und eine weitere Diskussion siehe z.B. (Steinbauer, 2022), Abschnitt 1.3, oder die ausführliche Diskussion in Winkler, 2009, vor allem Abschnitt 3.8.

Beachten Sie, dass Folgen in vier der fünf Aussagen, genau in allen die „Prinzipien“ genannt werden, das Hauptwerkzeug darstellen! Sie sind fundamentale Aussagen über die Konvergenz

von Folgen, die alle aus der Ordnungsvollständigkeit folgen (und sogar zu ihr äquivalent sind).

Im Schulkontext wichtig ist vor allem das *Monotonieprinzip*, auf das wir schon mehrmals zurückgegriffen haben, z.B. um in 4.2.37(2) zu zeigen, dass jede Dezimalbruchentwicklung konvergiert. Tatsächlich gilt sogar noch mehr, denn

Eine monoton wachsende Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist. Der Limes ist dann das Supremum.

Das entspricht also genau dem intuitiven Bild, dass eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist, gegen ihr Supremum „gequetscht“ wird, siehe Abbildung 4.40. Natürlich gilt Analoges für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen.

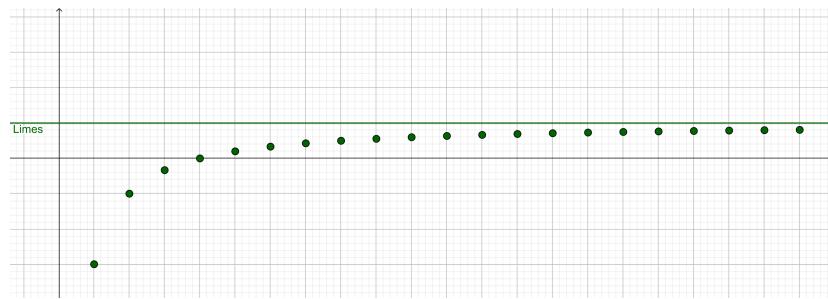


Abb. 4.40: Eine monoton wachsende, beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum.

Zum Abschluss des Paragraphen und des ganzen Kapitels werfen wir noch einen informierten Blick zurück auf 2.2.1.

**4.3.7. Keine vernünftige Analysis auf  $\mathbb{Q}$ !** Wir haben in 2.2.1 bereits diskutiert, dass der Zwischenwertsatz auf  $\mathbb{Q}$  nicht gilt und dass daher auf  $\mathbb{Q}$  keine vernünftige Anaylsis möglich ist: Anschaulich völlig klare Sätze sind falsch, wie durch einfache Gegenbeispiel belegt werden kann, vgl. 2.2.1.

Nicht überraschend ist die Tatsache, dass im axiomatischen Aufbau der Analysis der Zwischenwertsatz meist mittels des Intervallschachtelungsprinzip bewiesen wird, also die Vollständigkeit dahinter steckt, vgl. (Steinbauer, 2022, 2.2.3).

Wir geben nun noch ein Beispiel dieser Bauart:

**4.3.8. Monotoniekriterium.** Im Zuge von Kurvendiskussionen in der Schulanalysis wird oft die folgende Aussage verwendet:

Monotoniekriterium: Eine differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit positiver Ableitung ist streng monoton wachsend.

Diese Aussage ist anschaulich sehr evident, wird aber falsch, wenn man sie auf die rationalen Punkte im Intervall  $[a, b]$  einschränkt, also nur in diesen eine positive Ableitung verlangt. Ein Gegenbeispiel ist etwa

$$f : I := [0, 3] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2 - x^2}. \quad (4.85)$$

Tatsächlich ist  $f$  auf allen Punkten in  $I$  differenzierbar (als rationale Funktion ohne Nullstellen im Nenner) mit positiver Ableitung aber nicht monoton steigend, siehe Abbildung 4.41.

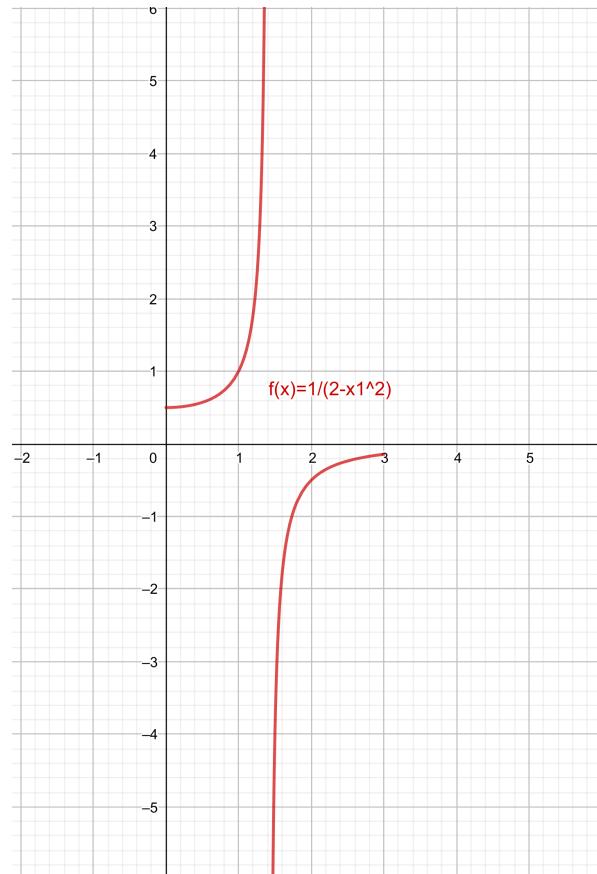


Abb. 4.41:  $f$  hat in allen rationalen Punkten eine positive Ableitung, ist aber nicht monoton steigend.

# Kapitel 5

## Differentialrechnung

Die Differentialrechnung stellt gemeinsam mit der Integralrechnung den zentralen Inhalt nicht nur der Schulanalyse, sondern auch der Analysis an sich dar. Aufbauend auf dem Herzstück der Analysis — dem Grenzwertbegriff, siehe Kapitel 4 — geht es nun darum das lokale Änderungsverhalten von Funktionen zu studieren und geeignet in den Griff zu bekommen. Dabei ist der Ableitungsbegriff *das entscheidende Werkzeug*.

Wir beginnen in Abschnitt 5.1 mit schulmathematischen Zugängen zum Ableitungsbegriff und nehmen danach eine genaue fachliche Begriffsbestimmung vor (Abschnitt 5.2). Nach einem kurzen historisch-philosophischen Intermezzo in Abschnitt 5.3 besprechen wir in einer fachdidaktischen Diskussion Aspekte und Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs (Abschnitt 5.4). Schließlich besprechen wir die in der Schulmathematik prominent vertretenen Themen Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben in Abschnitt 5.5.

### 5.1 Zugänge zum Ableitungsbegriff in der Schule

Betrachtet man die möglichen Zugänge zum Ableitungsbegriff in der Schule, dann lassen sich folgende zwei Realisierungen ausmachen:

- (1) Zugang über das Tangentenproblem;
- (2) Zugang über die Momentangeschwindigkeit.

Der Zugang über das Tangentenproblem hat im schulischen Mathematikunterricht eine lange Tradition, birgt aber bei näherem Hinsehen einige Fallen in sich und enthält zudem einige Schwierigkeiten, die mit methodischem Geschick zwar umschifft, aber nicht aufgehoben werden können. Der Zugang über die Momentangeschwindigkeit hingegen weist solche Hürden und Fallen nicht auf und kann in Kontexten, die für Schülerinnen und Schüler relevant sind, entfaltet werden. Darüberhinaus kann der Zugang über die Momentangeschwindigkeit Wesentliches zur Grunderfahrung 1 (mathematischer Blick) beitragen.

#### 5.1.A Zugang über das Tangentenproblem

Der weit verbreitete Zugang zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem folgt meistens dem Dreischritt:

1. Schritt: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente;
2. Schritt: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten;
3. Schritt: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

**5.1.1. Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente.** Dieser Zugang baut auf zwei mathematischen Begriffen auf, mit denen die Schülerinnen und Schüler aus den vorhergehenden Schuljahren bestens vertraut sind. Es sind dies:

- Die Steigung von Geraden
- Der (geometrische) Tangentenbegriff

Bei einem solchen Einstieg wird von den Schülerinnen und Schülern die Steigung einer Kurve untersucht. Dazu wird die Steigung einer Kurve in einem Punkt als Steigung der Tangente in diesem Punkt definiert. Zumeist wird hierbei der vom Kreis bekannte geometrische Tangentenbegriff benutzt. Zahlreiche dynamische Lernobjekte visualisieren diesen Zugang und ermöglichen ein interaktives Erkunden, siehe Abbildungen 5.1, 5.15 und 5.3.

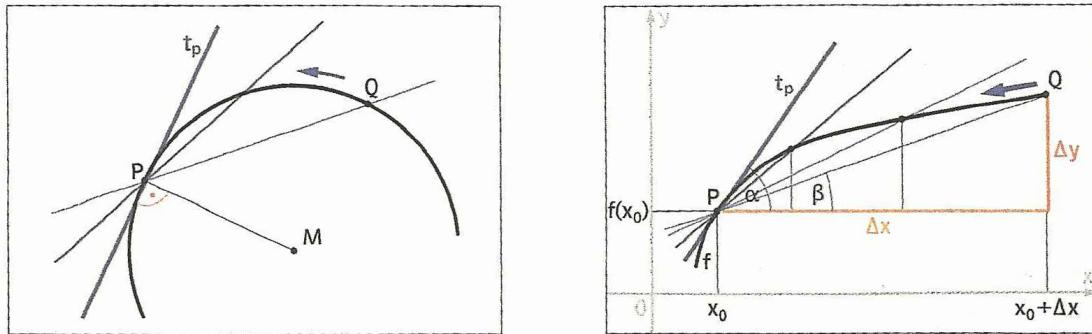


Abb. 5.1: Quelle: Götz, Reichel – Mathematik 7, 2011, S. 46

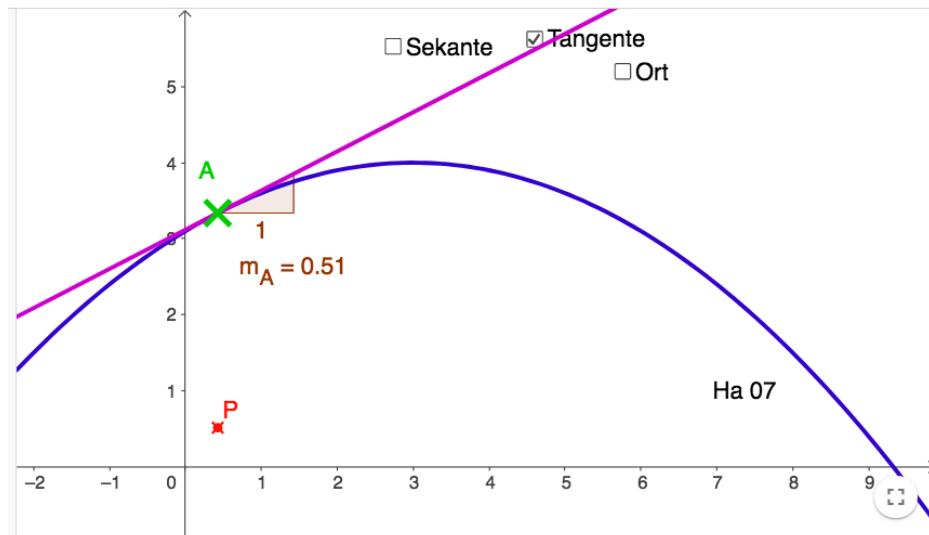
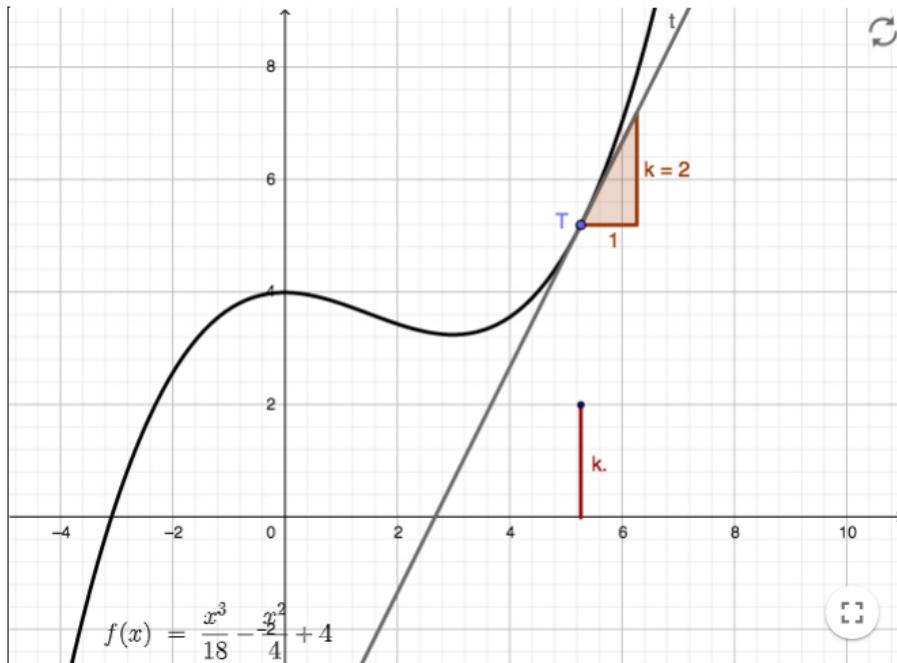


Abb. 5.2: Quelle: <https://www.geogebra.org/m/Yj8jvfNy>

Bereits dieser erste Schritt enthält einige Probleme. Zum einen wird hier der nicht-triviale Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff zumeist still schweigend vollzogen. Genauer können diese beiden Tangentenbegriffe wie folgt beschrieben werden:

Abb. 5.3: Quelle: <https://www.geogebra.org/m/VDHNGVK7>

### FD-Box 26: Tangentenbegriffe

Sowohl fachmathematisch als auch (und in unserem Kontext essentiell) in der Fachdidaktik unterscheidet man zwei Tangentenbegriffe.

- (1) *Der geometrische Tangentenbegriff* versteht die Tangente an eine Kurve als *globale Stützgerade*. Die Konstruktion der Tangente an einen Kreis ist dafür paradigmatisch, vgl. Abbildung 5.1, links.
- (2) *Der analytische Tangentenbegriff* beruht darauf, dass die Tangente als *lokale Schmiegerade* an eine Kurve verstanden wird, d.h. als eine Gerade, die sich lokal um den Punkt bestmöglich an die Kurve anschmiegt.

Im Kontext des betrachteten Zugangs, führt dieser nicht thematisierte Paradigmenwechsel (von der globalen zur lokalen Sicht) oft zu Verwirrung auf Seiten der Schülerinnen und Schüler. Wird nämlich im Sinne des geometrischen Tangentenbegriffs die Tangente als globale Stützgerade aufgefasst, dann ist sie jene Gerade, die mit einer Kurve (z.B. einer Kreislinie) genau einen Punkt gemeinsam hat und die die Kurve auch nicht durchdringt. Dieses Verständnis kann nur in ausgesuchten Fällen — etwa für den Graphen von  $f(x) = x^2$ , siehe Abb. 5.4 — angewandt werden, in vielen weiteren Fällen (siehe Abb. 5.5) führt der geometrische Tangentenbegriff zu Irritationen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler.

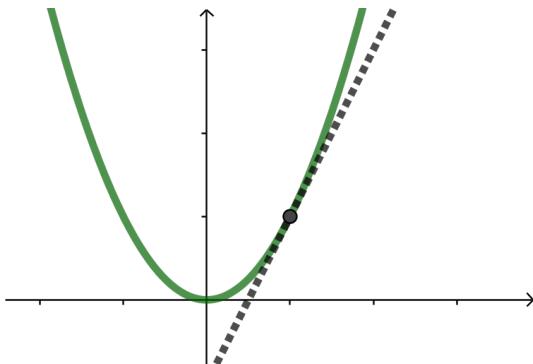


Abb. 5.4: Tangente als Stützgerade und Schmiegegerade

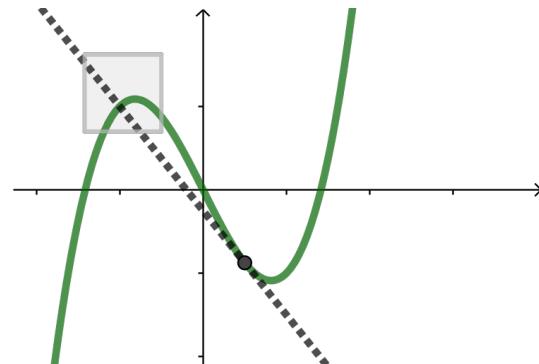


Abb. 5.5: Tangente als Schmiegegerade aber nicht als Stützgerade

Vollzieht man jedoch im Unterricht den Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff und erklärt die Tangente (nun) als Schmiegegerade, die sich der Kurve lokal um den Berührpunkt gut anschmiegt, dann widerspricht das den von den Schülerinnen und Schülern bis dahin erworbenen Grundvorstellungen von einer Tangente.

**5.1.2. Die Tangente als Grenzlage von Sekanten.** Im zweiten Schritt dieses Zugangs zum Ableitungsbegriffs wird, unabhängig von der bisher erfolgten Gedankenführung, eine neue Idee zur Berechnung der Tangentensteigung eingeführt. Die Tangente in einem Punkt wird als Grenzlage benachbarter Sekanten aufgefasst. Auch dafür gibt es eine Fülle von interaktiven Lernobjekten, die diese Idee visualisieren, siehe z.B. Abbildungen 5.6 und 5.7.

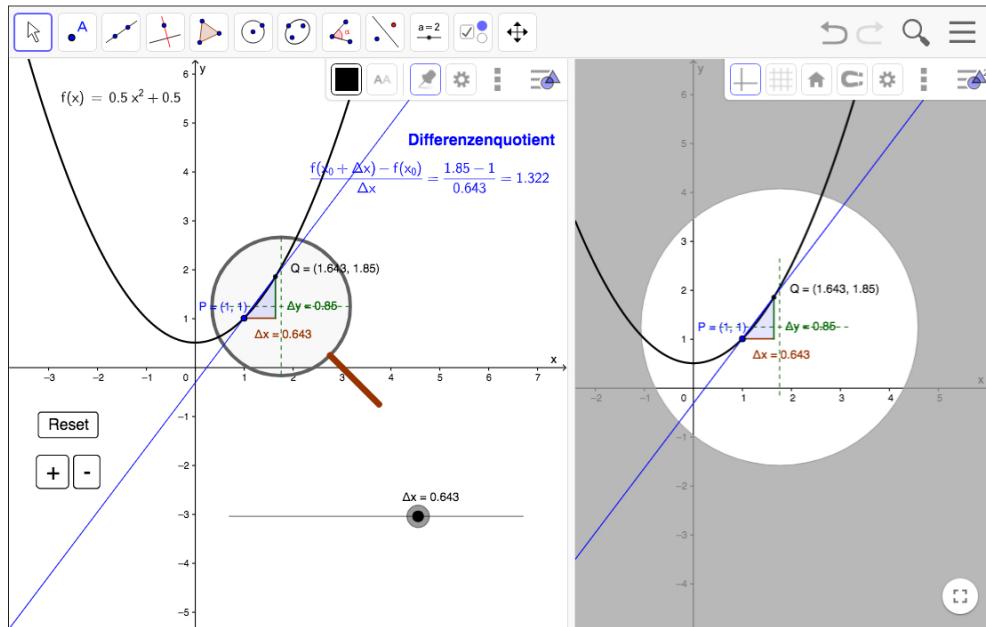


Abb. 5.6: Tangente als Grenzlage von Sekanten - interaktiv; Quelle: <https://www.geogebra.org/m/iierR9hp>

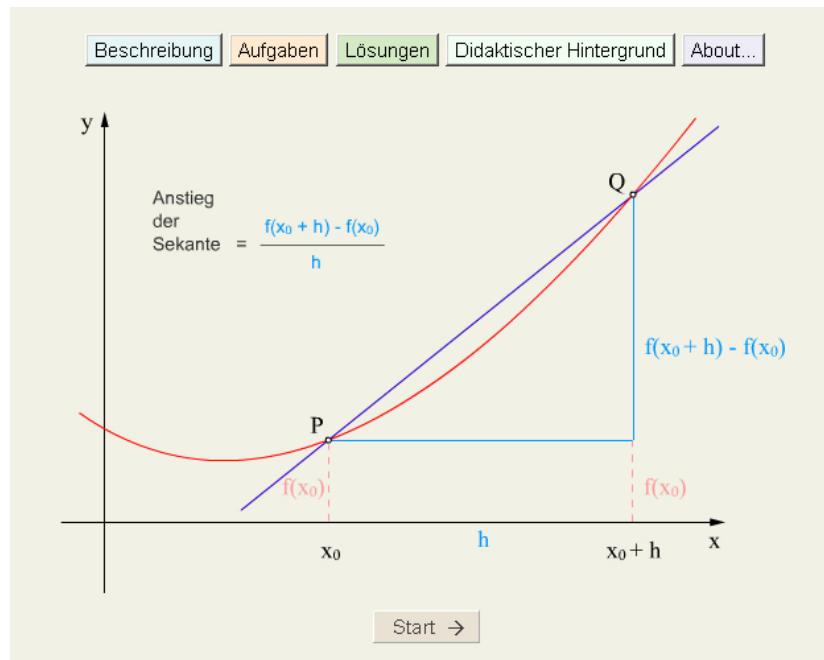


Abb. 5.7: Tangente als Grenzlage von Sekanten - interaktiv; Quelle: <https://mathe-online.at/galerie/diff1/ablgrenz/index.html>

Dieser zweite Schritt enthält ebenfalls Probleme. Zunächst wird nicht an die Idee aus dem ersten Schritt angeknüpft. Denn dies würde bedeuten, zu untersuchen, ob die Schmiegegerade tatsächlich leistet, was sie soll, nämlich lokal die „bestapproximierende“ Gerade zu sein. Stattdessen wird eine neue Idee ins Spiel gebracht, nämlich die Tangente durch benachbarte Sekanten anzunähern. Diese Idee führt nachweislich zu Verständnisschwierigkeiten, wenn Schülerinnen und Schüler nicht die gesamten Sekanten, sondern nur die Sehnen im Fokus ihrer Betrachtungen haben. Dann nämlich ziehen sich die Sehnen schließlich auf einen Punkt (den Punkt  $P$  in Abbildung 5.8) zusammen und es ergibt sich im Grenzfall gar keine Gerade.

**5.1.3. Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.** Im dritten Schritt dieses Zugangs wird häufig die Parabel  $f(x) = x^2$  betrachtet und zwar an der Stelle  $x_0 = 1$ . Die Annäherung der Tangente im Punkt  $(1|1)$  wird mittels der benachbarten Sekanten algebraisch modelliert und der Grenzwert berechnet.

D.h. für die Sekantensteigung wird der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

betrachtet. Für das Beispiel der Parabel  $f(x) = x^2$  mit  $x_0 = 1$  ergibt das

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \quad (5.1)$$

Lässt man nun im Zähler und Nenner  $x$  gegen  $x_0 = 1$  gehen, so streben Zähler und Nenner gegen 0, obwohl der Quotient einen wohldefinierten Grenzwert hat, nämlich die Zahl 2. Hier tritt die oben schon angesprochene Fehldeutung — die Sehnen ziehen sich auf einen Punkt

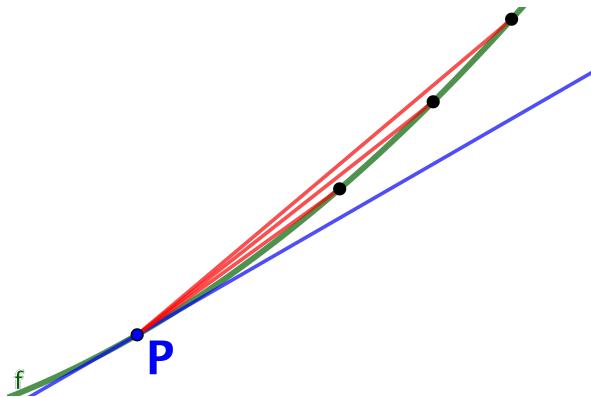


Abb. 5.8: Fehlvorstellung: Sekante - Sehne

zusammen — erneut als Schwierigkeit auf. Als Voraussetzung wird dann  $x \neq x_0$  angenommen, um dann schließlich scheinbar doch  $x = x_0$  zu setzen.

Dieses Vorgehen bedient sich des Grenzwertbegriffs und insbesondere der Annäherungsvorstellung, d.h. hier wird also die Sekantensteigung als idealisiertes Endprodukt eines unendlichen Prozesses aufgefasst. Wobei hier einer korrekten Formulierung eine besondere Bedeutung zukommt: Im Gegensatz zu “Die Sekantensteigung kommt der Zahl 2 beliebig nahe, wenn  $x$  gegen  $x_0 = 1$  strebt” ist eine Formulierung wie “Die Sekantensteigung kommt der Zahl 2 immer näher, ohne sie je zu erreichen” in diesem Zusammenhang besonders problematisch. Zu guter Letzt sei noch darauf verwiesen, dass der Term für die Sekantensteigung und die benötigten Termumformungen die ganze Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler fordern, wobei der inhaltliche und begriffliche Kontext oft zu verschwinden droht.

Zusammengefasst ergeben sich mit diesem Zugang folgende Schwierigkeiten:

- Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff;
- Berechnung der Tangentensteigung mit der Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen;
- Verfahren zur Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert – erkenntnistheoretisch schwierig, und algebraisch aufwendig.

### 5.1.B Zugang über Momentangeschwindigkeit

Eine Alternative, sich dem Ableitungsbegriff in der Schule zu nähern, bietet der Zugang über die Momentangeschwindigkeit. Anstelle des lokalen Anstiegs wird also die Frage nach der lokalen Änderungsrate gestellt und in der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler eingebettet. Bei einem solchen Zugang werden auch die drei Winter’schen Grunderfahrungen (Realitätsbezug, Durchdringen eines zentralen theoretischen Begriff, heuristisches Arbeiten) angesprochen.

Ausgangspunkt eines solchen Zugangs kann ein (fiktiver) Dialog wie der folgende sein.

**Andrea:** Am Wochenende war ich zu Besuch in Salzburg. Für die Strecke von Wien nach Salzburg also etwa 300 km habe ich genau 3 Stunden gebraucht.

**Peter:** Na, dann warst du aber mit 100 km/h nicht besonders schnell.

**Andrea:** Wie man's nimmt, manchmal bin ich sogar über die erlaubten 140 gefahren.

Den Schülerinnen und Schülern wird in der 11. Schulstufe schon vertraut sein, dass beim Sprechen über Geschwindigkeiten, der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet wird. Solche Weg-Zeit-Funktionen haben die Schülerinnen und Schüler sicher auch schon mehrmals bearbeitet. Damit die oben angesprochene Situation konkret gefasst werden kann, können wir den Anfahrtsvorgang betrachten. Es ist durchaus realistisch, diesen Zusammenhang mit  $s(t) = t^2$  zu beschreiben.

Der Graph in Abbildung 5.9 zeigt, wie sich der durchfahrene (zurückgelegte) Weg im Laufe der Zeit entwickelt. Der zurückgelegte Weg  $s(t)$  wächst mit der Zeit  $t$ . Mit fortschreitender Zeit wächst der zurückgelegte Weg immer rascher, der Wagen wird also immer schneller.

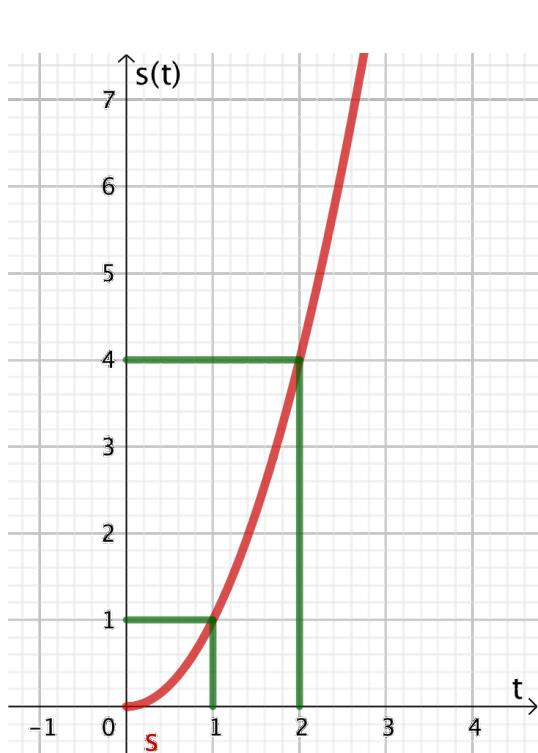


Abb. 5.9: Weg-Zeit Diagramm

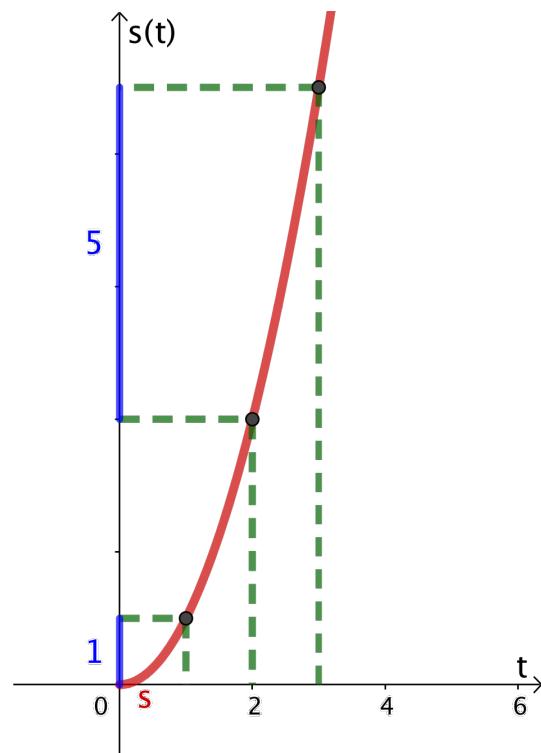


Abb. 5.10: In gleichen Zeiteinheiten zurückgelegter Weg

Wird dieser Sachverhalt genauer untersucht, dann können beispielsweise gleichlange Zeitabschnitte betrachtet werden (vgl. Grundvorstellung von Funktionen – Kovariation). Sowohl am Graphen als auch einzelne Berechnungen zeigt sich, dass die pro Sekunde zurückgelegten Wegstrecken (in Metern) größer werden (siehe Abbildung 5.10).

- In der ersten Sekunde:  $s(1)-s(0) = 1^2-0^2 = 1$  Meter
- In der zweiten Sekunde:  $s(2)-s(1) = 2^2-1^2 = 3$  Meter
- In der dritten Sekunde:  $s(3)-s(2) = 3^2-2^2 = 5$  Meter

Für beliebige Zeitabschnitte  $t_0$  bis  $t_1$  erhält man die jeweils zurückgelegte Wegstrecke  $\Delta s$  mit

$$\Delta s = s(t_1)-s(t_0). \quad (5.2)$$

Jetzt können nicht mehr nur Zeitabschnitte der Länge 1 Sekunde betrachtet werden, sondern auch andere, z.B. für die Werte  $t_0 = 1$  und  $t_1 = 3$  also

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(3) - s(1) = 3^2 - 1^2 = 8. \quad (5.3)$$

Im Zeitintervall  $[1; 3]$  legt das Auto also 8 Meter zurück. In diesen 2 Sekunden legt das Auto also im Mittel 4 Meter zurück, d.h. die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall  $[1; 3]$  beträgt 4 Meter pro Sekunde.

Auch diese konkrete Überlegung kann verallgemeinert werden. Für beliebige Zeitabschnitte  $\Delta t$  (mit  $\Delta t = t_1 - t_0$ ) wird die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  mit der Formel

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (5.4)$$

berechnet.

Damit haben wir allerdings noch keine Antwort auf die Frage, wie schnell das Auto zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  ist. Die entscheidende Idee ist hier, die Momentangeschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeiten anzunähern.

Eine solche Näherung für  $t_0 = 1$  ist in Abbildung 5.11 numerisch durchgeführt.

Zeitintervall $[t_0, t]$	mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t]$
$[1; 2]$	$\frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$
$[1; 1, 1]$	$\frac{1, 1^2 - 1^2}{1, 1 - 1} = 2, 1$
$[1; 1, 01]$	$\frac{1, 01^2 - 1^2}{1, 01 - 1} = 2, 01$
$[1; 1, 001]$	$\frac{1, 001^2 - 1^2}{1, 001 - 1} = 2, 001$

Abb. 5.11: Mittlere Geschwindigkeiten in gegebenen Zeitintervallen (rechts)

Aus der Tabelle können wir entnehmen: Je kleiner das Zeitintervall  $[1; t]$  wird, je näher also  $t$  an 1 heranrückt, umso näher scheint die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 2 zu kommen. Wir werden sogar sehen, dass die mittlere Geschwindigkeit gegen den Wert 2 konvergiert, wenn  $t$  von oben gegen 1 geht. (Wir wiederholen den Grenzwertbegriff für Funktionen in mathematisch exakter Wiese im nächsten Abschnitt, siehe Definition 5.2.5.)

Um uns zu vergewissern, dass unser Verfahren nicht dadurch verzerrt wird, dass wir immer Zeitintervalle  $[t_0, t]$ , also rechts von  $t_0$  betrachtet haben, nähern wir uns auch von der anderen Seite an, d.h. wir betrachten Zeitpunkte  $t < t_0$ , siehe Tabelle 5.12

Zeitintervall $[t, t_0]$	mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t_0) - s(t)}{t_0 - t}$ im Zeitintervall $[t, t_0]$
$[0; 1]$	1
$[0, 9; 1]$	1, 9
$[0, 99; 1]$	1, 99
$[0, 999; 1]$	1, 999

Abb. 5.12: Mittlere Geschwindigkeiten in gegebenen Zeitintervallen (links)

Auch hier sehen wir: Je kleiner das Intervall  $[t; 1]$  wird, je näher also  $t$  an 1 heranrückt, umso näher scheint die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 2 zu kommen. Es liegt also nahe, 2 m/s als die gesuchte Momentangeschwindigkeit zu betrachten.

Wir haben bisher bestimmte Annäherungen (von links und rechts) an  $t_0 = 1$  untersucht. Dass sogar *jede beliebige* Annäherung an den Zeitpunkt  $t_0 = 1$  zu dem selben Ergebnis führt, zeigt folgende Überlegung: Ist  $t$  ein benachbarter Zeitpunkt von  $t_0 = 1$ , so hat die mittlere Geschwindigkeit im Intervall  $[1; t]$  den Wert

$$\begin{aligned}\bar{v}_{[1,t]} &= \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} \quad (\text{mit } t \neq 1) \\ &= \frac{(t - 1)(t + 1)}{t - 1} = t + 1 = 1 + t.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Analoges gilt natürlich auch für beliebige Annäherungen von links, also auf Intervallen  $[t, t_0]$  für beliebige  $t < t_0$ . Genauer gilt

$$\bar{v}_{[t,1]} = \frac{s(1) - s(t)}{1 - t} = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = 1 + t.\tag{5.6}$$

Man sieht also, dass  $\bar{v}_{[1,t]} = \bar{v}_{[t,1]} = 1 + t$  für gegen 2 konvergiert, wenn  $t$  gegen 1 geht. Somit haben wir die Momentangeschwindigkeit für  $t_0 = 1$  erfolgreich berechnet.

Zusammengefasst geht dieser Zugang also über die folgende Schritte:

- Vorzugsweise wird ein Kontext genommen, bei dem man sich in intuitiver Weise des Zeitkontinuums bedient: Geschwindigkeit.
- Der zurückgelegte Weg und damit auch die mittlere Geschwindigkeit werden in verschiedenen konkreten Zeitabschnitten (grafisch und rechnerisch) ermittelt.
- Der zurückgelegte Weg wird in beliebigen Zeitabschnitten angegeben.
- Die mittlere Geschwindigkeit wird in beliebigen Zeitabschnitten angegeben.
- Die Frage nach der Momentangeschwindigkeit tritt nun ganz natürlich auf und kann durch Annäherung über mittlere Geschwindigkeit von links/rechts erarbeitet werden.
- Nun folgt eine allgemeine Betrachtung zur Ermittlung der Momentangeschwindigkeit.

Im Gegensatz zum Zugang über das Tangentenproblem genügt hier eine einzige Idee — nämlich die der Geschwindigkeit. Die Annäherung der Momentangeschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen ergibt sich für die Schülerinnen und Schüler aus dem Kontext. Bei der letzten Frage, ob der Momentangeschwindigkeit überhaupt ein Grenzwert zugeschrieben werden kann, tritt hier nicht so prominent in der Vordergrund, da in diesem Sachkontext niemand daran zweifelt, dass gefundene Wert etwas anderes als die Momentangeschwindigkeit beschreibt.

## 5.2 Fachliche Begriffsbestimmung

In diesem Abschnitt diskutieren wir die fachlichen Grundlagen der Differentialrechnung. Sie stellt *den* Kern der gesamten Analysis dar. Ihr Grundthema ist es, das lokale Verhalten von Funktionen in effektiver Weise zu erfassen und zu beschreiben, vgl. 1.1.2.

### 5.2.A Ein fachmathematischer Zugang zur Differenzierbarkeit

Entsprechend zum oben ausgegebenen „Motto“ des Ableitungsbegriffs als *dem* Werkzeug zur Beschreibung des lokalen Änderungsverhalten von Funktionen nähern wir uns dem Begriff aus diesem Blickwinkel an. Wie schon in den Abschnitten 4.1.B und 4.2.A beim Folgen- bzw. dem Grenzwertbegriff ergeben sich die entsprechenden Begriffsbildungen in natürlicher Weise. Außerdem ermöglicht uns dieser Zugang im nächsten Unterabschnitt einen ebenso natürlichen Blick auf den fachlich bestimmenden Aspekt der Differenzierbarkeit: den der linearen Bestapproximation.

**5.2.1. Motivation: „Änderungsmodi“ von Funktionen.** Im Verlauf Ihrer fachlichen Analysisausbildung haben Sie sicherlich bemerkt, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die *Veränderung der Funktionswerte* bei Veränderung der Argumente. Dieser fachliche Aspekt ist natürlich eng mit der Kovariationsvorstellung des Funktionsbegriffs, siehe 3.2.3 und 3.4.2 verbunden.

Zwei dieser „Änderungsmodi“ sind im kanonischen Aufbau der Analysis dem Differenzierbarkeitsbegriff vorgelagert: die Monotonie und die Stetigkeit. Erinnern wir uns hier kurz an die Stetigkeit

#### Mathematische Faktenbox 15: Stetigkeit

**5.2.2. Definition (stetige Funktion).** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (definiert auf einem Intervall  $I$ ) heißt *stetig* im Punkte  $x_0 \in I$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (5.7)$$

Ist die Funktion  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  stetig, dann heißt sie (global) stetig auf  $I$ .

Diese Definition besagt in stark komprimierter Symbolik das folgende: Gegeben eine beliebig (klein) vorgegebene „Toleranzgrenze“ um den Funktionswert  $f(x_0)$  in Form einer  $\varepsilon$ -Umgebung für beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es immer ein „Sicherheitsintervall“ gegeben in Form einer  $\delta$ -Umgebung um die entsprechende Argumentstelle  $x_0$ , sodass für alle Argumente  $x \in I$ , die

in dieser Umgebung liegen, die Funktionswerte in der  $\varepsilon$ -Umgebung um  $f(x_0)$  liegen, siehe Abbildung 5.13

Etwas verkürzter kann man sagen, dass bei einer in  $x_0$  stetigen Funktion ein „kleines Wackeln“ am Argumente in der Nähe von  $x_0$  nur zu einem „kleinen Wackeln“ der Funktionswerte um  $f(x_0)$  zu Folge hat.

Mit der Stetigkeit sind die folgenden Aspekte verbunden: Umgebungsstetigkeit in Abstands- bzw. Umgebungsformulierung, Folgenstetigkeit, Vertauschbarkeit von Funktionsanwendung und Grenzwertbildung, sowie Approximierbarkeit durch eine Konstante. Die respektiven Grundvorstellungen sind Sprungfreiheit, Vorhersagbarkeit und Darstellbarkeit („Bleistiftstetigkeit“). Da wir in dieser Vorlesung die Setigkeit nur kurz (auf dem Weg zur Differenzierbarkeit) diskutieren, verweisen wir für alles Weitere auf Grefrath et al., 2016, p. 141.

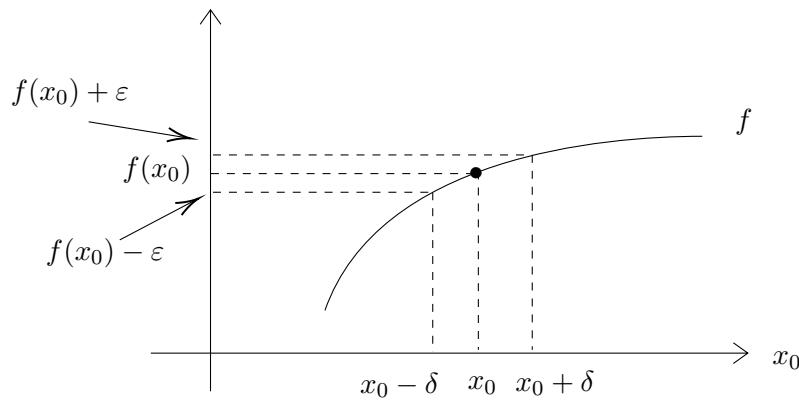


Abb. 5.13: Veranschaulichung der Stetigkeitsdefinition

**5.2.3. Eine Approximationsidee: waagrechte Gerade.** Der zuletzt beschriebene Aspekt kann für unsere Zwecke (Motivation der Differenzierbarkeit) auch noch stärker verkürzt werden zu: Nahe der Stelle  $x_0$  verhält sich eine dort stetige Funktion annähernd wie eine konstante Funktion, nämlich  $x \mapsto f(x_0)$ , siehe Abbildung 5.14

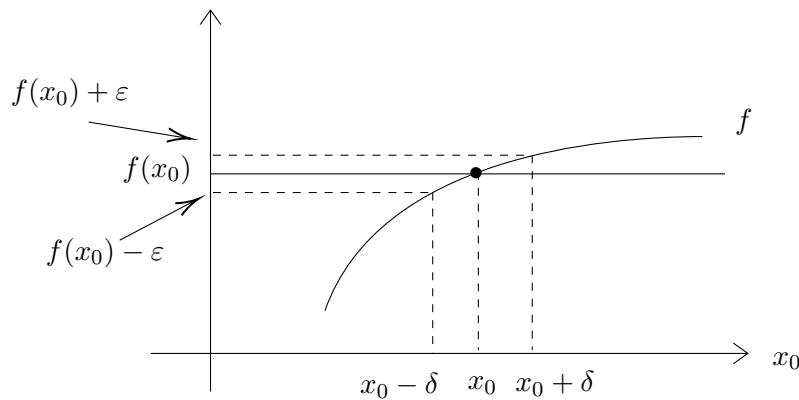


Abb. 5.14: Approximation von  $f$  durch die konstante Funktion  $x \mapsto f(x_0)$

Nun können wir uns dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : I \rightarrow R$  auf ähnliche Weise nähern. Wir wollen die oben beschriebene Näherung an eine stetige Funktion in Form

einer konstanten Funktion, also graphisch durch eine waagrechte Gerade verfeinern. Das ist deswegen nötig, weil die eben beschriebene Näherung nur sehr grob ist und nur qualitativ etwas über das Änderungsverhalten der Funktion nahe  $x_0$  sagt. Wir wollen nun auch quantitativ etwas darüber aussagen und beginnen mit der Idee, dass

Eine Funktion  $f$  in  $x_0$  differenzierbar genannt werden soll, falls sie sich dort „gut“ durch eine Gerade annähern lässt,

die nicht notwendigerweise waagrecht ist.

Um diese Idee zu formalisieren beginnen wir damit, dass wir allgemein für die noch zu findende Gerade  $g$  ansetzen:

$$g(x) = kx + d. \quad (5.8)$$

Klarerweise wollen wir, dass  $g$  durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  geht, d.h. dass

$$f(x_0) = g(x_0) = kx_0 + d \quad (5.9)$$

gilt. Die entscheidende Idee ist es nun, Punkte  $x$  nahe  $x_0$  zu betrachten, also Punkte  $x_0 + h$  für „kleines“  $h$ . Für solche Punkte ergibt sich

$$g(x) = g(x_0 + h) = k(x_0 + h) + d = kx_0 + d + kh = f(x_0) + kh, \quad (5.10)$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Gleichung (5.9) verwendet haben. Im Sinne unserer obigen Approximationsidee bedeutet das für  $x$  nahe  $x_0$  also „kleine“  $h$ , dass

$$f(x) = f(x_0 + h) \approx g(x_0 + h) = f(x_0) + kh \quad (5.11)$$

gelten soll.

Um diese Idee noch präziser zu fassen, können wir (5.12) verwenden, um den ja noch unbekannten Anstieg der approximierenden Geraden zu bestimmen, nämlich

$$k \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (5.12)$$

Auf diese Weise haben wir einen „alten Bekannten“ aus der Schulmathematik auf ganz natürliche Weise (zurück)gewonnen, den *Differenzenquotienten*. Seine geometrische Bedeutung ist, dass er die Steigung der Geraden zwischen den Punkten  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  bezeichnet und so den Anstieg der Sekante durch diese beiden Punkte des Funktionsgraphen von  $f$ , siehe Abbildung 5.15.

Zunächst präzisieren wir und vergeben einen offiziellen Namen:

#### Mathematische Faktenbox 16: Differenzenquotient

**5.2.4. Definition (Differenzenquotient).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $x_0$  ein Punkt im Intervall  $I$ . Für  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$  heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.13)$$

*Differenzenquotient von  $f$  bei  $x_0$ .*

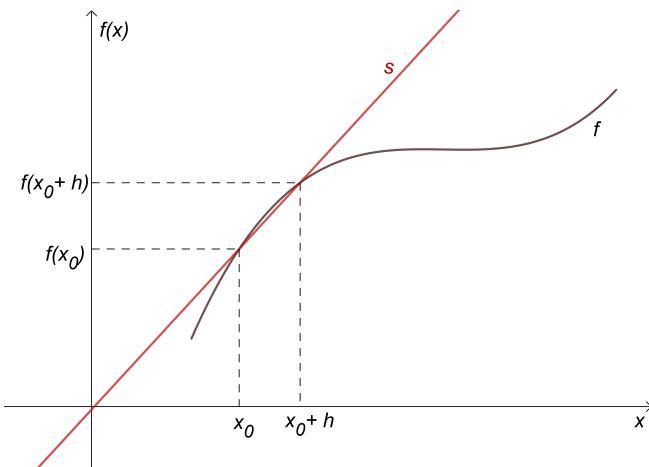


Abb. 5.15: Geraden zwischen den Punkten  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$

Der weitere Weg der Präzisierung unserer Approximationsidee ist nun vorgezeichnet. Wir müssen uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten (5.13) befassen, wobei wir  $x$  gegen  $x_0$  gehen lassen. Das hat auch den folgenden Vorteil: Der Differenzenquotient hängt von den *zwei Variablen*  $x_0$  und  $x$  ab und im Grenzwert  $x \rightarrow x_0$  können wir eine davon (nämlich  $x$ ) loswerden.

Um das effizient tun zu können, wiederholen wir den Grenzwertbegriff für Funktionen. Eine Möglichkeit ist es, diesen Begriff möglichst nahe am bzw. analog zum Grenzwertbegriff für Folgen zu definieren, für Alternativen via Folgen siehe etwa (Steinbauer, 2022, 2.1.21) bzw. Forster, 2016, §10.

#### Mathematische Faktenbox 17: Grenzwert von Funktionen

**5.2.5. Definition (Funktionsgrenzwert).** Eine reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert an der Stelle  $x_0$  gegen ein  $c \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - c| < \varepsilon. \quad (5.14)$$

In diesem Fall heißt  $c$  *Grenzwert* oder *Limes* der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  oder  $f(x) \rightarrow c$  für  $x \rightarrow x_0$ .

Diese Formulierung ist weitgehend analog zur Grenzwertdefinition für Folgen. Sie ist formal auch ganz nahe an der Stetigkeitsdefinition, was natürlich kein Zufall ist; daher müssen wir ganz dringend einige Bemerkungen machen.

#### 5.2.6. Bemerkungen, Beispiele & Erweiterungen.

(1) Aus den respektiven Definitionen sieht man ganz leicht, dass

$f$  genau dann stetig in  $x_0$  ist, falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt,

also der Limes von  $f$  an der Stelle  $x_0$  mit dem Funktionswert  $f(x_0)$  an dieser Stelle übereinstimmt.

(2) Beachten Sie, dass wir *nicht* vorausgesetzt haben, dass  $x_0 \in D$  liegen muss. Tatsächlich ist der Begriff auch sinnvoll, wenn  $x_0$  ein sogenannter *Berührpunkt* von

### Mathematische Faktenbox 17 – Fortsetzung

$D$  ist, d.h. falls es in jeder (noch so kleinen) Umgebung von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  einen Punkt aus  $D$  gibt. Ein Standardbeispiel wäre etwa ein Randpunkt eines offenen Intervalls (z.B. 1 ist Berührpunkt von  $[0, 1)$  obwohl  $1 \notin [0, 1)$ ). Ein etwas interessanterer Berührpunkt begegnet uns in unserem ersten Beispiel.

- (3) Wir betrachten die Funktion (vgl. Abb. 5.16)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \quad (5.15)$$

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , denn für  $x \in D$  (also  $x \neq 1$ ) gilt  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$  und  $x + 1 \rightarrow 2$  für  $x \rightarrow 1$ .

- (4) Um etwas interessantere Beispiele betrachten zu können, etwa „echte“ Polstellen von rationalen Funktionen, müssen wir den Begriff etwas erweitern und sagen, die Funktion  $f$  divergiert an einer Stelle  $x_0$  (bestimmt) gegen Unendlich, falls  $f(x)$  bei Annäherung an  $x_0$  beliebig groß wird, d.h. formal falls

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > C \quad (5.16)$$

gilt. Wir schreiben dann  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

Analog definiert man die (bestimmte) Divergenz gegen minus Unendlich. Mit diesem Begriffsapparat ausgestattet, kann man nun folgendes Beispiel angehen:

- (5) Wie betrachten  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x^2$ , vgl. Abb. 5.18. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (5.17)$$

- (6) Um auch Beispiele anzugehen, wo am Pol ein Vorzeichenwechsel stattfindet, definieren wir einseitige Grenzwerte, bei Annäherung an  $x_0$  von oben ( $x \in D$ ,  $x > x_0$ ) und unten ( $x \in D$ ,  $x < x_0$ ). Damit erhält man etwa  $\lim_{x \searrow 0} 1/x = \infty$  und  $\lim_{x \nearrow 0} 1/x = -\infty$ , vgl. Abb. 5.17.
- (7) Schließlich definiert man auch Grenzwerte, wenn  $x$  beliebig groß wird. Da wir diesen Begriff im gegenwärtigen Kontext der Differentialrechnung nicht benötigen werden, verweise wir hier lediglich auf die Analysis-Literatur, etwa (Steinbauer, 2022, 2.1.25), Forster, 2016, §10.

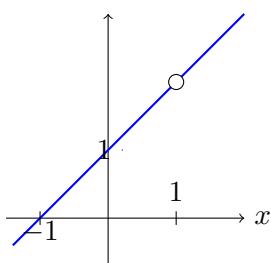


Abb. 5.16:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

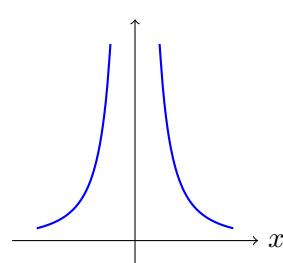


Abb. 5.17:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

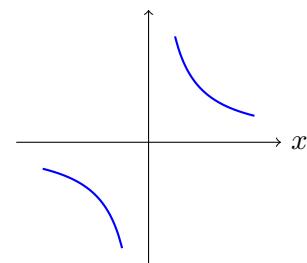


Abb. 5.18:  $f(x) = \frac{1}{x}$

**5.2.7. Technisches zur Formulierung des Grenzwerts des Differenzenquotienten.**

Wir verfolgen nach wie vor unsere Approximationsidee aus 5.2.3 und wollen diese nun exaktifizieren. Dazu benötigen wir (zum Glück) nur den einfachsten der eben besprochenen Grenzwertbegriffe für Funktionen, nämlich den Fall, dass der Punkt  $x_0$  des Interesses ein Punkt in einem Intervall  $I$  und der Grenzwert endlich ist.

Eine Feinheit ist dabei allerdings, dass der Differenzenquotient in  $x_0$  laut Definition 5.2.4 für  $x = x_0$  gar nicht definiert ist. Daher müssen wir in (5.14) das „ $\forall x \in I$ “ zu „ $\forall x \in I, x \neq x_0$ “ abändern. Dafür verwendet man das Symbol  $\lim_{x_0 \neq x \rightarrow x_0}$ . Oft wird diese Feinheit auch nicht in der Notation widergespiegelt und einfach  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  geschrieben — im stillschweigenden Einverständnis, dass  $x = x_0$  ausgeschlossen ist. Jetzt sind wir endlich so weit, das Endprodukt unserer Approximationsidee aus 5.2.3 formulieren zu können.

### Mathematische Faktenbox 18: Differenzierbarkeit und Ableitung

**5.2.8. Definition (diffenzierbare Funktion).** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar* in einem Punkt  $x_0$  im Intervall  $I$ , falls

$$\lim_{x \neq x_0 \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5.18)$$

existiert und endlich ist.

Diesen Grenzwert nennen wir die *Ableitung* der Funktion  $f$  an der Stelle (bzw. im Punkt)  $x_0$  und bezeichnen sie mit  $f'(x_0)$ . Ist  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  diffenzierbar, dann nennen wir  $f$  (global) diffenzierbar auf  $I$ . In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) \quad (5.19)$$

(erste) *Ableitungsfunktion* von  $f$ .

**5.2.9. Nachbetrachtung und Terminologie (Differentialquotient).**

- (1) Falls der Limes in (5.18) existiert und endlich ist, besagt die Definition, wie auch schon oben antizipiert, dass die Ableitung im Punkt  $x_0$  gleich dem Limes des Differenzenquotienten ist. Oft wird der Ausdruck

$$\lim_{x \neq x_0 \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5.20)$$

als *Differentialquotient* von  $f$  bei  $x_0$  bezeichnet — und zwar unabhängig davon, ob der Grenzwert existiert bzw. endlich ist und daher zur Definition der Ableitung „taugt“. Mit dieser Terminologie kann man formulieren, dass der Differentialquotient der Grenzwert des Differenzenquotienten ist und, falls er existiert und endlich ist, gleich der Ableitung der Funktion an der betreffenden Stelle ist bzw. diese definiert.

- (2) Geometrisch ergibt sich die Ableitung also in diesem präzisen Sinn als der Grenzwert der Sekantensteigungen. Somit ist die Gerade durch  $(x_0, f(x_0))$  mit dem Anstieg  $f'(x_0)$  jene gesuchte Gerade, die in der Nähe von  $(x_0, f(x_0))$  die Funktion  $f$  „besonders gut“ approximiert. Deshalb wird sie auch als *Schmiegerade* bezeichnet. Diese Begrifflichkeit haben wir schon in Abschnitt 5.1 in unserer didaktischen Diskussion des Zugangs zur

Differentialrechnung über das Tangentenproblem verwendet und werden ihren mathematischen Hintergrund später noch präziser fassen.

Höchste Zeit, ein paar Beispiele und Nicht-Beispiele zu besprechen.

### Mathematische Faktenbox 19: Differenzierbare Funktionen

#### 5.2.10. Beispiel ((nicht)-differenzierbare Funktionen)).

- (1) Einfache differenzierbare Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  sind natürlich konstante Funktionen  $f(x) = c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  mit verschwindender Ableitung, denn für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt für den Differenzenquotienten bei  $x_0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \quad (5.21)$$

und wir müssen nicht einmal einen Grenzwert berechnen um auf  $f'(x_0) = 0$  zu kommen! Aber für dieses Beispiel hätten wir den Ableitungsbegriff gar nicht gebraucht!

- (2) Die „nächst-schwierigere“ Funktion ist  $f(x) = x$ . Diese ist natürlich ebenfalls auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und zwar mit Ableitung  $f'(x) = 1$ , denn für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  und alle  $h \neq 0$  gilt

$$\frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1 \quad (5.22)$$

und wieder mussten gar keinen Grenzwert berechnen.

- (3) Die Betragsfunktion  $x \mapsto |x|$  ist nur auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar und in  $x_0 = 0$  *nicht differenzierbar*. Denn es gilt für jedes positive  $h$ , dass

$$\frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \text{aber für } h < 0 \quad \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1. \quad (5.23)$$

Daher existiert der Grenzwert in (5.18), genauer der Grenzwert

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} \quad (5.24)$$

nicht! Insgesamt haben wir also berechnet, dass

$$|x'|' = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \not\exists & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Betrachten wir den Funktionsgraph von  $|x|$  in Abbildung 5.19, so sehen wir, dass er bei  $x_0 = 0$  einen Knick hat. Die Ableitung konstant  $-1(+1)$  für negative (positive) Argumente können wir ebenfalls ablesen.

- (4) Weitere auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbare Funktionen sind etwa die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus, wobei gilt

$$(e^x)' = e^x, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x). \quad (5.26)$$

Diese Aussagen folgen leicht aus der Definition der Differenzierbarkeit und Ableitung unter der Verwendung der typischen Eigenschaften dieser Funktionen, siehe etwa (Steinbauer, 2022, 3.1.10), Forster, 2016, §15.

### Mathematische Faktenbox 19 – Fortsetzung

- (5) Die Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$  ist zwar auf  $[0, \infty)$  definiert, aber nur auf  $(0, \infty)$  differenzierbar. Tatsächlich gilt für  $x_0 > 0$ , dass  $f'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$ , denn

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (x \rightarrow x_0). \quad (5.27)$$

Allerdings gilt für  $x_0 = 0$ , dass

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow \infty \quad (h \rightarrow 0) \quad (5.28)$$

und somit ist der Limes in (5.18) nicht endlich und  $\sqrt{x}$  in  $x_0 = 0$  *nicht* differenzierbar. Die Funktion hat gegen  $x_0$  hin einen unbeschränkten Anstieg und hätte eine senkrechte Tangente, was aber von Definition 5.2.8 verboten wird, siehe Abbildung 5.20.

**5.2.11. Die Lehren aus den Nicht-Beispielen.** Die oben diskutierten Beispiele der Betrags- und der Wurzelfunktion sind symptomatisch für nicht-differenzierbare Funktionen und wir können einige Lehren daraus ziehen:

- (1) Bei der Betragsfunktion werden wir — und das ist in gewisser Weise banal aber wichtig zu erwähnen — erstmals darauf gestoßen, dass zwar in den allermeisten graphischen Veranschaulichungen der Differenzierbarkeit  $h$  positiv, d.h.  $x_0 + h$  rechts von  $x_0$  gezeichnet wird, dies in der Definition aber *nirgends* gefordert wird! (Lediglich  $h = 0$  bzw.  $x = x_0$  ist ausgeschlossen!)
- (2) Der Graph der Betragsfunktion hat in  $x_0 = 0$  einen Knick und dieses Verhalten ist prototypisch für nicht-differenzierbare Funktionen ebenso wie Sprünge Prototypen für unstetige Funktionen sind.

Eine Funktion mit „Knick“ ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.

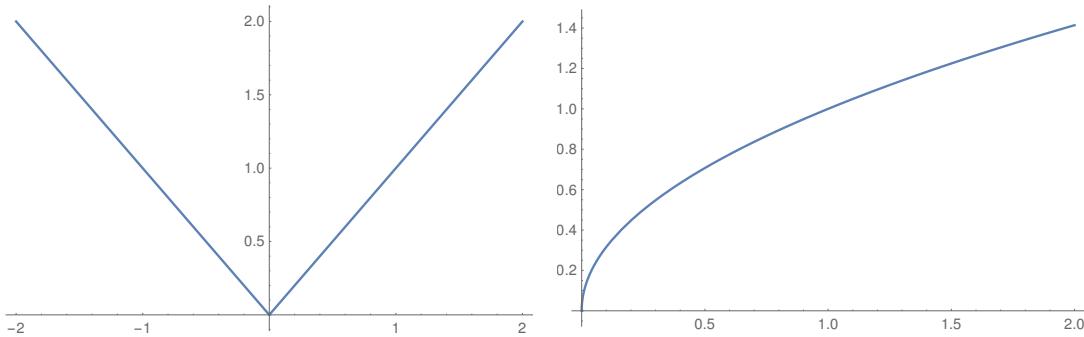


Abb. 5.19: Graph der Betragsfunktion  $|x|$    Abb. 5.20: Graph der Wurzelfunktion  $\sqrt{x}$

- (3) Die Nicht-Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion in  $x_0 = 0$  ist ebenso symptomatisch.

Eine Funktion mit unbeschränktem Anstieg ist an der entsprechenden Stelle nicht differenzierbar, oder etwas legerer: Senkrechte Tangenten gibt es nicht.

Die Tatsache, dass es sich bei der Wurzelfunktion beim problematischen Punkt um einen Randpunkt des Intervalls handelt ist übrigens unerheblich, wie man z.B. am etwas komplizierteren Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x \leq 0) \end{cases} \quad (5.29)$$

sieht, vgl. Abbildung 5.21.

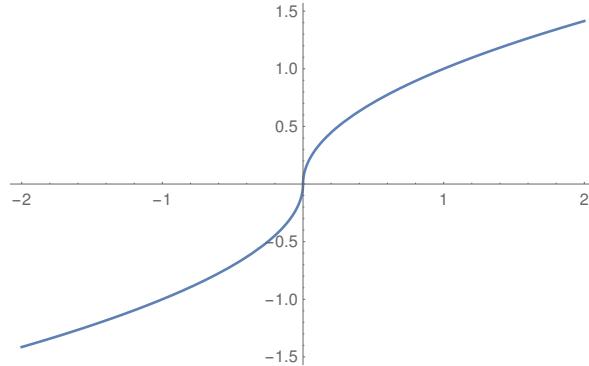


Abb. 5.21: Graph der Funktion  $f$  aus (5.29)

- (4) Beachten Sie, dass die Beispiele  $|x|$  und  $\sqrt{x}$  an der Stelle  $x_0 = 0$  jeweils eine der beiden Bedingungen an den Limes in Definition 5.2.8 nicht erfüllen, nämlich die Existenz ( $|x|$ ) bzw. die Endlichkeit ( $\sqrt{x}$ )!
- (5) Bemerken Sie, dass in allen drei Beispielen  $|x|$ ,  $\sqrt{x}$  und  $f$  aus (5.29) die Funktionen in  $x_0 = 0$  zwar nicht differenzierbar aber dennoch stetig sind. Das bedeutet, wie auch in 5.2.3 antizipiert, dass Differenzierbarkeit stärker ist als Stetigkeit. Tatsächlich gilt der wichtige Zusammenhang:

#### Mathematische Faktenbox 20: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

**5.2.12. Satz (Stetigkeit vs. Differenzierbarkeit).** Für Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt in jedem Punkt  $x_0$  im Intervall  $I$ :

$$\boxed{f \text{ differenzierbar in } x_0 \iff f \text{ stetig in } x_0} \quad (5.30)$$

Dabei ist die Implikation ganz leicht einzusehen, denn für eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow x_0), \quad (5.31)$$

also  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , was ja die Stetigkeit bei  $x_0$  bedeutet, vgl. 5.2.6(1).

- (4) Die ganze Wahrheit über stetige vs. differenzierbare Funktionen wird vom prototypischen Beispiel  $|x|$  natürlich nicht abgedeckt. Tatsächlich ist sie viel komplizierter: Es gibt z.B. Funktionen, die auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig aber in keinem(!) Punkt differenzierbar sind, etwa die sog. Weierstraß-Funktion  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$ .

**5.2.13. Ableitungsregeln — praktische Aspekte.** Natürlich will man nicht, wie in Beispiel 5.2.10 ständig auf die Definition der Differenzierbarkeit zurückgreifen, um diese nachzuweisen bzw. *wichtiger* die Ableitung gegebener Funktionen zu berechnen. Daher hat man, analog zum Fall des Folgengrenzwerts (vgl. 4.2.14) einen Kalkül entwickelt. Wie auch beim Folgengrenzwert stechen zwei Aspekte hervor

- (1) Wissen über die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen;
- (2) Differentiationsregeln, die es erlauben aus der Differenzierbarkeit einfacher Funktionen auf die Differenzierbarkeit komplizierterer Funktionen zu schließen *und ganz konkret* ihre Ableitung aus denen der einfachen „Bausteine“ zu berechnen.

Diese Werkzeuge bilden einen wirkungsvollen Kalkül, dessen Grundzüge Sie sicherlich schon aus der Schule kennen. Ableitungen komplizierterer Funktionen werden wie mit einem Baukastensystem aus Ableitungen einfacherer Funktionen zusammengesetzt bzw. berechnet. Dieser Kalkül bietet sich natürlich besonders an, die zweite der Wintersche Grunderfahrungen (mathematische Welt, vgl. 2.2.7) zu vermitteln.

Wir präzisieren diese Hilfsmittel wie folgt.

#### Mathematische Faktenbox 21: Faktensammlung: differenzierbare Funktionen

**5.2.14. Proposition (Differentiationsregeln).** Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen die im Punkt  $x_0$  im Intervall  $I$  differenzierbar sind. Dann gilt (für Beweise siehe (Steinbauer, 2022, 3.1.17, 3.1.25 und 3.1.29)):

- (1) (Linearkombinationen) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist  $af + bg$  differenzierbar in  $x_0$  und es gilt

$$(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0). \quad (5.32)$$

- (2) (Leibniz- bzw. Produktregel) Die Produktfunktion  $fg$  ist in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad (5.33)$$

- (3) (Quotientenregel) Falls  $g(x_0) \neq 0$  ist, dann ist der Quotient  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad (5.34)$$

- (4) (Kettenregel) Für Intervalle  $I$  und  $J$  und Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(I) \subseteq J$  gilt: Falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist und  $g$  differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$ , dann ist die Verknüpfung  $g \circ f$  differenzierbar in  $x_0$  und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (5.35)$$

Mittels diesen Regeln, die ja nichts anderes besagen, als dass die Differentiation mit den Grundoperationen für Funktionen „verträglich“ ist, kann man ohne Mühe für wichtige Klassen von Funktionen Differenzierbarkeit und Ableitung bestimmen. Die Kettenregel ist zwar etwas schwieriger (zu formulieren), aber sie stellt sich als überaus mächtig heraus, z.B. führt sie sehr schnell auf die

- (5) (Inversenregel) Ist  $f : I \rightarrow J$  eine bijektive Funktion zwischen Intervallen (folgt z.B. falls  $f$  stetig und streng monoton ist, siehe (Steinbauer, 2022, 2.2.19)) und ist  $f$  in

### Mathematische Faktenbox 21 – Fortsetzung

$x_0 \in I$  differenzierbar. Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  in  $y_0 = f(x_0)$  und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (5.36)$$

Wir nennen einige wichtige konkrete Beispiele von Funktionen, deren Differenzierbarkeit und Ableitung schnell mittels des „Baukastens“ leicht erledigt werden können.

#### 5.2.15. Korollar (Differenzierbare Funktionen).

- (1) Potenzfunktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$(cx^n)' = cnx^{n-1} \quad (5.37)$$

(siehe 5.2.14(2)) und daher auch Polynomfunktionen (5.2.14(1)) mit Ableitung

$$\begin{aligned} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)'(x) \\ = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

- (2) Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt beispielsweise (5.2.14(3))

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \quad (5.39)$$

- (3) Die Tangensfunktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt

$$(\tan x)' = 1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x). \quad (5.40)$$

(5.2.14(3))

- (4) Die Logarithmusfunktion ist global auf ihrem Definitionsbereich  $(0, \infty)$  differenzierbar mit

$$\ln(x)' = 1/x \quad (5.41)$$

(5.2.14(5)). Mit 5.2.14(4) folgt dann für  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln(x)})' = e^{\alpha \ln(x)} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (5.42)$$

und daher insbesondere

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad (5.43)$$

Und das ist erst der Anfang ...

### 5.2.B Die Ableitung als lineare Bestapproximation

In diesem Abschnitt wollen wir nun einen wichtigen Aspekt des Differenzierbarkeitsbegriffs vertiefen, nämlich den der

Ableitung als lineare Bestapproximation an die ursprünglich Funktion.

Dieser *Linearsierungsaspekt*, obwohl er in der Schulmathematik nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist *der mathematisch bestimmende Aspekt der Differenzierbarkeit*. Unter vielen anderen fachlichen Vorzügen dieses Aspekts erlaubt nur(!) er eine Verallgemeinerung der Differentialrechnung ins Mehrdimensionale also z.B. auf Funktionen<sup>1</sup>  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir beginnen mit einem Blick auf Wohlbekanntes, nämlich die Güter der Approximation der Normalparabel durch ihre Tangente.

**5.2.16. Die Normalparabel und ihre Tangente.** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad (5.44)$$

und ihre Tangente  $t$  im Punkt  $P = (1, 1)$ , siehe Abbildung 5.22. Dabei interessieren wir uns für die Details der Annäherung der Tangente an  $f$  in der Nähe von  $P$ . Zunächst gilt für die Tangente

$$t(x) = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (5.45)$$

Nun betrachten wir die Abweichung der Tangente  $t$  von der Funktion  $f$ . Genauer berechnen wir die Abweichung  $r(h) := f(1 + h) - t(1 + h)$  für kleine  $h$  also für Punkte in der Nähe von  $P$ . Es gilt

$$\begin{aligned} r(h) &= f(1 + h) - t(1 + h) \\ &= (1 + h)^2 - (2(1 + h) - 1) = 1 + h^2 + 2h - (2h + 1) = h^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Wie erwartet konvergiert die Abweichung  $r(h)$  gegen 0 für  $h \rightarrow 0$ .

So weit, so gut: Aber wie sieht es nun mit anderen Geraden  $g$  durch den Punkt  $P$  aus, siehe auch Abb. 5.23. Dort sollte doch auch die entsprechende Abweichung gegen 0 gehen. Tatsächlich ist das so, denn für eine Gerade  $g$  durch  $P = (1, 1)$  mit beliebigem aber von der Tangentensteigung abweichenden Anstieg  $k \neq 2$  gilt

$$g(x) = k(x - 1) + 1 \quad (5.47)$$

und daher für die Abweichung  $r_g(h)$  der Geraden  $g$  von der Funktion  $f$

$$\begin{aligned} r_g(h) &= f(1 + h) - g(1 + h) = (1 + h)^2 - (k(1 + h - 1) + 1) \\ &= 1 + 2h + h^2 - (kh + 1) = h^2 + (2 - k)h. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Und somit gilt wie erwartet auch hier  $r_g(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Vergleichen wir nun aber die beiden *relativen* Abweichungen  $r(h)/h$  und  $r_g(h)/h$ , so fällt ein deutlicher Unterschied auf. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} \frac{r(h)}{h} &= h \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \text{ aber} \\ \frac{r_g(h)}{h} &= h + (2 - k) \not\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \text{ denn } k \neq 2, \text{ weil } g \text{ ja nicht die Tangente ist.} \end{aligned} \quad (5.49)$$

<sup>1</sup>Für deren Bedeutung siehe etwa 3.3.12.

Das bedeutet, dass bei der Tangente auch der relative Fehler gegen 0 geht, während bei allen anderen Geraden durch den Punkt  $P$ , das aber *nicht* der Fall ist! Das Ergebnis unserer Überlegungen können wir in unseren Beispiel wie folgt zusammenfassen:

Die Bedingung  $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  ist der analytische Kern der Schmieeigenschaft der Tangente.

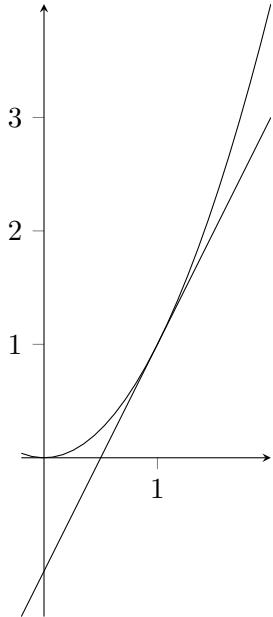


Abb. 5.22: Die Normalparabel und ihre Tangente bei  $P = (1, 1)$

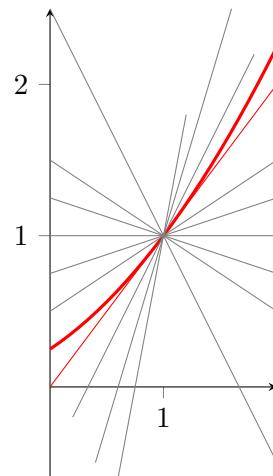


Abb. 5.23: Die Tangente als Bestapproximierende im „Geradenbüschel“ durch  $(x_0, f(x_0))$

**5.2.17. Die Tangente ist die „beste“ Gerade.** Alle unseren oben ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für die Normalparabel  $f(x) = x^2$ , sondern sind allgemein gültig, d.h. für jede differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , siehe etwa Danckwerts und Vogel, 2006, p. 72. Tatsächlich gilt auch dann *nur* für die Tangente die *verschärzte* Restbedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \text{statt nur der einfachen Bedingung} \quad \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0. \quad (5.50)$$

Letztere besagt ja lediglich, dass sich Gerade und Kurve im Punkt  $P$  berühren, während erstere, also die verschärzte Bedingung die Tangente zur *lokalen linearen Bestapproximation* macht. Geometrisch bedeutet dies, dass

die Tangente im Geradenbüschel durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  die bestapproximierende Gerade ist,

siehe Abbildung 5.23

In diesem Sinne ist die Tangente im Punkte  $x_0$  die bestmögliche Approximation einer Funktion  $f$  durch eine Gerade, also durch eine *lineare Funktion* in der Nähe des Punktes  $(x_0, f(x_0))$ . Daher spricht man von der Tangente als der (lokale) *linearen Bestapproximation* an die Funktion und das ist auch der mathematische Ursprung der Bezeichnung *Schmieegerade*.

An dieser Stelle ist es essentiell zu bemerken, dass lineare Funktionen aufgrund ihrer Einfachheit gut geeignete bzw. „dankbare“ Näherungen an die ursprüngliche Funktion sind. So sind etwa die obigen Geraden durch  $(x_0, f(x_0))$  durch nur eine einzige reelle Zahlen (den Anstieg  $k$ ) eindeutig bestimmt und die (möglicherweise sehr) komplizierte ursprüngliche Funktion kann in der Nähe dieses Punktes mit minimalen Fehler durch ein sehr einfaches mathematisches Objekt, nämlich eine lineare Funktion ersetzt werden!

**5.2.18. Mathematische Präzisierung.** Wir wenden uns jetzt einer mathematisch exakten Fassung des oben diskutierten Sachverhalts zu, siehe auch (Steinbauer, 2022, 3.1.21). Die Eigenschaft des relative Fehlers  $r(h)/h$  gegen 0 zu konvergieren charakterisiert nämlich die Differenzierbarkeit von Funktionen.

#### Mathematische Faktenbox 22: Differenzierbarkeit mittels lin. Approximation

**5.2.19. Theorem.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und sei  $x_0$  ein Punkt im Intervall  $I$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0$  differenzierbar, falls es

- (1) eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gibt und
- (2) eine Funktion  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a \cdot h + r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \neq 0 \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \text{gilt.} \quad (5.51)$$

In diesem Fall ist natürlich  $f'(x_0) = a$ .

An diesem Punkt greift nun auch die Verallgemeinerung der Differentialrechnung für Funktionen mit höherdimensionalem Definitionsbereich oder für noch allgemeinere Situationen an: Eine Funktion ist differenzierbar in einem Punkt, falls sie dort besonders gut, d.h. im Sinne der verschärften Bedingung durch eine lineare Funktion approximiert werden kann.

Im Falle einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , vgl. 3.3.12 ist die lineare Bestapproximation nicht mehr durch eine Gerade (die Tangente) gegeben, sondern durch eine Ebene, die sogenannte *Tangentialebene*, siehe auch Abbildung 5.24

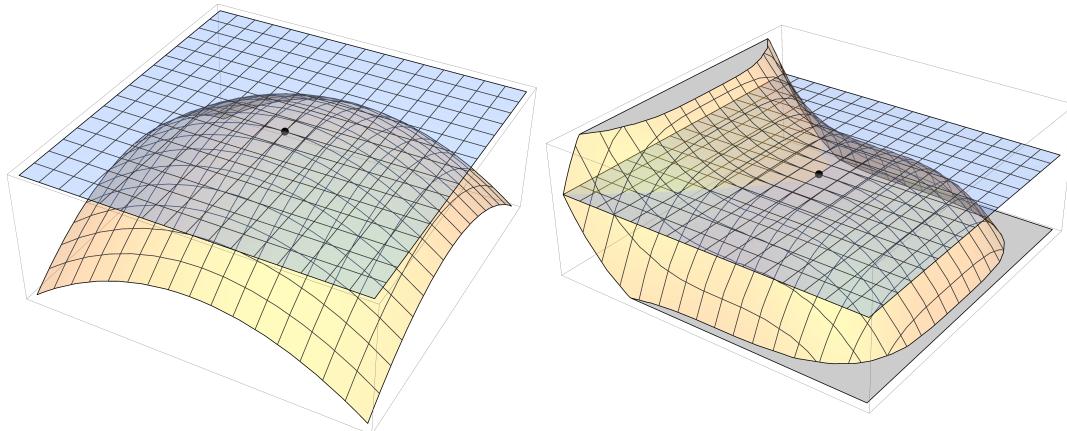


Abb. 5.24: Die Tangentialebene als lineare Bestapproximation an den Graphen von Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lokal um den eingezeichneten Punkt

**5.2.20. Anwendungen.** Abgesehen von der großen theoretischen Bedeutung des obigen

Gesichtspunkts der Ableitung als linearen Näherung ergeben sich daraus auch ganz handfeste praktische Resultate. Die Grundüberlegung ist, dass für eine im Punkt  $x_0$  differenzierbare Funktion  $f$  die Tangente in  $x_0$  nahe  $x_0$  die Funktion gut approximiert, genauer, dass für kleine  $|h|$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) h \quad (5.52)$$

gilt. Wir zählen exemplarisch nur zwei sich daraus ergebende Anwendungen auf, siehe auch Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 3.3.2 insbesondere für das Newtonverfahren zur Berechnung von Nullstellen.

- (1) (Näherungsgweise Berechnungen) Wollen wir etwa  $\sqrt{15}$  berechnen, so können wir im gegenwärtigen Kontext wie folgt vorgehen: Für die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $x_0 = 16$  setzen wir  $h = -1$ . Dann gilt wegen  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  mit (5.52)

$$\sqrt{15} = \sqrt{16 - 1} \approx \sqrt{16} - \frac{1}{2\sqrt{16}} = 4 - \frac{1}{8} = 3.875, \quad (5.53)$$

was bereits die ersten beiden Nachkommastellen korrekt ist, da  $\sqrt{15} \approx 3.87298334$  gilt.

- (2) (Qualitatives Verhalten von Funktionen) Wir betrachten als Beispiel die Sinusfunktion nahe  $x_0 = 0$ . Es gilt ja  $\sin'(x) = \cos(x)$  und daher  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ . Damit können wir für kleine  $|h|$  schreiben

$$\sin(h) = \sin(0 + h) \approx \sin(0) + \sin'(0) h = h, \quad (5.54)$$

was nichts anderes bedeutet, dass der Sinus nahe  $x_0 = 0$  sich so wie die Identität verhält, also  $\sin(h) \approx h$ , was auch in Abbildung 5.25 sichtbar wird.

Genauer können wir sogar schreiben

$$\sin(h) = \sin(0 + h) = \sin(0) + \sin'(0) h + r(h) = h + r(h), \quad (5.55)$$

wobei  $r(h)/h = (\sin(h) - h)/h \rightarrow 0$  gilt.

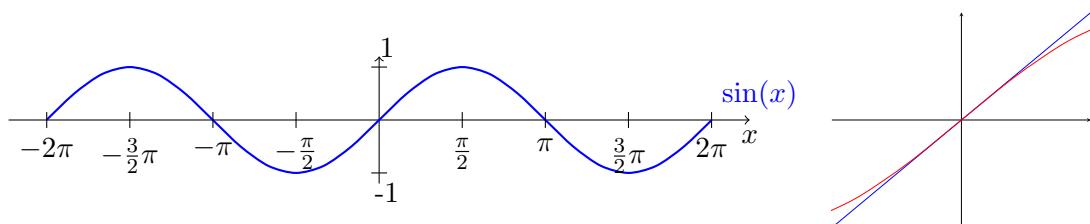


Abb. 5.25: Der Graph des Sinus und sein Verhalten bei 0

Verfolgt man diese Idee konsequent weiter, so gelangt man schließlich zu *Taylorreihen* und zum Satz von Taylor, siehe Danckwerts und Vogel, 2005, Abschn. 4.4.

### 5.3 Kleines historisch-philosophisches Intermezzo

Im Anschluss an unsere Diskussion des „Unendlichen“ in Abschnitt 4.2.E diskutieren wir hier aus einer ähnlichen Perspektive die kurz Differentialrechnung. Natürlich gibt es auch zu diesem Thema eine unüberschaubare Fülle guter Literatur, siehe etwa die einschlägige Darstellung und die Zitate in Greefrath et al., 2016, Abschn. 4.1.

**5.3.1. Das Problem mit dem Tangentenproblem — eine Nachbetrachtung.** Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung bildete sich als Tangentenproblem ab dem 17. Jahrhundert heraus: Finde die „Tangente“ in einem Punkt an eine beliebige Kurve. Dabei besteht zunächst das Problem, überhaupt den Begriff einer Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie Kreis und Ellipse und der jeweiligen geometrischen Konstruktion der Tangente zu einer guten Verallgemeinerung für beliebige Kurven gelangen kann bzw. soll.

Es stellt sich heraus, dass der (aus heutiger Sicht) naheliegende Lösungsansatz, die Tangente an eine Kurve als Schmiegegerade zu definieren nicht nur zu einer guten Definition, sondern auch auf eine einfache und konkrete Möglichkeit führt, die Tangente tatsächlich zu berechnen. Wir unterscheiden hier nochmals explizit zwischen *Schmiegegerade*, also jener Geraden die durch Sekanten über immer kleiner werdenden Intervalle approximiert wird und der *Tangente* als aus einem geometrischen Kontext kommenden Geraden, die die Kurve berührt und dort „die gleiche Richtung“ hat. Diese Unterscheidung ist gut dazu geeignet, den Paradigmenwechsel im Kontext des schulmathematischen Zugangs in Abschnitt 5.1.A erstens zu erkennen und ihn dann zu benennen und zu diskutieren.

**5.3.2. Kleiner historischer Abriss.** Was wir in Definition 5.2.8 locker mittels des Grenzwertbegriffs erledigt haben, stellte die Mathematiker\*innen bis vor ca. 300 Jahren vor gewaltige technische Probleme. Konkret bestand die Schwierigkeit darin, die Approximationsidee technisch in den Griff zu bekommen: Wie sollte man mit den Sekanten über beliebig kleinen Intervallen hantieren?

Erste Ansätze gehen auf Pierre de Fermat (ca. 1600–1665) und René Descartes (1596–1650) zurück und waren algebraischer Natur. Ende des 17. Jahrhunderts gelang es dann Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) unabhängig voneinander, widerspruchsfreie und funktionierende Kalküle zu entwickeln. Zwischen diesen beiden Wissenschaftern kam es in der Folge zu einem Streit darüber, wer als der (wahre) Erfinder der Infinitesimalrechnung gelten solle, der in die Wissenschaftsgeschichte einging und selbst nach dem Tod der beiden Protagonisten lange nicht beigelegte werden konnte. Dabei spielten naturgemäß nationale und politische Interessen eine große Rolle, siehe etwa (Sonar, 2016).

Klar ist, dass Newton das Problem physikalisch über das Momentangeschwindigkeitsproblem anging, während Leibniz geometrisch über das Tangentenproblem zu seiner Lösung gelangte. Beide Kalküle erlaubten das Abstrahieren von rein geometrischen Vorstellungen hin zu einer konkreten rechnerischen Behandlung und werden deshalb oft als eigentlicher Beginn der Analysis betrachtet.

Newton und Leibniz arbeiteten jedoch beide mit „unendlich kleinen“ positiven Zahlen. Diese Vorgehensweise, die zugleich intuitiv aber auch schlecht nachvollziehbar war, wurde bereits von Zeitgenossen kritisiert, z.B. von George Berkeley (1685–1753) in einem Werk mit dem polemischen Titel „The analyst; or, a discourse addressed to an infidel mathematician“. Tatsächlich konnte erst in den 1960ern Abraham Robinson (1918–74) die Verwendung sog.

infinitesimaler Größen mathematisch exakt, d.h. axiomatisch fundieren — seine Nichtstandardanalysis ist uns schon in 4.4.2.34 kurz begegnet.

Der Hauptstrang der Entwicklung nahm aber einen anderen Weg. Newton hatte seine Version der Infinitesimalrechnung ja im physikalischen Kontext entwickelt und in seiner kurz „Principia“ genannten Schrift „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica<sup>2</sup>“ nicht nur das universelle Gravitationsgesetz formuliert, sondern auch die Bewegungsgesetze, womit er den Grundstein für die klassische Mechanik legte, die deswegen oft auch *Newton'sche Mechanik* genannt wird. Daher wurde die Analysis, getrieben von immer zahlreicher Anwendungen, trotz der herrschenden Unsicherheiten bzgl. ihrer Grundlagen konsequent weiterentwickelt. So gehen z.B. die heute bekannten Ableitungsregeln vgl. 5.2.14 vor allem auf Werke von Leonhard Euler (1707–83) zurück.

Wie auch in Abschnitt 4.4.2.34 dargestellt setzte erst Mitte des 19. Jahrhunderts eine stärkere Exaktifizierung in der Mathematik ein, die in der Analysis ihren Ausgang nahm und schließlich zur Erfindung und später der Axiomatisierung der Mengenlehre führte. Einen Anfang machte Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) (vgl. auch 4.4.2.33), der die „unendlich kleinen“ Größen aufgab und die Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen also in moderner Sprache als Differentialquotient definierte. Die weitere Exaktifizierung ist wie ebenfalls schon in 4.2.34 erwähnt besonders eng mit dem Namen Karl Weierstraß (1815–1897) verbunden.

**5.3.3. Leibniz und das Tangentenproblem.** Hier kehren wir ganz kurz zu Leibniz' Lösung des Tangentenproblems zurück. Er dachte die Tangentensteigung als Steigung der Hypotheuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck, die sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt, siehe Abbildung 5.26.

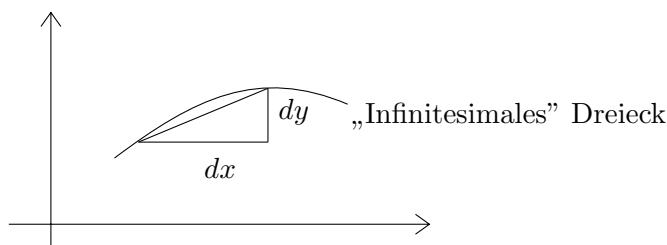


Abb. 5.26: Tangentensteigung mittels „unendlich kleiner“ Dreiecke.

Aus dieser Überlegung aus der Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine vor allem in der Physik verwendete Schreibweise überlebt, die besonders gerne im Kontext von Modellierungen verwendet wird. Bezeichnen wir eine Funktion als sog. „abhängige“ Variable  $y$  also z.B.  $y = x^3 + 2x^2 + 7$ , dann schreibt man für die Ableitung  $y'$  auch

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x \quad (5.56)$$

und Leibniz hat sich dabei  $\frac{dy}{dx}$  wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete  $dy$  und Ankathete  $dx$  vorgestellt, wobei  $dx$  und  $dy$  „unendlich klein“ sind.

<sup>2</sup>Erstmals 1686 erschienen, ist es eines der einflussreichsten Bücher überhaupt.

**5.3.4. Momentangeschwindigkeit und Newtonsche Mechanik.** Isaac Newton ging historisch einen anderen Weg als Leibniz. In seinem bereits erwähnten Hauptwerk der „Principia“ hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch mathematische Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung ausgehend vom Problem der Momentangeschwindigkeit. Wir geben hier eine einfache Formulierung in moderner Sprache, vgl. auch Abschnitt 5.1.B.

Ein Massenpunkt  $P$  bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben wir mit der Wegfunktion

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto s(t). \quad (5.57)$$

Unsere Anschauung drängt uns dazu zu glauben, dass  $P$  zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Einfach bestimbar sind aber nur die *Durchschnittsgeschwindigkeiten* zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t$ , also

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \quad (5.58)$$

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir nun die Momentangeschwindigkeit  $v(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten definieren — falls dieser existiert, und endlich ist, d.h. dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten genügend „stabil“ sind, falls  $t$  „nahe“ von  $t_0$  variiert. Also, falls existent und endlich definieren wir

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \quad (5.59)$$

Betrachten wir als Beispiel den freien Fall mit der Wegfunktion

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{wobei } g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2} \text{ die Erdbeschleunigung bezeichnet.} \quad (5.60)$$

Dann ergibt sich die Momentangeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  als

$$v(t) = \left( \frac{1}{2} g t^2 \right)' = g t. \quad (5.61)$$

Wie auch schon die Notation ausdrückt, wird die Momentangeschwindigkeit  $v$  selbst als Funktion der Zeit  $t$  aufgefasst, also als Funktion  $t \mapsto v(t)$ . Die mittlere Beschleunigung von  $P$  zwischen  $t_0$  und  $t$  ist dann der Differenzenquotient  $(v(t) - v(t_0))/(t - t_0)$  und völlig analog zur Momentangeschwindigkeit definieren wir die *Momentanbeschleunigung* zum Zeitpunkt  $t_0$  also

$$b(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}, \quad (5.62)$$

falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Für den freien Fall ergibt sich daher

$$b(t) = v'(t) = (gt)' = g, \quad (5.63)$$

was auch den Namen der Naturkonstanten  $g$  erklärt.

Erst diese präzise Definition von Momentangeschwindigkeit und -beschleunigung ermöglichen einen analytischen Zugriff auf Newtons Kraftgesetz oder 2. Newtonsche Axiom „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ nämlich

$$F(t) = m b(t) = m v'(t) = m s''(t). \quad (5.64)$$

Liest man diese Gleichung als Differentialgleichung für  $s$ , so ist ihre Lösung  $s$  die Wegfunktion bei gegebener Kraft  $F$  und man spricht von einer *Lösung der Bewegungsgleichung*.

Dies ist der Ausgangspunkt der Newtonschen oder klassischen Mechanik, die sich unter den Händen vieler Physiker\*innen und Mathematiker\*innen zu einer sehr schönen und geometrischen Theorie entwickelt hat, die es erlaubt, alle uns umgebenden mechanischen Phänomene zu beschreiben und in ganz abstrakter Sprache zu fassen. Die klassische Mechanik steht traditionell am Beginn jeder Ausbildung in (theoretischer) Physik und das darauf aufbauende Forschungsgebiet der „klassischen dynamischen Systeme“ hat noch in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bedeutende Resultate hervorgebracht, z.B. den KAM-Satz von Kolmogorow, Arnold und Moser, siehe etwa (Dumas, 2014)

## 5.4 Aspekte und Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

Wir verwenden nun die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen aus Kapitel 2.1.A, um fachdidaktisch über den Begriff der Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $\xi \in \mathbb{R}$  zu reflektieren. Die Ableitung  $f'(\xi)$  lässt sich durch zwei Aspekte fachlich beschreiben, die wiederum Basis für vier unterschiedliche Grundvorstellungen zum Lernen des Ableitungsbegriffs darstellen.

### 5.4.A Aspekte des Ableitungsbegriffs

Die beiden fachlichen Aspekte des Ableitungsbegriffs haben sich bereits in den beiden vorangegangenen Abschnitten deutlich herauskristallisiert: einerseits der Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, andererseits der Aspekt der Ableitung als lineare Bestapproximation. Die beiden Aspekte lassen sich inhaltlich unterschiedlich deuten.

#### 5.4.1. Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Dieser Aspekt bezieht sich auf die Definition der Ableitung über die lokale Änderungsrate (5.2.8):

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar* in einem Punkt  $x_0$  im Intervall  $I$ , falls

$$\lim_{x \neq x_0 \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.65)$$

**existiert und endlich** ist. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

Diese Definition ist die in der Schule gängige Definition. Sowohl beim Zugang über das Tangentenproblem, als auch beim Zugang über die Momentangeschwindigkeit bedient man sich dieses Aspekts. Diese Definition betont die fundamentale Idee der Änderungsrate, hat eine enorme Bedeutung für Anwendungen und ist gut geeignet für Modellierungen. In dieser Definition ist die geometrische Deutung der Ableitung als Tangentensteigung suggestiv enthalten.

#### 5.4.2. Ableitung als lineare Bestapproximation.

Dieser Aspekt bezieht sich auf die Definition der Ableitung über die lokale lineare Approximation 5.2.19:

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und sei  $x_0$  ein Punkt im Intervall  $I$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0$  differenzierbar, falls es

- (1) eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gibt und

(2) eine Funktion  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a \cdot h + r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \text{gilt.} \quad (5.66)$$

In diesem Fall ist natürlich  $f'(x_0) = a$ .

Diese Definition betont die fundamentale Idee des Approximierens (lineare Näherung) und beschreibt das Wechselspiel von Funktion und Tangente. Zudem eignet sich diese Definition besser für eine Verallgemeinerung auf Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , vgl. [3.3.12](#).

## 5.4.B Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

Der Begriff der Änderungsrate ist komplex und erlaubt unterschiedliche Sichtweisen, je nach bisher aufgebauten Erfahrungen mit der Beschreibung von Änderungsprozessen. In der Sekundarstufe I wird bereits neben der absoluten Änderung auch die relative (oder auch mittlere) Änderungsrate betrachtet (zum Beispiel bei Aufgaben über Durchschnittsgeschwindigkeiten).

### 5.4.3. Grundvorstellung von der Ableitung als lokale Änderungsrate.

Im Lehrplan der AHS sind Änderungsraten in der 6. Klasse (Kompetenzmodul 3) explizit angeführt: Änderungen von Größen durch Änderungsmaße beschreiben können (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor). Aufbauend darauf ist dann im Lehrplan der 7. Klasse AHS angeführt, dass Schülerinnen und Schüler den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können. Eine diesbezügliche Schulbuchdarstellungen befindet sich in Abbildung [5.27](#) und [5.28](#).

**Definition** Sei  $f$  eine auf einem Intervall  $[a; b]$  definierte reelle Funktion. Die reelle Zahl

- $f(b) - f(a)$  heißt **absolute Änderung** (oder kurz **Änderung**) von  $f$  in  $[a; b]$ ,
- $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$  heißt **relative Änderung** von  $f$  in  $[a; b]$ ,
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  heißt **mittlere Änderungsrate** (oder **Differenzenquotient**) von  $f$  in  $[a; b]$ ,
- $\frac{f(b)}{f(a)}$  heißt **Änderungsfaktor** von  $f$  in  $[a; b]$ .

#### In Worten:

- Die **absolute Änderung** ist gleich der Differenz der Funktionswerte.
- Die **relative Änderung** ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zum Ausgangsfunktionswert.
- Die **mittlere Änderungsrate** (der **Differenzenquotient**) ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Der **Änderungsfaktor** gibt an, mit welchem Faktor der Ausgangsfunktionswert multipliziert wird, um den Endfunktionswert zu erhalten. [Es gilt nämlich:  $f(a) \cdot \frac{f(b)}{f(a)} = f(b)$ ]

Abb. 5.27: Mathematik verstehen (2015), Malle et al., S. 49

Definition	
Für eine reelle Funktion $f$ , die auf dem Intervall $[a; b]$ definiert ist, werden Änderungsmaße wie folgt festgelegt.	
(1) $f(b) - f(a)$	Absolute Änderung von $f$ im Intervall $[a; b]$
(2) $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	Mittlere Änderungsrate von $f$ im Intervall $[a; b]$ Differenzenquotient im Intervall $[a; b]$
(3) $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	Relative Änderung von $f$ im Intervall $[a; b]$
(4) $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$	Prozentuelle Änderung von $f$ im Intervall $[a; b]$
(5) $\frac{f(b)}{f(a)}$	Änderungsfaktor von $f$ im Intervall $[a; b]$ Der Änderungsfaktor ist jene reelle Zahl, mit der $f(a)$ multipliziert werden muss, um $f(b)$ zu erhalten.

The graph illustrates a function  $f(x)$  plotted against  $x$ . A vertical dashed line connects the points  $f(a)$  and  $f(b)$  on the  $y$ -axis. A horizontal dashed line connects the points  $a$  and  $b$  on the  $x$ -axis. The area between the curve  $f(x)$  and the horizontal line from  $f(a)$  to  $f(b)$  is shaded purple and labeled "mittlere Änderung". The vertical distance between  $f(a)$  and  $f(b)$  is also labeled "absolute Änderung". The interval is marked with  $a$  and  $b$  on the  $x$ -axis, and the width  $b - a$  is indicated.

Abb. 5.28: Dimensionen Mathematik 6 (2018), Bleier et al., S. 150

Im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung formuliert die bildungstheoretische Orientierung im Inhaltsbereich Analysis dazu: „Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe Differenzenquotient bzw. Differentialquotient sind allgemeine mathematische Mittle, diese Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zu Bildung neuer Begriffe genutzt wird.“ Die dazu ausformulierten Grundkompetenzen AN 1.1 bis AN 1.3 lauten (noch):

### Grundkompetenzen

#### Änderungsmaße

- AN 1.1 absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und ange messen verwenden können
- AN 1.2 den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ bzw. lokale Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
- AN 1.3 den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

#### Anmerkungen:

Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Änderungsmaße im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von Differenzen- und Differentialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen möglich.

Abb. 5.29: Quelle: <https://www.matura.gv.at/>

Nach dem Spiralprinzip (und somit als Paradebeispiel für eine vertikale Vernetzung) steht die lokale Änderungsrate an einer festen Stelle am Ende einer Kette von Beschreibungen des Änderungsverhaltens einer Funktion: beginnend mit dem aktuellen Bestand über die absolute Änderung und die relative Änderungsrate bis zur lokalen Änderungsrate. Die ersten beiden Übergänge sind rein algebraisch und, wenn auch nicht trivial, so doch im Grunde bereits Gegenstand der Sekundarstufe I. Der Übergang zum relativen Zuwachs braucht im Unterricht besondere Aufmerksamkeit, da wesentliche Grundvorstellungen zum Differenzialquotienten nur auf entsprechenden Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten aufgebaut werden können. Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate setzt das Verständnis der mittleren Änderungsrate voraus. Schülerinnen und Schülern sollen erkannt haben, dass sich mittlere Änderungsgraten immer auf ein Intervall beziehen und mithilfe des Differenzenquotienten berechnet werden können. Durch sukzessives Verkleinern des Intervalls kann man letztendlich einer Stelle ein lokales Änderungsverhalten mithilfe des Grenzwerts zuordnen. Dieser Übergang erfordert ein anderes qualitatives Verständnis als das Verständnis der mittleren Änderungsrate: die lokale Änderungsrate ist damit kein Quotient sondern der Grenzwert eines Quotienten und bezieht sich nicht auf ein Intervall, sondern auf eine Stelle. Der Zusammenhang zwischen mittlerer Änderungsrate (Intervall) und lokaler Änderungsrate (Stelle) kann in unterschiedlichen Kontexten (mittlere Geschwindigkeit – momentane Geschwindigkeit; mittlerer Steuersatz – Grenzsteuersatz; mittlerer Anstieg einer Wanderstrecke – punktueller Anstieg; ...) thematisiert werden. Zudem kann auch thematisiert werden, dass vor allem dann, wenn diskrete Sachverhalte modelliert werden, die Ableitung zu einer idealisierten Modellgröße wird, die im Sachkontext nicht messbar ist.

Dementsprechend lässt sich die Entwicklung der Grundvorstellung *Ableitung als lokale Änderungsrate* wie folgt formulieren, vgl. Greefrath et al., 2016, p. 148:

#### FD-Box 27: Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate

Zu einer umfassenden Ausprägung der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate gehört die Entwicklung der Vorstellung

- der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- der Steigung einer Kurve in einem Punkt
- dass die Änderung der abhängigen Variable  $y$  durch  $\Delta y = f'(x)\Delta x$  gegeben ist.

#### 5.4.4. Grundvorstellung von der Ableitung als Tangentensteigung.

In Kapitel 5.1 wurde die Problematik des Zugangs im Unterricht über das Tangentenproblem bereits eingehend diskutiert. Kurz zusammengefasst, kann man sagen, dass sich die Grundvorstellung „Ableitung als Tangentensteigung“ dem Ableitungsbegriff geometrisch nähert. Die alleinige Sicht der Tangente als lokale Stützgerade im Sinne der „Ein-Punkt-Berührung“ trägt dabei aber nicht weit. Um Fehlvorstellungen zu vermeiden, muss der Paradigmenwechsel vom geometrischen Tangentenbegriff zum analytischen Tangentenbegriff explizit vollzogen werden und die Tangente als Schmiegerade verstanden werden. Damit ist die Tangente diejenige Gerade, die sich lokal dem Verlauf des Graphen der Funktion bestmöglich anschmiegt und es führt nicht zur Verwirrung, dass Tangenten den Graphen auch mehrmals berühren, ihn schneiden und sogar unendlich viele Punkte mit ihm gemeinsam haben können. (Sinusfunktion; Polynomfunktionen höheren Grades; ...).

Wird die Tangente an den Funktionsgraphen geometrisch mit Hilfe von Sekanten des Funk-

tionsgraphen motiviert und deren Steigung über die Koordinaten der beiden Schnittpunkte mit dem Funktionsgraphen bestimmt, ist es förderlich den zweiten Schnittpunkt mit entsprechender Mathematiksoftware zu „dynamisieren“. Denn so lässt sich eine Annäherung an die Tangentiallage in ihrer Schmiegeeigenschaft experimentell erforschen.

Ein solcher dynamischer Zugang verdeutlicht den Schülerinnen und Schülern eine intuitive Vorstellung vom hier vorliegenden Grenzprozess. Zusätzlich erlaubt sie folgende Quelle von Fehlvorstellungen zu vermeiden: Der Differenzenquotient einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in I$ , nämlich  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ist nur für  $x \in I, x \neq x_0$  definiert, vgl. auch Definition 5.2.4. Das steht im Einklang mit der geometrischen Tatsache, dass eine Gerade (die Tangente) nicht durch die Angabe nur eines Punkts eindeutig festgelegt ist. Aber der Wert des Differenzenquotienten bei  $x_0$  konvergiert für  $x$  gegen  $x_0$  gegen den (endlichen) Wert  $f'(x_0)$ . Das wird auch erfahrbar, wenn man sich von beiden Seiten mit  $x$  gegen  $x_0$  nähert. Und dieser Wert  $f'(x_0)$  ist der Anstieg der Tangente.

Eine weitere „dynamische“ Vorstellung entsteht durch die Idee, sich entlang des Graphen zu bewegen. Die jeweils momentane Bewegungsrichtung wird dabei durch die Richtung der Tangente angegeben. Durch genaue Betrachtung der Schmiegeraden, insbesondere durch Hineinzoomen am Funktionsgraphen lässt sich die wichtige Eigenschaft entdecken: je mehr man sich dem betrachteten Punkt nähert, umso weniger lassen sich der Funktionsgraph von der zugehörigen Tangente unterscheiden, siehe Abbildungen 5.30 und 5.31.

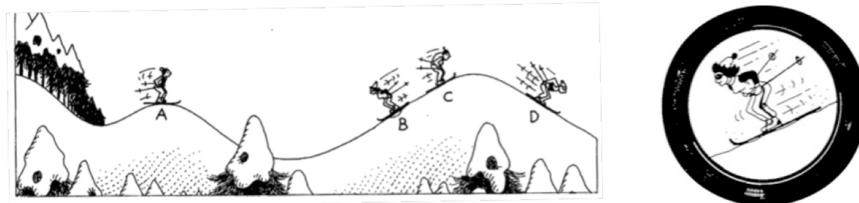


Abb. 5.30: Quelle: Dolan, 1991

**Ein weiteres Beispiel:  
Der Inline-Parcours**

Aufgabe  
Frage  
Was wäre wenn?

Angenommen der Skater würde unterwegs eine Kugel seines Rollenlagers auf dem ebenen Untergrund verlieren. In welche Richtung würde sie dann rollen?  
Wähle mit Hilfe der Knöpfe die richtige Richtung aus.  
Es werden acht verschiedene Richtungen vorgeschlagen.

7(8)

Kontrolle

zurück weiter

Abb. 5.31: Quelle: [www.matheprisma.de/Module/Ableitung/index.htm?4](http://www.matheprisma.de/Module/Ableitung/index.htm?4)

Zusammenfassend können wir festhalten, vgl. Greefrath et al., 2016, p. 150:

#### FD-Box 28: Grundvorstellung der Tangentensteigung

Zu einer umfassenden Ausprägung der Grundvorstellung der Tangentensteigung gehört die Entwicklung der Vorstellung

- von Tangenten als Schmiegeraden,
- dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve selbst hat,
- dass die Tangente lokal die Richtung einer Kurve angibt.

#### 5.4.5. Grundvorstellung der lokalen Linearität einer Funktion.

Diese Grundvorstellung bezieht sich auf die lineare Approximation einer Kurve durch eine Gerade. Arnold Kirsch hat das von ihm benannte „Funktionenmikroskop“ als Vorschlag „zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“ (Arnold Kirsch, 1980) im deutschsprachigen Raum vorgestellt und mit Serien von Overheadfolien realisiert. Heute lässt sich das „Hineinzoomen“ gut mit dem Rechner dynamisch umsetzen, siehe auch Abbildung 5.32, die aus Elschenbroich, 2015 entnommen ist, wo die Terminologie Funktionenlupe statt -mikroskop verwendet wird.

Die Idee hinter dieser Grundvorstellung besteht darin, dass man eine kleine Umgebung um eine Stelle  $x_0$  einer differenzierbaren Funktion unter einem Mikroskop betrachtet. Dabei erkennt man, dass der Graph der Funktion bei Hinreichend starker Vergrößerung nahezu geradlinig verläuft. Daher ist es die Idee, die Funktion in einer Umgebung von  $x_0$  durch eine affin lineare Funktion zu ersetzen, die die Ausgangsfunktion in der Umgebung am besten approximiert (Werner Blum und Törner, 1983). Diese lineare Funktion ist die Tangente, deren Steigung  $f'(x_0)$  ist.

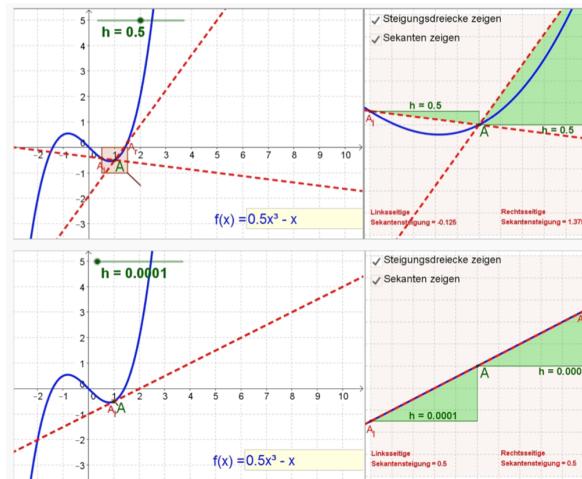


Abb. 5.32: Visueller Zugang zur lokalen Steigung mit der Funktionenlupe.

Ist eine Funktion lokal linear, dann sind Änderungen der Funktionswerte proportional zu den Änderungen der Argumente ( $\Delta y \sim \Delta x$ ) und damit ist  $f'(x)$  in einer Umgebung von  $x_0$  konstant. Somit gibt die Ableitung einer Funktion  $f$  an, wie sich kleine Änderungen der unabhängigen Variable auf  $f(x)$  auswirken. Das beschreibt den Kern der Grundvorstellung

der lokalen Linearität. Zudem ist diese Vorstellung Grundlage vieler Anwendungen im Bereich der mathematischen Modellierung zum Beispiel von Wachstumsprozessen.

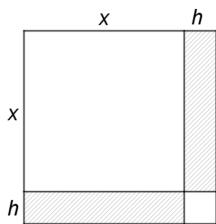
#### FD-Box 29: Grundvorstellung der lokalen Linearität

Zu einer umfassenden Ausprägung der Grundvorstellung der lokalen Linearität einer Funktion  $f : x \mapsto f(x) = y$  gehört insbesondere:

- Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der  $x$ -Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

#### 5.4.6. Grundvorstellung von der Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen.

Diese Grundvorstellung, die insbesondere von Greefrath et al., 2016 als Grundvorstellung zur Ableitung beschrieben und in der Literatur auch als „Änderungsdetektor“ bezeichnet wird, ist eng mit der lokalen Linearisierung verbunden. Dabei wird die Ableitung als Sensibilität für Veränderungen gesehen und man geht der Frage nach, wie stark sich Veränderungen der unabhängigen Variable auf die abhängige auswirken. Bei der Normalparabel wirken sich zum Beispiel im Bereich großer Funktionswerte bereits kleine Änderungen der unabhängigen Variable stark auf die Funktionswerte aus. Mathematisch kann das in der Form ( $\Delta y \sim m \cdot \Delta x$ ) beschrieben werden. Ein inhaltliches Verständnis von Ableitungsregeln kann zum Beispiel aufgebaut werden, wenn  $(x^2)' = 2x$  nicht nur rein syntaktisch verstanden wird, sondern mit der Frage „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge  $x$  gleich seinem halben Umfang?“ erarbeitet wird, siehe Abbildung 5.33.



- **Absolute Änderung** des Flächeninhalts:  $(x+h)^2 - x^2 = 2 \cdot h \cdot x + h^2$   
Für kleine  $h$  im Wesentlichen gleich dem Inhalt der beiden schraffierten Rechtecke.
- **Mittlere Änderungsrate:**  $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2 \cdot x + h$   
Für kleine  $h$  im Wesentlichen gleich dem halben Umfang.
- **Die Näherung**  $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2 \cdot x + h \approx 2 \cdot x$   
ist beliebig gut, wenn  $h$  hinreichend klein ist.

Abb. 5.33: Quelle Danckwerts und Vogel, 2006, S. 61.

Analog kann gezeigt werden, dass  $(x^3)' = 3x^2$  ist, oder warum die Umfangsformel für den Kreis durch Differenziation aus der Flächenformel hervor geht, und so die folgende Erkenntnis gewonnen werden kann:

Für kleine Änderungen  $\Delta x$  gilt:  $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ .

Zusammenfassend halten wir mit Greefrath et al., 2016, p. 153 fest:

#### FD-Box 30: Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors

Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors gehö- ren folgende Kenntnisse:

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die

### Fachdidaktische Bemerkung 30 – Fortsetzung

- abhängige Variable auswirken.
- Große Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte.
  - Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  multiplikativ, d.h. es gilt  $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$  für einen passenden Faktor  $m$ .

Diese Grundvorstellung spielt (bislang) im Mathematikunterricht keine wesentliche Rolle und ist auch teilweise in der Literatur nicht zu finden.

### 5.4.C Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

Auch beim Ableitungsbegriff helfen die verschiedenen Grundvorstellungen, verschiedene Aspekte des Ableitungsbegriffs zu verstehen.

Zum Beispiel wird die Quotientenschreibweise  $\frac{dy}{dx}$  auf Basis unterschiedlicher Grundvorstellungen unterschiedlich verstanden (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 153):

- Als lokale Änderungsrate deutet die Quotientenstruktur auf den Grenzprozess eines Quotienten hin.
- Mit der Tangentenvorstellung sind  $dx$  und  $dy$  die Kathetenlängen eines Steigungsdreiecks an die Tangente.
- Mit der Vorstellung der lokalen Linearität sind  $dx$  und  $dy$  Änderungen bezogen auf die lineare Approximation: Der Quotient ist der Proportionalitätsfaktor einer proportionalen Zuordnung.
- $\frac{dy}{dx}$  als Änderungsfaktor zu sehen, bedeutet, dass für kleine Änderungen  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$  gilt.

In der Gesamtschau ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen Aspekten und grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs, vgl. Greefrath et al., 2016, p. 147:

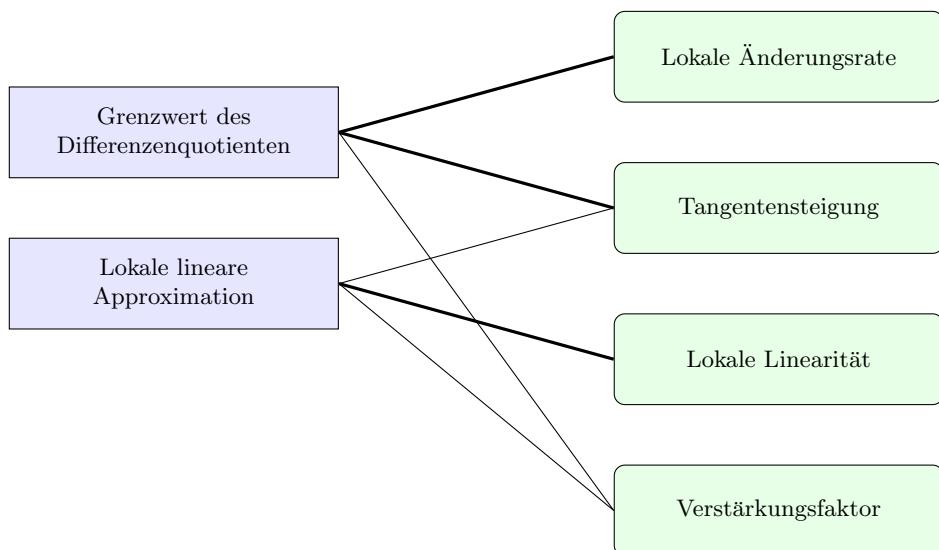


Abb. 5.34: Aspekte und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen

## 5.5 Differentialrechnung in der Schule

In diesem letzten Anschnitt des Kapitels beschäftigen wir uns nochmals mit schulpraktischen Überlegungen zur Differentialrechnung und zwar zunächst mit der Ableitungsfunktion und den Ableitungsregeln und dann mit dem „Klassiker“ Kurvendiskussion.

### 5.5.A Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln

Um die Differenzierbarkeit einer Funktion und insbesondere die Ableitungsfunktion zu thematisieren, werfen wir einen Blick zurück auf die Definition 5.2.8. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar in einem Punkt  $x_0 \in I$ , falls der Differenzenquotient bei  $x_0$  einen endlichen Limes für  $x$  gegen  $x_0$  hat. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

#### Mathematische Faktenbox 23: Ableitungsfunktion

**5.5.1. Definition (Ableitungsfunktionen).** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  differenzierbar, dann sagen wir,  $f$  ist (global) differenzierbar auf  $I$ . In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) \quad (5.67)$$

(erste) Ableitung(sfunktion) von  $f$ .

Diese Definition kann man unter der Voraussetzung, dass auch  $f'$  (global) auf  $I$  differenzierbar ist iterieren: Die Ableitungsfunktion von  $f'$  wird mit  $f''$  bezeichnet und zweite Ableitung(sfunktion) von  $f$  genannt, explizit

$$f'' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f'(x))' = f''(x). \quad (5.68)$$

Ebenso definiert man die höheren Ableitungen: Unter der Voraussetzung, dass für ein  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  (global) auf  $I$  differenzierbar ist, definiert man die  $(n+1)$ -te Ableitung(sfunktion) durch

$$f^{(n+1)} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f^{(n)})' = f^{(n+1)}(x). \quad (5.69)$$

Ist  $n$  etwa 3 oder 4, schreibt man für die 3. bzw. 4. Ableitung(sfunktion) auch oft  $f'''$  statt  $f^{(3)}$  bzw.  $f''''$  statt  $f^{(4)}$ .

Der Begriff der Ableitungsfunktion ist im Lehrplan der 7. Klasse AHS und im Konzept der standardisierten Reifeprüfung AHS Mathematik verankert, siehe Abbildung 5.35.

**5.5.2. Graphisches Differenzieren.** Um anschaulich von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion zu gelangen, wird die Vorstellung genutzt, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung hat, wie die Kurve an dieser Stelle. Damit wird die Grundvorstellung der Tangentensteigung bedient. Durch das sogenannte grafische Differenzieren wird der Graph der Ableitungsfunktion schrittweise erzeugt. Dabei wird in beliebigen Punkten  $(x|f(x))$  des Graphen der Funktion die jeweilige Steigung  $k$  bestimmt. Anschließend kann mithilfe der Punkte  $(x|k)$  der Graph von  $f'$  erzeugt werden. Dafür stehen viele technologische Hilfsmittel zur Verfügung, siehe z.B. Abbildung 5.36.

### Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

#### Anmerkungen:

Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differenzierungsregeln eingeschränkt.

Abb. 5.35: Quelle: <https://www.matura.gv.at/>

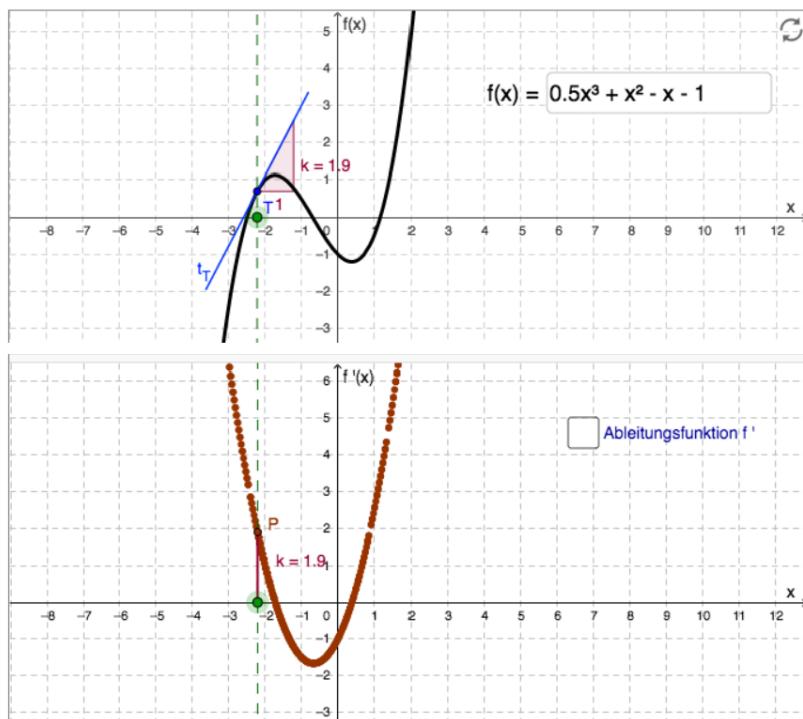


Abb. 5.36: Von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion

**5.5.3. Ableitungsregeln.** Um nun nicht nur den Graphen der Ableitungsfunktion durch grafisches Differenzieren zu erzeugen, werden in weiterer Folge die Ableitungsregeln erarbeitet. Dazu finden wir im Lehrplan eine entsprechende Aufzählung, welche Ableitungsregeln im Unterricht zu behandeln sind, siehe Abbildung 5.37.

- Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können (7. Klasse, Kompetenzmodul 5, Abschnitt: Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen)
- Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktion kennen (7. Klasse, Kompetenzmodul 6, Abschnitt: Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung)
- Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können (7. Klasse, Kompetenzmodul 6, Abschnitt: Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung)

Abb. 5.37: Formulierung der Ableitungsregeln im derzeitigen Lehrplan der AHS, 11. Schulstufe

Beim Erarbeiten der Ableitungsregeln taucht die wesentliche unterrichtliche Frage auf, inwie weit die Schülerinnen und Schüler neben den jeweiligen Verfahren auch die zugrundeliegenden Sätze verstehen und ihre Begründungen nachvollziehen können sollen. Wie fachlich-tief kann/soll man gehen, welche Argumente gibt es für das Herleiten von Beweisen, welche Argumente sprechen dagegen?

Pro-Argumente:

- ermöglicht die Grunderfahrung G2
- zeigt den Anspruch der Mathematik an das deduktive Denken - Mathematik wird nicht ausschließlich als verfahrensorientiert wahrgenommen
- Schulung im logischen Denken und im Verstehen abstrakter Formulierungen → Beitrag zur Allgemeinbildung auf hohem Niveau
- Herleiten/Beweisen/Begründen hebt das mathematische Niveau allgemein - vorausgesetzt, eine entsprechende Reduktion der Ansprüche vermeidet Überforderung.

Kontra-Argumente:

- nimmt viel Unterrichtszeit in Anspruch, deren Nutzen für die Anforderungen bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung nicht offensichtlich sind
- formal-abstrakte Anforderungen; Motivation für Beweisdürftigkeit fehlt
- muss man auf Definitionen oder Sätze zurückgreifen, mangelt es teilweise an Vorwissen

Damit geht es im Grunde um die Frage der didaktischen Reduktion und um das Vermeiden einer Extremposition. Die beiden Extrempositionen sind einerseits die Regel einfach mitzuteilen und andererseits exakte, vollständige Beweise zu zeigen.

Damit kann bei den Lernenden folgendes Bild entstehen:

bloßes Mitteilen: „Verstehen brauche ich das nicht.“

exakter Beweis: „Verstehen kann ich das nicht.“

Die fachlichen Ansprüche sind damit angemessen zu reduzieren, sodass die Schülerinnen und Schüler über das notwendige Vorwissen verfügen und die einzelnen Schritte nachvollziehen und verstehen können. Zudem ist zu überlegen, ob eine Beweisführung zu einer besseren Einsicht führt, oder ein exemplarisches Beispiel ausreichend wäre. Die Reduktion muss natürlich die fachliche Richtigkeit gewährleisten, Sonderfälle müssen jedoch meist nicht behandelt oder erwähnt werden. Die damit aufgebauten Grundvorstellungen sollen im Sinne des Spiralprinzips tragfähig für darauf aufbauende Themenbereiche sein.

Im Unterricht plant der Lehrende Schritt für Schritt ein Vorgehen, an dessen Ende ein Beweis

stehen könnte. Dieser dient zur Herstellung und Begründung einer kausalen Kette. Das ist stellenweise auch das Ziel des Mathematikunterrichts.

Ein möglicher Unterrichtsgang dazu wäre:

- Erkunden des Phänomens: Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.
- Herausarbeiten einer Vermutung: Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.
- Beweis der Vermutung: Gegebenenfalls muss für den Beweis/die Begründung der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden.

Abgesehen von formalen Beweisen bieten sich gerade bei den Ableitungsregeln auch geometrische Beweise bzw. Begründungen an, mithilfe derer man die bildliche Vorstellungsebene gut erreichen kann und somit auch unterschiedliche Lerntypen erreichen kann.

Die nachstehende Grafik 5.38 veranschaulicht mögliche geometrische Interpretationen zu einigen Ableitungsregeln:

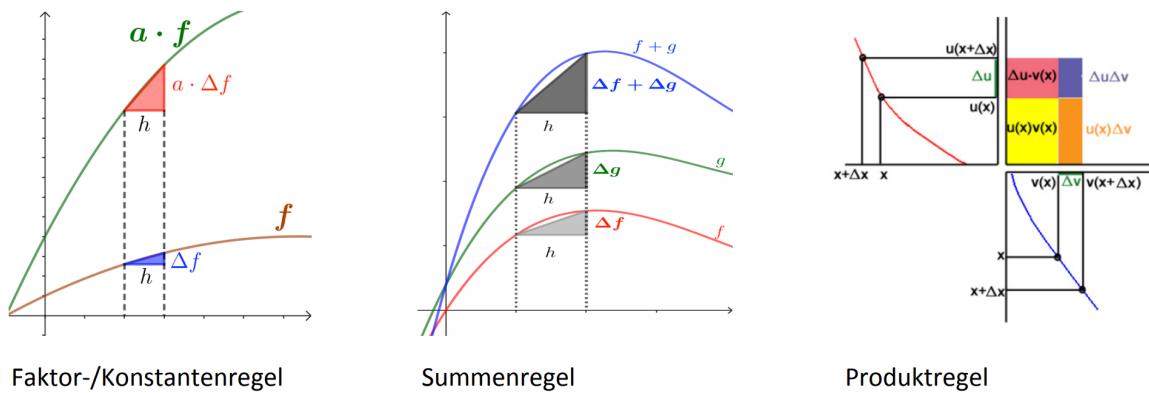


Abb. 5.38: Geometrische Interpretationen von Ableitungsregeln

## 5.5.B Kurvendiskussion

Die klassische Kurvendiskussion – das Untersuchen von Funktionsverläufen und damit das Anwenden der Erkenntnisse der Differentialrechnung – weist eine lange Tradition im Analysisunterricht in der Schule auf.

**5.5.4. Blick in die Praxis.** Die traditionelle Kurvendiskussion wird sehr ambivalent gesehen. Danckwerts und Vogel vergleichen die möglichen Perspektiven von Fachmathematiker\*innen, Fachdidaktiker\*innen; Lehrkräften und Schüler\*innen (Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 5.1).

Fachmathematiker\*innen:

„In der ‚Kurvendiskussion‘ auf der Schule werden keine Kurven behandelt und diskutiert wird auch nicht. Dieses Thema, so wie es hier verhandelt wird, würde ich lieber einem anständigen Computeralgebra-System überlassen.“ . . . „Warum findet die Kurvendiskussion so selten in

anwendungsrelevanten Kontexten statt?“

Fachdidaktiker\*innen:

„Mir fehlt der Bezug zu den Anwendungen, und die Kraft heuristischer Denk- und Arbeitsweisen ist bei diesem Thema, so wie es behandelt wird, praktisch nicht erlebbar. Das Bild von Mathematik wird reduziert auf das Arbeiten mit einem leistungsfähigem Kalkül. Von den drei Winterschen Grunderfahrungen, die den allgemeinbildenden Wert des Mathematikunterrichts ausmachen, kommt also nur eine zur Geltung, und diese auch nur reduziert.“

Lehrkräfte:

Typ A behält bei der Kurvendiskussion jederzeit die Fäden in der Hand. „Bei diesem Thema habe ich das Gefühl, dass die Mathematik für die Schule angemessen abgebildet wird, und ich fühle mich – zusammen mit meinen Schülern – nicht überfordert.“

Typ B spürt das Eintönige, Erstarrte der tradierten Kurvendiskussion und versucht es aufzubrechen. „Ich weiß um die Widerstände, aber weil es besser zu meinem Bild von Mathematik passt, kann ich nicht anders. . . .“

Schüler\*innen:

Typ A ist befreit. „Endlich keine Begriffe und Beweise mehr, sondern richtige Aufgaben, wo man weiß, was man machen muss. . . . Das kann ich gut für die Klausur lernen.“

Typ B erwartet vom Mathematikunterricht eher umfassendere Denkanstrengungen. „Eine Kurvendiskussion, bei der nichts zu entdecken und begründen ist, langweilt mich.“

Aus diesen Aussagen lässt sich das Dilemma gut herauslesen. Auf der einen Seite ist die klassische Kurvendiskussion ergebnisorientiert ausgerichtet und die für den Mathematikunterricht wichtige Balance von Prozess- und Produktorientierung fehlt. Daher wird sie als Inbegriffs des mechanischen Abarbeitens von Schemata ohne inhaltlichen Sinn gesehen (siehe Hahn und Preddiger, 2004). Das routinierte Durchführen von klassischen Kurvendiskussionen ist kein Beleg dafür, dass die Analysis als infinitesimales Modell zur Beschreibung und Untersuchung nichtlinearer Zusammenhänge verstanden wird. Inhaltliche Vorstellungen und Fähigkeiten können durch einen vorrangig kalkülorientierten Unterricht nur schwer entwickelt werden. Die nachstehende Aufgabe aus dem internationalen Vergleichstest TIMSS III (Baumert et al. 2000) wurde zum Beispiel nur von 35 % der befragten deutschen Oberstufenschüler\*innen gelöst (international von 45 %).

Auf der anderen Seite stellt die Analysis Hilfsmittel bereit, um wichtige Eigenschaften (Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten) zu überprüfen und/oder Funktionswerte (Extrema, Wendestellen) zu berechnen. Diese Untersuchungen können routinehaft durchgeführt werden, was den Schüler\*innen durchaus auch Sicherheit gibt und sie nicht überfordert. Der Mathematikunterricht kann damit als Fortsetzung des Algebra-Unterrichts aus der Sekundarstufe 1 wahrgenommen werden. Nichtsdestotrotz bleiben die Frage nach dem Sinn der Reproduktion eines kalkülhaften Algorithmus sowie die Tatsache, dass es bei der klassischen Kurvendiskussion nichts zu entdecken und zu begründen gibt.

Im Grunde haben unter anderem genau solche Aufgaben dazu geführt, dass das AECC-M (Austrian Educational Competence Center Mathematics) im Jahr 2008 seitens des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur mit der Konzeption, Vorbereitung, Durchführung,

K5. Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:  
 $f'(0) > 0$ ,  $f'(1) < 0$  und  $f''(x)$  ist immer negativ?

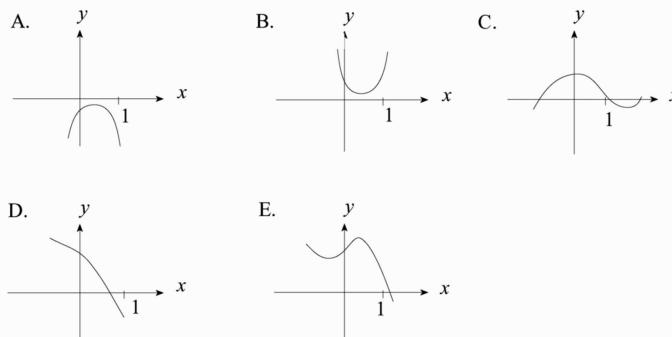


Abb. 5.39: Aufgabe aus TIMSS III zur Deutung formaler Bedingungen an Funktionsgraphen.

Begleitung, Unterstützung und Evaluation eines Schulversuchs „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ an AHS betraut wurde, bei dem die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik anhand zentral gestellter Aufgaben erfolgen sollte. Unter den aus fachdidaktischer Sicht zentralen Kritikpunkten an der traditionellen Durchführung der nicht standardisierten schriftlichen Matura in Mathematik AHS wurde seitens der Projektgruppe der folgende genannt:

- Bei den Aufgabenstellungen der traditionellen sRP ist eine deutliche Dominanz von relativ komplexen, rechnerisch aufwändigen „Problemlöseaufgaben“ zu beobachten und im Zusammenhang damit
  - eine deutliche Dominanz von Inhalten/Aufgaben, die eine rezeptartige Reproduktion (bis hin zur „Dressur des Unverstandenen“) erlauben bzw. erfordern (und damit den Problemlöseanspruch pervertieren),
  - eine sehr deutliche Dominanz des Operativen.

Abb. 5.40: [https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M\\_September\\_2009-2.pdf](https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M_September_2009-2.pdf)

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass sich die Fachdidaktik darüber einig ist, dass die Kurvendiskussion in der traditionellen, stark schematischen Form nicht mehr zeitgemäß ist. Das Thema Kurvendiskussion wird nämlich „wenn man das Produkt und nicht den sich dahinter verborgenden und tiefliegenden Prozess im Auge hat, durch leicht verfügbare Technologie dermaßen trivialisiert, dass es seine ursprüngliche Legitimation verliert“ Kirchgraber, 1999, S. 112-113.

Andererseits bietet das Thema Kurvendiskussion Möglichkeiten für einen aktiven Umgang mit Mathematik (Erkunden, Vermuten, Entdecken, Begründen, Darstellen) im Unterricht und Möglichkeiten, das Zusammenspiel unterschiedlicher fachlicher Aspekte (algebraisch, geometrisch, analytisch, diskret, ...) bewusst zu machen.

Insofern gibt es gute Gründe für eine konstruktive Weiterentwicklung. Drei solcher Gründe sind laut Bürger und Malle, 2000, S. 56-59:

- (1) Anwendungen der Differentialrechnung: Solange die Differentialrechnung noch unterrichtet wird, wird man auch Anwendungen brauchen, um zu demonstrieren, dass man mit dem Gelernten etwas Brauchbares anfangen kann (Demonstration der Kraft des Kalküls)
- (2) rasches Skizzieren des Funktionsgraphen
- (3) Herleitung theoretischer Ergebnisse: es gibt theoretisch interessante Ergebnisse, die mit Differentialrechnung sehr leicht hergeleitet werden können, ohne sie aber nicht oder nur auf sehr umständliche Weise zu erreichen sind.

**5.5.5. Fachdidaktische Perspektiven.** Die Kurvendiskussion entlang der Idee der Änderung zu entwickeln und damit lokale Extremstellen und Wendestellen in den schulischen Fokus zu stellen, macht Sinn. In der schulischen Praxis hat sich inzwischen durchgesetzt, die Kurvendiskussion vom Monotoniekriterium aus zu begründen. Fachdidaktisch lautet der Vorschlag dabei, das Monotoniekriterium der anschauung zu entnehmen – es ist unmittelbar einleuchtend, dass ein Funktionsgraph in einem Abschnitt streng monoton wächst, wenn er in jedem Punkt des Abschnitts einen positiven Anstieg hat. Das Monotoniekriterium nimmt eine zentrale Stelle bei der Untersuchung von Funktionen und damit bei der Entwicklung und Begründung der Kriterien für Extrema und Wendepunkte ein und ist selbst nur unter der Leitidee der Änderung verstehtbar. Der Ableitungsbegriff als zentraler Begriff der Analysis wiederum wird von der Idee der Änderung getragen. Insofern ist das Thema der schulklassischen Kurvendiskussion im Rahmen der Differentialrechnung die Beziehung von Monotonie und Ableitung.

Wie kann man also im Unterricht vorgehen?

Grundsätzlich wird vorausgesetzt, dass alle betrachteten Funktionen auf einem offenen<sup>3</sup> Intervall  $I$  definiert sind und auf diesem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar sind. Zuerst wird die Definition der Monotonie (aus der 9. Schulstufe) wieder ins Gedächtnis gerufen, anschließend bespricht man die Definition lokaler Extrema.

#### Mathematische Faktenbox 24: Lokale Extrema

**5.5.6. Definition (lokale Extrema).** Sei  $I$  ein offenes Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion

- (i) Ein Punkt  $x_0$  aus  $I$  heißt ein lokales Maximum von  $f$ , falls es eine Umgebung  $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  gibt, sodass für alle  $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$  gilt  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- (ii) Ein Punkt  $x_0$  aus  $I$  heißt ein lokales Minimum von  $f$ , falls es eine Umgebung  $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  gibt, sodass für alle  $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$  gilt  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Beachte: Diese Definition geht nicht auf die Ableitung von  $f$  und der Stelle  $x_0$  ein.

Anschließend wird das Monotoniekriterium anschaulich erarbeitet.

<sup>3</sup>Das erleichtert die Sache insofern, als z.B. Extrema am Rand keine verschwindende Ableitung haben müssen, vgl. (Steinbauer, 2022, 3.2.6).

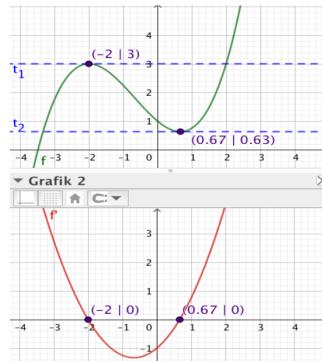
### Mathematische Faktenbox 25: Monotoniekriterium

**5.5.7. Monotoniekriterium.** Eine auf einem offenen Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver (negativer) Ableitung ist dort streng monoton wachsend (fallend).

Wichtig dabei ist auch herauszuarbeiten, dass es sich dabei um einen globalen Satz handelt und dass die Umkehrung nicht gilt – das einfachste Gegenbeispiel dazu ist  $f(x) = x^3$ .

Für Funktionen gilt, dass, wenn  $f'(x_0) > 0$  ist, so sind in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x_0$  alle Funktionswerte links von  $x_0$  kleiner und alle Funktionswerte rechts von  $x_0$  größer als  $f(x_0)$ . Man sagt:  **$f$  wächst beim Durchgang durch die Stelle  $x_0$ .**

Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar die **notwendige** Bedingung für lokale Extrema (lokale Extrema liegen nur dort, wo die Tangenten waagrecht verlaufen. Das heißt, dort, wo die erste Ableitung verschwindet), da  $f$  an Stellen mit  $f'(x_0) \neq 0$  beim Durchgang an diesen Stellen wächst oder fällt.



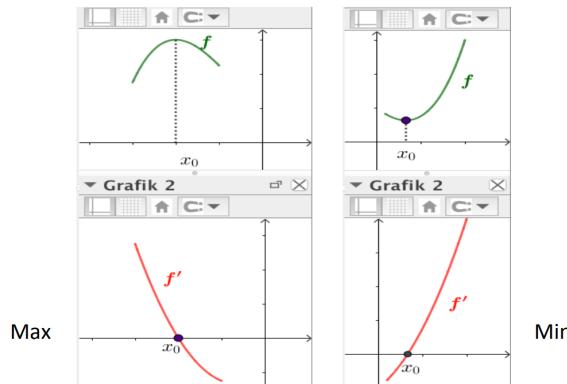
Ebenfalls liegt eine **hinreichende** Bedingung für lokale Extrema (ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen, dann ist dort ein lokales Extremum) nahe am intuitiv-anschaulichen Verstehen, wenn man anschaulich Hoch- und Tiefpunkte als jene Punkte betrachtet, in denen der Graph sein Monotonieverhalten ändert. Damit ruht diese hinreichende Bedingung direkt auf dem Monotoniekriterium.

Wechselt  $f'$  bei  $x_0$  das Vorzeichen von + auf – (bzw. von – auf +),

- so steigt (fällt)  $f$  lokal links von  $x_0$  und
- fällt (steigt) lokal rechts von  $x_0$ .

### 5.5.8. Erstes Kriterium für lokale Extrema.

Ist  $f'(x_0) = 0$  und wechselt  $f'$  bei  $x_0$  das Vorzeichen von + auf – (bzw. von – auf +), so hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Maximum (Minimum).



Abgesehen von der Schwäche, dass man sich bei der Untersuchung von  $f'$  nicht nur auf eine Stelle beschränken kann, sondern eine ganze Umgebung miteinbeziehen muss, gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht (z.B. konstante Funktionen). Zudem ist dieses Kriterium nicht notwendig für das Vorhandensein eines lokalen Extremums – zum Beispiel hat die oszillierende Funktion  $f(x) = 2x^2 + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$  für  $x \neq 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x = 0$  ein lokales Minimum, ohne das  $f'$  bei  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel hat.

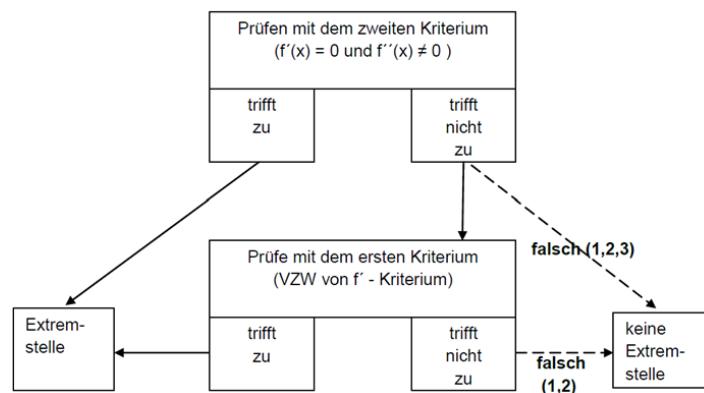
Auch hier hilft wieder die lokale Trennungseigenschaft: wenn  $f'$  das Vorzeichen bei  $x_0$  wechselt, dann ist die Ableitung von  $f'$  von null verschieden, also gilt sicher:  $f''(x_0) \neq 0$ . Weil: ist  $f''(x_0) > 0$ , dann wächst  $f'$  beim Durchgang durch  $x_0$ , und hat damit einen Vorzeichenwechsel an dieser Stelle.

### 5.5.9. Zweites Kriterium für lokale Extrema.

Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$ , so besitzt  $f'$  bei  $x_0$  ein lokales Minimum.

Entsprechend folgt aus  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$  die Existenz eines lokalen Maximums.

Dieses Kriterium ist im Unterricht das bevorzugte Kriterium, da es leichter handhabbar ist. Es darf jedoch nicht übersehen werden, dass auch hier die Umkehrung nicht gilt.

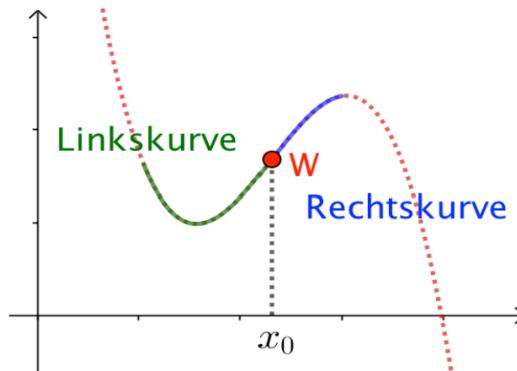


Klassische Beispiele, die zeigen, dass das zweite Kriterium nicht beim Ermitteln lokaler Extremstellen helfen muss, sind (1) konstante Funktion, (2) oszillierende Funktionen oder zum Beispiel (3) die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^4$ .

### 5.5.10. Wendepunkte.

Neben den lokalen Extrema sind auch die Wendepunkte eines Graphen von Bedeutung. An

diesen Punkten ändert sich das Krümmungsverhalten. Da zum Beispiel lokal links von einer Wendestelle die Steigung zunimmt und dann lokal rechts davon abnimmt, werden die Wendepunkte durch das Monotonieverhalten der ersten Ableitung von  $f$  definiert.



Beachte den Unterschied: lokale Extrema können durch die Änderung des Monotonieverhaltens der Funktion selbst gesichert, aber nicht definiert werden.

Mit dieser Definition kann man die bereits durchgedachten Schlüsse wieder durchgehen und erhält damit die **notwendige** Bedingung für Wendepunkte (Wendepunkte können nur dort liegen, wo die zweite Ableitung verschwindet), denn an den Stellen  $x_0$  mit  $f''(x_0) \neq 0$  würde  $f'$  wegen der lokalen Trennungseigenschaft beim Durchgang durch  $x_0$  wachsen oder fallen, kann also lokal um  $x_0$  sein Monotonieverhalten nicht ändern, wie es die Definition einer Wendestelle verlangt.

### 5.5.11. Erstes Kriterium für Wendepunkte.

Ist  $f''(x_0) = 0$  und wechselt  $f''$  bei  $x_0$  das Vorzeichen, so hat  $f$  bei  $x_0$  einen Wendepunkt. (Ein Vorzeichenwechsel von  $f''$  impliziert eine Änderung des Monotonieverhaltens  $f'$  und damit des Krümmungsverhaltens von  $f$ .)

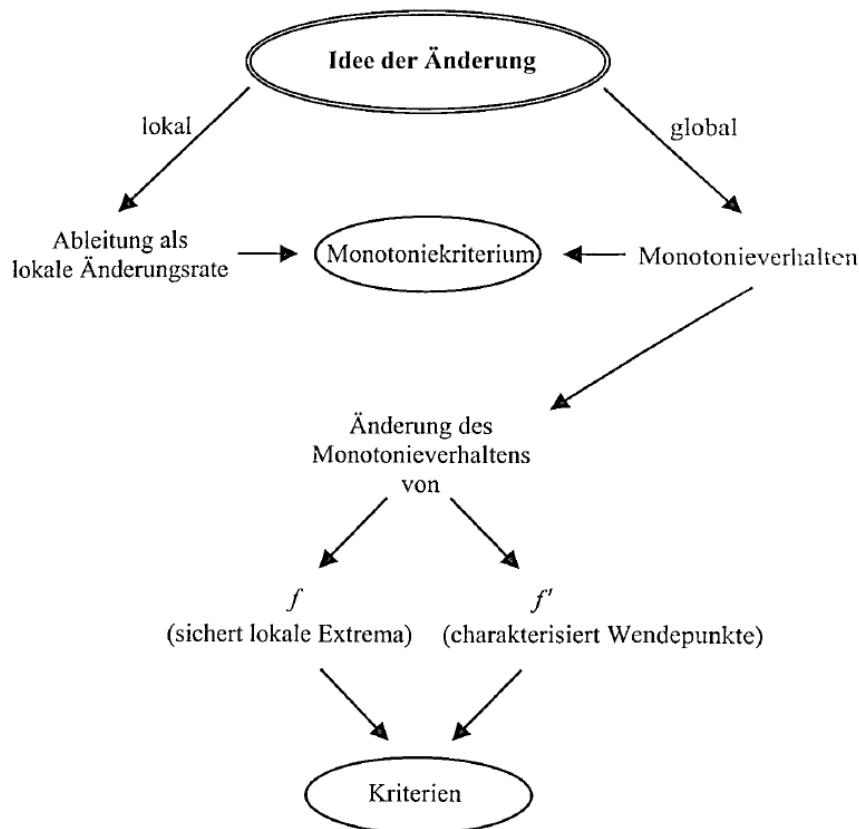
### 5.5.12. Zweites Kriterium für Wendepunkte.

Ist  $f''(x_0) = 0$  und ist  $f'''(x_0) \neq 0$ , so hat  $f$  bei  $x_0$  einen Wendepunkt.

Die so entfalteten Kriterien der Kurvendiskussion sind durch eine gemeinsame Leitidee verbunden: der Idee der Änderung. Das Thema der schulklassischen Kurvendiskussion im Rahmen der Differentialrechnung ist also die Beziehung von Monotonie und Ableitung, siehe dazu Abbildung 5.41.

Es macht also Sinn durch Akzentverschiebungen nach Wegen der Öffnung zu suchen. Danckwerts und Vogel, 2006 schlagen dabei folgende Perspektiven für eine solche Öffnung vor:

- Qualitative Analysis: eine stärkere Betonung nicht-algebraischer Elemente der Kurvendiskussion
- Anwendungsorientierung: die Einbeziehung von Sachkontexten
- Integration neuer Technologien: die konsequente Nutzung elektronischer Hilfsmittel
- Veränderte Aufgabenkultur: die Einbeziehung divergenter Elemente bei der Aufgabenstellung



Übersicht zu den Kriterien der Kurvendiskussion

Abb. 5.41: Danckwerts und Vogel, 2006, S. 146

### 5.5.13. Anschauung im Unterricht.

Aufgaben zum graphischen Differenzieren haben, auch durch die standardisierte Reifeprüfung Mathematik AHS (siehe die Aufgaben in Abbildung 5.42), im Unterricht an Bedeutung gewonnen. Beim graphischen Differenzieren werden Zusammenhänge von Funktionsgraphen und den Graphen der Ableitungsfunktionen visualisiert.

In Nachhilfeforen und teilweise auch im Unterricht findet man als Gedankenstütze die sogenannte NEW-Regel. Diese kann durchaus hilfreich sein, man sollte jedoch bei dem Bemühen, bestimmte Sachverhalte (für Schüler\*innen) einfacher darzustellen, immer auch mitbedenken, welche Fehlvorstellungen mitaufgebaut werden können und welche Probleme man sich dabei einhandeln kann. Die NEW-Regel geht von folgenden Schema aus:

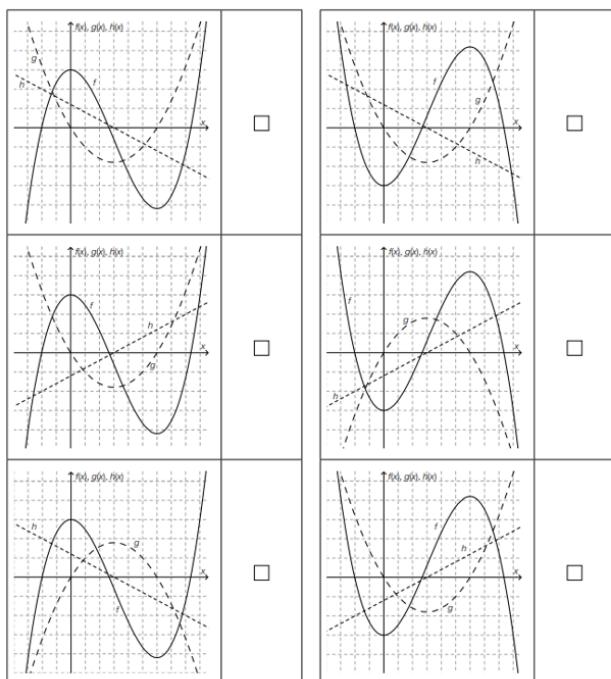
$$\begin{array}{cccc}
 f & N & E & W \\
 f' & & N & E & W \\
 f'' & & & N & E & W
 \end{array}$$

**Aufgabe 15****Graphen von Ableitungsfunktionen**

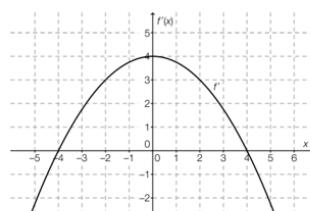
In den unten stehenden Abbildungen sind jeweils die Graphen der Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  dargestellt.

**Aufgabenstellung:**

In einer der sechs Abbildungen ist  $g$  die erste Ableitung von  $f$  und  $h$  die zweite Ableitung von  $f$ . Kreuzen Sie diese Abbildung an!

**Aufgabe 16****Ableitung**

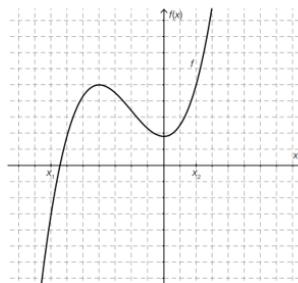
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion  $f'$  einer Polynomfunktion  $f$  dargestellt.

**Aufgabenstellung:**

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion  $f$  im Intervall  $(-5; 5)$  jedenfalls lokale Extrema hat! Die für die Bestimmung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.

**Aufgabe 17****Grafisch differenzieren**

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades  $f$ .

**Aufgabenstellung:**

Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  im Intervall  $[x_1; x_2]$  und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!

Abb. 5.42: <https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik>

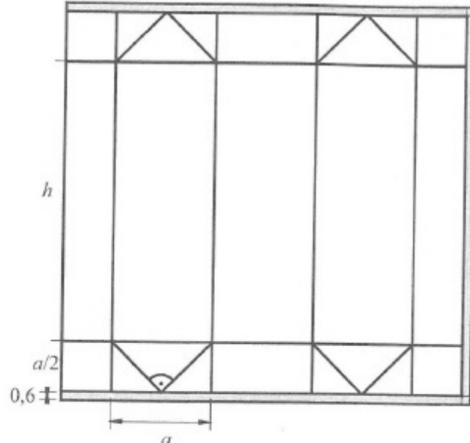
Dabei steht N für Nullstelle, E für Extremstelle und W für Wendestelle. Von oben nach unten gelesen bedeutet das zum Beispiel, dass bei der Wendestelle von  $f$  die Funktion  $f'$  eine Extremstelle und die Funktion  $f''$  eine Nullstelle hat.

Unbedingt soll darauf hingewiesen werden, dass die Implikation nur von oben nach unten gilt, von unten nach oben jedoch nicht gelten muss. Gegenbeispiele sind zum Beispiel die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  oder auch Funktionen mit Ableitungen, die an einer Extremstelle stark oszillieren, dort aber keine Wendestelle haben. Weiters ist zu beachten, dass die Funktion genügend oft differenzierbar sein muss und die Regel sich ausschließlich auf Null-, Extrem- und Wendestellen im Inneren des Intervall bezieht, auf dem die Funktion definiert ist. Deswegen empfiehlt es sich hier, wie wir es getan haben, mit offenen Intervallen zu arbeiten.

**5.5.14. Eine echte Anwendung — Milchpackungsaufgabe.** Zum Abschluss dieser Abschnitts und des gesamten Kapitels betrachten wir eine „echte“ Anwendungsaufgabe, die wir dem Buch Danckwerts und Vogel, 2006, S. 154–159 entnommen haben.

Im Handel gibt es eine Vielzahl von Tetra-Packungen, die 1 Liter eines Getränks fassen. Die auftretende Frage ist: Wird bei der Herstellung dieser Verpackungen darauf geachtet,

möglichst wenig Verpackungsmaterial zu verbrauchen?



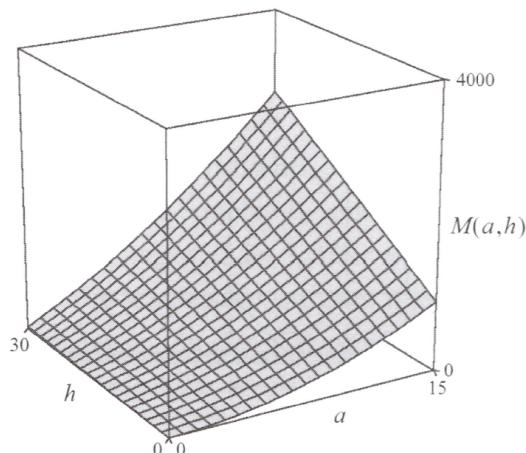
(Quelle: Danckwerts & Vogel 2010)

Misst man die Bestimmungsstücke eines bestimmten Faltnetzes, dann haben die Kleberänder eine Stärke von 6 mm, für die restlichen Maße gilt:

$$a = 7,1 \text{ cm}, h = 19,7 \text{ cm}.$$

Rechnerisch führt das zu  $V = 7,1^2 \cdot 19,7 = 993 \text{ cm}^3$ .

Da die gefüllte Tüte leicht bauchig ist, passen  $1000 \text{ cm}^3$  hinein und zusätzlich bleibt noch Platz zum Schütteln. Um zu klären, ob  $a$  und  $h$  tatsächlich optimal gewählt sind, wird der Materialverbrauch mit  $M(a, h) = (h+a+1, 2) \cdot (4 \cdot a + 0, 6)$  beschrieben und grafisch dargestellt.



Graph von  $M(a, h)$

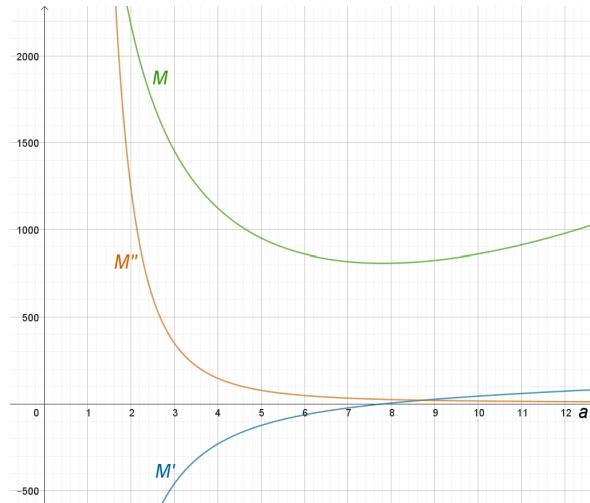
Abb. 5.43: Danckwerts und Vogel, 2006, S. 156.

Unter Miteinbeziehung des Zusammenhangs  $a^2 \cdot h = 1000$  erhält man für  $a \neq 0$ :

$$M(a) = \left( \frac{1000}{a^2} + a + 1,2 \right) \cdot (4 \cdot a + 0,6) \quad (5.70)$$

$$M(a) = 4 \cdot a^2 + 5,4 \cdot a + 0,72 + \frac{4000}{a} + \frac{600}{a^2} \quad (5.71)$$

Graphische Darstellung:



Eine qualitative Untersuchung (auch am Funktionsgraphen) ergibt:

- Für kleine  $a$  sind die ersten beiden Summanden in  $M(a)$  klein und die letzten beiden Summanden groß
- Für große  $a$  sind die ersten beiden Summanden in  $M(a)$  groß und die letzten beiden Summanden klein.
- Es ist daher plausibel, dass das Minimum irgendwo dazwischen liegt.

Nun kann das zuvor schon angesprochene Monotoniekriterium genutzt werden.

Ermitteln der ersten und zweiten Ableitung:

$$M'(a) = 8 \cdot a + 5,4 - \frac{4000}{a^2} - \frac{1200}{a^3} \quad (5.72)$$

$$M''(a) = 8 + \frac{8000}{a^3} + \frac{3600}{a^4} \quad (5.73)$$

Qualitative Argumente:

- Offensichtlich ist  $M''$  wegen  $a > 0$  im gesamten Definitionsbereich positiv und somit ist  $M'$  im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.
- Daraus kann man ablesen:  $M$  ist links von der Nullstelle von  $M'$  monoton fallend und rechts von der Nullstelle von  $M'$  monoton steigend.

Diese Nullstelle von  $M'$  kann man ablesen oder auch numerisch ermitteln und erhält  $a = 7,8$ . Das bedeutet, dass bei  $a = 7,8$  cm die Abmessungen der Verpackung optimal sind. Nun weichen die tatsächlichen Abmessungen mit  $a = 7,8$  cm aber doch recht deutlich von dem berechneten Wert ab. Diese Abweichungen können anschließend ermittelt und mit den Schüler\*innen

diskutiert werden.

Vorteile einer qualitativen Betrachtung der Funktionsgraphen:

- weg vom Kalkül - hin zu visuellen Ergebnissen
- visuelle Ergebnisse mit qualitativen analytischen Argumenten stützen
- Monotoniebetrachtung zur analytischen Fundierung der qualitativen Argumente
- anstelle des schematischen Kurvendiskussionsschemas mit qualitativen Argumenten die relevanten Eigenschaften herausarbeiten
- Balance zwischen empirisch-numerisch (numerisch-grafisches Vorgehen) und theoretischen Überlegungen sinnvoll

# Kapitel 6

## Integralrechnung

### 6.1 Ein kurzer Blick in die Praxis

♣ Für diesen Abschnitt des Skriptums stehen nur die Vorlesungsfolien zur Verfügung. ♣

#### 6.1.A Integralrechnung im Lehrplan der AHS und bei der sRP

Integralrechnung    Ein kurzer Blick in die Praxis    Integralrechnung im Lehrplan der AHS und bei der sRP

#### 8. Klasse - Kompetenzmodul 7

##### *Grundlagen der Integralrechnung*

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (zB für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

##### *Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung*

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung im Lehrplan der AHS und bei der sRP](#)

## Grundkompetenzen im Konzept der sRP

### Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen



[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung im Lehrplan der AHS und bei der sRP](#)

## Grundkompetenzen im Konzept der sRP

### Summation und Integral

- AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel,  $\int k \cdot f(x) dx$ ,  $\int f(k \cdot x) dx$  (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
- AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

#### Anmerkungen:

Analog zum Differenzialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.



### 6.1.B Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP

Integralrechnung Ein kurzer Blick in die Praxis Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP

## Unterscheidung: HTL - HAK - HUM - HLFS - BAFEP

### TECHNISCHE & GEWERBLICHE SCHULEN

**htl** bildung mit zukunft

In den technischen und gewerblichen höheren Abteilungen und Fachschulen gibt es eine große Anzahl an unterschiedlichen Fachrichtungen mit verschiedenen Schwerpunkten (und auch schulautonomen Ausbildungsschwerpunkten).

**HÖHERE TECHNISCHE LEHRANSTALTEN (5 JAHRE)**

**FACHRICHTUNGEN**

Bautechnik, Betriebsmanagement, Chemie, Chemieingenieurwesen, Lebensmitteltechnologie, Elektronik, Elektrotechnik, Informatik, Informationstechnologie, Innenaumgestaltung und Holztechnik, Kunst und Design, Lebensmitteltechnologie, Maschineningenieurwesen, Mechatronik, Medientechnik und Medienmanagement, Werkstoffingenieurwesen, Wirtschaftsingenieurwesen.

Abb.: [www.abc.berufsbildendeschulen.at/technische-gewerbliche-schulen/](http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/technische-gewerbliche-schulen/)

Integralrechnung Ein kurzer Blick in die Praxis Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP

## Lernergebnisse des Pflichtgegenstandes Angewandte Mathematik (HTL)

In den Bereichen „**Differentialrechnungen**“ und „**Integralrechnungen**“ können die Absolventinnen und Absolventen Differential- und Integralrechnungen zur Lösung von Aufgaben des Fachgebietes einsetzen, auch mit Methoden der numerischen Mathematik und mit Hilfe unterstützender technischer Hilfsmittel.

[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP](#)

## Bildungs- und Lehraufgaben sowie Lehrstoffe der gemeinsamen Unterrichtsgegenstände

6. Semester – Kompetenzmodul 6:

**Bildungs- und Lehraufgabe:**

Die Schülerinnen und Schüler können im

**Bereich Differenzial- und Integralrechnung**

- Stammfunktionen von grundlegenden und im Fachgebiet relevanten Funktionen ermitteln, das bestimmte Integral berechnen und als orientierten Flächeninhalt interpretieren;
- die Differenzial- und Integralrechnung zur Lösung von Aufgaben des Fachgebietes einsetzen;
- Methoden der numerischen Mathematik mit unterstützenden technischen Hilfsmitteln zur nähерungsweisen Bestimmung der Nullstellen von Funktionen und zur nähерungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen einsetzen.

**Lehrstoff:**

Differentialrechnung:

Fachbezogene Anwendungen.

Integralrechnung:

Stammfunktion und bestimmtes Integral, Grundintegrale, Integrationsregeln und -methoden.

Numerische Verfahren:

Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen; Numerische Integration.



[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP](#)

## HTL für Elektronik und technische Informatik

III. Jahrgang:

6. Semester – Kompetenzmodul 6:

**Bildungs- und Lehraufgabe:**

Die Schülerinnen und Schüler können im

**Bereich Integralrechnung**

- die Integralrechnung für die Berechnung von Kenngrößen periodischer Funktionen anwenden.

**Lehrstoff:**

Integralrechnung:

Integralmittelwerte.



## HAK

### 8. Semester – Kompetenzmodul 8:

#### Bildungs- und Lehraufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler können im

##### Bereich Analysis – Stammfunktionen

- den Begriff der Stammfunktion sowie den Zusammenhang zwischen Funktion, Stammfunktion und ihrer grafischen Darstellung beschreiben,
- den Begriff des unbestimmten Integrals und den Zusammenhang mit der Stammfunktion beschreiben,
- Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen sowie der Funktionen  $f$  mit  $f(x)=1/x$  und  $g$  mit  $g(x)=a \cdot e^{(k \cdot x)}$  mit Hilfe der notwendigen Integrationsregeln berechnen.

##### Bereich Analysis – Integral und Integralrechnung

- den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben,
- das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt deuten und damit Berechnungen durchführen,
- die Integralrechnung auf wirtschaftliche Anwendungen, insbesondere auf Stammfunktionen von Grenzfunktionen und kontinuierliche Zahlungsströme anwenden, Berechnungen durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren.

## sRDP - Kompetenzkatalog

### Teil A (Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern)

4.5	den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion interpretieren und erklären; bei gegebenem Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion skizzieren <b>siehe Kommentar</b>
4.6	Regeln zum Berechnen von Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen verstehen und anwenden
4.7	das bestimmte Integral auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes als Grenzwert einer Produktsumme interpretieren und damit argumentieren
4.8	das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt verstehen und anwenden

Kommentar 4.5: Eine Größe soll als Integral ihrer Änderungsrate bzw. Ableitung interpretiert werden können („Integrale als Gesamteffekt von Änderungsraten auffassen“). Jedoch wird (mit Ausnahme Geschwindigkeit und Weg) nicht verlangt, dass die Kandidatinnen und Kandidaten die jeweils involvierten physikalischen Größen (z. B. Energie bzw. Arbeit und Leistung) selbstständig benennen können.

[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP](#)

## sRDP - Kompetenzkatalog

### Teil B (Cluster HTL 1)

B\_T1\_4.5

Integralrechnung im anwendungsbezogenen Kontext anwenden: modellieren, berechnen, interpretieren und damit argumentieren [siehe Kommentar](#)

Kommentar B\_T1\_4.5: Anwendung der Integralrechnung auf die in B\_T\_3.2 und B\_T1\_3.3 genannten Funktionstypen sowie Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind.  
 Ermittlung einer Größe aus ihrer Änderungsrate durch Integration unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen;  
 das bestimmte Integral (orientierter Flächeninhalt) interpretieren;  
 aus der Physik wird die Kenntnis folgender Zusammenhänge vorausgesetzt:  
 $s = \int v dt$  und  $v = \int a dt$   
 Volumen von Rotationskörpern  
 Bogenlänge

--



[Integralrechnung](#) [Ein kurzer Blick in die Praxis](#) [Integralrechnung in den Lehrplänen der BHS und bei der sRDP](#)

## sRDP - Kompetenzkatalog

### Teil B (Cluster HAK, W2)

B\_W\_4.4

wirtschaftliche Grenzfunktionen als Ableitungsfunktionen modellieren, berechnen und interpretieren; Stammfunktionen von Grenzfunktionen ermitteln und den Zusammenhang der beiden Funktionen erklären



### 6.1.C Fehlvorstellungen: Integral und Fläche

Integralrechnung   Ein kurzer Blick in die Praxis   Fehlvorstellungen: Integral und Fläche

### Fehlvorstellung: Integral und Fläche

Die Figur zeigt den Graphen von  $y = f(x)$ .  
 $S_1$  ist die Fläche, welche von der  $x$ -Achse,  $x = a$  und  $y = f(x)$  begrenzt wird.  
 $S_2$  ist die Fläche, welche von der  $x$ -Achse,  $x = b$  und  $y = f(x)$  begrenzt wird.  
Dabei ist  $a < b$  und  $0 < S_2 < S_1$ .

Der Wert von  $\int_a^b f(x) dx$  ist

- $S_1 + S_2$
- $S_1 - S_2$
- $S_2 - S_1$
- $|S_1 - S_2|$
- $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

**Abb.:** Aufgabe aus der TIMSS-Studie 1999

- Antwortalternativen testen mögliche Fehlvorstellungen
- Ergebnisse:
  - internat. 35%
  - D: 23% korrekt
- Fazit:  
Vorstellung des Integrals als Flächeninhalt erfordert erweiterte Sichtweise

## 6.2 Fachmathematische Betrachtungen

In diesem Abschnitt nähern wir uns dem Integralbegriff aus einer fachlichen Perspektive. Dabei werden wir allerdings zuerst einen unhinterfragten, sogenannten „naiven“ Flächeninhaltsbegriff zugrundelegen, den wir erst im weiteren Verlauf einer analytischen Präzisierung unterziehen. Dadurch sind Teile unseres Zugangs auch direkt im Unterrichtskontext realisierbar und die komplementären Teile vermitteln einen Einblick in das Wesen der Mathematik: die schrittweise Annäherung an einen Begriff und seine formalen Präzisierungen.

### 6.2.A Integrieren ist Rekonstruieren von Funktionen

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, das uns schrittweise auf die Fragestellung führt, wie man eine Funktion aus ihrer Ableitungsfunktion zurückgewinnen kann.

**6.2.1. Beispiel (Badewanne, Teil 1).** Wir betrachten die folgende Situation: In eine leere Badewanne wird eine Zeit lang Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr beendet. Schließlich wird nach einer Weile der Abfluss geöffnet und das ganze Wasser wieder ausgelassen. Die Situation kann so wie in Abbildung 6.1 dargestellt werden.

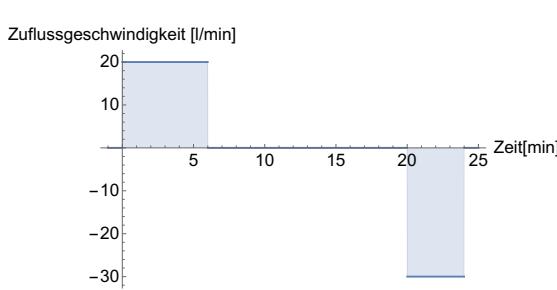


Abb. 6.1: Wasserzufluss

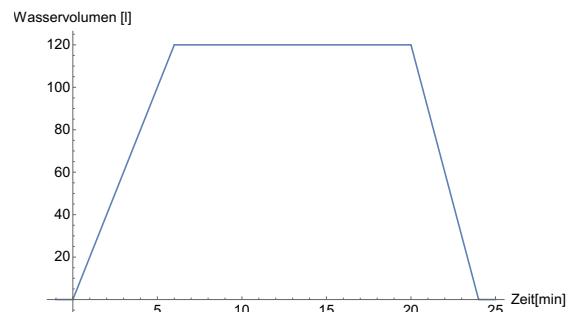


Abb. 6.2: Wasservolumen

Wir interessieren uns nun für die Frage:

*Wie lässt sich aus der Kenntnis der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit des Wassers auf die zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Badewanne vorhandenen Wassermenge (genauer das Wasservolumen) schließen?*

Betrachten wir die Situation wie in Abbildung 6.1 dargestellt etwas genauer. Innerhalb der ersten 6 Minuten nimmt die Wassermenge  $V$  in der Badewanne zu. In den darauf folgenden 14 Minuten bleibt sie konstant, um schließlich in den darauf folgenden 4 Minuten abzunehmen. Genauer ergibt sich für einen Zeitpunkt  $t$  während der ersten 6 Minuten für die Wassermenge

$$20 \text{ Liter/Minute} \cdot t \text{ Minuten} = 20t \text{ Liter.}$$

Nachdem die ganzen 6 Minuten dieser Phase vergangen sind, befinden sich daher 120 Liter Wasser in der Badewanne, die dann über die nächsten 14 Minuten konstant bleiben. Ab dem Zeitpunkt  $t = 20$  Minuten beginnt die Abflussphase. In diesem Zeitintervall gilt dann für die Wassermenge

$$120 - 30(t - 20) \text{ Liter.}$$

Insgesamt können wir daher die Wassermenge  $V$  in der Badewanne in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion

$$V(t) = \begin{cases} 20t & 0 \leq t \leq 6 \\ 120 & 6 \leq t \leq 20 \\ 120 - 30(t - 20) = 720 - 30t & 20 \leq t \leq 24 \\ 0 & t \geq 24 \end{cases} \quad (6.1)$$

darstellen, deren Graph in Abbildung 6.2 abgebildet ist.

Zusammengefasst haben wir rechnerisch aus der Kenntnis der Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit die zu jedem Zeitpunkt vorhandene Wassermenge bestimmt. Die dabei auftretenden Produkte

$$20t \quad \text{und} \quad 30(t - 20) \quad (6.2)$$

haben eine eindringliche geometrische Bedeutung. Sie sind Rechtecksflächen und zur Berechnung der Gesamtbilanz werden die oberhalb der (Zeit-)Achse gelegenen Flächen positiv und die darunter liegenden negativ gezählt. In diesem Sinne ist die Funktion  $V$  eine Summe vorzeichenbehafteter Rechtecksinhalte oder *orientierter Flächeninhalte*.

**6.2.2. Reflexion: Rekonstruieren ist Integrieren.** Ein informierter Blick auf das Beispiel zeigt: Wir haben aus der Zuflussgeschwindigkeit<sup>1</sup> des Wassers den Wasserinhalt berechnet. Die Zuflussgeschwindigkeit ist aber nichts anderes als die *momentane Änderung der Wassermenge*, also deren *Ableitung  $V'$* . Mathematisch gesprochen haben wir also aus der Ableitungsfunktion  $V'$  die Funktion  $V$  selbst *rekonstruiert* oder anders ausgedrückt: wiederhergestellt. Der lateinische Ausdruck für „Wiederherstellen“ ist „integrale“ und so wird klar, warum der oben im Beispiel vorgenommene Rekonstruierungsprozess als *Integrieren* bezeichnet wird. Eine die obige fachliche Reflexion ergänzende fachdidaktische Reflexion zeigt, folgende zwei Punkte auf:

- (1) Das Integrieren tritt als Rekonstruieren von Funktionen aus ihrer Ableitung auf; eine der zentralen Grundvorstellungen, vgl. Abschnitt 6.3
- (2) Die Vorstellung des Integrals als *orientierter Flächeninhalt* wird maßgeblich bedient.

Wir werden das Badewannenbeispiel weiter ausschlachten, um weitere und allgemeinere Facetten der Situation herauszuarbeiten.

**6.2.3. Beispiel (Badewanne, Teil 2).** Wir verfeinern das obige Beispiel, indem wir die Situation genauer betrachten und dadurch auf eine allgemeinere Sichtweise gestoßen werden. Genauer betrachten wir die Zulaufgeschwindigkeit aus Abbildung 6.3. Hier ist die Zulaufphase genauer modelliert und zwar in dem Sinn, dass der Wasserhahn in der ersten Minute gleichmäßig immer weiter aufgedreht wird bis er zum Zeitpunkt  $t = 1$  voll aufgedreht ist, also die volle Zulaufgeschwindigkeit von 20 Liter pro Minute erreicht wurde. Dann wird die Stellung des Wasserhahns für 5 Minuten unverändert bei vollem Zulauf belassen und schließlich in der 7. Minute gleichmäßig wieder abgedreht<sup>2</sup>. Das Auslassen des Wassers modellieren wir wie vorher, was wir etwa dadurch rechtfertigen können, dass das Rausziehen des Stöpsels sehr schnell vor sich geht und daher die Abflussgeschwindigkeit mehr oder weniger sofort die

<sup>1</sup>Ab jetzt betrachten wir die Abflussgeschwindigkeit als negative Zuflussgeschwindigkeit. Daher brauchen wir sie nicht extra zu erwähnen.

<sup>2</sup>Die Zahlen sind so gewählt, dass die Badewanne wieder ganz voll wird, also am Ende des Einlaufvorganges wieder 120 Liter Wasser eingelassen wurden.

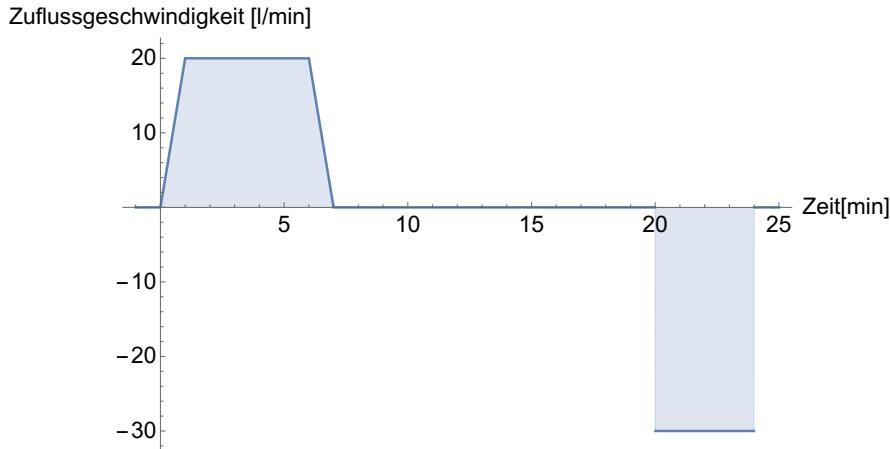


Abb. 6.3: Wasserzufluss, genauere Modellierung

volle Geschwindigkeit von 30 Liter pro Minute erreicht. Insgesamt haben wir es also mit der folgenden Zuflussgeschwindigkeits-Funktion  $V'$  zu tun

$$V'(t) = \begin{cases} 20t & 0 \leq t \leq 1 \\ 20 & 1 \leq t \leq 6 \\ 20 - 20(t - 6) = 140 - 20t & 6 \leq t \leq 7 \\ 0 & 7 \leq t \leq 20 \\ -30 & 20 \leq t \leq 24. \end{cases} \quad (6.3)$$

Zur Rekonstruktion des Wasservolumens  $V(t)$  berechnen wir nun wieder den orientierten Flächeninhalt bis zum Zeitpunkt  $t$ . Dabei können wir wie zuvor vorgehen. Lediglich in den Zeitintervallen  $[0, 1]$  und  $[6, 7]$  müssen wir zur Berechnung des Volumenszuwachs Dreiecksflächen betrachten, die wir auf elementargeometrischem Weg berechnen. Damit erhalten wir für das Wasservolumen  $V$  zu jedem Zeitpunkt  $t$

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 20t & (\text{Dreiecksfläche}) & 0 \leq t \leq 1 \\ 10 + 20(t - 1) & (\text{wie gehabt}) & 1 \leq t \leq 6 \\ 110 + 10 - (\frac{1}{2}(7-t)V'(t)) = 120 - 10(7-t)^2 & & 6 \leq t \leq 7 \\ 120 & (\text{wie gehabt}) & 7 \leq t \leq 20 \\ 720 - 30t & (\text{wie gehabt}) & 20 \leq t \leq 24 \\ 0 & & t \geq 24. \end{cases} \quad (6.4)$$

Der Graph der Funktion  $V$  ist in Abbildung 6.4 zu sehen und in Abbildung 6.5 ist der Volumenszuwachs während des Zulaufvorgangs (der ja vom obigen Beispiel abweicht) genauer dargestellt.

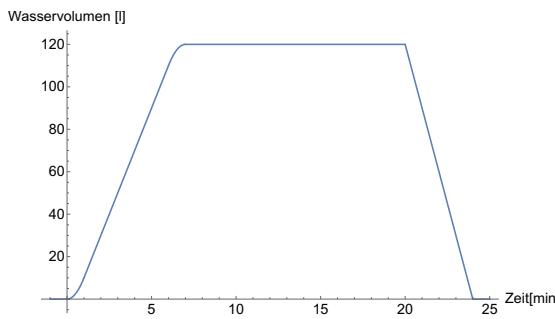
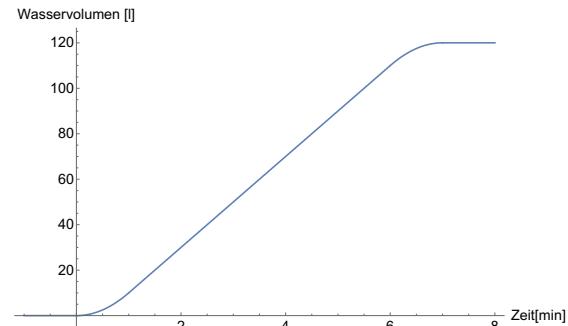


Abb. 6.4: Wasservolumen

Abb. 6.5: Wasservolumen im Intervall  $[0, 8]$ 

Wir sind hier derselben Strategie gefolgt, wie im Fall konstanter Zuflussgeschwindigkeit.

Aber wie ist das zu rechtfertigen?

Tatsächlich ist unsere Vorgehensweise mathematisch korrekt, sogar im Fall nichtlinearer Zuflussgeschwindigkeiten, solange die Funktion  $V'$  „schön genug“ ist. Wir diskutieren die dahinter stehende analytische Idee und nehmen in Abschnitt 6.2.C eine analytische Präzisierung vor.

**6.2.4. Die analytische Idee.** Die Idee zur Rekonstruktion des Wasservolumens aus der Zuflussgeschwindigkeit oder allgemeiner einer Funktion aus ihrer Ableitung ist eine typisch analytische: In sehr kleinen Zeiteinheiten kann die Zuflussgeschwindigkeit als annähernd konstant angesehen werden. ACHTUNG: Damit diese Idee wirklich funktioniert muss die Zuflussgeschwindigkeits-Funktion „schön genug“ sein. Wir werden später im Rahmen der analytischen Präzisierung des Integralbegriffs sehen, dass stetige Funktionen jedenfalls „schön genug“ sind.

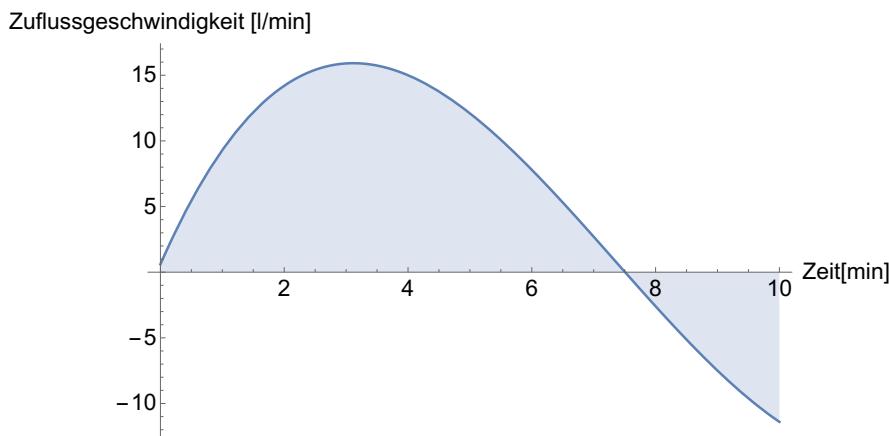


Abb. 6.6: Wasserzufluss, neue Modellierung

Betrachten wir also eine Zulaufgeschwindigkeits-Funktion  $V'$  wie in Abbildung 6.6<sup>3</sup>. Dann betrachten wir  $V'$  in einem „kleinen“ Zeitintervall  $[t_0, t]$  der Länge  $\Delta t := t - t_0$ . Was trägt

<sup>3</sup>So eine Funktion kann z.B. zustande kommen wenn Kinder gleichzeitig mit Wasserhahn und Abflusstopfen spielen, wie Ihr Autor aus eigener Erfahrung bestätigen kann.

nun  $V'$  in diesem Zeitintervall zum Gesamteffekt, soll heißen zum Wasservolumen bei? Da  $V'$  die momentane Änderungsrate der Wasserstands-Funktion ist gilt nach (5.52)

$$V(t) - V(t_0) \approx V'(t)(t - t_0) \quad \text{oder in suggestiver Schreibweise} \quad \Delta V \approx V'(t) \Delta t. \quad (6.5)$$

Das bedeutet, dass der Zuwachs der Wassermenge im Zeitintervall  $\Delta t$  sich geometrisch annähernd aus der „kleinen“ Rechtecksfläche  $V'(t)(t - t_0)$  ergibt, siehe Abbildung 6.7, wobei wir hier nur das Intervall  $t \in [0, 2]$  betrachtet haben.

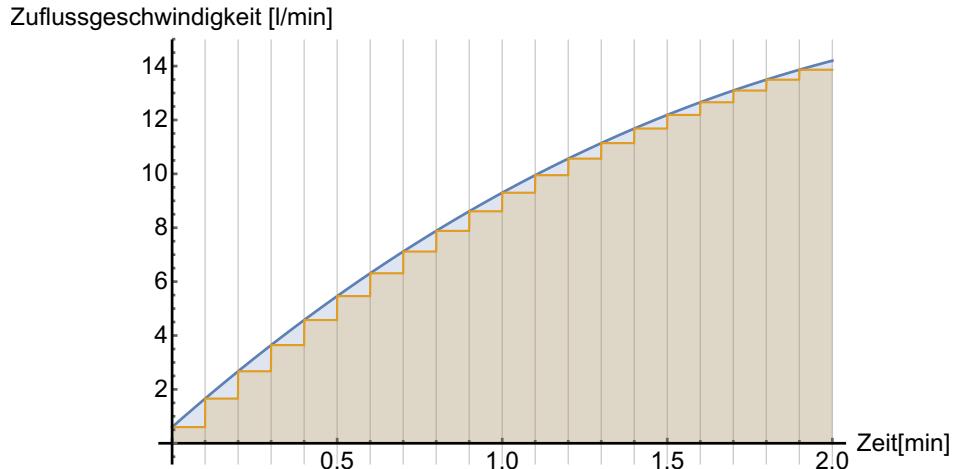


Abb. 6.7: Zuwachs der Wassermenge angenähert durch Rechtecksflächen

Gemäß dieser Idee ergibt sich daher die Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  aus der Summe von Rechtecksflächen über kleinen Teilintervallen, siehe Abbildung 6.7. Geometrisch ist also der Wert der rekonstruierten Funktion  $V$  zum Zeitpunkt  $t$  annähernd die Summe dieser „kleinen“ (orientierten) Rechtecksflächen.

Anschaulich ist klar, dass bei genügend kleiner „Streifenbreite“ diese Summe von orientierten Rechtecksflächen wenig von der orientierten Fläche unter dem Graphen von  $V'$  unterscheidet. Zusammengefasst gilt auch in diesem „genügend schönen“ Fall:

*Die Rekonstruktion von  $V$  aus  $V'$  gelingt durch Berechnen des orientierten Flächeninhalts, den  $V'$  mit der  $x$ -Achse einschließt.*

**6.2.5. Fachdidaktische Reflexion zur Präzisierung.** Für eine Erstbegegnung mit dem Integralbegriff ist die hier verfolgte Vorgehensweise auch im Unterrichtskontext möglich. Vergleiche dazu Danckwerts und Vogel, 2006, p. 101f. wo auch vor einer weiteren zu frühen Präzisierung des Integralbegriffs gewarnt wird. Im Zentrum steht hier das heuristische Arbeiten und eine Stärkung der 3. Winter'schen Grunderfahrung. Es wird auf der *Präexistenz* des Inhaltsbegriffs aufgebaut, d.h. dieser wird in „naiver“ Weise vorausgesetzt.

**6.2.6. Vorläufige Zusammenfassung** unserer bisherigen Überlegungen:

- (1) Kennt man die lokale Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall, so können dort die Werte der Funktion rekonstruiert werden.
- (2) Diese rekonstruierten Funktionswerte sind als orientierte Flächeninhalte interpretier- und berechenbar.

Diese Vorgehensweise trägt auch im Anwendungszusammenhang weit über das Badewannenbeispiel hinaus. Weitere Beispiele sind etwa:

- (1) Ein Fahrtenschreiber erlaubt die Rekonstruktion des zurückgelegten Weges.
- (2) Das Beschleunigung einer Rakete erlaubt die Rekonstruktion ihrer Geschwindigkeit.
- (3) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie erlaubt die Berechnung der Zahl der Infizierten.
- (4) Die Stromstärke erlaubt die Berechnung des Ladezustand eines Akkus.

Der mathematische Kern all dieser Beispiele ist der Übergang von einer Ausgangsfunktion  $f'$  zu einer rekonstruierten Funktion  $f$ , deren Funktionswerte die orientierten Inhalte der Fläche zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse sind.

**6.2.7. Ein allgemeiner Standpunkt: Von der Berandung zur Integralfunktion.** Jetzt wollen unseren bisher so erfolgreichen Zugang um eine entscheidende Idee erweitern. Abstrahieren wir von der obigen Situation so stellen wir fest, dass es

*für die konkrete Berechnung der Rekonstruktion unwichtig ist, dass die „berandende“ Funktion als Ableitung gegeben war.*

Daher lösen wir uns jetzt von dieser Voraussetzung und definieren so auf intuitive Weise die *Integralfunktion einer Berandung*:

*Zu einer gegebenen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (genannt die Berandung) definieren wir die Integralfunktion  $I_a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem  $x \in [a, b]$  den orientierten Flächeninhalt zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse zwischen  $a$  und  $x$  zuordnet (siehe Abbildung 6.8).*

Für die Integralfunktion verwenden wir die Schreibweise

$$I_a(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (6.6)$$

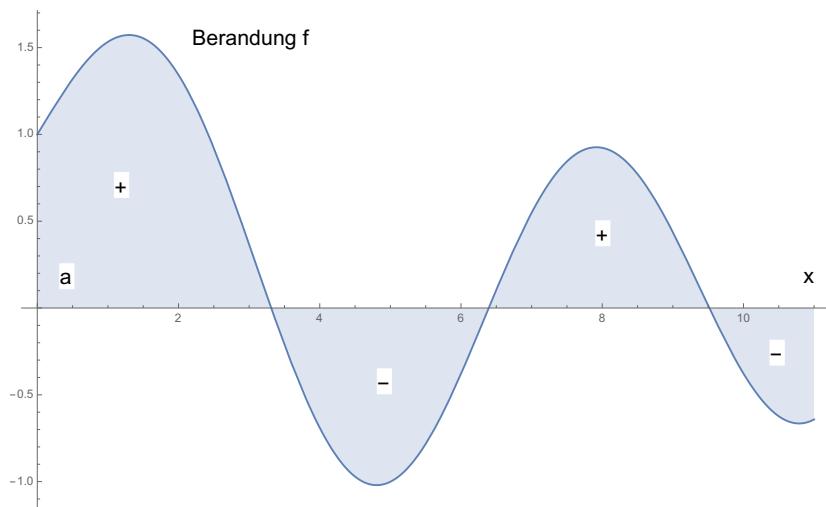


Abb. 6.8: Die Integralfunktion  $I_a$  ordnet jedem  $x \in [a, b]$  die Summe der orientierten Flächeninhalte zu, die die Berandung  $f$  beginnend mit  $a$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

**6.2.8. Zur Präzisierung, Teil 2.** Natürlich handelt es sich hier um keine den Ansprüchen einer fachmathematischen Vorgehensweise genügende Definition. Sie setzt nämlich (wie schon oben diskutiert) die Präexistenz des Flächeninhalts voraus. Erst im Rahmen der analytischen Präsizierung in 6.2.C können Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit des Integrals sinnvoll gestellt und dann auch beantwortet werden. Wir werden weiterhin diesem intuitiven Zugang verfolgen und sehen, dass wir in seinem Rahmen sogar den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung plausibel machen können. Wichtig ist auch, dass dieser Zugang, der auch explizit als Unterrichtsvorschlag Henn, 2018 vorliegt, eine spätere Präzisierung in natürlicher Weise zulässt!

## 6.2.B Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In unserem Zugang können wir nun *das* zentrale Resultat der Differential- und Integralrechnung besprechen: den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis, nämlich die Differentiation und die Integration miteinander in Verbindung. Er sagt aus, dass Ableiten bzw. Integrieren (im wesentlichen) jeweils die Umkehrung des anderen ist. Der Satz besteht aus zwei Teilen, die manchmal auch als erster und zweiter Hauptsatz der Analysis bezeichnet werden.

Wir beginnen mit einer Motivation, die an das Badewannenbeispiel 6.2.1, 6.2.3 anschließt.

### 6.2.9. Integralfunktion und Rekonstruierte.

Im Kontext des Badewannenbeispiels und der anderen Sachkontextet in 6.2.6 sind wir jeweils von einer Berandung ausgegangen, die schon explizit als Ableitungsfunktion  $g'$  gegeben war. Die Integralfunktion  $I_a$  war dann die rekonstruierte Funktion  $g$  selbst. Also schematisch

$$\text{Berandung } g' \quad \rightsquigarrow \quad \text{Integralfunktion } I_a = g \quad (6.7)$$

Jetzt liegt natürlich die Frage auf der Hand, inwieweit dieser Sachverhalt unser Manöver aus 6.2.7 übersteht, d.h.:

Wenn die Berandung nicht schon als Ableitungsfunktion gegeben ist, inwieweit ist die Integralfunktion noch eine „Rekonstruierte“ und wenn ja wovon?

Gehen wir zurück zum Spezialfall, dass die Berandung als Ableitung  $g'$  gegeben ist, dann sehen wir

$$I'_a = g' = \text{Berandung, weil ja nach (6.7)} \quad I_a = g. \quad (6.8)$$

Daher liegt jetzt die Vermutung auf der Hand, dass auch im allgemeinen Fall (6.6), d.h. für  $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  der Zusammenhang (6.8) gilt, also dass

$$I'_a = \text{Berandung} = f \quad (6.9)$$

gilt. Tatsächlich ist unsere Vermutung richtig und sie gehört zu den großen Entdeckungen der Analysis und trägt daher ganz zu recht den Namen *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* oder kurz *Hauptsatz*.

Wir werden im folgenden den Hauptsatz formulieren, der in dieser Form auch im axiomatischen Zugang zur Analysis korrekt bleibt. Wir werden ihn in unserem Zugang, der auf der „ontologischen Bindung an den naiven Flächeninhaltsbegriff“ Danckwerts und Vogel, 2006, p. 104 beruht, begründen und ihn so elementar zugänglich und verstehbar machen.

Zunächst wiederholen wir aber einer Terminologie, die im Kontext des Hauptsatzes sehr hilfreich ist und deswegen auch durchgängig verwendet wird.

### Mathematische Faktenbox 26: Stammfunktionen

**6.2.10. Definition (Stammfunktion).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Intervall  $I$ . Dann heißt eine Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine *Stammfunktion* von  $f$  auf  $I$ , falls

$$F' = f, \quad (6.10)$$

d.h.  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$  gilt.

**6.2.11. Beispiel (Stammfunktionen von  $f(x) = x$ ).** Die Funktion  $F(x) = \frac{x^2}{2}$  ist eine Stammfunktion der identischen Funktion  $f(x) = x$  auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt

$$F'(x) = \left( \frac{x^2}{2} \right)' = x = f(x). \quad (6.11)$$

Allerdings ist auch  $G(x) = \frac{x^2}{2} + c$  für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn

$$G'(x) = \left( \frac{x^2}{2} + c \right)' = x = f(x). \quad (6.12)$$

Tatsächlich ist dieses Beispiel paradigmatisch, was die Nicht-Eindeutigkeit von Stammfunktionen angeht. Es gilt nämlich (für den einfachen(!) Beweis siehe z.B. (Steinbauer, 2022, 4.2.5)):

**6.2.12. Proposition (Differenz von Stammfunktionen).** Ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$ , dann gilt für jede Funktion  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$G \text{ ist (ebenfalls) Stammfunktion von } f \text{ auf } I \Leftrightarrow F - G = \text{konstant}. \quad (6.13)$$

Die in 6.2.9 aufgeworfenen Vermutung steht in einem engen Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen. Genauer stellen wir die Frage:

Haben alle „schönen“ Funktionen, also z.B. alle stetigen Funktionen eine Stammfunktion?

Die positive und präzise Antwort liefert nun der Hauptsatz.

### Mathematische Faktenbox 27: Der Hauptsatz

**6.2.13. Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und seien  $a, b \in I$ . Dann gilt:

- (1) Die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (6.14)$$

ist stetig differenzierbar<sup>a</sup> und es gilt  $F' = f$  (d.h.  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$ .) Insbesondere ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

**Mathematische Faktenbox 27 – Fortsetzung**

- (2) Sei  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (6.15)$$

Der formale Beweis ist für ein derartig zentrales Resultat erfreulich einfach und einsichtig. Er beruht auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, einem ebenfalls anschaulich sehr einsichtigen Resultat, vgl. z.B. (Steinbauer, 2022, 4.1.22). Wir werden unten die Beweisidee klar herausarbeiten.

**6.2.14. Suggestive Schreibweisen.** Folgende sehr eindringliche Formulierungen der beiden fundamentalen Aussagen sind weit verbreitet:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a). \quad (6.16)$$

Spätestens hier werden wir mit der Nase darauf gestoßen, dass Differenzieren und Integrieren zueinander inverse Operationen sind. Einen Weg zur mathematischen Präzisierung dieser Aussage findet sich z.B. in (Steinbauer, 2022, 4.2.9).

<sup>a</sup>Das bedeutet, dass  $F$  differenzierbar und die Ableitungsfunktion  $F'$  stetig ist. **WARNUNG:** Hier geht es um die Stetigkeit der Ableitungsfunktion  $F'$  und *nicht* um die Stetigkeit der Funktion  $F$  selbst. Diese folgt ja schon aus der Differenzierbarkeit von  $F$ .

**6.2.15. Beweisidee/-skizze des Hauptsatzes.** Wir können auf dem gegenwärtigen Niveau die Beweisidee des Haupsatzes klar herausarbeiten.

- (1) Wir müssen für  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  zeigen, dass  $F' = f$  gilt. Dazu berechnen wir den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \approx \frac{f(x) h}{h} = f(x), \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei wir im entscheidenden Schritt (5.52) verwendet haben. (Ein Präzisierung dieses Schritts erfolgt im axiomatischen Zugang zur Analysis mittels des Mittelwertsatzes der Integralrechnung).

- (2) Definieren wir  $G$  wie oben, d.h.  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ , dann gilt wegen Teil (1) des Hauptsatzes, dass  $G$  Stammfunktion von  $f$  ist. Wegen Proposition 6.2.12 ist dann jede Stammfunktion von der Form  $F = G + c$  für einen Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt aber

$$F(b) - F(x) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^x f(t) dt}_{=0} = \int_a^b f(t) dt. \quad (6.18)$$

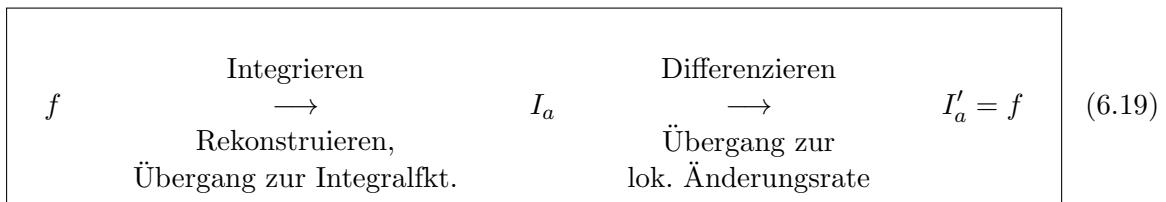
**6.2.16. Die Aussage des Hauptsatzes.** Wegen der Wichtigkeit des Haupsatzes, die gar nicht überschätzt werden kann, geben wir hier noch eine verbale Umformulierung bzw. Interpretation seiner Aussagen an.

- (1) Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass (zumindest) für alle stetigen Funktionen eine Stammfunktion gefunden werden kann und dass eine solche durch die Integralfunktion gegeben ist. Das bedeutet in der Terminologie von oben, dass für jede stetige Funktion eine „Rekonstruierte“ existiert, in dem Sinne dass ihre Ableitung die Funktion zurückgibt. In dieser Formulierung ist das eine explizite und positive Antwort auf die Frage in 6.2.9.
- (2) Die zweite (eng verwandte) Aussage macht klar, wie man Integralfunktionen finden kann, also kurz *wie man integriert*. Nämlich, die Integralfunktion ist dadurch gegeben, dass man mittels (irgend)einer beliebigen Stammfunktion die Differenz auf der rechten Seite von (6.15) bildet.  
Dies stellt eine elegante Möglichkeit zur Verfügung, Integrale zu berechnen. Historisch gesehen war das sogar *die* Integrationsmethode. Allerdings ist es oft schwierig eine explizite Stammfunktion zu finden<sup>4</sup> und oft ist es sogar unmöglich, wie z.B. für die Dichte der Normalverteilung  $f(x) = e^{-x^2}$ . Tatsächlich ist v.a. in den Anwendungen die *numerische Integration* viel wichtiger (geworden).

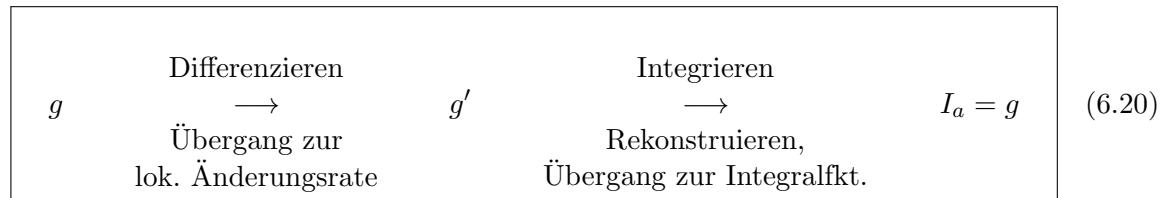
**6.2.17. Differenzieren vs. Integrieren.** Schließlich zeigt der Hauptsatz, dass Differenzieren und Integrieren zueinander „inverse Operationen“ sind, vgl. auch 6.2.14. In diesem Sinne erweitert der Hauptsatz auch die Perspektive auf das, was wir oben „Rekonstruieren“ von Funktionen genannt haben. Genauer zeigt der Hauptsatz:

*Differenzieren (als Bilden der lokalen Änderungsrate) und Integrieren (als Rekonstruieren) sind Umkehroperationen.*

Schematisch können wir diesen Sachverhalt wie folgt ausdrücken:



Und umgekehrt:



Für eine mathematische Präzisierung dieser Aussagen siehe z.B. (Steinbauer, 2022, 4.2.9).

<sup>4</sup>Es existieren ganze Bände, die explizite Stammfunktionen zu (in Anwendungen) wichtigen Funktionen(klassen) bereitstellen, die sog. Integraltafeln. Heute werden natürlich hauptsächlich CAS dafür eingesetzt.

**6.2.18. Zur Terminologie.** Folgenden Punkte zur Terminologie bzw. Schreibweise sind essentiell:

- (1)  $\int_a^x f(t) dt$  ist eine Funktion (von  $x$ ), und  
 (2)  $\int_a^b f(x) dx$  ist eine Zahl, manchmal *bestimmtes Integral* genannt.

Darüber hinaus wird oft der Ausdruck

$$\int f(x) dx \quad (\text{oder gelegentlich noch unpräziser } F(x) = \int f(x) dx)$$

(jedenfalls ohne Integralgrenzen) verwendet und als **unbestimmtes Integral** bezeichnet. Gemeint ist damit *irgendeine* oder auch *alle* Stammfunktion(en) von  $f$ .

Diese Terminologie ist ungünstig und führt zu Missverständnissen, siehe z.B. (Steinbauer, 2022, 4.2.11). Besser ist es, nur von Stammfunktionen bzw. Integralen von  $a$  nach  $b$  (2) oder mit variabler Obergrenze (1) reden und den Ausdruck „(un)bestimmtes Integral“ zu vermeiden.

## 6.2.C Die Analytische Präzisierung des Integralbegriffs

In unserem Zugang haben wir die Integralfunktion mit Hilfe der Idee der Rekonstruktion gewonnen. Die Integralfunktion einer Berandung war dabei definiert über die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen Berandung und  $x$ -Achse, vgl 6.2.7. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Präzisierung dieser Idee im Rahmen der Fachanalysis, wobei wir uns von der Präexistenz des Flächeninhalts lösen (müssen).

**6.2.19. Leitfrage.** Wir beginnen damit, die folgende Leitfrage zu stellen, die uns schrittweise zur gewünschten Präzisierung des Integralbegriffs führen wird:

In welchen Sinne wird das Integral — definiert als orientierter Flächeninhalt unter einer gegebenen Berandung — beliebig gut durch die Summen orientierter Rechtecksinhalte approximiert?

Wir beginnen damit, diese Frage an einem einfachen Beispiel zu untersuchen.

**6.2.20. Ein einfacher Fall:**  $f(x) = x$ .

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x$  auf  $[0, \infty)$ . Die Summe der unterhalb des Graphen von  $f$  liegenden Rechtecksinhalte ist gegeben durch (siehe Abbildung 6.9):

$$U(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \quad (6.21)$$

Wir nennen  $U(n)$  die  $n$ -te Untersumme bzw. die Untersumme für  $n$  Unterteilungen.

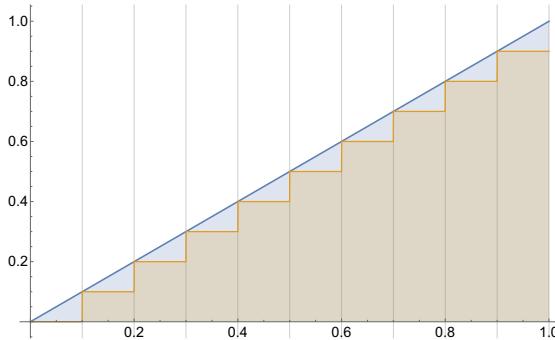


Abb. 6.9: Approximation des Integrals von  $f(x) = x$  durch Rechtecksflächen, die unterhalb des Graphen liegen

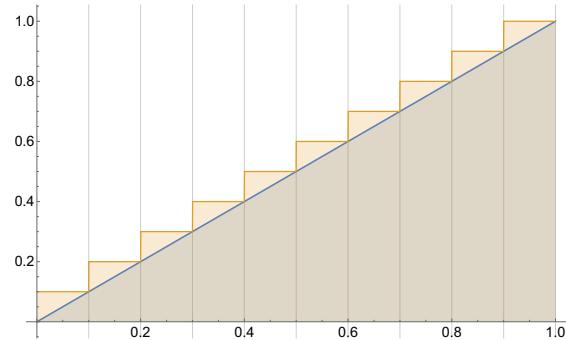


Abb. 6.10: Approximation des Integrals von  $f(x) = x$  durch Rechtecksflächen, die oberhalb des Graphen liegen

Die Summe der oberhalb des Graphen von  $f$  liegenden Rechtecksinhalte ist gegeben durch (siehe Abbildung 6.10)

$$O(n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \quad (6.22)$$

Analog nennen wir  $O(n)$  die  $n$ -te Obersumme.

Die entscheidende Frage ist nun, in wie weit die beiden Rechteckssummen mit wachsendem  $n$  die Fläche unter dem Graphen approximieren. In diesem Falle kennen wir aber die Fläche:

Weil es sich um die halbe Fläche des Einheitsquadrats handelt gilt  $I_0(1) = \frac{1}{2}$ .

Daher finden wir für den Fehler bzw. die Abweichung der Rechteckssummen für eine Unterteilung in  $n$  Intervalle

$$\begin{aligned} U(n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} = I_0(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{und} \\ O(n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} = I_0(1) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (6.23)$$

In diesem präzisen Sinn wird das Integral von  $f(x) = x$  beliebig gut durch die Unter- bzw. Obersummen approximiert.

**6.2.21. Eine erste Antwort** auf die oben gestellte Leitfrage lautet daher: Das Integral wird durch Rechteckssummen beliebig gut approximiert, in dem Sinn, dass bei Teilung des Intervalls in  $n$  gleich lange Teilintervalle der Unterschied von Unter- und Obersummen zum Flächeninhalt bei wachsendem  $n$  beliebig klein wird. Oder etwas knapper formuliert

Ober und Untersummen gehen im Limes  $n \rightarrow \infty$  gegen den Flächeninhalt.

Einem weiteren Problem müssen wir uns aber noch stellen. Im obigen Beispiel konnten wir den Flächeninhalt elementargeometrisch bestimmen. Von dieser Voraussetzung müssen wir

uns aber noch trennen, denn im allgemeinen werden wir den Flächeninhalt nicht durch unabhängige Überlegungen bestimmen können!

Um dies effektiv bewerkstelligen zu können, betrachten wir die oben definierten Ober- und Untersummen in formaler Weise.

**6.2.22. Produktsummen.** Formal haben wir es sowohl bei den Unter- wie auch bei den Obersummen mit Ausdrücken der Form

$$\sum_i f(x_i) (x_{i+1} - x_i) \quad \text{oder etwas salopper} \quad \sum f(x) \Delta x \quad (6.24)$$

zu tun, die vor allem im fachdidaktischen Kontext der Integralrechnung als *Produktsummen* bezeichnet werden. Diese Terminologie spielt natürlich darauf an, dass es sich bei diesen Ausdrücken um Summen handelt, deren Summanden Produkte sind. Letztere haben wir bisher als Flächeninhalte von Rechtecken gedeutet.

Der entscheidende Schritt ist es nun, solche Produktsummen von einem allgemeineren Standpunkt aus zu betrachten: Gegeben eine beliebige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so können wir formal und ohne an die geometrische Interpretation zu denken, Produktsummen (für ein jeweils vorgegebenes  $n$ ) der Form 6.24 und der Länge  $n$  bilden. Und die Frage lautet nun, ob ein formales Arbeiten mit Produktsummen einen Sinn hat, bzw:

Haben die Produktsummen auch losgelöst vom geometrischen Kontext einen Sinn?

Zunächst kann man sich durchaus im Kontext der Schulanalyse davon überzeugen, dass ein Arbeiten mit diesen Produktsummen zielführend ist. In (Danckwerts und Vogel, 2006, Abschn. 4.4.1) finden sich z.B. Beispiele zur Volumsberechnung mittels Cavalierischem Prinzip und des Energiebegriffs in der klassischen Mechanik.

**6.2.23. Der analytische Integralbegriff.** Tatsächlich erlaubt uns ein Fokussieren auf die Produktsummen, einen rein analytischen Integralbegriff zu definieren, der losgelöst vom naiven Flächeninhaltsbegriff besteht. Die Idee ist es, schlich und einfach in den Überlegungen in 6.2.20 den Flächeninhaltsbegriff wegzulassen und nur auf die Konvergenz der Ober- und Untersummen zu fokussieren. Genauer:

Konvergieren Unter- und Obersumme gegen einen gemeinsamen Grenzwert, so definieren wir diesen als Integral.

Um diesen Weg auch formal zu beschreiben definieren wir Unter- und Obersummen präzise.

#### Mathematische Faktenbox 28: Das Riemann Integral

Wir betrachten eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^a$ . und unterteilen das Intervall  $[a, b]$  in  $n$ -Stück Intervalle der gleichen Länge  $(b - a)/n$ , die wir mit

$$[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n = b] \quad (6.25)$$

bezeichnen. Dabei ist für jedes  $0 \leq i \leq n$  der Teilungspunkt  $x_i$  gegeben durch

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}. \quad (6.26)$$

### Mathematische Faktenbox 28 – Fortsetzung

Dann identifizieren wir auf jedem der Teilintervalle optimale Schranken an die Funktionswerte<sup>b</sup>. Genauer setzen wir

$$\underline{f}_i := \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad \text{und} \quad \overline{f}_i := \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x). \quad (6.27)$$

Nun können wir definieren.

**6.2.24. Definition (Unter- und Obersummen).** Mit der obigen Notation definieren wir die  $n$ -te Unter- bzw. Obersumme von  $f$  auf  $[a, b]$  als

$$U(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}_i (x_{i+1} - x_i), \quad \text{bzw.} \quad O(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f}_i (x_{i+1} - x_i). \quad (6.28)$$

**6.2.25. Definition (Riemann Integral).** Konvergieren  $U(n)$  und  $O(n)$  für  $n \rightarrow \infty$  beide gegen denselben Grenzwert, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert der Unter- und Obersummen das (Riemann) Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und wir schreiben

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} U(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(n). \quad (6.29)$$

<sup>a</sup>D.h. es existiert eine Konstante  $C$ , sodass  $|f(x)| \leq C$  für alle  $x \in [a, b]$ .

<sup>b</sup>Wäre  $f$  stetig, dann könnten wir das Minimum bzw. das Maximum der Funktionswerte heranziehen, weil stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen Maximum und Minimum annehmen.

**6.2.26. Zur Schreibweise.** Die Schreibweise des Integrals ist eng mit der Idee der Produktsummen verknüpft. Eine symbolische Schreibweise für die Unter- bzw. Obersummen ist, wie schon in (6.24) erklärt

$$\sum f(x) \Delta x \quad (6.30)$$

und die (auf Leibniz zurückgehende) Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.31)$$

spiegelt den Grenzübergang in Definition 6.2.25 wider: Aus dem Summenzeichen wird ein „ $\int$ “ das als stilisiertes „S“ für „Summe“ auzufassen ist und aus dem (im Leibnizschen Sinne unendlich klein gedachten)  $\Delta x$  wird ein  $dx$ . Diese Symbolik drückt also genau die Idee unseres Zugangs aus, nämlich:

Das Integral ist als Grenzwert von Produktsummen aufzufassen.

Die Nonchalance, mit der in (6.24) und (6.30) die eigentliche Stelle an der  $f$  zu nehmen ist verschwiegen wird, hat einen mathematischen Hintergrund. Tatsächlich haben wir laut Definition 6.2.25 die Werte  $\underline{f}_i$  bzw.  $\overline{f}_i$  zu nehmen, die mit  $f(x)$  in (6.24) und (6.30) nur unzureichend

umschrieben werden. Allerdings lässt sich zeigen, dass falls das Integral in Definition 6.2.25 existiert, dann auch die Limiten der Ausdrücke

$$R(n) := \sum_{i_0}^{n-1} f(\bar{x}_i)(x_{i+1} - x_i), \quad (6.32)$$

wobei  $\bar{x}_i$  ein *beliebiger* Punkt im  $n$ -ten Teilintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  ist! In diesem Sinne ist die Konvergenz der Produktsummen sehr robust: Sie ist unabhängig davon, welchen Funktionswert im entsprechenden Intervall man sich aussucht.

Diese Konvergenz ist sogar noch robuster. Es lässt sich nämlich weiters zeigen, dass äquivalenter Weise auch analoge Ausdrücke konvergieren, wo die Intervalle nicht die gleiche Länge haben. Es muss lediglich sichergestellt sein, dass die sogenannte Feinheit der Zerlegung, das ist die maximale Länge der Teilintervalle, gegen 0 geht.

**6.2.27. Rückblick, Ausblick und ein kurzer Blick auf das Wesen der Mathematik.** Wir blicken zum Abschluss nochmals aus informierter Perspektive zurück auf unseren Zugang. Wir haben in der analytischen Präzisierung den Integralbegriff von den Füßen auf den Kopf gestellt (oder umgekehrt): Begonnen haben wir damit, dass wir den Flächeninhalt in einem einfachen Beispiel sowohl elementargeometrisch als auch auf analytischem Wege berechnet haben. Der analytische Weg bestand darin den bekannten Flächeninhalt als den Grenzwert von Produktsummen zu schreiben. Dann haben wir für den allgemeinen Fall, in dem wir den Flächeninhalt nicht mehr geometrisch bestimmen können, die analytische Charakterisierung zur Definition gemacht.

Mit diesem begrifflichen Wandel stehen wir nun am Anfang der *Integrationstheorie*, die sich im Gegensatz zum bisherigen Vorgehen vom naiven Flächeninhaltsbegriff gelöst hat. Hier wird es sinnvoll die folgenden Fragen zu stellen: Welche Funktionen sind integrierbar? Welche Berandungen besitzen eine Stammfunktion, etc.? Das weiter zu verfolgen würde hier aber zu weit führen. Tatsächlich gilt etwa der Hauptsatz für die Klasse der sogenannten absolut stetigen Funktionen, die umgekehrt dadurch charakterisiert ist, dass genau für sie der Hauptsatz gilt. Allerdings ist das Integral dann nicht mehr ein Riemann Integral, sondern muss zum sogenannten Lebesgue Integral verallgemeinert werden.

Wichtig ist an dieser Stelle aber folgendes zu bemerken: Die hier verfolgte Vorgehensweise ist nicht nur eine typisch analytische, sondern sogar eine typisch mathematische. Ausgehend vom naiven Flächeninhaltsbegriff haben wir eine mathematische Beschreibung desselben entwickelt. Dann haben wir aber festgestellt, dass diese weit über den ursprünglichen Zusammenhang hinaus trägt. Wir haben mit der analytischen Definition einen Integralbegriff geschaffen, der viel allgemeiner ist und der es erlaubt, den naiven Flächenbegriff zu präzisieren und zu erweitern. Insofern stehen Flächeninhalt und Integralbegriff in einem dialektischen Verhältnis zueinander.

## 6.3 Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff

In diesem Abschnitt stellen wir kurz die Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff und ihre wechselseitigen Beziehungen zusammen. Für mehr Details siehe Greefrath et al., 2016, Abschn. 5.3.

### 6.3.A Aspekte des Integralbegriffs

#### FD-Box 31: Stammfunktionsaspekt des Integralberiffs

Der Aspekt des Integrals als Stammfunktion stellt den Zusammenhang zwischen dem Integrieren und dem Differenzieren heraus. Er ist damit untrennbar mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verbunden.

#### FD-Box 32: Produktsummenaspekt des Integralberiffs

Unter einer Produktsumme versteht man einen Ausdruck des Typs

$$\sum f(x) \Delta x, \quad \text{vgl. (6.24), (6.30).}$$

Sie spielen formal die tragende Rolle bei der analytische Präzisierung des Integralbegriffs, vgl. mathematische Faktenbox 24.

### 6.3.B Grundvorstellungen zum Integralbegriff

#### FD-Box 33: Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung macht den Integralbegriff am naiven Flächeninhaltsbegriff fest. Sie betont also den „klassischen Zugang“ zur Integralrechnung, bei dem es das Ziel ist, die Fläche unter einer (beliebigen aber „schönen“) Berandnung zu bestimmen.

#### FD-Box 34: Rekonstruktionsgrundvorstellung

Unter Rekonstruktion im Zusammenhang mit dem Integralbegriff versteht man

- die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten (vgl. Abschnitt 6.2.A) und
- die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion oder Berandung (vgl. 6.2.9).

#### FD-Box 35: Mittelwertsgrundvorstellung

Die Mittelwertsgrundvorstellung bringt zum Ausdruck, dass mithilfe des Integrals einer gegebenen Funktion über einem bestimmten Intervall, dividiert durch die Länge des Intervalls, ein Mittelwert berechnet werden kann.

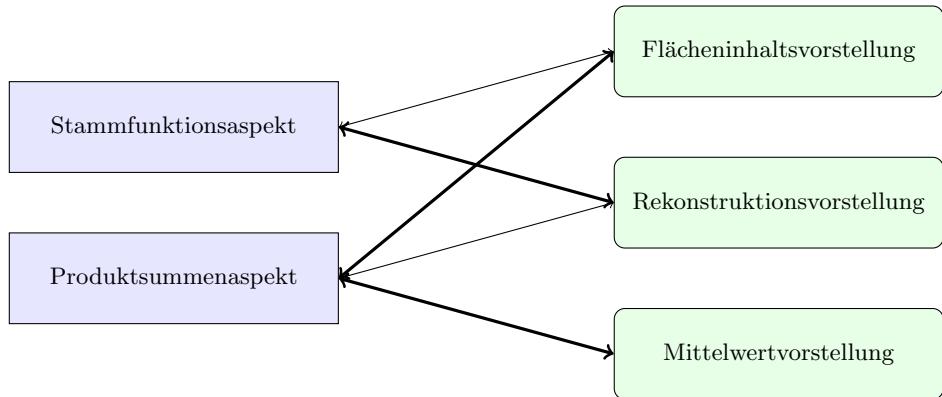
**6.3.C Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff**

Abb. 6.11: Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen

# Literatur

- Bass, Hyman und Ball, Deborah (2004). "A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning". In: *Trends and challenges in mathematics education*. Hrsg. von W. Jianpan. East China Normal University Press, Shanghai, S. 107–123.
- Baumert, Jürgen und Kunter, Mareike (2013). "Professionelle Kompetenz von Lehrkräften". In: *Stichwort: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*. Hrsg. von Ingrid Gogolin, Harm Kuper, Heinz-Hermann Krüger und Jürgen Baumert. Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 277–337.
- Bender, Peter (1991). *Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten*. Universitätsbibliothek.
- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A. und Süss-Stepancik, E. (2018). *Dimensionen — Mathematik 6*. Wien: Verlag E. Dorner.
- Blum, W. (1979). "Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung". In: *MU 25* (3), S. 42–50.
- Blum, W. und Kirsch, A. (1979). "Anschauung und Strenge in der Analysis IV". In: *MU 25* (3).
- Blum, Werner und Törner, Günter (1983). *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen.
- Bolzano, Bernard (1851). *Paradoxien des unendlichen*. Reclam.
- Bruner, J.S. (1981). "Der Akt der Entdeckung". In: *Entdeckendes Lernen*. Hrsg. von Neber H. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.
- Bürger, Heinrich und Malle, Günter (2000). "Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung". In: *Mathematik lehren* 103, S. 56–59.
- Danckwerts, Rainer und Vogel, Dankwart (2005). *Elementare Analysis*. BoD–Books on Demand, Norderstaed.
- (2006). *Analysis verständlich unterrichten. Mathematik Primär- und Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.
- Dienes, Zoltan P und Golding, Edmond W (1970). *Methodik der modernen Mathematik: Grundlagen für Lernen in Zyklen*. Herder, Freiburg.
- Dolan, S. (1991). *Introductory Calculus*. Cambridge University Press.
- Dumas, H Scott (2014). *Kam Story, The: A Friendly Introduction To The Content, History, And Significance Of Classical Kolmogorov-arnold-moser Theory*. World Scientific Publishing Company.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2015). "Die interaktive Funktionenlupe-Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis". In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. WTM-Verlag, Münster, S. 264–267.

- Forster, Otto (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Freudenthal, Hans (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. Band 2. Klett, Stuttgart.
- (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Götz, Stefan (2013). “Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien”. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. WTM-Verlag, Münster, S. 364–367.
- Greefrath, Gilbert, Oldenburg, Reinhard, Siller, Hans-Stefan, Ulm, Volker und Weigand, Hans-Georg (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- Hahn, Steffen und Prediger, Susanne (2004). “Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion—Ein Plädoyer für das Qualitative”. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 217–220.
- Henn, Hans-Wolfgang (2018). “”Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis””. In: *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4*. Springer, S. 145–160.
- Heuser, H. (2003). *Lehrbuch der Analysis*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Hilbert, David (1926). “Über das Unendliche”. In: *Math. Ann.* 95.1, S. 161–190.
- Hofe, Ruldolf vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum-Verlag, Heidelberg.
- Kirchgraber, Urs (1999). “Kurvendiskussion quo vadis”. In: S. 112–119.
- Kirsch, Arnold (1980). *Folien zur Analysis, Serie A. Die Steigung einer Funktion*. Schroedel, Hannover.
- Krauss, Stefan, Neubrand, Michael, Blum, Werner, Baumert, Jürgen, Brunner, Martin, Kunter, Mareike und Jordan, Alexander (2008). “Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie”. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 29.3-4, S. 233–258.
- Kuba, Gerald und Götz, Stefan (2015). *Zahlen*. S. Fischer Verlag.
- Prediger, Susanne (2013). “Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen”. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von Christoph Ableitinger, Jürg Kramer und Susanne Prediger. Springer, Heidelberg.
- Russel, Bertrand (1950). *Philosophie des Abendlandes*. Europa Verlag, Zürich.
- Schichl, Hermann und Steinbauer, Roland (2018). *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum, Heidelberg.
- Schweiger, Fritz (1992). “Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik”. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 13.2,3, S. 199–214.
- Sonar, Thomas (2016). *Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz and Newton*. Springer, Spektrum.
- Steinbauer, Roland (2021). “Die Entzauberung des Unendlichen”. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 53, S. 135–150.
- (2022). *Analysis für das Lehramt. Eine Einladung*. Vorlesungsskriptum, Universität Wien.
- Tall, David (2002). “The psychology of advanced mathematical thinking”. In: *Advanced mathematical thinking*. Hrsg. von David Tall. Springer, Dordrecht, S. 3–21.
- Tall, David und Vinner, Shlomo (1981). “Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity”. In: *Educational studies in mathematics* 12.2, S. 151–169.
- Universität Wien (2016). *Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula*. (Online; Gesehen 3. September 2022.)

- Vollrath, Hans-Joachim und Weigand, Hans-Georg (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Vom Hofe, Rudolf und Blum, Werner (2016). ““Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics”. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37.1, S. 225–254.
- vom Hofe, Rudolf (2003). “Grundbildung durch Grundvorstellungen”. In: *Mathematik lehren* 118, S. 4–8.
- Weber, Christof (2013). “Grundvorstellungen zum Logarithmus — Bausteine für einen verständlichen Unterricht.” In: *Mathematik verständlich unterrichten*. Hrsg. von Henrike Allmendinger, Katja Lengnink, Andreas Vohns und Gabriele Wickel. Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Winkler, Reinhard (2009). “Die reellen Zahlen sind anders”. In: *Didaktikhefte der ÖMG* 41.
- Winter, Heinrich (1996). “Mathematikunterricht und Allgemeinbildung”. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61, 3746.
- Wittmann, Erich Ch, Müller, Gerhard N und Röhr, Martina (2004). *Das Zahlenbuch: Mathematik im... Schuljahr. 2: Arbeitsheft mit Blitzrechnen*. Klett.