

Roland Steinbauer

# Analysis für das Lehramt

Eine Einladung

Sommersemester 2020

Fakultät für Mathematik, Universität Wien



## Inhaltsverzeichnis

- 0 Einleitung
- 1 Folgen und Reihen — Konvergenz
- 2 Stetige Funktionen
- 3 Differentiation
- 4 Integration
- Literaturverzeichnis

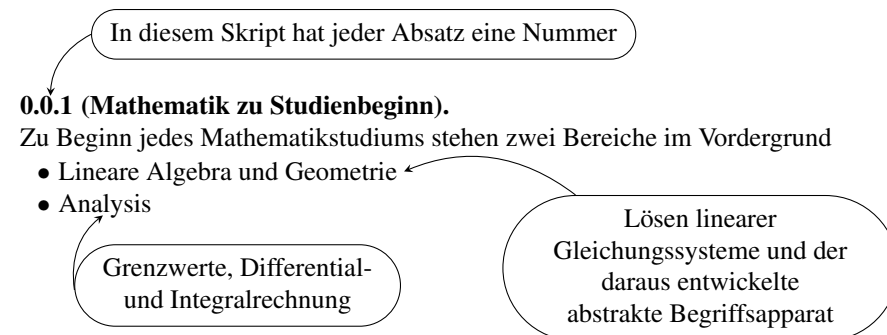


# Kapitel 0

## Einleitung

**Zusammenfassung.** In dieser Einleitung beginnen wir mit einigen inhaltlichen und methodischen Vorbemerkungen in Abschnitt 0.0. Dann legen wir in Abschnitt 0.1 den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

### 0.0 Was will und was soll die Analysis?



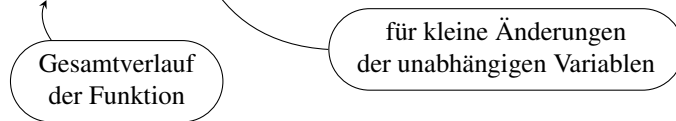
Die Themen der Analysis sind also schon aus der Schulmathematik geläufig; sie wird an der Universität allerdings axiomatisch aufgebaut. Daher ist zu Beginn eher das *WIE* als das *WAS* ein Problem. [Für viele Studierende ist die (erste) Analysis-Vorlesung die relativ schwierigste des gesamten Studiums]

#### 0.0.2 (Analysis – Eine erste Inhaltsbestimmung).

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die *Differential- und Integralrechnung* (in einer und in mehreren Variablen). Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das *Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen* kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu, die Änderung einer

Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?



### Beispiel 0.0.3 (Fahrradfahren).

Wann und wie kann aus der Kenntnis der *Momentangeschwindigkeit* (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der *Gesamtverlauf der Fahrt* (zurückgelegte Strecke, die Funktion im Großen) rekonstruiert werden? Bei einem Fahrrad werden diese Größen durch den Tachometer bzw. Tageskilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe *wirklich* und wie kann obige Frage *systematisch* beantwortet werden? Das führt uns auf:

### 0.0.4 (Der Analytische Begriffsapparat).

Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den

#### GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen Erscheinungsformen – Er ist *das* Herzstück<sup>1</sup> der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- und Integralrechnung zugrunde!

### 0.0.5 (Und wozu das Ganze?).

Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken scheinende) Materie mit der echten Welt zu tun?

#### SEHR VIEL!

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Lagrange, Laplace, ...) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt und Gesellschaft in den letzten vier Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik sowie die Schrift und nimmt meiner Ansicht nach ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein.

### 0.0.6 (Ja schön, aber wie? Zur Methodik).

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist – und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich – dass die Analysis, wie auch jedes andere mathematische Gebiet nach der *axiomatischen Methode* gelehrt wird - Warum?

- (i) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

abstraktes Vorgehen nach dem Definition-Satz-Beweis-Schema

<sup>1</sup> Harro Heuser schreibt in seiner charakteristischen Sprache [8] vom „ewig jugendliche[n] Held des analytischen Dramas“.

(ii) Sie macht das Erlernen eines Gebiets

*leichter!*

**Das ist kein Witz!:** Statt in „druidischer Weise“ von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantierens mit „unendlich kleinen Größen“ unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt *definiert*. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen *Sätzen* formuliert. Diese werden durch logische Schlussfolgerungen *bewiesen*.

**Ja, aber...** *natürlich* bereitet diese Herangehensweise den Anfänger\*innen große *Schwierigkeiten*! Es ist eine große Herausforderung, den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der eigenen Phantasie und Intuition und der eigenen Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache. Daher ist es auch eines der Ziele dieser Vorlesung, diese methodische Herausforderung zu bewältigen. Insofern nimmt diese „Einladung in die Analysis“ den *methodischen* roten Faden der „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [7] auf und spinnt ihn weiter. . .

#### 0.0.7 (Axiomatik in der Analysis).

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv  
aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir in den nächsten Kapiteln. Dabei nehmen wir den *inhaltlichen* Faden der „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [7] auf und knüpfen damit den Teppich der Analysis.

#### 0.0.8 (Bevor es wirklich losgeht – Eine letzte, auch persönliche Vorbemerkung).

Zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen und die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen und wird nicht ganz ohne Folgen für Ihr Denken bleiben (können). Ebenso kann die Kraft der Anwendungen (auf die wir in dieser Vorlesung leider (zu) wenig eingehen können) eine große Wirkung entfalten. Die durch *reines Denken* gewonnen Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, in anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie etc. und sind somit höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft.

## 0.1 Die reellen und die komplexen Zahlen—Eine Zusammenfassung

### Motivation 0.1.1 (Axiomatik als Grundstein).

In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament, auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die *axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen*.

Wir wählen absichtlich diesen Ausgangspunkt, um uns nicht lange mit den mengentheoretischen Grundlagen der Zahlen befassen zu müssen — was den Rahmen dieser Einladung in die Analysis deutlich sprengen würde. Tatsächlich können die reellen (und damit auch komplexen) Zahlen nämlich aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe etwa [7, Erweiterungsstoff im Kapitel 6] bzw. ausführlicher [6]). Die so konstruierten Mengen  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen — Daher spielt es für alles Weitere keine Rolle, *wo* wir beginnen. Wichtig ist nur, *dass* wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile aus [7], sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf [7] arbeiten. Wir werden den Satz von Dedekind [7, Thm. 6.4.4] zur Definition erheben (siehe die Diskussion in [7, unter 6.4.4]), also die reellen Zahlen festlegen durch:

$\mathbb{R}$  ist der (bis auf Isomorphie eindeutige) ordnungsvollständige geordnete Körper, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Unterkörper besitzt.

Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen bzw. erklären:

### Faktensammlung 0.1.2 (Die reellen Zahlen als Körper).

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper [7, Def. 4.5.1], d.h. es gelten die *Axiome der Addition*,

(A1) Assoziativgesetz:  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(A2) Kommutativgesetz:  $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(A3) Existenz der Null:  $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 = x$

additiv Neutrales

(A4) Existenz von additiv Inversen:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} : \quad x + (-x) = 0$

die *Axiome der Multiplikation*,

(M1) Assoziativität:  $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(M2) Kommutativität:  $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(M3) Existenz der Eins:  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 = x$

multiplikativ Neutrales

(M4) Existenz von multiplikativ Inversen:  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : \quad xx^{-1} = 1$

und das *Distributivgesetz*  $\leftarrow$  regelt die Verträglichkeit von  $+$  und  $\cdot$



$$(D) \ x(y+z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung 0.1.3 (Folgerungen aus den Körperaxiomen).**

- (i) Das additiv neutrale Element 0 und das multiplikativ neutrale Element 1 sind eindeutig bestimmt [7, Prop. 5.2.16].
- (ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen  $-x$  und  $x^{-1}$  eindeutig bestimmt [7, Prop 5.2.16]
- (iii) Es gibt keine Nullteiler [7, Bem. 5.4.9], d.h.  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \neq 0$
- (iv) Endliche Summen und Produkte erfüllen (erweiterte) Versionen von Assoziativ- und Distributivgesetz [„Klammerrechnung“,  $(x+y)(u-w) = ux + uy - xw - yw$  zum Beispiel] und wir verwenden die Summen- und Produktschreibweise  $\sum$  bzw.  $\prod$  [7, Kap. 2.3]

**Faktensammlung 0.1.4 (Die komplexen Zahlen).**

- (i) Per definitionem [7, Def. 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reeller Zahlen, d.h.

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ und wir schreiben } \mathbb{C} \ni z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Auf  $\mathbb{C}$  sind eine Addition und eine Multiplikation definiert. Für  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  hat sie die Form

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (0.1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (0.2)$$

- (ii) Mit diesen Operationen ist  $\mathbb{C}$  ein *Körper* [7, Thm. 6.5.2], wobei  $0 := (0, 0)$  das Nullelement und  $1 := (1, 0)$  das Einselement sind, d.h. für  $\mathbb{C}$  gelten alle Punkte aus 0.1.2 mit  $\mathbb{C}$  statt  $\mathbb{R}$ . [Klar, denn 0.1.2 listet ja nur allgemein die Eigenschaften von Körpern auf.]
- (iii) Für  $z = (x, y)$  verwenden wir auch die Schreibweise

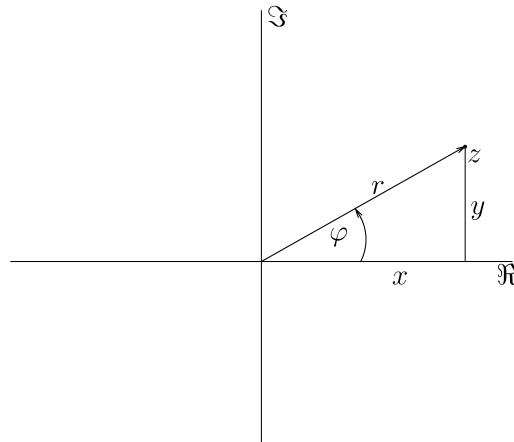
$$z = x + iy \quad \text{und} \quad x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z),$$

wobei  $i = (0, 1)$  die *imaginäre Einheit* genannt wird [7, Defs. 6.5.5, 6.6.6].

- (iv) Als Elemente von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  können komplexe Zahlen  $z = (x, y)$  in natürlicher Weise als Punkte in der Ebene aufgefasst und als solche dargestellt werden, siehe Abbildung 0.1 und vgl. [7, Def. 6.5.6f]. Dabei hat die komplexe Zahl  $z = (x, y)$  die kartesischen Koordinaten  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

Alternativ kann  $z$  auch in Polarkoordinaten beschrieben werden, d.h. durch seinen Abstand vom Ursprung und den Winkel von der positiven ersten Achse. Auf diese Weise lässt sich jede komplexe Zahl  $0 \neq z = x + iy$  eindeutig als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



**Abb. 0.1** Die komplexe Zahlenebene

schreiben (siehe Abbildung 0.1), wenn man den Winkel  $\varphi$  aus  $[-\pi, \pi)$  wählt. Der Radius errechnet sich aus dem Satz von Pythagoras und wird auch als der *Betrag*  $|z|$  der komplexen Zahl  $z$  bezeichnet,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (0.3)$$

Der Winkel  $\varphi$  kann z.B. aus  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$  berechnet werden, für Details siehe [7, unter Def. 6.5.6].

(v) Die imaginäre Einheit  $i$  hat die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\underline{i}^2 = (0, 1)^2 \stackrel{(0.2)}{=} (-1, 0) = -1 + i0 = \underline{-1}$$

(vi)  $\mathbb{R}$  ist ein *Unterkörper* [7, Def. 5.4.13] von  $\mathbb{C}$  [7, unter 6.5.4], wobei  $\mathbb{R}$  mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, 0) = x + i0 \end{aligned}$$

in  $\mathbb{C}$  eingebettet ist (siehe die graue Box unter [7, 6.5.4]). Insbesondere können wir  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$  identifizieren und  $1 \in \mathbb{R}$  mit  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ . In Abbildung 0.1 entspricht also  $\mathbb{R}$  der ersten Achse in  $\mathbb{R}^2$ , die auch reelle Achse genannt wird.

(vii)  $\mathbb{C}$  besitzt mit der *komplexen Konjugation* eine vielseitige Struktur. Genauer haben wir die Abbildung [7, Def. 6.5.8]

$$\begin{aligned} - : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$

Sie ist ein Körperautomorphismus ([7, 5.4.20(iii)], d.h. Körperisomorphismus auf sich selbst) von  $\mathbb{C}$ , wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h.  $\bar{\bar{z}} = z$ . Man sagt die Komplexkonjugation ist eine *Involution*.

### Faktensammlung 0.1.5 ( $\mathbb{R}$ als angeordneter Körper).

(Hier weichen wir ein wenig von [7] ab, die Zugänge sind aber äquivalent!)

- (i) Auf der Menge  $\mathbb{R}$  ist eine *Ordnungsrelation*  $\leq$  definiert, die sogenannte *natürliche Ordnung*.

Das bedeutet, dass die Relation  $\leq$  die folgenden Eigenschaften besitzt ( $x, y, z \in \mathbb{R}$ )

- Reflexivität:  $x \leq x$ ,
- Transitivität:  $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$  und
- Antisymmetrie:  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ .

Für Details siehe [7, Def. 4.2.24(i)], bzw. das Erklärvideo

► Video



Ordnungsrelationen

Wir verwenden die *Schreibweisen*:

$$x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y :\Leftrightarrow y < x$$

- (iii)  $\leq$  ist eine *Totalordnung* [7, Def. 4.2.44 (iii)], d.h. es gilt die *Trichotomie*

(O1)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt *genau eine* der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

[Genauer gesagt [7, Def. 4.2.24 (iii)]: Es gilt mindestens eine der Aussagen  $x \leq y, y \leq x$ . Es gilt aber (4.2.24 (iii))  $\Leftrightarrow$  (O1):

*Beweis.*  $\Leftarrow$  ist klar

$\Rightarrow$ : Per definitionem gilt mindestens eine der drei Aussagen. Wir zeigen, dass niemals zwei oder alle drei gelten können:

- $x < y \wedge x = y$  ist per definitionem nicht möglich [ $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ ]
- $x > y \wedge x = y$  ebenso
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ , was nicht möglich ist, siehe oben.

□

- (iv)  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  ist ein geordneter Körper [7, Def. 6.3.1], d.h. es gelten  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(O2) \quad x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$$

$$(O3) \quad x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow xy > 0$$

← Verträglichkeit von  $\leq$  mit  $+, \cdot$

(v) In  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  gelten die Rechenregeln [7, Prop. 6.3.2] ( $x, y, z \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow y - x \leq 0 \\ x \leq 0 &\Leftrightarrow -x \geq 0 \\ x \leq y \wedge z \geq 0 &\Rightarrow xz \leq yz \\ x \leq y \wedge z < 0 &\Rightarrow xz \geq yz \\ x \neq 0 &\Rightarrow x^2 > 0 \\ 0 < x < y &\Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} \end{aligned}$$

(vi)  $\mathbb{C}$  ist kein angeordneter Körper. In 0.1.4(v) haben wir gesehen, dass in  $\mathbb{C}$  für die imaginäre Einheit  $i^2 = -1$  gilt, was den Rechenregeln in geordneten Körpern widerspricht, vgl. 0.1.5(v), vorletzte Gleichung. Daher ist  $\mathbb{C}$  kein geordneter Körper, siehe auch [7, Thm. 6.5.14].

### Wiederholung 0.1.6 (Intervalle).

Die Ordnung auf  $\mathbb{R}$  verwendet man, um wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu definieren – die *Intervalle* [7, unter 4.2.28]. Seien  $a < b \in \mathbb{R}$ .

$(a, b) \equiv ]a, b[ := \{x \in \mathbb{R}   a < x < b\}$	offenes, beschränktes Intervall
$(-\infty, b) \equiv ]-\infty, b[ := \{x \in \mathbb{R}   x < b\}$	offene, halbbeschränkte Intervalle
$(a, \infty) \equiv ]a, \infty[ := \{x \in \mathbb{R}   a < x\}$	
$[a, b) \equiv [a, b[ := \{x \in \mathbb{R}   a \leq x < b\}$	halboffene, beschränkte Intervalle
$[a, b] \equiv [a, b] := \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$	
$(-\infty, b] \equiv ]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}   x \leq b\}$	abgeschlossene, halbbeschränkte Intervalle
$[a, \infty) \equiv [a, \infty[ := \{x \in \mathbb{R}   a \leq x\}$	abgeschlossenes, halbbeschränktes Intervall
$[a, b] \equiv [a, b] := \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes beschränktes Intervall

Schließlich schreiben wir  $(-\infty, \infty) \equiv ]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$ .

### Faktensammlung 0.1.7 (Der Absolutbetrag).

Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die *Abstandsmessung*. Auf  $\mathbb{R}$  bewerkstelligt das der Absolutbetrag (kurz: Betrag) [7, Def. 6.4.11]. Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren

wir 
$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

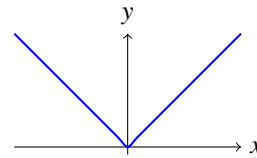


Abb. 0.2 Funktionsgraph des Absolutbetrags

Die Funktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat den obigen Graphen (vgl. Abb. 0.2) und die folgenden *grundlegenden Eigenschaften* [7, Prop. 6.4.12]

(N1) *Positive Definitheit*: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (0.4)$$

(N2) *Multiplikativität*: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$|xy| = |x| |y|. \quad (0.5)$$

(N3) *Dreiecksungleichung*: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (0.6)$$

Darüber hinaus hat der Absolutbetrag die folgenden Eigenschaften [7, 6.4.13-14] ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

(i) *Spiegelsymmetrie*:

$$|-x| = |x| \quad (0.7)$$

(ii) *Verträglichkeit mit Quotienten*:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \quad (0.8)$$

(iii) *Verkehrte Dreiecksungleichung*:

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad \text{und} \quad |x + y| \geq ||x| - |y|| \quad (0.9)$$

(iv) *Darstellung von Maximum und Minimum*:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{und} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \quad (0.10)$$

$\max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$ 

wohldefiniert wegen (O1)!

analog

### Faktensammlung 0.1.8 ((Über-)Abzählbarkeit). [7, Kap. 4.4]




Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar*, falls es eine Bijektion  $F : M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

Abzählbare Mengen sind:  $\mathbb{N}$  (klar!),  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren, [7, Abb. 4.11]

$\mathbb{R}$  ist *nicht* abzählbar, man sagt überabzählbar [Es ist schon  $(0, 1)$  überabzählbar, [7, unter 4.4.5]].

Für Details zur Mächtigkeit von Mengen sowie den Begriffen abzählbar und überabzählbar siehe [7, Abschn. 4.4] bzw. die folgenden Videos:

- Video  Mächtigkeit, Teil I (Gleichmächtigkeit von Mengen)
- Video  Mächtigkeit, Teil II (Abzählbarkeit der rationalen Zahlen)
- Video  Mächtigkeit, Teil III (Überabzählbarkeit der reellen Zahlen)

### Faktensammlung 0.1.9 (Ordnungsvollständigkeit).

Eine totalgeordnete Menge  $M$  heißt *ordnungsvollständig*, falls sie die sogenannte *Supremumseigenschaft* hat. Um diese zu formulieren wiederholen wir zuerst den Begriff des Supremums bzw. Infimums, vgl. [7, Def. 4.2.32].

- Sei  $E \subseteq M$  eine Teilmenge einer totalgeordneten Menge  $(M, \leq)$ , dann heißt jedes
- $a \in M$  mit der Eigenschaft  $a \leq e \forall e \in E$  *untere Schranke* von  $E$  (in  $M$ ) und jedes
  - $b \in M$  mit der Eigenschaft  $b \geq e \forall e \in E$  *obere Schranke* von  $E$  (in  $M$ ).

Wir nennen  $E$  *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, falls  $E$  eine obere bzw. untere Schranke besitzt. Hat  $E$  sowohl eine obere als auch eine untere Schranke, so sagen wir  $E$  ist *beschränkt*. Andernfalls sagen wir  $E$  ist *nach oben* bzw. *nach unten unbeschränkt* bzw. *unbeschränkt*.

Betrachten wir als Beispiel das Intervall  $E = (0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ , dann ist 0 untere und 1 obere Schranke von  $E$  und  $E$  ist beschränkt<sup>2</sup>. Allerdings ist z.B. auch  $-17$  untere und 7 obere Schranke von  $E$  — es sind nur keine besonders „guten“ Schranken. Um gut über „gute“ Schranken sprechen zu können, also über solche, die möglichst „nahe“ bei der Menge selbst sind verwendet man die Begriffe Infimum und Supremum.

Formal definieren wir (wieder allgemein) für Teilmengen  $E \subseteq M$  von totalgeordneten Mengen wie folgt:  $\alpha \in M$  heißt *Infimum* oder größte untere Schranke von  $E$ , falls gilt

- (i)  $\alpha$  ist untere Schranke von  $E$  und
- (ii) kein  $\alpha' > \alpha$  ist untere Schranke von  $E$  (formal:  $\alpha' > \alpha \Rightarrow \alpha'$  ist nicht untere Schranke von  $E$ ).

Wir schreiben in diesem Fall  $\alpha = \inf E$ . Analog dazu ist das *Supremum*, die kleinste obere Schranke  $\beta$  von  $M$  definiert durch

- (i)  $\beta$  ist obere Schranke von  $E$  und
- (ii)  $\beta' < \beta \Rightarrow \beta'$  ist nicht obere Schranke von  $E$ .

In diesem Fall schreiben wir  $\beta = \sup E$ .

<sup>2</sup> Das rechtfertigt im Nachhinein die Terminologie von 0.1.6

In unserem Beispiel  $E = (0, 1]$  gilt  $0 = \inf E$  und  $1 = \sup E$ . Die anderen angegebenen Schranken sind nicht Infimum bzw. Supremum. Beachte, dass es hier unerheblich ist, dass  $\sup E = 1$  in  $E$  liegt, das Infimum 0 aber nicht zu  $M$  gehört.

Ein Supremum bzw. Infimum, das zur jeweiligen Menge gehört hat allerdings einen speziellen Namen, nämlich Maximum bzw. Minimum, [7, Def. 4.2.32]. Sie sind dann jeweils das größte bzw. das kleinste Element der Menge. In unserem Beispiel  $E = (0, 1]$  ist 1 Maximum aber 0 nicht Minimum.

Nicht alle Teilmengen totalgeordneter Mengen haben ein Infimum bzw. Supremum, z.B. haben halbbeschränkten Intervalle in  $\mathbb{R}$  kein sup bzw. inf:  $(3, \infty)$  hat kein Supremum und  $(-\infty, 7]$  hat kein Infimum, weil diese Mengen ja überhaupt keine oberen bzw. unteren Schranken haben, resp. nach oben bzw. unten unbeschränkt sind. Hat eine Menge allerdings ein Supremum oder Infimum, so ist dieses eindeutig bestimmt, [7, unter 4.2.33].

Die Frage, ob wenigstens nach oben (unten) *beschränkte* Mengen ein Supremum (Infimum) haben führt uns zurück zur angekündigten Supremumseigenschaft [7, Def. 6.4.1].

(V) Eine totalgeordnete Menge  $(M, \leq)$  heißt *ordnungsvollständig*, falls jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Diese Definition ist übrigens nach [7, Prop. 6.4.2] äquivalent dazu, dass jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum hat.

Es ist eine fundamentale Tatsache, dass die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen *nicht ordnungsvollständig* ist. Tatsächlich ist die Menge

$$E := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$$

nach oben beschränkt, hat aber kein Supremum, [7, Bsp. 6.4.3]. Dieses „Missgeschick“ liegt natürlich daran, dass  $\sqrt{2}$  nicht zu  $\mathbb{Q}$  gehört, [7, Thm. 3.2.7]. Für  $\mathbb{R}$  sieht die Situation viel besser aus, wie wir am Ende unserer Tour durch die Grundlagen festhalten.

### Faktensammlung 0.1.10 (Definition von $\mathbb{R}$ ).

Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt, die im Dedekindschen Satz [7, Thm 6.4.4] vorkommen. Er lautet:

Es gibt (bis auf Isomorphie geordneter Körper<sup>2</sup>) genau einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Teilkörper enthält.

Wir *definieren* nun  $\mathbb{R}$  als genau jenen Körper. Damit hat  $\mathbb{R}$  nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

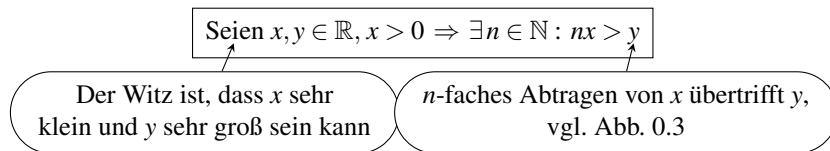
- die Körperaxiome (algebraische Eigenschaften) (A1) – (A3), (M1) – (M3), (D). „in  $\mathbb{R}$  gelten die 4 Grundrechenarten“
- die Ordnungsaxiome (O1) – (O3) „wir haben das übliche  $\leq$ “
- Ordnungsvollständigkeit (V) „ $\mathbb{R}$  hat im Gegensatz zu  $\mathbb{Q}$  keine Löcher“

Zum Schluss des Abschnitts halten wir noch wichtige Folgerungen aus (V) fest.

**Faktensammlung 0.1.11 (Konsequenzen aus der Ordnungsvollständigkeit).**

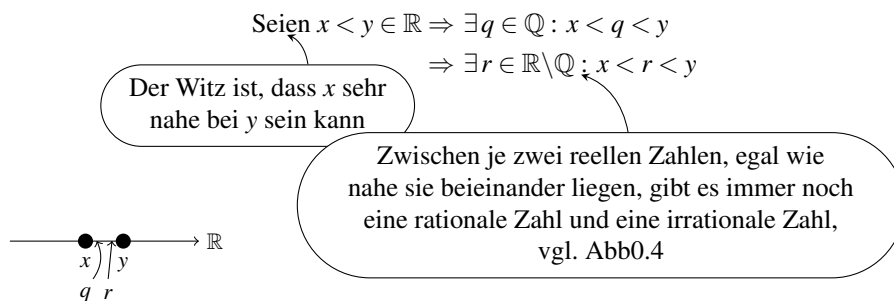
Die Ordnungsvollständigkeit und ihre Folgen werden uns die ganze Vorlesung hindurch noch in ganz intensiver Weise beschäftigen. Hier wiederholen wir drei sehr grundlegende Konsequenzen aus [7, Ch. 6].

(i) Die *archimedische Eigenschaft*, [7, Prop. 6.4.5 (i)]



**Abb. 0.3** Die archimedische Eigenschaft

(ii) *Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$*  [7, Prop. 6.4.5 (ii)].



**Abb. 0.4** Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$

<sup>2</sup> Das bedeutet, dass jeder andere Körper, der diese Eigenschaften erfüllt, als geordneter Körper „ununterscheidbar“ von  $\mathbb{R}$  ist, vgl. [7, p. 234, graue Box]. Folglich ist  $\mathbb{R}$  damit für alle praktischen Zwecke eindeutig!



- (iii) *Existenz und Eindeutigkeit von Wurzeln*: Sei  $0 < a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.  
 $\Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}$  mit  $x^n = a$  [7, Prop. 6.4.7]. Wir schreiben  $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  und nennen  $x$  die *n-te Wurzel aus a*



# Kapitel 1

## Folgen und Reihen — Konvergenz

**Zusammenfassung.** In diesem Kapitel legen wir *den* Grundstein der Analysis: den *Konvergenzbegriff* für Folgen. Wir werden also definieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiters werden wir Folgen als Werkzeug verwenden, um den zentralen Begriff der (Ordnungs-)Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen, also Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entlarven und unser diesbezügliches Wissen verwenden, um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit konvergenten Reihen wird sich im Weiteren als ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit, den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$  oder  $M$ , eine beliebige Menge) - die offizielle Definition kommt später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft - damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

### 1.1 $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einige Konsequenzen aus der Archimedischen Eigenschaft

#### Wiederholung 1.1.1 (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ).

In [7, 6.1.1] wurde  $\mathbb{N}$  als Menge definiert, die die *Peano-Axiome* erfüllt und in [7, 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt<sup>1</sup>.

Es ist also  $\mathbb{N}$  jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der auf  $\mathbb{N}$  definierten Nachfolgeabbildung  $S$  die Axiome

---

<sup>1</sup> Beachte, dass dies die analoge Vorgehensweise zu unserem Umgang mit  $\mathbb{R}$  ist, vgl. 0.1.1.

(PA1)  $0 \in \mathbb{N}$ .

(PA2)  $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$  (d.h.  $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ ).

(PA3)  $\nexists n \in \mathbb{N} : S(n) = 0$  (d.h. 0 ist kein Nachfolger).

(PA4)  $S$  ist injektiv, d.h. für alle  $m, n \in \mathbb{N} : S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$ .

(PA5) *Induktionsprinzip*: Falls  $M \subseteq \mathbb{N}$  und (PA1), (PA2) für  $M$  gelten [man sagt  $M$  ist *induktiv*: Es gilt  $0 \in M$  und mit  $m \in M$  ist auch  $S(m) \in M$ ], dann gilt schon  $M = \mathbb{N}$ .

(PA5) sagt, dass die vollständige Induktion funktioniert!

### Bemerkung 1.1.2 (Wohlordnung von $\mathbb{N}$ ).

Klarerweise ist  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  (für Details siehe [7, Kapitel 6, Erweiterungsstoff]). Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  besitzt  $\mathbb{N}$  die Eigenschaft der *Wohlordnung*:

Jede nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{N}$  hat ein Minimum.

*Beweis.* (1) Falls  $A$  endlich ist, dann gibt es klarerweise ein Minimum (es kann nach endlich vielen „Vergleichsschritten“ gefunden werden).  
 (2) Falls  $A$  unendlich ist, wählen wir ein beliebiges  $a \in A$  und zerlegen  $A$  in zwei Teilmengen

$$B := \{x \in A : x \leq a\}, \quad C := A \setminus B.$$

Nun gilt  $A = B \cup C$  und  $B$  ist endlich, somit hat es (wegen (i)) ein Minimum  $\min B$ . Außerdem gilt laut Konstruktion  $b < c$  für jedes  $b \in B$  und für jedes  $c \in C$ . Somit ist also  $\min B = \min A$ .  $\square$

Als nächstes halten wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft fest:

Der Witz an „ $\forall \varepsilon > 0$ “ ist,  
 dass  $\varepsilon$  beliebig nahe bei 0 sein kann  
 (i) sagt: „ $\frac{1}{n}$  wird beliebig klein“  
 (ii) sagt: „Zwischen  $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$  und 0 ist kein Platz“

### Theorem 1.1.3 (Die Macht von $\frac{1}{n}$ ).

(i)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

(ii) Sei  $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ . Falls  $r < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , dann gilt schon  $r = 0$ .

*Beweis.* (i) In der Archimedischen Eigenschaft 0.1.11(i) setze  $x = \varepsilon$  und  $y = 1$ .  
 Dann gilt:  $\exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$ , also  $\varepsilon > 1/n$ .

(ii) Sei  $r \geq 0$ . Falls  $r > 0$ , dann folgt mit (i) und  $r = \varepsilon$ , dass es ein  $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$  gibt mit  $\frac{1}{m} < r$ , was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also gilt  $r = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.1.4 (Bernoulli-Ungleichung).**

Sei  $-1 \leq x \in \mathbb{R}$ , dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

*Beweis.* Beweis per Induktion:

Induktionsvoraussetzung  
und  $1+x \geq 0$

$$n=0: (1+x)^0 = 1 \geq 1+0x.$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1: (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \square \end{aligned}$$

(i) sagt: Für  $b > 1$  wird  $b^n$  größer  
als jede vorgegebene Zahl  
(ii) sagt: Für  $0 < b < 1$  wird  $b^n$  kleiner  
als jede positive Zahl

**Proposition 1.1.5 (Wachstum von Potenzen).**

Sei  $b \in \mathbb{R}$ .

(i) Falls  $b > 1$ , dann gilt

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b^n > K.$$

(ii) Falls  $0 < b < 1$ , dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b^n < \varepsilon.$$

*Beweis.* (i) Setze  $x = b - 1$ , dann ist  $x > 0$  und wir können die Bernoulli-Ungleichung 1.1.4 verwenden. Somit

$$b^m = (1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Sei nun  $K \in \mathbb{R}$  (wobei der Witz ist, dass  $K$  sehr groß sein kann). Nach Archimedes 0.1.11(i) (beachte:  $x > 0$ ):

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad nx \geq K-1. \quad (1.2)$$

Nun setze  $m = n$  in (1.1). Dann gilt

$$b^n \stackrel{(1.1)}{\geq} 1+nx \stackrel{(1.2)}{>} 1+K-1 = K.$$

(ii) Dies folgt aus (i). Genauer, setze  $b_1 := \frac{1}{b}$ , dann gilt  $b_1 > 1$  und somit folgt aus

(i) (setze dort  $b = b_1$  und  $K = \frac{1}{\varepsilon}$ )

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad b_1^n > K = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und somit} \quad b^n = \frac{1}{b_1^n} < \varepsilon. \quad \square$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir *geometrische Summen* — ein ganz wichtiges Werkzeug.

### 1.1.6 (Geometrische Summen).

Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Funktion

$$s_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

(i) Für  $x = 1$  erhalten wir

$$s_n(1) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

(ii) Um  $s_n(x)$  für  $x \neq 1$  zu berechnen schreiben wir

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n,$$

$$xs_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}.$$

Somit ist  $(1-x)s_n(x) = s_n(x) - xs_n(x) = 1 - x^{n+1}$ . Also gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (1.3)$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von  $s_n(x)$  für große  $n$  (und  $x \neq 1$ ). Dazu schreiben wir (1.3) um zu

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}. \quad (1.4)$$

unabhängig von  $n$

interessanter Term

(iv) Für  $|x| < 1$  besagt 1.1.5(ii), dass der interessante Term in (1.4) betragsmäßig beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \xrightarrow{1.1.5(ii), b=|x|} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |x|^N < \varepsilon_1. \quad (1.5)$$

Klarerweise gilt (1.5) auch für alle  $n \geq N$  und daher

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \stackrel{|x| \leq 1}{=} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon_1}{1-x} \quad \forall n \geq N. \quad (1.6)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig (klein; Witz!), setze  $\varepsilon_1 := \varepsilon(1-x)$ . Dann gilt für alle  $n \geq N$ :

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \stackrel{(1.4)}{=} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \stackrel{(1.6)}{<} \frac{\varepsilon_1}{1-x} \stackrel{\varepsilon_1 = \varepsilon(1-x)}{=} \varepsilon.$$

Zusammengefasst ist also  $s_n(x)$  für  $|x| < 1$  und große  $n$  sehr nahe an  $\frac{1}{1-x}$ , und zwar im folgenden präzisen Sinn:

Zu jeder vorgegebenen „Toleranzgrenze“  $\varepsilon$  können wir einen Index  $N$  („Anzahl von Berechnungsschritten“) finden, sodass der Fehler

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right|$$

kleiner als die Toleranz  $\varepsilon$  ist, falls  $n \geq N$ .

Diese Formulierung stößt uns geradezu mit der Nase auf den kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg.

## 1.2 Folgen und Grenzwerte

Jetzt geht es los - und zwar mit der offiziellen

### Definition 1.2.1 (Folge).

Sei  $M$  eine Menge. Eine *Folge* in  $M$  ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow M.$$

Gilt  $M = \mathbb{R}$  bzw.  $M = \mathbb{C}$ , so nennen wir  $a$  eine *reelle* bzw. *komplexe Folge*. [Zunächst wird fast immer  $M = \mathbb{R}$  sein].

### 1.2.2 (Schreibweise).

Nachdem eine Folge als eine spezielle Funktion (mit eigenartig-spez. Definitionsbereich) definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl. [7, 4.3]) hier gültig.

Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige Schreibweisen eingebürgert:

- (i) Statt  $a(1), a(2)$ , usw. schreiben wir  $a_1, a_2$ , usw.
- (ii) Für die ganze Folge schreiben wir statt  $a$  oft auch

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n=0}^\infty$  oder kürzer  $(a_n)_n$  oder nur  $(a_n)$ .

- (iii) Immer wieder werden Folgen auftreten, die erst bei  $n = 1$  oder noch *später beginnen* - das bringen wir durch die Schreibweise  $(a_n)_{n=1}^\infty$  oder etwa  $(a_n)_{n=17}^\infty$  zum Ausdruck.

Ja aber: Dürfen Folgen später anfangen? Soll heißen:  
Sind das dann überhaupt folgen im Sinne der Definition?  
Ja schon, denn sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n=n_0}^\infty$  eine Folge, die erst bei  $n_0$  beginnt. Dann ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n := a_{n+n_0}$  eine „echte“ Folge und es zählt sich nicht aus, zwischen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zu unterscheiden.

### Beispiel 1.2.3 (Einfache Folgen).

- (i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  setze  $a_n = 2n$ . Das ergibt die Folge der geraden natürlichen Zahlen

$$(a_n)_n = (2n)_n = (0, 2, 4, 6, 8, \dots).$$

- (ii) Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Mit  $b_n = c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir die sog. *konstante* (reelle) Folge

$$(b_n) = (c)_n = (c, c, \dots).$$

Für diese einfache Folge hätten wir den Begriff wohl gar nicht gebraucht...

- (iii) Mit  $c_n = \frac{1}{n}$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) erhalten wir

$$(c_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

### 1.2.4 (Veranschaulichung von Folgen).

Es gibt zwei Wege, um Folgen in prägnanter Weise zu veranschaulichen.

- (i) „*Spaziergang*“ in  $M$ : Man trägt die Werte  $a_n$  der Reihe nach in  $M$  ein, wie in Abbildung 1.1 zu sehen ist.

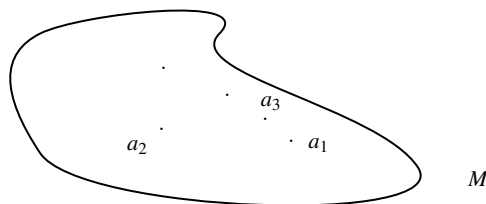
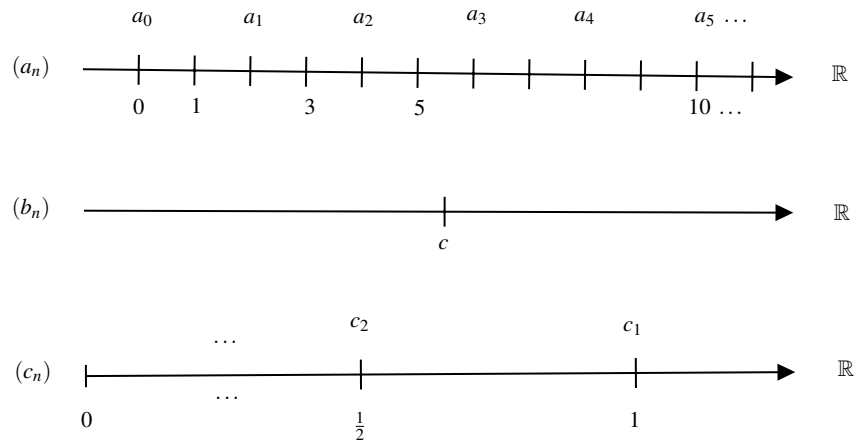


Abb. 1.1 Folge als „Spaziergang“ in  $M$

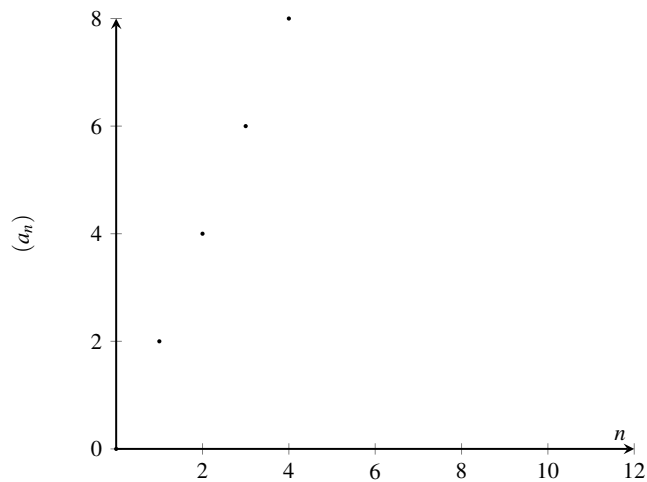


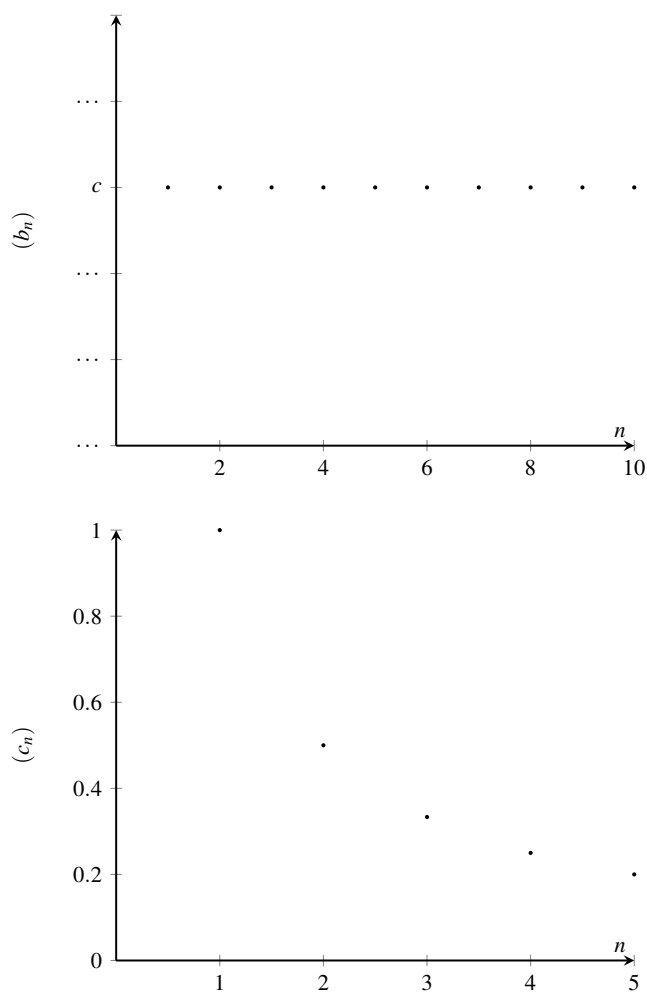
Für die Beispiele in 1.2.3 ergibt das ein Bild wie in Abbildung 1.2.



**Abb. 1.2** Folgen aus Beispiel 1.2.3 als „Spaziergang“ in  $\mathbb{R}$

(ii) (Für reelle Folgen) *Graph der Folge*: Für die Beispiele aus 1.2.3 ergeben sich die Graphen so, wie es in Abbildung 1.3 zu sehen ist.





**Abb. 1.3** Folgen aus Beispiel 1.2.3 als Graphen dargestellt

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii).

**Beispiel 1.2.5 (Einige wichtige Folgen).**

- (i)  $a_n = (-1)^n$ ,  $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$  („die Vorzeichenmaschine“).
- (ii)  $b_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $(b_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$ .
- (iii)  $c_n = \frac{n}{2^n}$ ,  $(c_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots)$ .
- (iv) Die *Fibonacci-Folge* (auch *Fibonacci-Zahlen*) sind rekursiv definiert gemäß

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

$f_n$  ist die Summe  
seiner beiden Vorgänger

(v) *Geometrische Folge*: Sei  $x \in \mathbb{R}$ ; setze  $d_n = x^n$ ,  $(d_n) = (1, x, x^2, \dots)$ .

(vi) *Geometrische Reihe*: (siehe 1.1.6 - war ja als wichtig angedroht!)

Sei wieder  $x \in \mathbb{R}$  und definiere

$$s_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n d_k = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, \dots).$$

(Darstellung gemäß 1.2.4  $\rightarrow$  Übungen).

[Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Definition ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Angelpunkt].

### Definition 1.2.6 (Grenzwert).

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $(a_n)$  *konvergiert gegen*  $a$ , falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.} \quad (1.7)$$

In diesem Fall heißt  $a$  *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge  $(a_n)$  und wir schreiben

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{bzw. kürzer} \quad a = \lim a_n \quad \text{und}$$

$$a_n \rightarrow a \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{bzw. kürzer} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

spricht:  $a_n$  geht gegen  $a$

### 1.2.7 (Geometrische Veranschaulichung und Sprechweisen).

Für  $\varepsilon > 0$  versteht man unter der  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  von  $a \in \mathbb{R}$  alle Zahlen in  $\mathbb{R}$ , die von  $a$  Abstand kleiner als  $\varepsilon$  haben, also das offene Intervall (siehe auch UE(0),5), vgl. Abb. 1.4.

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

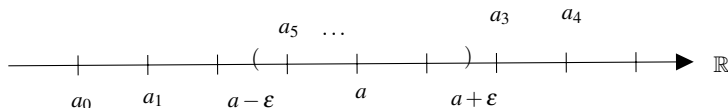


Abb. 1.4  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$

Die Konvergenzbedingung 1.7 sagt nun: Zu jedem (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Folgenindex  $N$ , sodass alle späteren Folgenglieder  $a_n$  (d.h. alle  $a_n$  mit  $n \geq N$ ) in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$  liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq N.$$

Andere Sprechweisen für die Konvergenzbedingung 1.7 sind:

- Die Folgenglieder  $a_n$  liegen *schließlich* in jeder (noch so kleinen!)  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$ .

soll heißen:  
ab einem bestimmten  
 $N$  also  $\forall n \geq N$

- In jeder (noch so kleinen!)  $\varepsilon$ -Umgebung des Limes  $a$  liegen *fast alle* Folgenglieder  $a_n$ .

soll heißen: alle bis  
auf endlich viele;  
nämlich bis auf  $a_1, \dots, a_{N-1}$

[Weitere gültige und ungültige Formulierungen werden in der Übung besprochen.]

Wir machen noch die folgenden Sprechweisen offiziell.

### Definition 1.2.8 (Divergenz, Nullfolge).

- Ist eine Folge  $(a_n)$  nicht konvergent (d.h.  $\nexists a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ ), dann heißt  $(a_n)$  *divergent*.
- Gilt  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), dann heißt  $(a_n)$  *Nullfolge*.

### 1.2.9 (Behandlung von Beispielen).

Alles schön und gut, aber wie zeige ich konkret  $a_n \rightarrow a$ ?

- Will ich konkret für eine gegebene Folge  $(a_n)$  und ein gegebenes  $a$  zeigen, dass  $a_n \rightarrow a$ , dann muss für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Folgenindex  $N$  gefunden werden, sodass die Abschätzung

i.A. schwieriger  
für kleine  $\varepsilon$

darf ruhig von  $\varepsilon$  abhängen  
und wird es i.A. auch tun;  
oft schreibt man deshalb  $N(\varepsilon)$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

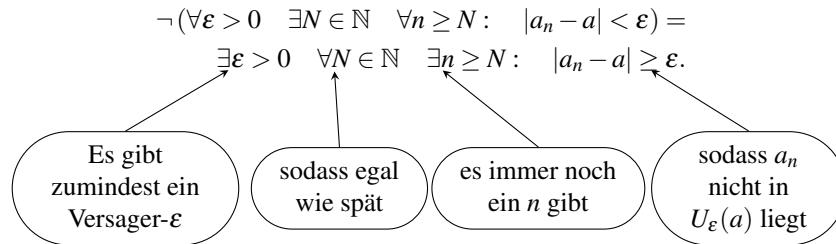
für alle  $a_n$  nach  $a_N$  gilt.

Beachte, dass in diesem Zusammenhang die folgende

### GROSSE FETTE WARNUNG:

Niemals darf umgekehrt  $\varepsilon$  von  $N$  abhängen. Die Reihenfolge der Quantoren ist hier also essentiell, vgl. [7, 3.2,3.3].

- (ii) Will ich hingegen zeigen, dass  $a_n \not\rightarrow a$ , so muss (nur) ein Versager- $\varepsilon$  gefunden werden, sodass die  $a_n$  beliebig spät aus der  $\varepsilon$ -Umgebung raushüpfen. Das ergibt sich nämlich aus der Verneinung der Konvergenzbedingung:



- (iii) Bei konkreten Beispielen ist es also förderlich, zuerst eine Vermutung über Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuweisen, also entweder

- zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N(\varepsilon)$  zu finden, ab dem alles gut ist, oder
- ein Versager- $\varepsilon$  zu finden, für das auch beliebig späte Folgenglieder  $a_n$  aus der  $\varepsilon$ -Umgebung abhauen.

Bevor wir jetzt endlich mit konkreten Beispielen anfangen, noch eine einfache aber wichtige

**Beobachtung 1.2.10 (Der Folgenanfang ist egal).**

Aus der Definition 1.2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge  $(a_n)$  ändern, wenn endlich viele Folgenglieder verändert oder ganz weggelassen werden (d.h.  $\exists M \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall n \geq M$  die  $a_n$  gleich bleiben - es wird also nur am Folgenanfang herumgebastelt).

**Beispiel 1.2.11.**

banales Beispiel!

- (i) *Konstante Folgen konvergieren:* Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und  $b_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (vgl. 1.2.3 (ii)). Dann gilt  $\lim b_n = c$ .

Denn sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, wähle  $N = 0$ , dann gilt

$$|b_n - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

So banal, dass  $N$  von  $\varepsilon$  unabhängig wählbar ist

- (ii)  $(\frac{1}{n})$  ist eine Nullfolge:

Das Erzbeispiel; anschaulich klar, vgl. 1.2.3(iii)

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varepsilon > 0 &\xrightarrow{1.1.3(i)} \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \varepsilon \\ \Rightarrow &\forall n \geq N : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

eigentlich Archimedes

(iii) Die Vorzeichenmaschine divergiert:

anschaulich klar, oder?

Sei  $a_n = (-1)^n$ , dann gibt es kein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Wir beweisen das indirekt (für einen Beweis direkt aus der Definition mit Versager- $\varepsilon \rightarrow$  UE). Angenommen, es gibt ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Setze  $\varepsilon := \frac{1}{2}$

$$\stackrel{1.2.6}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N. \quad (1.8)$$

Zusätzlich bemerke

$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(-1-1)| = 2.$$

Damit ergibt sich  $\forall n \geq N$

fieser Trick!

$$\begin{aligned} 2 = |a_{n+1} - a_n| &= |a_{n+1} - a + a - a_n| \\ &\stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \\ &\stackrel{(1.8)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

und somit der Widerspruch  $2 < 1$ .

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ . (Diese Konvergenz kann nach 1.2.5(ii) bzw. UE vermutet werden.)

Denn sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > \frac{1}{\varepsilon}$  (vgl. (ii)). Dann gilt  $\forall n \geq N$

Wie das Amen  
im Gebet

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ . (Vermutung wiederum nach 1.2.5(iii) bzw. UE.)

Wir verwenden folgende Tatsache

$$\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n. \quad (1.9)$$

Für einen Beweis siehe UE1.1(ii). Es gilt also

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 4. \quad (1.10)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und wähle  $N \in \mathbb{N}$  sodass

$$N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right). \quad (1.11)$$

Dann gilt  $\forall n \geq N$ :

$$\left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{(1.10)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \stackrel{(1.11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

**Motivation 1.2.12 (Naja - zum Teil ganz schön trickreich...).**

Wir haben gesehen, dass beim Bearbeiten von konkreten Beispielen einiges an Kreativität und auch Übung nötig ist. Bevor wir weitere wichtige Beispiele angehen, erweitern wir unseren Begriffsapparat - was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

**1.2.13.** Diese Nummer gibt es nicht!

**Definition 1.2.14 (Beschränkte Folge).**

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge.

$(a_n)$  heißt *nach oben bzw. nach unten beschränkt*, falls  $\exists K \in \mathbb{R}$ , sodass

$$a_n \leq K \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

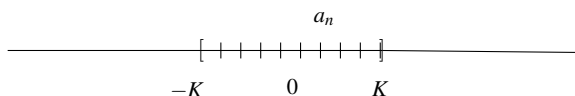
$(a_n)$  heißt *beschränkt*, falls  $(a_n)$  nach oben und nach unten beschränkt ist.

**Beobachtung 1.2.15 (Beschränkte Folgen sind eingesperrt).**

Definition 1.2.14 besagt:

$$(a_n) \text{ beschränkt} \iff \exists K > 0: |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[Wähle hierfür das Maximum der  $K$ 's in 1.2.14 für oben bzw. unten.] Geometrisch bedeutet das, dass alle  $a_n$  im Intervall  $[-K, K]$  liegen (also dort eingesperrt sind, vgl. Abb. 1.5).



**Abb. 1.5**  $(a_n)$  ist durch  $K$  beschränkt

d.h.  $K$  kann 0 gewählt werden

**Beispiel 1.2.16 ((un)-beschränkte Folgen).**

- (i)  $a_n = n$  ist nach unten durch 0 beschränkt ( $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ), aber nicht nach oben. [Folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom:  $\forall K > 0 \exists n \in \mathbb{N}: n > K$  ( $x = 1, y = K$  in 0.1.11(i))].

- (ii)  $\left(\frac{1}{n}\right)$  ist beschränkt:

$\left(\frac{1}{n}\right)$  ist durch 0 n.u.b (= nach unten beschränkt), denn

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall 1 \leq n \in \mathbb{N},$$

und durch 1 n.o.b (= nach oben beschränkt), denn

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall 1 \leq n \in \mathbb{N}.$$

Die Tatsache, dass die *konvergente* Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)$  beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein allgemeines Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

**Satz 1.2.17 (konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt).**

*Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

*Beweis.* Sei  $a = \lim a_n$ .

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[\varepsilon=1]{1.2.6} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow &|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Nun setze  $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ . Dann gilt  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Warnung 1.2.18 (beschränkt  $\nRightarrow$  konvergent).**

Die Umkehrung von 1.2.17 ist FALSCH. Ein Gegenbeispiel ist etwa die Vorzeichenmaschine  $a_n = (-1)^n$ :

$$|a_n| \leq 1 \quad \forall n \quad (a_n) \text{ ist aber divergent nach 1.2.11(iii).}$$

Andererseits gilt aber natürlich schon, dass unbeschränkte Folgen divergent sind!

Wir arbeiten nun unsere Beispielliste aus 1.2.5 weiter ab.

**Beispiel 1.2.19.** (i) Die *Fibonacci-Folge*  $(f_n)$  ist divergent. (Erinnerung:  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$ ).

Wir zeigen, dass  $(f_n)$  unbeschränkt und somit nach 1.2.18 divergent ist. Genauer behaupten wir:

$$f_n \geq n \quad \forall n \geq 5.$$

Beweis mittels Induktion:

$$n = 5 : \quad f_5 = 5 \quad \text{vgl. 1.2.5(iv).}$$

$$n \rightarrow n+1 : \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \stackrel{(IV)}{\geq} n + (n-1) \stackrel{n \geq 5}{\geq} n + (2-1) = n+1.$$

(ii) Für ein (beliebiges aber fixiertes)  $x \in \mathbb{R}$  betrachten wir die *geometrische Folge*  $d_n = x^n$ . Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von  $x$  ab.

FALL(1):  $|x| > 1 \Rightarrow x^n$  divergent. Denn:

$$\begin{aligned} |x| > 1 &\xrightarrow[b=|x|]{1.1.5(i)} \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : |x|^n > K \\ \Rightarrow &x^n \text{ unbeschränkt} \xrightarrow{1.2.17} x^n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

Wachstum  
von Potenzen



FALL(2):  $|x| = 1$ , also

$$\text{entweder } x = 1 \implies d_n = 1 \quad \forall n \xrightarrow{1.2.11(i)} d_n \rightarrow 1,$$

$$\text{oder } x = -1 \implies d_n = (-1)^n \xrightarrow{1.2.11(iii)} \text{divergent.}$$

FALL(3):  $|x| < 1 \implies x^n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Denn:

$$\text{Falls } x = 0 \implies x^n = 0 \quad \forall n \geq 1 \xrightarrow{1.2.11(i)} d_n \rightarrow 0.$$

das war leicht

der interessante Fall

Es bleibt also nur der Fall  $0 < |x| < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$ :

$$\xrightarrow[b=|x|]{1.1.5(ii)} \exists N \in \mathbb{N} : |x|^n < \varepsilon, \quad \text{und damit}$$

$$\forall n \geq N : |x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon.$$

vgl. die  
Anmerkungen in  
[7, graue Box, p.118]

### 1.2.20 (Hoppala). (Der Grenzwert?)

Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge geredet. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa zwei oder drei? Zum Glück gilt...

### Satz 1.2.21 (Eindeutigkeit des Limes).

*Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes.*

*Beweis (Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe zwei verschiedene Limiten und folgern daraus einen Widerspruch.).*

Angenommen,  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ . Dann ist

$$\varepsilon := \frac{|a-b|}{3} > 0 \quad (\text{weil } a \neq b!).$$

Nun gilt:

$$a_n \rightarrow a \implies \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon,$$

$$a_n \rightarrow b \implies \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Somit gilt für alle  $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a - b|$$

$$\xRightarrow{a \neq b} 1 < \frac{2}{3},$$

was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Motivation 1.2.22 (Weitere theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz).**

Ganz im Sinne von 1.2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limiten weitere Hilfestellungen bitter nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können, um Grenzwerte komplizierter Folgen zu berechnen.

**Satz 1.2.23 (Summen und Produkte konvergenter Folgen).**

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente (reelle) Folgen. Dann konvergiert auch  $(a_n + b_n)_n$  und  $(a_n \cdot b_n)_n$  und es gilt

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n,$$

$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

Die Summe konvergenter Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte; detto für das Produkt

*Beweis.* Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b := \lim b_n$ .

*Summe:* Wir müssen zeigen, dass  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ . Sei hierfür  $\varepsilon > 0$ , dann ist auch  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  und daher

$$\exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 : \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{und}$$

$$\exists N_2 : \quad \forall n \geq N_2 : \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit gilt für alle  $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

*Produkt:* Wir müssen zeigen:  $a_n b_n \rightarrow ab$ . Da  $(a_n)$  konvergiert, ist  $(a_n)$  beschränkt nach 1.2.17. Genauer:

$$\exists K_1 > 0 : \quad |a_n| \leq K_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiere  $K := \max(K_1, |b|) > 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ , dann auch  $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$  und wegen  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_1,$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{N} : \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_2.$$

Somit gilt für alle  $n \geq M := \max(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b - b_n) + (a_n - a)b| \\ &\stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &< K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.2.24 (Polierte Beweise).**

Natürlich ist insbesondere der letzte Beweis POLIERT, in dem Sinn, dass  $\varepsilon$  und  $K$  so gewählt wurden, dass am Schluss  $\dots < \varepsilon$  steht und nicht etwa  $\dots < 2K\varepsilon$ . Letzteres wäre zwar auch okay [ $\rightarrow$ UE], aber eben nicht ganz so lässig.

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der  $\triangle$ -Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Beweisen [vgl. Summe in 1.2.23]. Wir werden aber sehr bald auch  $\frac{\varepsilon}{3}$ -Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der  $\triangle$ -Ungleichung angedeutet.

Statt weiterer „Methodologie“ bringen wir jetzt aber lieber eine (einfache) Folgerung aus 1.2.23.

**Korollar 1.2.25 (Linearkombinationen konvergenter Folgen).**

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert auch die Folge  $(\lambda a_n + \mu b_n)$  und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n.$$

*Beweis.* Das Korollar folgt aus 1.2.23 mittels eines Tricks: Wir interpretieren die Folge  $(\lambda a_n)_n$  als Produkt zweier Folgen:

$$\begin{array}{c} (\lambda a_n)_n = (\lambda)_n \cdot (a_n)_n \\ \xrightarrow{1.2.23} \lambda a_n \rightarrow \lambda \lim a_n. \end{array}$$

konstante Folge:  
 $(\lambda)_n \rightarrow \lambda,$   
 vgl. 1.2.11(i)

Analog folgt  $\mu b_n \rightarrow \mu \lim b_n$  und mit dem Summenteil in 1.2.23 haben wir insgesamt

$$(\lambda a_n) + (\mu b_n) \rightarrow \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n. \quad \square$$

**Satz 1.2.26 (Quotienten konvergenter Folgen).**

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen mit  $\lim b_n =: b \neq 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $b_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ , die Quotientenfolge

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0}$$

$\exists \frac{1}{b_n}?$   
 Ja, für  $n$  groß genug

konvergiert und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

*Beweis.* Sei  $a := \lim a_n$ .

- (1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass  $b_n \neq 0$  für große  $n$ : Da  $b \neq 0$ , gilt  $\frac{|b|}{2} (=:\varepsilon') > 0$ . Somit:

$$\begin{aligned} \xRightarrow{b_n \rightarrow b} \quad & \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0 \\ \Rightarrow \quad & \forall n \geq n_0 : \frac{|b|}{2} > |b_n - b| > |b| - |b_n| \\ \Rightarrow \quad & |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0. \end{aligned} \quad \text{(1.12)}$$

umgekehrte  
△-Ungl.

Achtung: Schon  
wieder poliert

- (2) Wir zeigen  $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $\varepsilon'' := \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} > 0$ .

$$\xRightarrow{b_n \rightarrow b} \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1. \quad (1.13)$$

Also gilt für alle  $n \geq N := \max(n_0, N_1)$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| \stackrel{(1.12)}{<} \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- (3) Aus Satz 1.2.23 folgt sofort

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \rightarrow a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}. \quad \square$$

**Beispiel 1.2.27 (Im Sinne von 1.2.22).**

$$\lim \frac{3n^2 + 13n}{n^2 + 2} = \lim \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \stackrel{1.2.26}{=} 3.$$

Trick: dividiere Zähler  
und Nenner durch die  
jeweils höchste  $n$ -Potenz

$$\begin{aligned} 3 + \frac{13}{n} &= 3 + 13 \frac{1}{n} \\ &\stackrel{1.2.25}{\xrightarrow{}} 3 + 13 \cdot 0 = 3 \\ &\stackrel{1.2.26}{\xrightarrow{}} 1 + \frac{2}{n^2} = 1 + 2 \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\ &\stackrel{1.2.26}{\xrightarrow{}} 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ &\stackrel{1.2.23, 1.2.25}{\xrightarrow{}} \text{und noch einmal 1.2.26} \end{aligned}$$

**Satz 1.2.28 (Größenvergleich konvergenter Folgen).**

Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  (d.h.:  $\exists n_0 : a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ ). Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

*Beweis.* (1) Setze  $c_n := b_n - a_n$ , dann  $c_n \geq 0$  für fast alle  $n$ . Nach 1.2.25 ist  $(c_n)$  konvergent mit  $c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$ . Daher genügt es zu zeigen, dass  $c \geq 0$ .

(2) Wir nehmen indirekt an,  $c < 0$ . Setze  $\varepsilon := -c > 0$ . Nach 1.2.6:  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon > |c_n - c| &= |c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| \stackrel{c_n \geq 0}{\stackrel{\varepsilon > 0}{\equiv}} c_n + \varepsilon \\ \implies 0 > c_n &\quad \forall n \geq N, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

**Satz 1.2.29 (Sandwich-Lemma).**

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle) Folgen. Angenommen es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Weiters gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $c_n \rightarrow a$ . Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und es gilt

$$b_n \rightarrow a.$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  sodass für alle  $n \geq N_0$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon, \\ |c_n - a| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle  $n \geq N := \max(n_0, N_0)$

$$\begin{aligned} a - \varepsilon &< a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \\ \stackrel{-a}{\implies} & -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \\ \implies & |b_n - a| < \varepsilon \\ \implies & b_n \rightarrow a. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.30 (Wieder im Sinne von 1.2.22; mit einem Bonus).**

Sei  $n \geq 1$  und setze

$$b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}.$$

Es gilt  $n+1 \leq k \leq 2n$  und daher

$$n < k \implies \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Somit

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ mal}} = n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Somit folgt nach dem Sandwich-Lemma (mit  $a_n = 0, c_n = \frac{1}{n}$ )  $b_n \rightarrow 0$ .

**Warnung 1.2.31 (Kein 1.2.28 für  $<$  statt  $\leq$ ).**

Sind  $(a_n), (b_n)$  konvergent und gilt (sogar)  $a_n < b_n$  für alle  $n$ , so lässt sich daraus nicht  $\lim a_n < \lim b_n$  schlussfolgern, wie 1.2.30 zeigt. Mit 1.2.28 folgt aber  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .

**Motivation 1.2.32 (Unendliche Reihen - Formulierung).**

Einige der bisher untersuchten Folgen waren als Summen gegeben (z.B. 1.2.5 - die geometrische Reihe, oder 1.2.30). Genauer, sei  $(a_n)_n$  eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Definition unten) durch Summieren:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \dots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vage - um ihn genauer zu fassen, betrachten wir die sogenannten *Partialsummen*

$$s_m := a_0 + a_1 + \cdots + a_m = \sum_{k=0}^m a_k$$

und fassen  $(s_m)_m$  als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen - nämlich als die Folge der Partialsummen - auffassen und so alles, was wir über Folgen schon herausgefunden haben, verwenden. Nun offiziell:

**Definition 1.2.33 (Reihe).**

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge.

(i) Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $m$ -te *Partialsumme* (der  $a_n$ 's)

$$s_m := \sum_{n=0}^m a_n.$$

(ii) Die Folge  $(s_m)_m$  der Partialsummen heißt (*unendliche*) *Reihe* mit Gliedern  $a_n$  und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\text{oder kurz } \sum a_n)$$

bezeichnet.

(iii) Konvergiert  $(s_m)_m$ , so sagen wir auch die *Reihe konvergiert*. Wir bezeichnen  $\lim s_m$  ebenfalls mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (kurz  $\sum a_n$ ) und nennen ihn die *Summe der Reihe*.

**Bemerkung 1.2.34 (Zur Notation).**

Das Symbol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (bzw.  $\sum a_n$ ) steht also für zwei Dinge:

- (i) die Reihe selbst, also die Folge  $(s_m)_m$  der Partialsummen, und
- (ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n.$$

Ganz analog zu Folgen betrachten wir auch Reihen

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

für ein beliebiges  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel 1.2.35.**

Sei  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  ( $n \geq 1$ ). Die korrespondierende Reihe ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Bemerke, dass

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}.$$

[Tatsächlich gilt  $\left( \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 - n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \right)$ .]

Daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left( \frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1} \right) + \left( \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \right) = \frac{m}{m+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

wie in  
1.2.27

bzw.  
1.2.11(iv)

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 1.$$

**1.2.36 (Hoppala). (Reality check)**

Wie können wir intuitiv verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Gliedern nicht unendlich ergibt, also konvergiert - so wie das in 1.2.35 passiert ist?

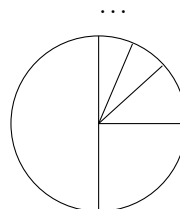
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1.$$

Natürlich werden die  $a_n$  immer kleiner; es gilt sogar

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0. \quad \left( 0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{dann Sandwich-Lemma} \right)$$

Aber warum (bzw. wann) reicht das?

Für eine intuitive Antwort betrachten wir eine Torte.  
Zunächst essen wir die halbe Torte, dann  
(sparsamerweise) von der verbliebenen Hälfte die Hälfte  
usw. Es ergibt sich die Reihe



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann - wir hatten ja nur eine Torte! Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Beispiel sehen werden.

**Beispiel 1.2.37 (Die geometrische Reihe).**

**DAS** Erzbeispiel

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig aber fix. Wir betrachten

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Praktischerweise haben wir in 1.1.6 schon die Partialsummen  $s_m$  ausgerechnet:

$$s_m(x) = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (1.14)$$

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 1.2.19(ii) (wo wir praktischerweise schon das Konvergenzverhalten der Glieder  $x^n$  berechnet haben).

FALL(1):  $|x| > 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent. Denn:

$$s_m \stackrel{(1.14)}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} x^{m+1} \Rightarrow s_m \text{ unbeschränkt} \stackrel{1.2.17}{\Rightarrow} s_m \text{ divergent.}$$

unbeschränkt  
nach 1.2.19(ii)

FALL(2):  $|x| = 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent. Denn:

Sei  $x = 1$ , dann ist  $s_m \stackrel{(1.14)}{=} m+1$ , also unbeschränkt und somit divergent.

Sei  $x = -1$ , dann



$$s_m \stackrel{(1.14)}{=} \frac{1-x^m}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}.$$

Somit ist  $s_m$  divergent (analog zur Vorzeichenmaschine, vgl. 1.2.11(iii)).

FALL(3):  $|x| < 1$ , dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Das ist der wichtigste Fall und eine der wichtigsten Formeln der VO

Denn

$$s_m \stackrel{(1.14)}{=} \frac{1}{1-x} - \underbrace{\frac{x^{m+1}}{1-x}}_{\rightarrow 0} \stackrel{1.2.19(ii)}{\stackrel{1.2.23}{=}} \frac{1}{1-x}.$$

Als Spezialfälle von Fall(3) betrachten wir  $x = \pm \frac{1}{2}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{1-1/2} = 2, \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

vgl. Torte 1.2.36

### Bemerkung 1.2.38 (Konvergenz von Reihen).

Im Vergleich zu „normalen“ Folgen ist es oft schwieriger, die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es, die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier halten wir nur ein einfaches strukturelles Resultat für Summen (Linearkombinationen) konvergenter Reihen fest - Produkte sind komplizierter, dazu später mehr.

### Proposition 1.2.39 (Linearkombinationen konvergenter Reihen).

Seien  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergente Reihen und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch

$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

*Beweis.* Wende Korollar 1.2.25 auf die Partialsummen an. [UE]

### Beispiel 1.2.40 (Periodische Dezimalzahlen).

Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die periodische Dezimalzahl  $x = 0.08636363$ .

Das bedeutet, dass  $x$  den folgenden Wert hat:

Schreibweise: 63 wiederholt sich immer wieder.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{8}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots \\
 &= \frac{8}{100} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \dots = \frac{8}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}}.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}} \stackrel{1.2.39}{=} \frac{63}{10^4} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k \stackrel{1.2.37}{=} \frac{63}{10^4} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000} \frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

und somit

$$x = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{855}{990} = \frac{19}{220}.$$

**Motivation 1.2.41 (Ein genauer Blick auf divergente Folgen).**

Zum Abschluss dieses langen Abschnitts werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet:

- die Vorzeichenmaschine  $(-1)^n$  ist divergent aber beschränkt;
- $a_n = n$  ist unbeschränkt und (daher) divergent.

Wir führen nun für diese zweite Art - nämlich das über alle Schranken hinauswachsen - der Divergenz einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmte“ Divergenz.

**Definition 1.2.42 (Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz).**

- (i) Eine (reelle) Folge  $(a_n)$  heißt *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent gegen  $+\infty$*  (oder kurz  $\infty$ ), falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$$

wächst schließlich über  
jede Schranke hinaus

In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow \infty$ ).

- (ii) Wir sagen  $(a_n)$  *konvergiert uneigentlich* bzw. *divergiert bestimmt gegen  $-\infty$* , falls  $(-a_n) \rightarrow \infty$  und schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$ ).

**Beobachtung 1.2.43 (Bestimmte Divergenz und Schranken).**

- (i)  $a_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : a_n < K \forall n \geq N$ .  
 (ii) Bestimmt divergente Folgen sind unbeschränkt, genauer:

$$\begin{aligned}
 a_n \rightarrow \infty &\implies (a_n) \text{ nach oben unbeschränkt,} \\
 a_n \rightarrow -\infty &\implies (a_n) \text{ nach unten unbeschränkt.}
 \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.44 (Bestimmt divergente Folgen).**

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$ .

- (ii)  $a_n = (-1)^n n$  ist unbeschränkt daher divergent aber nicht bestimmt divergent, denn  $a_{2n} \rightarrow \infty$  und  $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$ .

Also ist die Umkehrung von 1.2.43(ii) falsch und es gilt insgesamt:

$\begin{array}{ccc} \text{bestimmt divergent} & \Rightarrow & \text{unbeschränkt} \\ & \neq & \end{array}$
--

**Proposition 1.2.45 (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte).**

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle) Folgen mit  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ ,  $b_n, c_n \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

- (i)  $\lim(a_n + b_n) = \lim(b_n + a_n) = \infty$
- (ii)  $\lim(b_n + c_n) = \lim(c_n + b_n) = \infty$
- (iii)  $\lim(a_n - b_n) = \lim(-b_n + a_n) = -\infty$
- (iv) falls  $a > 0$ :  $\lim(a_n b_n) = \lim(b_n a_n) = \infty$
- (v)  $\lim(b_n c_n) = \lim(c_n b_n) = \infty$

*Beweis.* (UE).

**Warnung 1.2.46.**

Es gibt keine analogen Rechenregeln für die Differenz uneigentlich divergenter Folgen bzw. das Produkt von uneigentlich divergenten Folgen mit Nullfolgen:

- $\lim n = \infty$ ,  $\lim n^2 = \infty$ ,  $\lim(n - n) = 0$ ,  $\lim(n - n^2) = -\infty$ .
- $\lim \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ ,  $\lim\left(n \frac{1}{n}\right) = 1$ ,  $\lim\left(n \frac{1}{n^2}\right) = 0$ .

**Proposition 1.2.47 (Kehrwerte bestimmt divergenter Folgen und Nullfolgen).**

Sei  $(a_n)$  eine (reelle) Folge. Dann gilt:

(i)

$$\begin{aligned} \lim a_n = \infty (\text{oder } -\infty) &\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \\ \text{und} \quad \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\lim a_n = 0, a_n > 0 \text{ (bzw. } a_n < 0) \quad \forall n \implies \lim \left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty \text{ (bzw. } -\infty).$$

*Beweis.* (i) Es genügt  $a_n \rightarrow +\infty$  zu betrachten [vgl. Definition 1.2.42(ii)].

Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass wir  $\frac{1}{a_n}$  zumindest für große  $n$  bilden können. Er folgt unmittelbar aus der Definition 1.2.42(i) mit  $K = 0$ :

$$K := 0 \xrightarrow{1.2.42(i)} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n > K = 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Bemerke, dass daher  $\frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall n \geq n_0$  gilt.

Wir zeigen nun  $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \rightarrow 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , setze  $K := \frac{1}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{1.2.42(i)}{\implies} \exists N_0 \in \mathbb{N} : a_n > K = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N_0 \\ &\implies \forall n \geq N := \max(n_0, N_0) : 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) UE.  $\square$ **Beispiel 1.2.48.**

$$\lim \left( \frac{n}{2^n} \right) = 0 \quad \stackrel{1.2.47(ii)}{\implies} \lim \left( \frac{2^n}{n} \right) = \infty$$

1.2.11(v)
 $\frac{n}{2^n} > 0 \quad \forall n$

**Bemerkung 1.2.49 (Bestimmte Divergenz vererbt sich nach oben resp. unten).**

Falls  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  und  $a_n \rightarrow \infty$ , dann folgt (direkt aus Definition 1.2.42(i))  $b_n \rightarrow \infty$ .

Analog für  $a_n \leq b_n$  und  $b_n \rightarrow -\infty$ .

### 1.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ , Konvergenzprinzipien

**Motivation 1.3.1 (Ordnungsvollständigkeit).**

Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (auch Supremumseigenschaft; vgl. 0.1.9)

(V) Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (Infimum)

an wesentlichen Stellen verwendet. Zum Beispiel folgt die Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. 0.1.11] und diese wiederum impliziert  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . In diesem Abschnitt wollen wir (V) und seinen Konsequenzen weiter nachspüren - (V) ist der rote Faden, der sich durch die gesamte Analysis zieht.

Zu diesem Zweck benötigen wir erst einmal zwei neue Begriffe, nämlich Teilfolge und Häufungswert, um zu einem Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

**Motivation 1.3.2 (Teilfolge).**

Wir lernen hier ein Verfahren kennen, um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln - dieses ist intuitiv sehr einfach zu verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verwirrend).

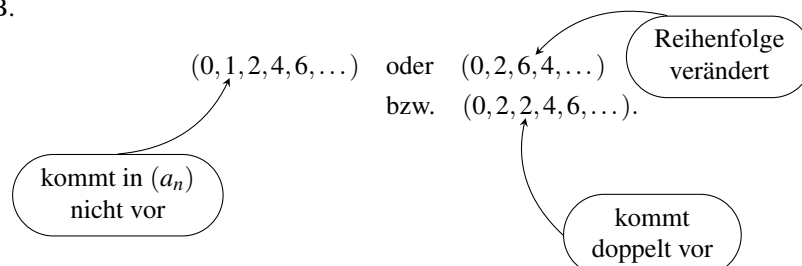
Eine *Teilfolge* einer gegebenen Folge  $(a_n)$  erhält man, wenn man einige Glieder von  $(a_n)$  auslässt, z.B.  $(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$  hat etwa die Teilfolgen

$$\begin{aligned} &(0, 4, 8, 16, \dots), (0, 6, 12, 18, \dots), \quad (\text{alle durch 3 teilbar}) \\ &(0, 4, 10, 18, \dots). \quad (a_1 \text{ ausgelassen, } a_3, a_4 \text{ ausgelassen, } \dots) \end{aligned}$$

Wesentlich dabei ist es, dass

- nur Glieder der Ausgangsfolge  $(a_n)$  verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal,
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keinerlei Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder  $a_n$  verwendet werden (also: Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst) oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine Teilfolgen von  $(a_n) = (2n)$  sind z.B.



Technisch beschreibt man diesen Prozess, indem man aus der Menge der Indizes  $0, 1, 2, 3, \dots$  gewisse auswählt, also z.B.  $1, 3, 5, 7, \dots$ , und damit die zugehörigen  $a_n$ , also  $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ . D.h. aus  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gewisse  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  (hier  $n_0 = 1, n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7$ ) mit  $n_0 < n_1 < \dots < n_l < n_{l+1}$ . Nun offiziell:

### Definition 1.3.3 (Teilfolge).

Ist  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{N}$  (d.h. eine Folge natürlicher Zahlen) mit der Eigenschaft  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  (d.h.  $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ ), dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge (TF) der Folge  $(a_n)$ .

### Beispiel 1.3.4 (Teilfolgen).

(i)  $a_n = (-1)^n$  hat, wie in Abb. 1.6 dargestellt, z.B. die Teilfolgen

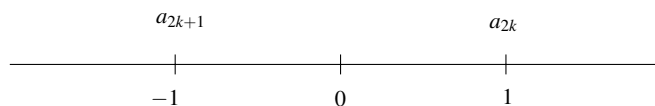
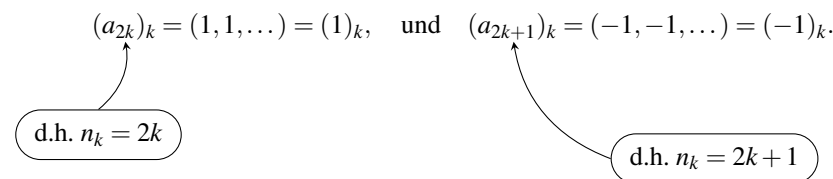


Abb. 1.6 Zwei Teilfolgen von  $a_n = (-1)^n$

- (ii)  $(b_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \geq 1} = (0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots)$  hat etwa als Teilfolgen (vgl. Abb.1.7)

$$(b_{2k})_k = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)_{k \geq 1} = \left(1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \dots\right),$$

$$(b_{2k+1})_k = \left(-1 + \frac{1}{2k+1}\right)_{k \geq 0} = \left(-1 + 1 = 0, -1 + \frac{1}{3}, \dots\right).$$

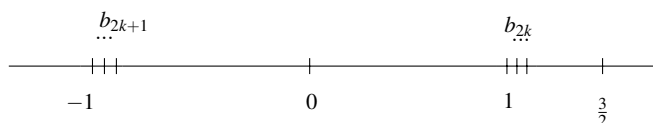


Abb. 1.7 Zwei Teilfolgen der Folge  $(b_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$

- (iii)  $(c_n)_{n \geq 1} = (1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots) = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$   
 hat etwa Teilfolgen  $(c_{2k})_{k \geq 1} = (2k)$ ,  $(c_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2k+1})$ .
- (iv) Im Allgemeinen gibt es mehrere Wahlen von  $(n_k)_k$  um dieselbe Teilfolge zu erzeugen. So ist etwa auch  $(a_{4k}) = (1)_k$ .
- (v) Keine Teilfolge von  $(a_n)$  ist  $(-1, 0, -1, 0, \dots)$  [0 kommt in  $a_n$  nicht vor].  
 Keine Teilfolge von  $(b_n)$  ist  $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  [ $1 + \frac{1}{3}$  kommt nicht vor] bzw.  
 $(-1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{5}, \dots)$  [Reihenfolge falsch, d.h.  $\nexists$  Wahl von  $n_k$  mit  $n_k < n_{k+1}$ ].

### Motivation 1.3.5 (Häufungswert).

In 1.3.4(i) und (ii) haben die Punkte  $\pm 1$  eine spezielle Rolle: Sie sind jeweils Grenzwerte von Teilfolgen  $[a_{2k} = (1)_k \rightarrow 1, a_{2k+1} = (-1) \rightarrow -1, b_{2k} = (1 + \frac{1}{2k}) \rightarrow 1, b_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1]$ .

Solche Punkte sind interessant und verdienen einen eigenen Namen:

### Definition 1.3.6 (Häufungswert einer Folge).

Sei  $(a_n)_n$  eine reelle Folge und  $a \in \mathbb{R}$ . Die Folge  $(a_n)$  hat  $a$  als *Häufungswert* (HW) (bzw.  $a$  ist Häufungswert von  $(a_n)$ ), falls eine Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  von  $(a_n)$  existiert für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

gilt.

### Beispiel 1.3.7 (Häufungswerte).

- (i) Sei  $a = \lim a_n$ , dann ist  $a$  [faderweise] auch ein Häufungswert.  
 (ii) Die Vorzeichenmaschine  $a_n = (-1)^n$  hat die beiden Häufungswerte  $\pm 1$ .  
 (iii)  $b_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  hat ebenso die beiden Häufungswerte  $\pm 1$ .

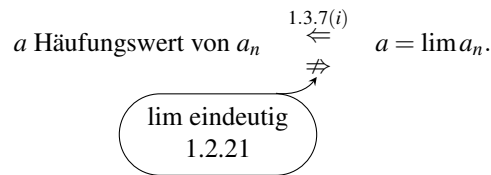
(iv)  $c_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$  hat 0 als einzigen Häufungswert.

**Motivation 1.3.8 (Wie viele Folgenglieder sind nahe zum Häufungswert?).**

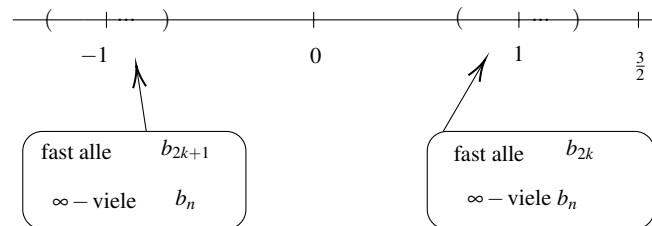
Sei  $a = \lim a_n$ , dann liegen in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele)  $a_n$ , vgl. 1.2.7].

Ist  $a$  (lediglich) ein Häufungswert von  $(a_n)$ , dann heißt das (nur), dass es eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  gibt mit  $a_{n_k} \rightarrow a$ ; also liegen alle bis auf endlich viele der  $a_{n_k}$  in jedem  $U_\varepsilon$  - das sind zumindest unendlich viele der  $a_n$ . Diese Eigenschaft ist charakterisierend für Häufungswerte - wie die nächste Proposition lehrt. Vorher noch eine

WARNUNG: In der obigen Situation müssen die „alle bis auf endlich vielen“  $a_{n_k}$  nicht schon „alle bis auf endlich viele“ der  $a_n$  sein! Mit anderen Worten



Ein explizites Gegenbeispiel ist etwa  $b_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})$  mit Häufungswerten  $\pm 1$  (vgl. 1.3.7(iii)). In jedem  $U_\varepsilon(1), U_\varepsilon(-1)$  liegen unendlich viele  $b_n$ . Aber für  $\varepsilon < 1$  gilt  $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(-1) = \emptyset$  und daher können in keiner der beiden Mengen fast alle  $b_n$  liegen — es blieben für die andere viel zu wenige  $b_n$  übrig! Siehe Abbildung 1.8.



**Abb. 1.8** Häufungswerte von  $b_n$

**Proposition 1.3.9 (Charakterisierung von Häufungswerten).**

Sei  $(a_n)$  eine (reelle) Folge und sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$a$  ist Häufungswert von  $(a_n) \iff$  Jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  enthält unendlich viele  $a_n$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq N : a_m \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

die Folge kommt  
immer wieder in  
 $U_\varepsilon(a)$  vorbei

*Beweis.* (Da es sich um eine Äquivalenz handelt...)

$\Rightarrow$ : Sei  $a$  ein Häufungswert von  $(a_n)$ . Nach 1.3.6 existiert eine Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  von  $(a_n)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . Daher gilt:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varepsilon > 0 &\stackrel{1.2.6}{\implies} \exists K : \forall k \geq K : a_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \\ \text{Sei } N \in \mathbb{N} &\implies \exists k_1 \geq K : n_{k_1} \geq N. \end{aligned}$$

Def. 1.3.3:  $n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$

Also gilt für  $m = n_{k_1}$ :  $a_m = a_{n_{k_1}} \in U_\varepsilon(a)$ .

$\Leftarrow$ : Es gelte die Bedingung auf der rechten Seite der Äquivalenz, also

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : a_n \in U_\varepsilon(a). \quad (1.15)$$

(1) Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \geq 1}$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$ , wie in Abbildung 1.9 zu sehen ist.

$k = 1$ : Setze  $\varepsilon = 1 = N \stackrel{(1.15)}{\implies} \exists n_1 \geq 1 : a_{n_1} \in U_1(a)$ .

$k \mapsto k + 1$ : Sei  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$  schon definiert. Setze  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ ,  $N = n_k + 1 \stackrel{(1.15)}{\implies} \exists n_{k+1} \geq N > n_k : a_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ .

(2) Wir zeigen  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ :

Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $K \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{K} < \varepsilon$  (vgl. 1.1.3(i)). Dann folgt

$$\forall k \geq K : |a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon. \quad \square$$

Da nach Konstruktion  
 $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

Idee der Konstruktion: Zoomen mit Umgebungen

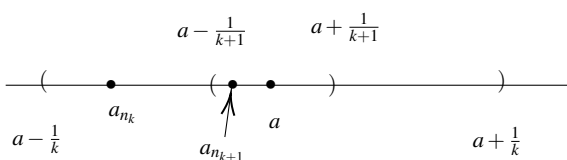


Abb. 1.9 Konstruktion der Teilfolge  $a_{n_k}$



**Motivation 1.3.10 (In Richtung Bolzano-Weierstraß).**

Wir wissen schon [1.2.7, 1.2.8]:  $(a_n)$  beschränkt  $\Leftrightarrow (a_n)$  konvergent.

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich alle (abzählbar vielen Folgeglieder in einem beschränkten Intervall tummeln - und dann müssen sich zumindest manche nahe kommen und einen Häufungswert bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reeller Folgen ist.

**Theorem 1.3.11 (Satz von Bolzano-Weierstraß).**

*Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.*

*Beweis.* (1) Wir verwenden die Ordnungsvollständigkeit, um einen Kandidaten für einen Häufungswert zu bekommen.

(V) als "Existenzmaschine"

$$(a_n) \text{ beschränkt} \xrightarrow{1.2.14} \exists K > 0: |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Idee

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$ , da  $K \in A$  (denn kein  $a_n$  erfüllt  $a_n > K$ ).
- $A$  ist nach unten beschränkt, denn falls  $x < -K$ , dann ist  $x \notin A$ , da  $a_n \geq -K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also kann z.B.  $-K - 1$  als untere Schranke gewählt werden.

$$\xrightarrow{(V)} \exists a := \inf A.$$

Hier passiert es!

(2) Wir zeigen, dass  $a$  Häufungswert der Folge  $(a_n)$  ist: Sei  $\varepsilon > 0$ .

- Da  $a + \varepsilon > a$ , ist  $a + \varepsilon$  keine untere Schranke für  $A$  (es ist ja  $a = \inf A$ ). Somit gibt es ein  $x \in A$  mit  $a < x < a + \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Def. von } A} \quad & a_n \leq x < a + \varepsilon \quad \text{für fast alle } n, \text{ d.h.} \\ & \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0: \quad a_n < a + \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.16)$$

- Da  $a$  eine untere Schranke von  $A$  ist, gilt  $a - \varepsilon \notin A$ , also nach der Definition von  $A$ :  $a_n > a - \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ , d.h.

$$\forall n_1 \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq n_1: \quad a - \varepsilon < a_m. \quad (1.17)$$

- Die Kombination von (1.16) und (1.17) liefert die Behauptung:  
Sei nämlich  $N \in \mathbb{N}$  gegeben, dann wähle  $n_1 := \max(n_0, N)$ . Damit ergibt sich:

$$\left. \begin{array}{l} (1.17) \implies \exists m \geq n_1 \geq N : a - \varepsilon < a_m \\ m \geq n_1 \geq n_0, (1.16) \implies a_m < a + \varepsilon \end{array} \right\} \implies a_m \in U_\varepsilon(a).$$

Wir haben also für beliebiges  $\varepsilon > 0$  und beliebiges  $N \in \mathbb{N}$  ein  $m \geq N$  gefunden, sodass  $a_m \in U_\varepsilon(a)$ .  $\square$

Abbildung 1.10 zeigt die Skizze zur Konstruktion:

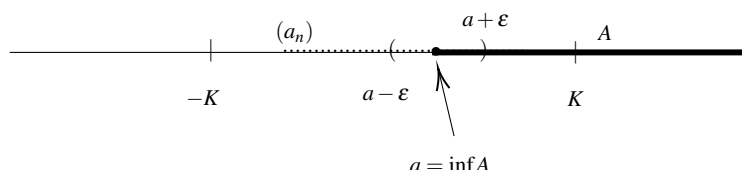


Abb. 1.10 Konstruktion der Menge  $A$

**Bemerkung 1.3.12 ( $a$  ist der größte Häufungswert).**

Das im obigen Beweis konstruierte  $a$  ist der größte Häufungswert von  $(a_n)$ . Denn sei  $b > a$ . Da  $a = \inf A$ , gibt es ein  $c \in A$  mit  $a < c < b$ . Setze  $\varepsilon := b - c (> 0)$ . Nach der Definition von  $A$  enthält  $U_\varepsilon(b)$  höchstens endlich viele  $a_n$  (für diese gilt ja  $a_n > c \in A$ ). Somit ist  $b$  kein Häufungswert von  $(a_n)$ , vgl. Abb. 1.11.

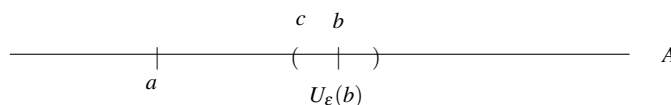


Abb. 1.11 Der Punkt  $b$  ist kein Häufungswert von  $a_n$

Analog dazu können wir auch den kleinsten Häufungswert von  $(a_n)$  konstruieren [dieser könnte gleich dem größten sein...]

Diese speziellen Häufungswerte verdienen einen eigenen Namen:

**Definition 1.3.13 ( $\liminf$ ,  $\limsup$ ).**

- (i) Sei  $(a_n)$  eine beschränkte (reelle) Folge. Der größte (bzw. kleinste) Häufungswert  $a$  von  $(a_n)$  [der wegen des Beweises von 1.3.11 existiert] heißt *Limes superior* (bzw. *Limes inferior*) oder kürzer  $\limsup$  (bzw.  $\liminf$ ) und wir schreiben

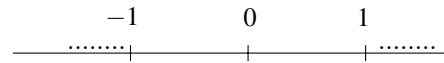
$$a = \limsup a_n \equiv \overline{\lim} a_n \quad (\text{bzw. } \liminf a_n \equiv \underline{\lim} a_n).$$

- (ii) Falls  $(a_n)$  nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, setzen wir

$$\overline{\lim} a_n := \infty \quad (\text{bzw. } \underline{\lim} a_n := -\infty).$$

**Beispiel 1.3.14 (lim inf, lim sup).**

- (i)  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ :  
 $\liminf a_n = 1$ ,  $\limsup a_n = -1$ ,  
 vgl. Abb. 1.12.

**Abb. 1.12** lim inf und lim sup von  $a_n$ 

- (ii)  $a_n = n$  hat keinen Häufungswert. Es gilt  $\limsup a_n = \infty$  und  $\liminf a_n$  existiert nicht.

**Motivation 1.3.15 (Konvergenzprinzipien).**

Erinnern wir uns an unsere bisherigen Konvergenzbeweise (Abschnitt 1.2 und UE): Bevor es richtig losgehen konnte, haben wir meist einen (guten) Kandidaten für den Limes gebraucht. Das ist in der Praxis natürlich ein großer Nachteil! Wir werden nun die „Existenzmaschine“ Bolzano-Weierstraß so modifizieren, dass sie uns unter passenden Bedingungen nicht nur die Existenz eines Häufungswertes sondern schon den Limes liefert - ohne einen Kandidaten für den Grenzwert zu benötigen.

Außer bei  
„einfachen“ Folgen:  
Rechenregeln für  
Limiten, Sandwich-  
Lemma oder unbe-  
schränkte Folgen

Die mächtigsten dieser Konvergenzprinzipien sind das Cauchy-Prinzip und das Konvergenzprinzip für monotone, beschränkte Folgen.

Als Bonus werden wir sehen, dass es manchmal relativ leicht ist, den Grenzwert auszurechnen, wenn schon klar ist, dass überhaupt Konvergenz vorliegt.

Als erstes benötigen wir dazu den Begriff Cauchy-Folge. Das sind Folgen, bei denen sich die Folgenglieder schließlich beliebig nahe kommen. Anschaulich im Bild des „Spaziergangs“ in  $M = \mathbb{R}$  (vgl. 1.2.4(i)) versandt die Folge, d.h. die Schritte werden immer kleiner...

Genauer:

Achtung: Nicht nur die einzelne Schrittweite

stellt unsere  
bisherige Me-  
thode auf den  
Kopf...

**Definition 1.3.16 (Cauchy-Folge).**

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt *Cauchy-Folge* (CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 1.3.17 (Bedeutung von Cauchy-Folgen).**

Wir werden gleich sehen, dass Cauchy-Folgen genau die konvergenten Folgen sind - daher erübrigt es sich, Beispiele anzugeben.

Im Sinne von 1.3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung, ob eine Folge  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist, (im Prinzip) den Limes  $a$  nicht kennen muss —  $a$  kommt in 1.3.16 keines vor - das wird mit dem Auftreten von zwei Indizes ( $m$  und  $n$ ) erkaufte!

**Theorem 1.3.18 (Cauchy-Prinzip).**

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Dann gilt:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \iff (a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge.}$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : (die „leichte“ Richtung - ein  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Beweis)

Setze  $a := \lim a_n$

$$\stackrel{1.2.6}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Dann gilt  $\forall m, n \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ : (Die schwierigere Richtung in drei Schritten)

Sei  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge.

(1) Wir zeigen, dass  $(a_n)$  beschränkt ist:

Setze  $\varepsilon = 1$  in 1.3.16, dann  $\exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall m, n \geq N$ . Setzt man nun  $m = N$ , so folgt

verkehrte  
 $\triangle$ -Ungl.

$$\begin{aligned} |a_n| - |a_N| &\leq |a_n - a_N| < 1 \quad \forall n \geq N \\ \implies |a_n| &\leq |a_N| + 1 \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Die ersten  $N$  Glieder erledigen wir wie im Beweis von 1.2.17: Sei  $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ , dann gilt

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) Da  $(a_n)$  beschränkt ist, existiert nach Bolzano-Weierstraß ein Häufungswert  $a$  von  $(a_n)$ .

(3) Wir zeigen  $a_n \rightarrow a$ : [ $\frac{\varepsilon}{2}$ -Beweis mit Hineinschuggeln eines  $a_k$  nahe dem Häufungswert  $a$ ] Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$(a_n) \text{ CF} \implies \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N. \quad (1.18)$$

$$a \text{ HW} \implies \exists k \geq N : |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.19)$$

Das ist die Idee: verwende das  $N$  von oben!

Daher gilt  $\forall n \geq N$ :

$$|a_n - a| = |a_n - a_k + a_k - a| \leq |a_n - a_k| + |a_k - a| \stackrel{(1.18)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Beispiel 1.3.19 (Konvergenz ohne Limes).**

Sei  $(a_k)$  eine reelle Folge mit  $|a_k| \leq \theta < 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  für ein bestimmtes

$\theta$ . Wir betrachten die Reihe  $\sum a_k^k$  und zeigen mit Hilfe des Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz.

(i) *Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.*

Wie üblich (vgl. 1.2.23) setzen wir  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k^k$ . Dann gilt für  $m < n$ :

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n a_k^k \right| \stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=m+1}^n |a_k^k| \leq \sum_{k=m+1}^n \theta^k \\ &\stackrel{\text{Trick 17}}{=} \sum_{k=0}^n \theta^k - \sum_{k=0}^m \theta^k \stackrel{1.1.6}{=} \frac{1 - \theta^{n+1}}{1 - \theta} - \frac{1 - \theta^{m+1}}{1 - \theta} \\ &= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1 - \theta} = \theta^{m+1} \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} \stackrel{\theta \geq 0}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1 - \theta}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

(ii)  $(s_n)$  ist eine Cauchy-Folge:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $0 \leq \theta < 1$ :  $\stackrel{1.1.5(ii)}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} : 0 \leq \theta^{m+1} < \varepsilon(1 - \theta) \quad \forall m \geq N$ .  
Daher gilt  $\forall n > m \geq N$

$$|s_n - s_m| \stackrel{(1.20)}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1 - \theta} < \varepsilon. \quad (1.21)$$

noch nicht fertig!

Ganz analog beweist man (1.21) für alle  $m > n \geq N$ . Schließlich gilt für  $m = n \geq N$ , dass  $s_m - s_n = 0$ . Also ist  $(s_n)$  insgesamt eine Cauchy-Folge.

(iii) Aus 1.3.18 folgt nun:  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k^k$  konvergiert.

UND: Wir haben keine Ahnung was der Limes  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^k$  ist! Im Allgemeinen kann dieser auch nicht berechnet werden.

### Motivation 1.3.20 (Monotone Folgen - Konvergenzprinzip).

Um das in 1.3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschränkte Folgen anzugehen, müssen wir zuerst den ersteren Begriff exakt fassen.

### Definition 1.3.21 (Monotonie von Folgen).

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge.

(i)  $(a_n)$  heißt (streng) monoton wachsend, falls

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.22)$$

(ii)  $(a_n)$  heißt (streng) monoton fallend, falls

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

(iii) Falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass (1.22) bzw. (1.23) nur für alle  $n \geq N$  gelten, so sagen wir  $(a_n)$  hat die entsprechende Eigenschaft ab  $N$ .

### Beispiel 1.3.22 (Monotone Folgen).

Die Fibonacci-Folge  $(f_n)$  [siehe 1.2.5(iv)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab  $N = 2$ .

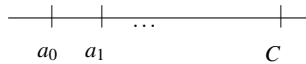
Tatsächlich gilt  $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$  und  $f_n > 0 \quad \forall n \geq 1$  und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \quad \forall n \geq 2.$$

**Bemerkung 1.3.23 (Monotonie und Schranken).**

- (i) Eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt (vgl. Abb. 1.13), denn sei  $a_n \leq C$ , dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$C \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0.$$



**Abb. 1.13** Die Folge  $a_n$  ist durch  $C$  beschränkt.

- (ii) Analog sind nach unten beschränkte, monoton fallende Folgen beschränkt.  
 (iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen, dass die Folgen sogar konvergieren.  
 Vorher noch ein motivierendes Beispiel, das Sie vielleicht schon aus der Schule kennen — Stichwort: Heron-Verfahren

**Beispiel 1.3.24 (Approximation für  $\sqrt{3}$ ).**

Sei  $x_0 > 0$ . Wir definieren rekursiv die Folge  $(x_n)$  via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.24)$$

Bemerke  $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (offensichtlich kommen nur positive Zahlen vor).

- (1)  $(x_n)$  ist nach unten beschränkt, genauer  $\forall n \geq 1: 3 \leq x_n^2$ .

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 3 &= \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right)^2 - 3 = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{4} \left( x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{3}{x_n} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (2)  $(x_n)$  ist monoton fallend ab  $n = 1$ .

Für  $n \geq 1$  gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - 3) \stackrel{(1)}{\geq} 0.$$

- (3)  $(x_n)$  konvergiert, genauer  $\exists x := \lim x_n$  laut dem in 1.3.23(iii) angekündigten 1.3.25 (unten), das wir hier schon verwenden. [Sinn ist es zu sehen, dass uns (3) ermöglicht,  $\lim x_n$  auszurechnen!]

(3)  $\lim x_n = \sqrt{3}$ :

Zuerst bemerke  $0 < \sqrt{3} \leq x$  (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (1.24) zum Limes über:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) & & \\ \downarrow & \quad \downarrow & (n \rightarrow \infty) \\ x & \quad \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) & \end{array}$$

Also gilt

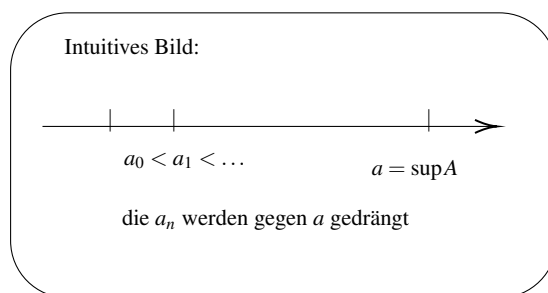
$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) &\implies x^2 = \frac{1}{2} (x^2 + 3) \\ &\implies \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} \implies x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Jetzt aber schleunigst zum Theorem mit seinem erfreulich einfachen Beweis.

**Theorem 1.3.25 (Konvergenzprinzip für beschränkte, monotone Folgen).**

*Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge konvergiert.*

Das Resultat gilt auch für ab einem  $N \in \mathbb{N}$  monoton wachsende Folgen und analog für nach unten beschränkte und monoton fallende Folgen.



**Abb. 1.14** Die Folge  $(a_n)$  ist durch  $\sup A$  beschränkt.

*Beweis.* Sei  $(a_n)$  nach oben beschränkt und monoton wachsend.

(1) *Produzieren eines Kandidaten für  $\lim a_n$*  [(V) als „Existenzmaschine“]:

Sei  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Nach 1.3.23(i) ist  $(a_n)$  beschränkt und somit ist  $A$  beschränkt (dass  $A \neq \emptyset$ , ist klar).

$$\stackrel{(V)}{\implies} \exists a := \sup A.$$

nicht obere Schranke  
laut der Def.  
von sup

(2) Es gilt  $\lim a_n = a$ :

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $a = \sup A$ , gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a - \varepsilon < a_N \leq a$ .

Da  $(a_n)$  monoton wachsend ist, gilt  $\forall n \geq N : a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$ . Daher

$$\forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon. \quad \square$$

**Beobachtung 1.3.26 ( $a_n \rightarrow \sup A$ ).**

Der obige Beweis zeigt explizit, dass  $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und in diesem Sinne wird das intuitive Bild aus Abbildung 1.14 bestätigt: eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge wird gegen ihr Supremum gequetscht!

Das motiviert auch das Studium von Mengen der Gestalt  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  bzw. noch allgemeiner die folgenden [später sehr wichtigen] Begriffe für Punktmengen in  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.3.27 (Berührungspunkt, Häufungspunkt).**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

(i)  $a \in \mathbb{R}$  heißt *Berührungspunkt* von  $A$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Jede  $\varepsilon$ -Umg.  
von  $a$   
enthält mind.  
einen Punkt  
aus  $A$

(ii)  $a \in \mathbb{R}$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \text{ enthält unendlich viele Punkte.}$$

**Beispiel 1.3.28 (Berührungspunkte und Häufungspunkte).**

(i) Jedes  $a \in A$  ist Berührungspunkt von  $A$  [ $a \in U_\varepsilon(a) \cap A$  für jedes  $\varepsilon > 0$ ].

Jeder Häufungspunkt von  $A$  ist auch Berührungspunkt von  $A$ .

(ii) Nicht jeder Punkt von  $A$  ist Häufungspunkt von  $A$ , denn  $A = \{0\}$  hat gar keine Häufungspunkte.

(iii) Sei  $A := [a, b)$  ein halboffenes Intervall. Jedes  $x \in [a, b]$  ist Häufungspunkt (und somit Berührungspunkt von  $A$ ). [Bemerke:  $b$  ist Häufungspunkt von  $A$  obwohl  $b \notin A$ ].

(iv)  $0$  ist Häufungspunkt von  $A := \{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$  [bemerke wieder  $0 \notin A$ ].

**Bemerkung 1.3.29 (Häufungspunkt vs Häufungswert).**

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Dann drängt sich folgende Frage auf: Gilt

$$a \text{ Häufungswert von } (a_n) \stackrel{?}{\implies} a \text{ ist Häufungspunkt von } A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$a$  HW der Folge

$a$  HP der Menge  
der Folgenglieder

Die Antwort ist NEIN!



Ein Gegenbeispiel ist ganz einfach die konstante Folge  $(a_n) = (1)_n$ . Denn  $a = 1$  ist Häufungswert von  $(a_n)$ . ABER  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$  hat gar keine Häufungspunkte (vgl. 1.3.28(ii)).

[Bemerke: 1 ist immerhin ein Berührungspunkt von  $A$ .]

[In der Literatur werden Häufungswerte von Folgen auch oft als Häufungspunkte bezeichnet. In diesem Text verzichten wir bewusst darauf, da wir sonst die obere Aussage in der unschönen Form  $a$  Häufungspunkt von  $(a_n) \Rightarrow a$  Häufungspunkt von  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  hätten formulieren müssen.]

**Proposition 1.3.30 (Einfache Eigenschaften von HP und BP).**

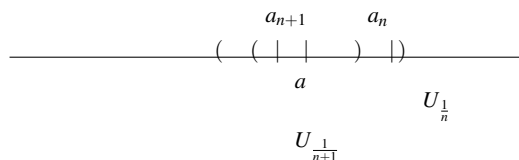
Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ , dann gilt:

- (i)  $a$  ist Berührungspunkt von  $A \Leftrightarrow \exists$  Folge  $(a_n)$  in  $A$  [d.h.  $a_n \in A \forall n$ ] mit  $a_n \rightarrow a$ .
- (ii)  $a$  ist Häufungspunkt von  $A \Leftrightarrow a$  ist Berührungspunkt von  $A \setminus \{a\}$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$ : Sei  $a$  Berührungspunkt von  $A$ . Nach 1.3.27(i) gilt:

$$\forall n \geq 1 \exists a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A.$$

So erhalten wir induktiv eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ , denn  $|a_n - a| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$  (vgl. Abb.1.15).



**Abb. 1.15** Konstruktion der Folge  $a_n$

$\Leftarrow$ : Laut Voraussetzung gibt es eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: a_n \in U_\varepsilon(a) \cap A.$$

Also ist  $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ .

(ii) UE.  $\square$

**Bemerkung 1.3.30A: (Reelle Zahlen sind Häufungspunkte rationaler Zahlen).**

Nach 0.1.11 liegt  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ . Das bedeutet, dass jedes  $x \in \mathbb{R}$  Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$  ist.

Tatsächlich gilt:  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  dicht  $\stackrel{0.1.11(ii)}{\Leftrightarrow} \forall x < y \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y \stackrel{\text{induktiv}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon : U_\varepsilon(a) \cap \mathbb{Q}$  unendlich.

**Bemerkung 1.3.31 (Beschränkte Mengen haben einen Berührungspunkt).**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt, dann hat  $A$  einen Berührungspunkt. Denn wegen (V) existiert  $\sup A =: a$  und aus der Definition des Supremums folgt, dass  $a$  Berührungspunkt von  $A$  ist.

[Es gilt sogar:  $\sup A$  ist Limes einer monoton wachsenden Folge in  $A$ : Wähle  $a - 2 < a_0 \leq a$  und dann induktiv für alle  $n \geq 1$ :  $a_n \in A$ ,  $a_n \geq a_{n-1}$ ,  $a - \frac{1}{n} \leq a_n \leq a$ .]

**Motivation 1.3.32 (Intervallschachtelungsprinzip).**

Wir leiten nun aus dem Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenzmaschine“ her, die im Gegensatz zum Cauchy-Prinzip sehr anschaulich ist:

Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, abgeschlossener Intervalle sich zusammenzieht, wie in Abbildung 1.16, dann wird dabei ein eindeutiger Punkt in  $\mathbb{R}$  eingefangen.

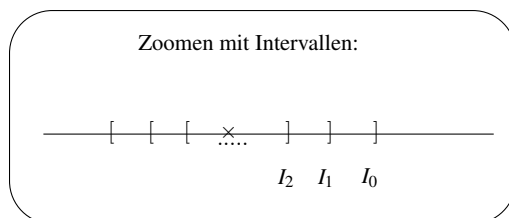


Abb. 1.16 Konstruktion der Intervalle  $I_n$

Dieses Prinzip veranschaulicht noch einmal die Tatsache, dass  $\mathbb{R}$  „keine Löcher“ hat.

Doch zuerst zu den exakten Begriffen.

**Definition 1.3.33 (Durchmesser eines abgeschlossenen Intervalls).**

Seien  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $I := [a, b]$ . Wir definieren den *Durchmesser* von  $I$  als

$$\text{diam}(I) := b - a.$$

**Theorem 1.3.34 (Intervallschachtelungsprinzip, (IP)).**

Sei  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle, die sich zusammenziehen, d.h. mit den Eigenschaften

- (i)  $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ ,
- (ii)  $\text{diam}(I_n) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ .

Dann existiert genau ein  $a \in \mathbb{R}$ , das in jedem  $I_n$  liegt, d.h.  $\exists! a \in \mathbb{R}$  mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}.$$

*Beweis.* (Existenz) Wir zeigen in 3 Schritten, dass ein derartiges  $a$  existiert. Seien dazu  $I_n = [a_n, b_n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- (1) Die Folge  $(a_n)$  der linken Randpunkte ist eine Cauchy-Folge:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Aus (ii) folgt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \text{diam}(I_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \quad (1.25)$$

Seien also  $m, n \geq N$ . Nach (i) gilt  $a_m, a_n \in I_N$  und somit

$$|a_n - a_m| \leq \text{diam}(I_N) \stackrel{(1.25)}{<} \varepsilon.$$

(2) *Das Cauchy-Prinzip schlägt zu:* Die Folge der linken Randpunkte hat einen Limes, denn

$$1.3.18 \implies \exists a := \lim a_n.$$

(3) *a liegt in allen Intervallen:*

Für alle  $n \geq k$  gilt laut Voraussetzung:  $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$ . Wir verwenden das Sandwich-Lemma 1.2.29:

$$\begin{array}{ccccc} a_k & \leq & a_n & \leq & b_n \leq b_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (n \rightarrow \infty) \\ a_k & & a & & b_k \end{array} \quad \left( (a_k), (b_k) \text{ sind in } n \text{ konstante Folgen} \right)$$

Daher gilt mit Satz 1.2.29:  $a_k \leq a \leq b_k$  für alle  $k$  und daher  $a \in I_k$  für alle  $k$ .

(Eindeutigkeit) [folgt sofort aus (ii)]

Seien  $a, b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , dann gilt  $\forall n$ :

$$0 \leq |a - b| \leq \text{diam}(I_n) \rightarrow 0 \implies |a - b| = 0 \stackrel{(N1)}{\implies} a = b. \quad \square$$

### Beobachtung 1.3.35.

Es gilt also  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$ , wobei  $a$  eindeutig festgelegt ist durch  $a = \lim a_n$  [und analog  $a = \lim b_n$ ].

### 1.3.36 (Nachbetrachtung). (Der rote Faden)

Dieser Abschnitt war (neben anderen, praktischeren Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit (V) gewidmet.

Genauer haben wir bewiesen:

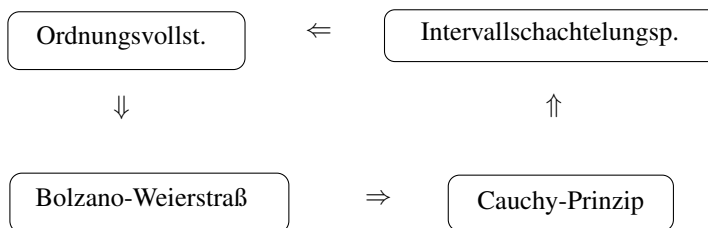
$$(V) \implies (BW) \implies (CP) \implies (IS).$$

Es gilt aber auch  $(IS) \implies (V)$  [ohne Beweis; siehe [Hö] 3.16 Thm] und daher sind alle vier Aussagen äquivalent! (BW), (CP) und (IS) sind also nur andere (teilweise anschaulichere) Manifestationen der Ordnungsvollständigkeit (V) von  $\mathbb{R}$ .

Daher spricht man oft auch einfach von der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , die durch jede der vier Aussagen charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen zur Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Definitionen der Vollständigkeit finden [z.B. (CP) in Forster, (V) in Deiser und Heuser und noch eine Variante (Konvergenz von Dedekind-Schnitten) in Behrends], aber (immer) auch einen Satz, der die Äquivalenz herstellt - also besagt, dass all diese Zugänge äquivalent sind.

Zum Abschluss des Abschnitts noch einmal und weil es so schön ist:



## 1.4 Reihen und Konvergenz

### 1.4.1 (Einleitung und Ausblick).

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 1 beschäftigen wir uns ausführlich mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def. 1.2.33). Wie bereits in 1.2.38 angekündigt ist es für Reihen im Allgemeinen schwieriger als für „normale“ Folgen, Konvergenz nachzuweisen und im Allgemeinen noch schwieriger, den Grenzwert zu bestimmen - also die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der „normale“ Grenzwertbegriff für Reihen zu kurz greift: Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konvergenten Reihe nicht ebenfalls konvergieren muss - die Konvergenz hängt also von der Reihenfolge der Summanden ab! Dieser wirklich problematische Aspekt lässt sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff Zuflucht nimmt. Die sog. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

Das klingt kompliziert; aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit absolut konvergenten Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir ganz zum Schluss dieses Abschnitts sehen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.

### Erinnerung 1.4.2 (Reihen - Sein und Schein, vgl. 1.2.32 - 1.2.34).

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge,  $m \in \mathbb{N}$ . Wir definieren die  $m$ -te Partialsumme der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (oder kurz  $\sum a_n$ ) als

$$s_m = \sum_{n=0}^m a_n \quad \text{und schreiben}^2 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

falls der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt - Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

Wir beginnen damit, einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Als erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip, Thm. 1.3.18, um auf den Fall von Reihen.

oft etwas lästiger als „normale“ Folgen

<sup>2</sup> Wie in 1.2.33 erklärt, verwenden wir die Bezeichnung  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sowohl für die Reihe, wie auch (im Fall der Konvergenz) für ihren Limes.

**Proposition 1.4.3 (Cauchy-Prinzip für Reihen).**

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine reelle Reihe, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq N : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon. \quad (1.26)$$

*Beweis.*  $\sum a_n$  konvergent  $\stackrel{1.2.33}{\Leftrightarrow} s_m$  konvergent  $\stackrel{1.3.18}{\Leftrightarrow} s_m$  Cauchy-Folge  $\stackrel{1.3.16}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon \rightarrow \forall n, m-1 \geq N$ , also

$$|s_n - s_{m-1}| = \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon. \quad \square$$

Def. 1.3.16 sagt „ $\forall m, n \geq N$ “. Also können hier  $m, n$  so gewählt werden, was das Ergebnis verschönert zu  $\sum_{k=m}^n$ .

(o.B.d.A.  $n \geq m-1$ )

**Bemerkung 1.4.4 (Änderung endlich vieler Glieder).**

- (i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das *Konvergenzverhalten* zu ändern, vgl. 1.2.10. Prop. 1.4.3 zeigt, dass dies auch für Reihen zutrifft: Bedingung 1.26 wird von der Änderung endlich vieler  $a_k$  nicht berührt. [Exakt begründet man das z.B. so: Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) Folgen und es gebe ein  $M \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall n \geq M: a_n = b_n$  und  $(a_n)$  erfülle 1.26, dann tut das auch  $(b_n)$ : Sei  $\varepsilon > 0$ , dann  $\exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$ . Wähle  $N := \max\{M, N_1\} \Rightarrow \forall n, m \geq N : \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$ .]
- (ii) Weiters verändert sich der *Limes* einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden.

Das ist bei Reihen anders.

Offensichtlich ändert sich der Wert der Reihe, z.B: sei  $|x| < 1$ , dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{1.2.37}{=} \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \underbrace{x^0}_{=1} = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Eine weitere wichtige Konsequenz aus 1.4.3 halten wir im folgenden Korollar fest.

**Korollar 1.4.5 (Die Glieder konvergenter Reihen sind Nullfolgen).**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow a_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Setze in (1.26)  $m = n \geq N$ , dann

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^n a_k \right| = |a_n| \Rightarrow a_n \rightarrow 0. \quad \square$$

**Proposition 1.4.6 (Beschränktheit der Partialsummen).**

Sei  $\sum a_k$  eine Reihe nicht-negativer Zahlen (d.h.  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff s_m = \sum_{k=0}^m a_k \text{ beschränkt.}$$

Während die Hinrichtung klar ist, vgl. 1.2.17, ist die Rückrichtung auf den ersten Blick überraschend, vgl. 1.2.18. Auf den zweiten Blick klärt sich die Situation auf: Monotonie und das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen 1.3.25 schlagen zu! Jetzt im Detail:

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : folgt sofort aus 1.2.17.

$\Leftarrow$ : Die Partialsummenfolge  $s_m$  ist

- monoton wachsend, denn  $s_{m+1} = s_m + a_{m+1} \geq s_m$ , da  $a_n \geq 0$  und
- beschränkt per Annahme.

Daher folgt mit 1.3.25, dass  $s_m$  konvergiert.  $\square$

Höchste Zeit für ein Beispiel!

**Beispiel 1.4.7 (Konvergente und divergente Reihen).**

- (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1, 0, 1, 0, \dots)$  divergiert, weil  $a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0$  (vgl. 1.4.5).  
 (ii) Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

Erzbeispiel einer divergenten Reihe

„Dodel-Test“:  
 $a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$   
 $\sum a_n$  divergent

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist (das Resultat folgt dann aus 1.4.6, da  $a_n = \frac{1}{n} > 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ):

Wir betrachten  $s_{2^k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) (das ist der Trick!). Dann gilt

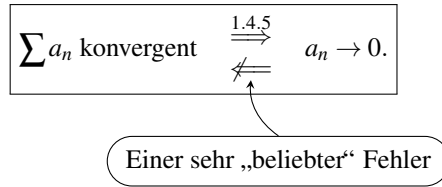
$$\begin{aligned} s_{2^k} &= \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ Terme}} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

*Anzahl der Terme:*  
 $2^k - 2^{k-1}$   
 $= 2^{k-1}(2 - 1)$   
 $= 2^{k-1}$

Also  $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$  und somit ist  $s_n$  unbeschränkt.

**1.4.8 (Große fette Warnung!).**

Bemerke: die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert, OBWOHL  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Daher ist die Umkehrung von 1.4.5 FALSCH. Es gilt also insgesamt

**Beispiel 1.4.9.** ( $\sum \frac{1}{n^s}$ )

(i) Sei  $\mathbb{N} \ni k \geq 2$ , dann ist

$$\sum \frac{1}{n^k} \text{ konvergent.}$$

Da alle Glieder  $\frac{1}{n^k} > 0$  sind, müssen wir mit 1.4.6 nur zeigen, dass  $s_m$  beschränkt ist. Dazu sei  $m \in \mathbb{N}$  gegeben; wähle  $l \in \mathbb{N}$  sodass  $m \leq 2^{l+1} - 1$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 s_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right)}_{\leq 2 \frac{1}{2^k}} + \underbrace{\left( \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} \right)}_{\leq 4 \frac{1}{2^k} = 2^2 \frac{1}{4^k}} + \cdots + \underbrace{\sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}}_{\leq 2^l \frac{1}{2^k}} \\
 &\leq \sum_{j=0}^l 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^l \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}.
 \end{aligned}$$

geom. Reihe  
1.2.37

unabh. von  $m$ , daher  
obere Schranke von  $s_m$

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (wortwörtlich) auch für  $\mathbb{R} \ni k > 1$  — wir haben aber  $n^k$  für  $k \notin \mathbb{Z}$  im Rahmen der Vorlesung noch nicht definiert. Wie auch immer, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ ist } \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } s \leq 1, \\ \text{konvergent} & \text{für } s > 1. \end{cases}$$

(iii) Für alle geraden ganzen Zahlen  $k$  können die Summen sogar explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

wie wir später sehen werden.

#### Motivation 1.4.9A.

Im folgenden betrachten wir sogenannte *alternierende Reihen*. Das sind Reihen, bei denen die Glieder abwechselnd positiv bzw. negativ sind und daher oft einfacher zu bändigen. Formal sind das also Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

wobei alle  $a_n$  nicht-negativ sind, d.h.  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Konvergiert eine alternierende Reihe gegen einen Grenzwert  $S$ , so nähern sich die Partialsummen im allgemeinen „von beiden Seiten“ an  $S$  an, siehe Abb. 1.17.

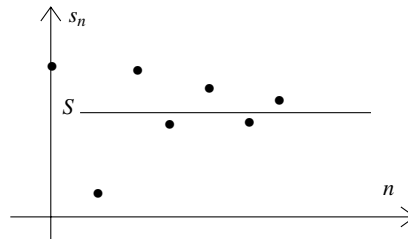


Abb. 1.17 Partialsummen einer gegen  $S$  konvergenten alternierenden Reihe

#### Theorem 1.4.10 (Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen).

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  eine alternierende Reihe. Falls gilt, dass

- (i)  $a_n$  monoton fällt (d.h.  $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ ) und
- (ii)  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent.

*Beweis.* Der Kern des Beweises ist wieder das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen 1.3.25. Wir führen den Beweis in 3 Schritten:

- (1) Die Teilfolgen der geraden/ungeraden Partialsummen konvergieren:

Sei  $k \in \mathbb{N}$ , wir betrachten zunächst die Folge  $s_{2k}$ . Es gilt

$$s_{2k+2} - s_{2k} = \sum_{n=0}^{2k+2} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n = \sum_{n=2k+1}^{2k+2} (-1)^n a_n = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \stackrel{(i)}{\leq} 0$$

und daher

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \quad (1.27)$$



Analog gilt für  $s_{2k+1}$ , dass

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \stackrel{(i)}{\leq} 0 \Rightarrow s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \quad (1.28)$$

Außerdem gilt

$$s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \Rightarrow s_{2k+1} \leq s_{2k}. \quad (1.29)$$

Also ist  $(s_{2k})$  nach (1.27) monoton fallend und nach unten beschränkt weil

$$s_1 \stackrel{(1.28)}{\leq} s_{2k+1} \stackrel{(1.29)}{\leq} s_{2k}.$$

und somit nach 1.3.25 konvergent, d.h.

$$\exists S := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}.$$

Analog ist  $(s_{2k+1})$  monoton wachsend (nach (1.28)) und nach oben beschränkt (nach (1.27), (1.29)), also wiederum wegen 1.3.25 konvergent, d.h.

$$\exists S' := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1}.$$

(2) Die Grenzwerte stimmen überein,  $S = S'$ :

Es gilt

$$S - S' = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} \stackrel{(ii)}{=} 0.$$

(3)  $S = S'$  ist Limes der Reihe, d.h.  $s_n \rightarrow S$ :

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} s_{2n} \rightarrow S &\implies \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 : |s_{2n} - S| < \varepsilon, \\ s_{2n+1} \rightarrow S &\implies \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 : |s_{2n+1} - S| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher gilt  $\forall n \geq N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$  dass  $|s_n - S| < \varepsilon$ .  $\square$

### Beispiel 1.4.11 (Alternierende harmonische Reihe).

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{konvergiert}$$

nach 1.4.10, denn  $(\frac{1}{n})$  ist eine monoton fallende Nullfolge.

**Bemerkung 1.4.12 (Zum Leibnizkriterium).**

- (i) Bemerke, dass 1.4.10 eine schwache Form der Umkehrung von 1.4.5 ( $\sum a_n$  konvergent  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ ) ist (vgl. 1.4.8), denn 1.4.10 sagt:

$$a_n \rightarrow 0 \text{ und monoton fallend} \implies \sum (-1)^n a_n \text{ konvergent.}$$

- (ii) Der Beweis von 1.4.10 liefert die folgende *Fehlerabschätzung*:

$$|S - s_m| \leq |s_{m+1} - s_m| = a_{m+1}.$$

$s_m$  hüpfte ja immer über  $S$  hinaus

**Bemerkung und Warnung 1.4.13 (Reihenkonvergenz ist instabil).**

Wie bereits in 1.4.1 angekündigt, hängen Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge ab.

- (i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen, benötigen wir die folgende Notation:

Sei  $\sum a_n$  eine Reihe und  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv, dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$  eine *Umordnung* von  $\sum a_n$ .

- (ii) Umordnung konvergenter Reihen kann den Limes ändern. Sei z.B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  die alternierende harmonische Reihe (sie konvergiert wegen 1.4.11). Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=\frac{1}{14}} - \frac{1}{16} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right) \end{aligned}$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

- (iii) Umordnung konvergenter Reihen kann sogar zu Divergenz führen! Wir ordnen nochmals die alternierende harmonische Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später auftreten ( $n \geq 2$ ):

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc} 9 = 2^3 + 1 & 15 = 2^{3+1} - 1 & 8 = 2 \cdot 3 + 2 \end{array} \\
 & 1 - \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}_{>\frac{2}{8}=\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{>\frac{4}{16}=\frac{1}{4}} - \frac{1}{8} + \dots \\
 & \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq \frac{2^n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}} - \frac{1}{2n+2} \\
 & \begin{array}{c} \text{\#Terme} = \\ \frac{2^{n+1}-2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} \\ = 2^{n-1} \end{array} \rightarrow \geq \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \\
 & > \frac{n-1}{4} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) > \frac{n-1}{4} - \frac{n-1}{6} = \frac{n-1}{12}. \\
 & \begin{array}{c} \text{\# der Klammern mit pos. Termen} \\ \leq n-1 = \text{\# der neg. Terme} \end{array}
 \end{aligned}$$

Also sind die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt und somit ist die Reihe divergent.

- (iv) Fazit: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff der solche Effekte ausschließt! Einen solchen liefert die nächste Definition.

**Definition 1.4.14 (Absolute Konvergenz).**

Eine Reihe  $\sum a_n$  heißt *absolut konvergent*, falls  $\sum |a_n|$  konvergiert.

Reihe der Absolutbeträge der Glieder

**Bemerkung 1.4.15 (Zur absoluten Konvergenz).**

- (i) Absolut konvergente Reihen haben beschränkte „Absolut-Partialsummen“. Genauer, wegen  $|a_n| \geq 0$  gilt 1.4.6

$$\sum |a_n| \text{ konvergent} \iff s_m = \sum_{n=0}^m |a_n| \text{ beschränkt.}$$

- (ii) Konvergente Reihen müssen nicht absolut konvergieren, formal:

$$\sum a_n \text{ konvergent} \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ konvergent.}$$

Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  konvergiert nach

1.4.11, aber  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert nach 1.4.7(ii).

Die Umkehrung ist aber richtig, wie die folgende Aussage zeigt.

Absolute Konvergenz ist also  
wirklich stärker als „bloße“ Konvergenz!

**Proposition 1.4.16 (Absolute Konvergenz  $\Rightarrow$  Konvergenz).**

*Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

*Beweis (CP für Reihen und  $\triangle$ -Ungl.).*

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt mit 1.4.3 für  $\sum |a_n|$ :  $\exists N \forall n \geq m \geq N$ :

$$\varepsilon > \sum_{k=m}^n |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right|$$

$\triangle$ -Ungl. für endliche Summen  
von rechts nach links gelesen

Und daher gilt mit 1.4.3 (lies von rechts nach links), dass  $\sum a_n$  konvergiert.  $\square$

Abs. Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen  
und damit der gesuchte Begriff, vgl. 1.4.13(iv).

**Theorem 1.4.17 (Umordnungssatz).**

Sei  $\sum a_n$  absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung  $\sum a_{\tau(n)}$  absolut konvergent und konvergiert gegen denselben Limes.

*Beweis.* Nach 1.4.16 existiert  $s := \lim \sum a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .

(Jetzt in drei Schritten ins Ziel)

(1) *Abschätzung für den Reihenrest.*

$$\begin{aligned} \xrightarrow[1.4.3]{\sum |a_n|} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall l \geq N : \quad \sum_{k=N}^l |a_k| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \xrightarrow[1.2.31]{1.2.28} \quad \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Daher gilt  $\forall m \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| &= \left| \sum_{k=N}^m a_k \right| \leq \sum_{k=N}^m |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \\ \xrightarrow[(m \rightarrow \infty)]{1.2.28} \quad \left| s - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

(2)  $\lim \sum a_{\tau(n)} = s$ .Sei  $M \in \mathbb{N}$  sodass  $M \geq N$  und sodassmöglich, weil  
 $\tau$  bijektiv

$$\{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(M)\} \supseteq \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (\Delta)$$

Dann gilt  $\forall m \geq M$ 

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - s \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right|}_{\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|} + \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k - s \right| \stackrel{(1.30)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Wegen  $(\Delta)$  fallen alle  $a_k$  mit  $0 \leq k \leq N-1$  aus der Summe weg. Übrig bleiben gewisse  $a_k$ , über die man nur weiß, dass  $k \geq N$  ist.

Diese Summe ist sicher durch

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \text{ abschätzbar.}$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = s.$$

(3)  $\sum a_{\tau(n)}$  konvergiert absolut.Dies folgt sofort aus (1) und (2) für die Reihe  $\sum b_n$  mit  $b_n := |a_n|$ .  $\square$ **Motivation 1.4.18 (Absolute Konvergenz: Schön, aber wie?).**

Nachdem wir gesehen haben, dass absolute Konvergenz der richtige Begriff ist, um mit Reihen gut umgehen zu können - manchmal sagt man zu bloß konvergenten Reihen auch BEDINGT konvergent - stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich einer Reihe an, ob sie absolut konvergiert? Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

**Proposition 1.4.19 (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium).**(i) Sei  $\sum c_n$  konvergent und  $c_n \geq 0$ .

$$|a_n| \leq c_n \text{ für fast alle } n \implies \sum a_n \text{ absolut konvergent.}$$

 $\sum c_n$  heißt  
konv. Majorante(ii) Sei  $\sum d_n$  divergent und  $d_n \geq 0$ .

$$a_n \geq d_n \text{ für fast alle } n \implies \sum a_n \text{ divergent.}$$

 $\sum d_n$  heißt  
div. Minorante

*Beweis.* (i) O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $|a_n| \leq c_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (der Reihenanfang ist egal, vgl. 1.4.4(i)). Wir verwenden 1.4.6:  $(\sum |a_n|)$  ist eine Reihe mit nicht-negativen Termen)

Für alle  $m$  gilt daher

$$0 \leq s_m = \sum_{n=0}^m |a_n| \leq \sum_{n=0}^m c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$\implies s_m \text{ beschränkt} \xrightarrow{1.4.6} \sum |a_n| \text{ konvergent.}$$

- (ii) Indirekt: Angenommen,  $\sum a_n$  konvergiert. Dann würde nach (i) auch  $\sum d_n$  konvergieren, ein Widerspruch.  $\square$

**Beispiel 1.4.20 (Vergleichstest).**

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergiert, denn  $\forall n \geq 1: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$  und  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert (1.4.7(ii)). Daher gilt wegen 1.4.19(ii), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ divergiert.}$$

- (ii) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $|a_n| < 1 \forall n$ . Sei  $q \in (0, 1)$ , dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \text{ ist absolut konvergent,}$$

denn  $|a_n q^n| \leq q^n$  und  $\sum q^n$  konvergiert (1.2.37)  $\xrightarrow{1.4.19(i)}$   $\sum a_n q^n$  konvergiert absolut.

**Proposition 1.4.21 (Wurzeltest).**

Die reelle Reihe  $\sum a_n$  ist

- (i) absolut konvergent, falls  $\exists \theta : 0 < \theta < 1$  und  $\exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \forall n \geq n_0,$$

- (ii) divergent, falls

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n.$$

*Beweis (Benutzt den Vergleichstest und die geometrische Reihe und ist nicht schwer...).*

- (i) Es gilt  $|a_n| \leq \theta^n$  für fast alle  $n$ , und  $\sum \theta^n$  ist konvergent (1.2.37)

$$\xrightarrow{1.4.19(i)} \sum |a_n| \text{ ist konvergent.}$$

- (ii)  $|a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n$ , also  $a_n \not\rightarrow 0$

$$\xrightarrow[\text{„Dodel-Test“}]{1.4.5} \sum a_n \text{ divergiert. } \square$$

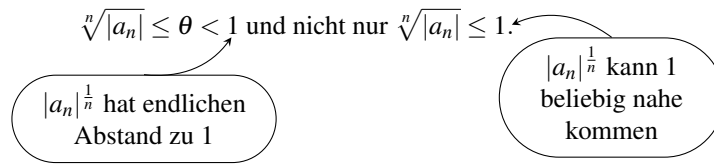
**Bemerkung 1.4.22 (Zum Wurzeltest).**

- (i) In der Praxis tritt oft auf, dass  $\sqrt[n]{|a_n|}$  konvergiert. Sie also  $a := \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} a < 1 &\implies \text{Bedingung in 1.4.21(i) gilt (etwa mit } \theta = a + \eta < 1 \text{ und } \eta = \frac{1-a}{2}) \\ &\implies \sum a_n \text{ abs. konv.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a > 1 &\implies \text{Bedingung in 1.4.21(ii) gilt (sogar für fast alle } n) \\ &\implies \sum a_n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

(ii) WARNUNG! Der Wurzeltest benötigt wirklich die Abschätzung



Konvergiert nämlich  $\sqrt[n]{|a_n|}$  gegen 1, so ist keine Aussage möglich. Es kann nämlich sowohl absolute Konvergenz als auch Divergenz vorliegen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Bemerke zuerst, dass  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  (UE) und daher  $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$  (Satz 1.2.26) und  $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  (1.2.23). Nun zu den Beispielen:

$$1 > \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert (1.4.9(i))},$$

$$1 > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ divergiert (1.4.7(ii)).}$$

**Proposition 1.4.23 (Quotiententest).**

Sei  $a_n \neq 0$  für (fast<sup>3</sup>) alle  $n$ . Die reelle Reihe  $\sum a_n$

(i) konvergiert absolut, falls  $\exists \theta : 0 < \theta < 1$  und  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \geq n_0,$$

(ii) divergiert, falls  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

*Beweis (Benutzt wieder Vergleichstest & geometrische Reihe und ist wieder nicht schwer...).*

(i) Für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \leq \theta^2 |a_{n-1}| \leq \dots \leq \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| := c_n$$

und

$$\sum c_n = \sum \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \theta^{1-n_0} \sum \theta^n$$

konvergiert nach 1.2.37. Nun besagt aber 1.4.19(i), dass

$$\sum |a_n| \text{ konvergiert.}$$

<sup>3</sup> Die Modifikation der Aussage und des Beweises für „fast alle“ statt „alle“ ist einfach zu bewerkstelligen aber etwas lästig aufzuschreiben. Daher bleiben wir bei „alle“.

(ii) Sei  $n_1 \geq n_0$ , dann gilt lt. Voraussetzung  $|a_n| \geq |a_{n-1}| > 0 \quad \forall n \geq n_1$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0 \xrightarrow{1.4.5} \sum a_n \text{ divergiert.} \quad \square$$

**Bemerkung 1.4.24 (Zum Quotiententest).**

(i) Analog zum Wurzeltest: Falls  $\exists a := \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , dann gilt

$$\begin{aligned} a < 1 & \xrightarrow{1.4.23(i)} \sum a_n \text{ absolut konvergent,} \\ a > 1 & \xrightarrow{1.4.23(ii)} \sum a_n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

(ii) WARNUNG! Auch hier ist bei  $\theta = 1$  keine Aussage möglich, denn z.B.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert und } (n > 1) \quad 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1, \\ \sum \frac{1}{n} \text{ divergiert und } (n > 1) \quad 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest: Man kann zeigen, dass

$$(i) \text{ im Quotiententest} \implies (i) \text{ im Wurzeltest.}$$

Das bedeutet, dass falls der Quotiententest positiv ausfällt, auch der Wurzeltest anwendbar ist und ebenfalls positiv ausfällt. Die Umkehrung ist aber falsch, siehe [2, §5.3]. Für die Praxis bedeutet das für das Testen einer gegebenen Reihe auf absolute Konvergenz: Falls der Wurzeltest nicht anwendbar ist, braucht man es mit dem Quotiententest erst gar nicht probieren...

**Beispiel 1.4.25 (Quotiententest, Wurzeltest).**

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ist absolut konvergent, denn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

und mit 1.4.24(i) folgt die Behauptung.

(ii)  $\sum a_n$  mit

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist absolut konvergent, denn (1.4.21(i))

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \max \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n.$$

QT bringt  
hier nichts!

können  $\theta = \frac{1}{2}$   
wählen

Bemerge, dass für diese Reihe der Quotiententest nicht funktioniert. Genauer ist er nicht anwendbar, denn



$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{1.1.5(ii)} 0, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \xrightarrow{1.1.5(i)} \infty.$$

**Motivation 1.4.26 (Dezimaldarstellung und  $b$ -adische Entwicklung).**

Als erste Anwendung des entwickelten Begriffsapparates für Reihen werden wir nun die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren.

- (i) Beginnen wir mit  $\mathbb{Q}$ : Im Alltag sind wir es gewohnt, rationale Zahlen in Dezimaldarstellung zu sehen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt 17,48 EUR. Die entsprechende Bruchzahl  $x \in \mathbb{Q}$  errechnet sich gemäß

$$x = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \frac{1748}{100}.$$

- (ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

- (A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und  $x$  so als Limes einer unendlichen Reihe auffassen — und welche Zahlen  $x$  können wir so darstellen? (Etwa mehr als  $\mathbb{Q}$ ?)  
 (B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen  $b \geq 2$  statt 10 ist leicht zu bewerkstelligen. In diesem Rahmen (offizielle Definition kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

**Definition 1.4.27 ( $b$ -adische Entwicklung).**

Sei  $\mathbb{N} \ni b \geq 2$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  und  $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ ). Die Reihe

$$\begin{array}{ccc} \text{Basis} & \text{Ziffern} & \pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n} \end{array}$$

heißt  $b$ -adische Entwicklung mit Ziffern  $a_n$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ ).

**Beispiel 1.4.28 ( $b$ -adische Entwicklung).**

- (i) Im Beispiel in 1.4.26(i) ist  $b = 10$ ,  $N = -1$ ,  $a_{-1} = 1, a_0 = 7, a_1 = 4, a_2 = 8$ .  
 Noch genauer

$$17,48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^2 a_n 10^{-n}.$$

- (ii) Es gilt  $2^7 = 128$ , daher hat 128 die Binärdarstellung (also  $b = 2$ )

$$128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-7} 1 \cdot 2^{-n}.$$

**Motivation 1.4.29 (Konkretisierung von (A) in 1.4.26(ii)).**

Die Fragen in 1.4.26(A) können wie folgt konkretisiert werden:

- (i) Ist jede  $b$ -adische Entwicklung konvergent?  
 (ii) Kann jedes  $x \in \mathbb{R}$  als Limes einer  $b$ -adischen Entwicklung dargestellt werden?

(iii) Ist diese Darstellung eindeutig?

**Bemerkung 1.4.30 (Uneindeutigkeit  $b$ -adischer Entwicklungen).**

Die Antwort auf 1.4.29(iii) ist negativ, wie das folgende Beispiel zeigt ( $b = 10$ ):

$$0,9999\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-1})^n$$

geom. Reihe,  
schon wieder...

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \frac{10}{10-1} = 1 = 1,0000\dots$$

Zum Glück lautet die Antwort auf 1.4.29(i) und (ii) „JA“ wie wir gleich sehen werden.

**Theorem 1.4.31 ( $b$ -adische Entwicklung reeller Zahlen).**

Sei  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ , dann gilt:

- (i) Jede  $b$ -adische Entwicklung konvergiert absolut.
- (ii) Jede reelle Zahl  $x$  ist Summe (d.h. Limes) einer  $b$ -adischen Entwicklung (wobei die Ziffern wie im Beweis angegeben rekursiv konstruiert werden können).

*Beweis.* (i) (wie gehabt und leicht)

Für alle  $n$  gilt:

$$|a_n b^{-n}| \stackrel{a_n \leq b-1}{\leq} (b-1)b^{-n} \text{ und } \sum b^{-n} \text{ ist konvergente Majorante}$$

$$\stackrel{1.4.19(i)}{\implies} \sum a_n b^{-n} \text{ konvergiert absolut.}$$

(ii) (technisch anspruchsvoll...)

Es genügt den Fall  $x \geq 0$  zu betrachten. Wir konstruieren eine  $b$ -adische Darstellung für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  in 3 Schritten.

(1) *Konstruktionsvorschrift:*

Da  $b \geq 2$ , gibt es nach 1.1.5(i) ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $b^m > x$ . Nach der Wohlordnung von  $\mathbb{N}$  (vgl. 1.1.2) existiert

$$m_0 := \min\{m \in \mathbb{N} \mid x < b^{m+1}\}.$$

Setze  $N := -m_0$ . Wir werden in Schritt (3) induktiv eine Folge  $a_n$  in  $\{0, 1, \dots, b-1\}$  konstruieren, sodass

$$\forall n \geq N \quad \exists \xi_n \text{ mit } 0 \leq \xi_n < b^{-n} \text{ und } x = \sum_{k=N}^n a_k b^{-k} + \xi_n. \quad (1.32)$$

(2) Diese Vorschrift genügt, denn (1.32)  $\Rightarrow \xi_n \rightarrow 0$ , also

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k},$$

was die Aussage (ii) beweist.

Bevor wir, den entscheidenden 3. Schritt beginnen erinnern wir an die *nächst kleinere Ganze* auch *Gauß-Klammer* genannt:

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lfloor y \rfloor := \max\{l \in \mathbb{Z} \mid l \leq y\}$$

$$\text{Es gilt } \lfloor y \rfloor \leq y \leq \lfloor y \rfloor + 1 \text{ und daher } 0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1. \quad (1.33)$$

- (3) *Konstruktion:* Wir gehen induktiv vor und beginnen bei  $n = N$ .  
 $n = N$ : Weil  $b \geq 2 > 1$  und  $N \leq 0$  ist, gilt  $0 \leq b^N < b$ . Wir definieren  $a_N \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  und  $\xi_N$  durch

$$a_N := \lfloor xb^N \rfloor, \quad \xi_N := (xb^N - a_N)b^{-N}.$$

Dann gilt  $x = b^{-N}a_N + \xi_N$  und  $0 \leq \xi_N \stackrel{(1.33)}{<} b^{-N}$ . Also gilt (1.32) für  $n = N$ .  
 $n \mapsto n+1$ : Aus (1.32) für  $n$  folgt  $0 \leq \xi_n b^{n+1} < b$ . Wir definieren  $a_{n+1}, \xi_{n+1}$  durch

$$a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := \underbrace{(\xi_n b^{n+1} - a_{n+1})}_{0 \leq \dots < 1 \text{ nach (1.33)}} b^{-n-1}. \quad (1.34)$$

Dann gilt  $\xi_n = a_{n+1}b^{-n-1} + \xi_{n+1}$  und daher

$$x \stackrel{(IV)}{=} \sum_{k=N}^n a_k b^{-k} + a_{n+1}b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} a_k b^{-k} + \xi_{n+1}$$

und  $0 \leq \xi_{n+1} \stackrel{(1.34)}{<} b^{-n-1}$ ,

also gilt (1.32) für  $n+1$ .  $\square$

**Korollar 1.4.32 (Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , zum Dritten).**  
*Jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist Limes einer Folge in  $\mathbb{Q}$ .*

vgl. mit  
0.1.11(ii)  
und 1.3.30A

*Beweis.* Nach 1.4.31 existiert eine Dezimaldarstellung für  $x$ , d.h.

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}.$$

Für jedes  $m$  ist die Partialsumme

$$s_m = \sum_{n=N}^m a_n \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$$

und  $s_m \rightarrow x$ .  $\square$

**Bemerkung 1.4.33.**

Sei  $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$  eine  $b$ -adische Entwicklung. Man kann zeigen, siehe z.B. [1, II.7]:

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \text{Die Ziffernfolge } a_n \text{ ist ab einem } K \in \mathbb{N} \text{ periodisch} \\ \text{d.h. } \exists K \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq K.$$

Das inkludiert den Fall,  
dass ab  $K$  alle  $a_n = 0$  gilt,  
die Entwicklung also abbricht!

**Motivation 1.4.34 (Das Cauchy-Produkt für Reihen).**

- (i) Um zu einer zweiten - noch viel wichtigeren - Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen, nämlich der

EXPONENTIALFUNKTION,

müssen wir uns zunächst um Produkte von Reihen kümmern.

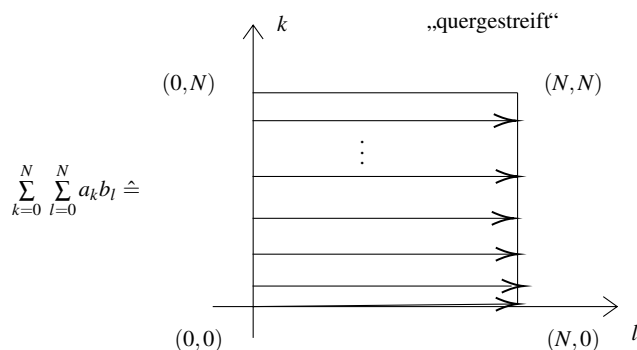
- (ii) Um letztere zu motivieren, beginnen wir mit einer Überlegung zu Produkten endlicher Summen.

Sei  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n, B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left( \sum_{n=0}^N a_n \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n \right) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k b_l. \quad (1.35)$$

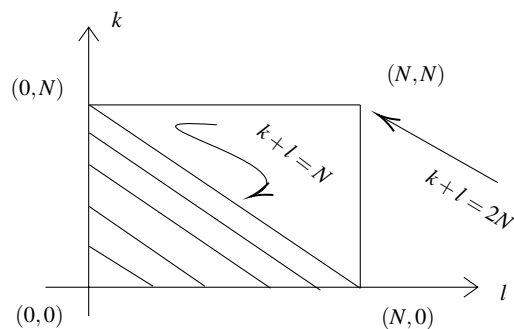
Für die Untersuchung der Konvergenz  $N \rightarrow \infty$  solcher Ausdrücke erweist es sich als günstig, die Summation anders zu arrangieren. Am besten wird das in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich:

Alles läuft darauf hinaus, in welcher Reihenfolge wir die Indexpaare  $(k, l)$  in der Doppelsumme in (1.35) durchlaufen, wie Abbildung 1.18 zeigt:



**Abb. 1.18** Indexpaare werden „quer“ durchlaufen

Es erweist sich für viele Anwendungen als günstiger, längs der Diagonalen zu laufen, zumindest bis wir die längste Diagonale erreichen, wie in Abbildung 1.19 zu sehen ist:

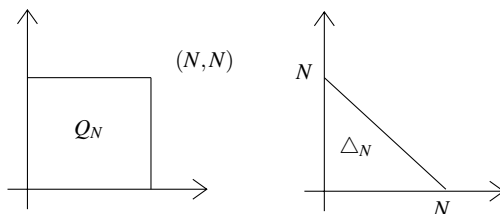


**Abb. 1.19** Indexpaare werden „diagonal“ durchlaufen

Wir verwenden folgende Abkürzungen für Bereiche des Gitters  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =: \mathbb{N}^2$ :

$$\begin{aligned} Q_N &:= \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq k, l \leq N\}, \\ \triangle_N &:= \{(k, l) \in Q_N \mid k + l \leq N\}, \end{aligned}$$

welche in Abbildung 1.20 dargestellt sind.



**Abb. 1.20** Indexpaare in  $Q_N$ , sowie in  $\triangle_N$

Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned} A_N \cdot B_N &= \sum_{(k,l) \in Q_N} a_k b_l = \sum_{(k,l) \in \triangle_N} a_k b_l + \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \triangle_N} a_k b_l \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} + \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \triangle_N} a_k b_l, \end{aligned} \quad (1.36)$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen „längs der Diagonalen gelaufen“ sind, d.h. die Gleichheit

$$\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{(k,l) \in \triangle_N \\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

verwendet haben.

- (iii) Wozu das ganze? Wenn  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergieren und wir *Produktreihen* betrachten, dann müssen wir in obiger Terminologie  $\lim(A_N B_N)$  ausrechnen. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist<sup>4</sup>, dass

$$\sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \triangle_N} a_k b_l \rightarrow 0$$

und daher der erste Term in (1.36) gegen  $(\sum a_n)(\sum b_n)$  geht. Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

schöne Formeln.

- (iv) Ja, und muss man das so machen?

Nein, jede Form des Durchlaufens erzeugt bei absolut konvergenten  $\sum a_n, \sum b_n$  eine absolut konvergente Reihe mit dem selben Limes, siehe z.B. [8, 32.5-6] und [4, p. 116ff].

**Proposition 1.4.35 (Cauchy-Produkt für Reihen).**

Seien  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} b_l \right).$$

**Bemerkung 1.4.35A.**

Bemerke, dass die Proposition besagt, dass

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n b_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(k,l) \in \triangle_N} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

<sup>4</sup> Intuitiv werden in  $Q_N \setminus \triangle_N$  die Indices sowohl von  $a_n$  als auch von  $b_n$  groß und daher Produkte der Form  $a_k b_l$  schnell klein.

was wir in 1.4.34(iii) bereits angedeutet haben.

*Beweis (Sehr technisch).* Wir verwenden die Notation aus 1.4.34. Sei  $S_N := \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , dann gilt

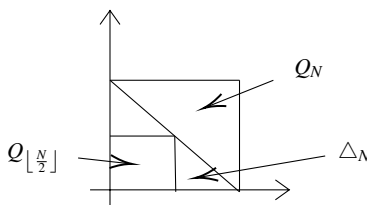
$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l.$$

Wir berechnen den Limes von  $S_N$  und zeigen das die Konvergenz absolut ist in 2 getrennten Schritten.

- (1)  $\lim S_N = (\sum a_k)(\sum b_l)$  :  
Setze  $A_N^* := \sum_{n=0}^N |a_n|$ ,  $B_N^* := \sum_{n=0}^N |b_n|$ , dann ist

$$A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l) \in Q_N} |a_k b_l|.$$

Weiters gilt (siehe Abb.1.21):  $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \Delta_N \subseteq Q_N$ .



**Abb. 1.21** Schachtelung der Mengen  $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \Delta_N \subseteq Q_N$

Damit gilt

$$\begin{aligned} |A_N B_N - S_N| &\leq \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} |a_k| |b_l| \stackrel{Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \Delta_N}{\leq} \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k| |b_l| \\ &= A_N^* B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^*. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $(A_N^* B_N^*)_N$  konvergent, also eine Cauchy-Folge, und somit  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N^* B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* = 0$  und daher

$$|A_N B_N - S_N| \rightarrow 0.$$

Somit ergibt sich schließlich wegen

$$A_N \cdot B_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l) \text{ die Behauptung, d.h. } S_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l).$$

- (2)  $\sum c_n$  ist absolut konvergent:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \quad \text{für } \sum |a_n|, \sum |b_n| \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{konvergent.} \quad \square$$

**Bemerkung 1.4.36 (Exponentialreihe).**

Jetzt kommen wir endlich über die Exponentialreihe zur angekündigten Exponentialfunktion.

- (i) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  absolut konvergent, denn für  $x \neq 0$  sind die Glieder  $a_n \neq 0$  und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0,$$

also folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.

Für  $x = 0$  ist die Sache einfacher, denn  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ .

- (ii) (ACHTUNG: NEUE IDEE!) Daher können wir für  $x \in \mathbb{R}$  eine Funktion

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$$

definieren. Nun aber offiziell:

**Definition 1.4.37 (Exponentialfunktion, Eulersche Zahl).**

Die *Exponentialfunktion*  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

und die *Eulersche Zahl* durch

$$\boxed{e := \exp(1)} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

**Motivation 1.4.38 (Funktionalgleichung für  $\exp$ ).**

Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen Exponentialfunktion folgen aus der Funktionalgleichung  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ . (Tatsächlich ist  $\exp$  dadurch und eine Beschränktheitsbedingung schon eindeutig charakterisiert [2, Sec. 7.5]). Wir werden sie jetzt als Folgerung aus dem Cauchy-Produkt herleiten.

**Theorem 1.4.39 (Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion).**

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y).} \quad (1.37)$$

*Beweis (Erfreulich einfach, denn die ganze Arbeit steckt schon in 1.4.35.).*

Nach 1.4.36 sind  $\sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$  absolut konvergent. Daher folgt aus 1.4.35, dass



$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit} \\ c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \stackrel{\text{BLS}}{=} \frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Also

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \stackrel{(1.37)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y). \quad \square$$

**Korollar 1.4.40 (Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion).**

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

- (i)  $\exp(x) > 0$
- (ii)  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- (iii) Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $\exp(n) = e^n$ .

*Beweis (Den erledigt die Funktionalgleichung für uns — bedenke aber, dass die ganze Arbeit daher schon in 1.4.35 steckt).*

(ii) Die Funktionalgleichung (1.37) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \stackrel{(1.37)}{=} \exp(x) \exp(-x).$$

(i) Für  $x \geq 0$  gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 > 0. \quad (1.39)$$

Für  $x < 0$  gilt

$$\exp(x) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>0 \text{ (1.39)}}} > 0.$$

(iii) Wegen (ii) gilt  $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$  und es genügt daher, die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$$\underline{n=0}: \exp(0) = 1 = e^0.$$

$$\underline{n \mapsto n+1}: \exp(n+1) \stackrel{1.37}{=} \exp(n) \exp(1) \stackrel{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}. \quad \square$$

**Bemerkung und Motivation 1.4.41.**

(i) Thm. 1.4.39 und Kor. 1.4.40 besagen, dass  $\exp$  ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow ((0, \infty), \cdot)$$

ist; vgl. [7, 5.2.62].

- (ii) Zum Abschluss des Abschnitts und des Kapitels beweisen wir nun eine grobe aber trotzdem sehr nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe — später werden wir diese noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe].

**Proposition 1.4.42 (Fehlerabschätzung für exp).**

Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x),$$

$N$ -te Partialsumme

Rest der Ordnung  $N+1$

wobei der Rest-Term  $R_{N+1}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1 + \frac{N}{2}$  die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

erfüllt.

*Beweis (Technisch, aber notwendig!).*

Für den Rest-Term gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut, vgl. 1.4.36(i). Daher gilt

$$\begin{aligned} |R_{N+1}| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{N+2} + \underbrace{\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}}_{\leq \frac{|x|^2}{(N+2)^2}} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{N+2} \right)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \\ &\stackrel{\text{geom. R.}}{\stackrel{1.2.37}{=}} 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

$$|x| \leq \frac{N+2}{2}$$

Verallg.  $\triangle$ -Ungl. für abs. konv. Reihen:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$$\text{Bew.: } \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{n=0}^N |a_n|,$$

somit für  $N \rightarrow \infty$  mit 1.2.28

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

□

**Beispiel 1.4.43 (Approximation für  $e$ ).**

Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1),$$

und  $x = 1 \leq 1 + \frac{N}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N}$ . Daher erhalten wir aus 1.4.42 für  $N = 2$

$$e = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und

$$0 < R_3(1) \leq 2 \frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{17}{6}}_{=2.8\bar{3}} < 3.$$

Tatsächlich gilt  $e \approx 2,71828$  (die ersten 100 Stellen erhält man genau schon nach Summation der ersten 73 Terme).



## Kapitel 2

# Stetige Funktionen

**Zusammenfassung.** In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit *Funktionen* und zwar zunächst mit solchen von  $D \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die folgende „schöne“ Eigenschaft haben:

Kleine Änderungen der Argumente verursachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sogenannten *stetigen Funktionen* haben einige hervorragende Eigenschaften. Zwei wichtige davon sind, dass jede stetige Funktion auf abgeschlossenen Intervallen, d.h. jedes stetige  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt (Zwischenwertsatz) und
- Maximum und Minimum annimmt (Satz vom Maximum).

Nach einem gründlichen Studium des *Stetigkeitsbegriffs* lernen wir eine wichtige Klasse „einfacher“ Funktionen kennen: die *elementaren transzendenten* Funktionen. Dazu gehört insbesondere die *Logarithmusfunktion*, die die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Ebenfalls mittels der Exponentialfunktion gelangen wir zur Definition der allgemeinen *Potenz*  $r^\alpha$  ( $r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Danach erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen und Reihen auf den Fall komplexer Zahlen und gelangen über die komplexe Exponentialfunktion zu den *Winkelfunktionen* Sinus und Cosinus.

### 2.1 Stetigkeit

In diesem Abschnitt lernen wir den essentiellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  kennen, wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Wir verwenden dafür auch oft die Kurzschreibweise  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ . Zuvor wiederholen wir Grundlegendes über solche Funktionen.

**Wiederholung 2.1.1 (Funktionen).**

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  zwischen (beliebigen) Mengen  $A$  und  $B$  ordnet *jedem*  $a \in A$  *genau ein*  $f(a) \in B$  zu, siehe [7, 3.4.1]. Das bedeutet, dass einerseits kein  $a \in A$  von  $f$  „verschont“ bleibt — jedem  $a$  wird etwas zugeordnet — und andererseits jedem solchen  $a$  genau ein Bild  $f(a)$  zugeordnet wird.

**Warnung:** Die Definition lässt dabei völlig offen, wie oft jedes  $b \in B$  von  $f$  „getroffen“ wird, also wie viele  $a$  es in  $A$  gibt mit  $f(a) = b$ .

Gibt es für jedes  $b$  *zumindest ein* solches  $a$ , dann heißt  $f$  *surjektiv*, gibt es *höchstens ein* solches  $a$ , dann heißt  $f$  *injektiv*. Funktionen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, heißen *bijektiv*, vgl. [7, Def. 4.3.17] bzw. die beiden folgenden Erklärvideos

➤ **Video**

Injektiv, surjektiv, bijektiv, Teil I

➤ **Video**

Injektiv, surjektiv, bijektiv, Teil II

Wir betrachten in diesem Skriptum (meist) reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ , die also auf einer Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  definiert sind und Werte in  $\mathbb{R}$  annehmen. Für solche Funktionen ist der Graph [7, S. 163f]

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in D\}$$

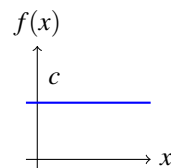
Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und kann in der „üblichen Weise“ in der  $(x, y)$ -Ebene dargestellt werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von Beispielen.

**Beispiel 2.1.2 (reelle Funktionen).**

- (i) **Konstante Funktionen:** Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, dann definiert

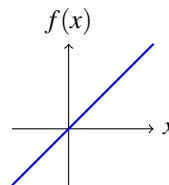
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eine konstante Funktion, vgl. Abb. 2.1.

**Abb. 2.1** Konstante Funktion

- (ii) **Die identische Abbildung** (vgl. Abb.2.2) auf  $\mathbb{R}$  (vgl. [7, S. 165]) ist gegeben durch

$$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.$$

**Abb. 2.2** Identische Abbildung

- (iii) **Lineare Funktionen** sind etwas allgemeiner: Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig, dann setzen wir

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = ax.$$

(Wir nennen dabei  $a$  den Anstieg von  $f$ , vgl. Abb. 2.3.)

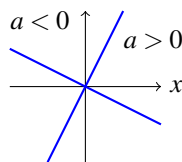


Abb. 2.3 Lineare Funktionen

- (iv) **Die Betragsfunktion**: vgl. 0.1.7, siehe Abb. 2.4,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

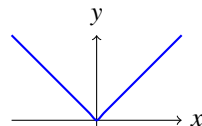


Abb. 2.4 Betragsfunktion

- (v) **Die Gaußklammer**: , siehe Abb. 2.5,

$$[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

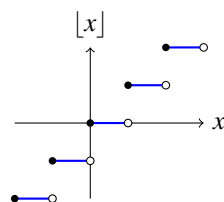


Abb. 2.5 Gaußklammer

- (vi) **Die Wurzelfunktion**: vgl. 0.1.11(iii), siehe Abb. 2.6,

$$\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

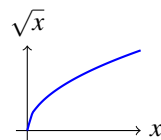


Abb. 2.6 Wurzelfunktion

- (vii) **Die Exponentialfunktion**: vgl. Def. 1.4.37, siehe Abb. 2.7,

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$$

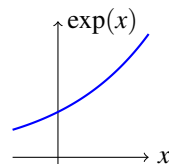


Abb. 2.7 Exponentialfunktion

- (viii) **Polynomfunktionen**: vgl. [7, S. 30], siehe Abb. 2.8,

Seien  $m \in \mathbb{N}$  und Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  gegeben, dann definieren wir  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Dabei nennen wir die höchste vorkommende Potenz den *Grad* von  $p$ . Ein einfaches Beispiel ist  $p(x) = -x + x^2$  ( $m = 2, a_0 = 0, a_1 = -1 = -a_2$ )

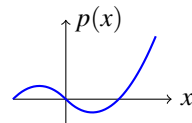


Abb. 2.8 Polynomfunktion

- (ix) **Rationale Funktionen:** Eine rationale Funktion ist Quotient zweier Polynome, siehe Abb. 2.9,

$$p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Sei  $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ , dann definieren wir

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Ein Beispiel einer rationalen Funktion ist etwa

$$\bar{r} : \mathbb{R} \setminus \{1\} := D \ni x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{R},$$

oder etwas einfacher, mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $r(x) = \frac{1}{x}$ , siehe Abb. 2.10.

Bemerke, dass Polynome rationale Funktionen mit Nenner  $q(x) = 1$  sind.

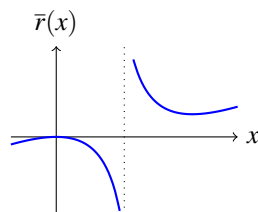


Abb. 2.9 Rationale Funktion

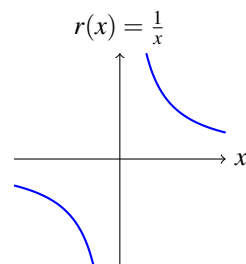


Abb. 2.10 Die rationale Funktion  $r(x) = \frac{1}{x}$

- (x) **Treppenfunktionen:** Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion, wie in Abb. 2.11, falls

- es eine endliche *Zerlegung* des Intervalls  $[a, b]$  gibt  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$
- und Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , sodass  $\varphi(x_k) = c_k$  für  $x \in (t_{k-1}, t_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ )

D.h.  $\varphi$  hat auf den offenen Teilintervallen  $(t_{k-1}, t_k)$  die Werte  $c_k$ , die endlich vielen Werte  $\varphi(t_k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ) können beliebig sein.

Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer (v) und die Sprungfunktion  $H$  auf  $[-1, 1]$ , siehe Abb. 2.12, mit

$$H(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

d.h.

$t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$  und  $H(0) = \frac{1}{2}$

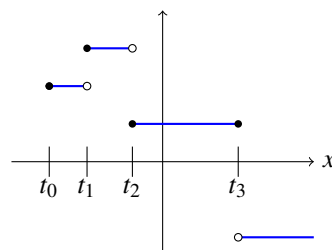


Abb. 2.11 Treppenfunktion

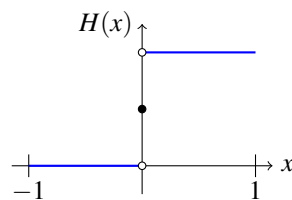
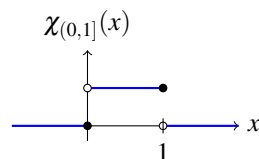


Abb. 2.12 Sprungfunktion  $H$



(xi) **Charakteristische Funktionen einer Menge:**Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  dann definieren wir

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $M = (0, 1]$  sieht die charakteristische Funktion  $\chi_{(0,1]}$  wie in Abb. 2.13 aus.**Abb. 2.13** Charakteristische Funktion  $\chi_{(0,1]}$ So einfach das klingt, für „hässliche“  $M$  kann das ganz schön unanschaulich werden, z.B. die sogenannte *Dirichlet-Funktion*  $\chi_{\mathbb{Q}}$  mit ihren Graphen

$$G(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{(q, 1) \mid q \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

den wir gar nicht zeichnen können.

**Faktensammlung 2.1.3 (Grundoperationen für Funktionen).**

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben, komplizierte Funktionen aus einfachen Bausteinen zu basteln – diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue, aber wesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in  $\mathbb{R}$  (Zielraum der Funktionen) verwendet werden, um Operationen für die Funktion *selbst* zu definieren – letzteres Konzept werden wir bald als wesentliches Werkzeug schätzen lernen.

Seien also  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen auf  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und seien  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (i) Die Funktionen  $f \pm g, \lambda \cdot f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$  sind in Termen der punktweisen Operationen in  $\mathbb{R}$  definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), & (f-g)(x) &:= f(x) - g(x), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), & (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

„neues“ + zw. Funkt.      „altes“ + in  $\mathbb{R}$

*Nebenbemerkung:* Die Menge der Funktionen auf  $D$ , d.h.

$$\mathfrak{F}(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ist mit  $+$  und  $\lambda \cdot$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- (ii) Sei  $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ . Die *Quotientenfunktion* von  $f$  und  $g$  ist definiert durch

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Das Bild von  $D$  unter  $f$   
 $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ ,  
 vgl. [7, 4.3.11]

- (iii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$ , sodass  $f(D) \subseteq E$  und  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann können wir die *Verknüpfung* (Zusammensetzung, Komposition) von  $f$  mit  $h$  definieren als (vgl. [7, 4.3.23])

$$h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (h \circ f)(x) = h(f(x))$$

Hier muss  $f(x) \in E$  sein;  
 sonst kann  $h$  nicht „zupacken“

**Beispiel 2.1.4 (Operationen für Funktionen).**

- (i) Für  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(x) = x^2$  gilt  $q(x) = (id \cdot id)(x)$  ( $id(x) = x$ , vgl. 2.1.2(ii))  
 (ii) Allgemeiner lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ also}$$

$$p = a_m \cdot (id \cdot id \cdot \dots \cdot id) + \dots + a_1 \cdot id + a_0 \cdot \chi_{\mathbb{R}}$$

konstante Fkt. 1

- (iii) Mit  $q$  wie in (i) gilt  $\sqrt{\cdot} \circ q = |\cdot|$ , denn

$$(\sqrt{\cdot} \circ q)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

**Motivation 2.1.5 (Stetigkeit von Funktionen).**

- (i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

Eine kleine Änderung der Argument-Stelle soll(te) nur eine kleine Änderung der Funktionswerte zur Folge haben.

Genauer gesagt, falls  $x$  nahe  $x_0$  liegt, dann sollte  $f(x)$  nahe bei  $f(x_0)$  sein.

- (ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in Anwendungen wichtig. Am Beispiel des Fahrradfahrens 0.0.3 bedeutet das:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden,  
wenn ich nur ein bisschen schneller fahre.

Generell zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe etwa [3, S. 199].

Andererseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft klar *nicht* erfüllt ist, z.B. Die Farbe der Ampel als Funktion der Zeit. Genauer, sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ rot ist, und} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Zeitpunkt  $t_0$ , an dem die Ampel umschaltet: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Zeit nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

- (iii) Wir beginnen nun, die intuitive Idee der Stetigkeit von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in D$  zu formalisieren:

Es scheint wünschenswert, zuerst eine „Toleranzgrenze“ für die Funktionswerte vorzugeben, also eine beliebige  $\varepsilon$  Umgebung von  $f(x_0)$  und dann zu fordern, dass es ein „Sicherheitsintervall“  $U_\delta(x_0)$  um  $x_0$  geben soll, sodass

$x$  im Sicherheitsintervall um  $x_0$

$$|x - x_0| < \delta \text{ ergibt, dass } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$f(x)$  innerhalb der Toleranzgrenze um  $f(x_0)$

Graphisch können wir die Bedingung etwa wie in Abb. 2.14 darstellen:

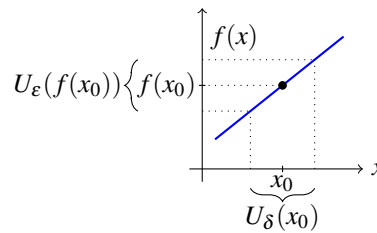


Abb. 2.14  $\epsilon - \delta$ -Stetigkeit

Der Witz der Formulierung ist, dass für jede (noch so kleine) Toleranz  $\epsilon$  es ein  $\delta$ -Sicherheitsintervall gibt. Offiziell definieren wir nun wie folgt:

**Definition 2.1.6 (Stetigkeit).**

Sei  $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und sei  $x_0 \in D$  eine Stelle im Definitionsbereich.

(i)  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , falls

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.} \quad (2.1)$$

(ii)  $f$  heißt stetig (auf  $D$ ), falls  $f$  stetig in jedem  $x_0 \in D$  ist.

**Bemerkung 2.1.7 (Zur Stetigkeit).**

(i) Offensichtliche Umformulierung der Stetigkeit im Punkt  $x_0$  sind

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: x \in U_\delta(x_0) \cap D \implies f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$$

und

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\epsilon(f(x_0)).$$

(ii) Will ich konkret für  $x_0 \in D$  zeigen, dass  $f$  dort stetig ist, dann muss ich für jede noch so kleine Toleranz  $\epsilon$  um  $f(x_0)$  ein entsprechendes Sicherheitsintervall  $U_\delta(x_0)$  finden (können) sodass sich

$$\text{aus } |x - x_0| < \delta \text{ die Abschätzung } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ ergibt.}$$

Im Allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls  $\delta$  von der (zuvor festgelegten) Toleranz  $\epsilon$  abhängen, also ist  $\delta$  ein  $\delta(\epsilon)$ . Beachte auch hier<sup>1</sup> die

GROSSE FETTE WARNUNG:

Niemals darf umgekehrt  $\epsilon$  von  $\delta$  abhängen. Die Reihenfolge der Quantoren ist also auch hier essentiell.

**Beispiel 2.1.8 (Stetige Funktionen).**

(i) *Konstante Funktionen sind stetig* (in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs).  
Sei also

<sup>1</sup> Vergleiche die Definition des Grenzwerts 1.2.6 bzw. 1.2.9.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c \quad \text{für ein fixes } c \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt  $\forall x_0 \in D \quad \forall x \in D$  dass  $|f(x) - f(x_0)| = 0$ , also (2.1)  $\forall \varepsilon > 0$  mit  $\delta > 0$  beliebig.

*f so banal, dass  $\delta$  unabhängig von  $\varepsilon$  und  $x_0$  gewählt werden kann*

(ii) *Lineare Funktionen sind stetig* (in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs). Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax \text{ für ein } a \in \mathbb{R}.$$

*Vorüberlegung:* Falls  $a = 0$ , liegt die konstante Funktion  $f(x) = 0$  vor und diese ist nach (i) stetig. Sei also  $a \neq 0$ . Wir müssen  $|f(x) - f(x_0)|$  abschätzen und es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0|$$

Wir müssen also nur  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$  wählen.

*f so banal, dass  $\delta$  unabhängig von  $x_0$  gewählt werden kann*

Nun zum *Beweis*: Sei also  $\varepsilon > 0$ . Wähle<sup>2</sup>  $\delta = \varepsilon/|a|$  ( $> 0$ !), dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| = |a||x - x_0| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

(iii) *Die Exponentialfunktion ist stetig* (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

*Vorüberlegung:* Für ein beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &= | \underbrace{\exp(x - x_0 + x_0)}_{\exp(x - x_0) \cdot \exp(x_0) \text{ (1.4.39)}} - \exp(x_0) | \\ &\stackrel{1.4.40(i)}{=} \exp(x_0) |\exp(x_0 - x) - 1|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Um den Abstand  $|\exp(x) - \exp(x_0)|$  abzuschätzen müssen wir also nur  $|\exp(x - x_0) - 1|$  für  $x$  nahe  $x_0$  abschätzen, also  $|\exp(y) - 1|$  für  $y$  nahe 0. Das erledigt aber Prop. 1.4.42 mit  $N = 0$  für uns<sup>3</sup>, denn

$$\begin{aligned} \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \\ \Rightarrow |\exp(y) - 1| &= |R_1(y)| \leq 2|y|, \quad \text{falls } |y| < 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nun also zum *Beweis* der Stetigkeit von  $\exp$ : Sei wie üblich  $\varepsilon > 0$  und wähle  $\delta := \min(1, \varepsilon/2\exp(x_0))$ , dann gilt für alle  $|x - x_0| < \delta$

<sup>2</sup> Hier und in den kommenden Beweisen unterwerfen wir die entscheidenden Abschätzungen, die für den Nachweis der Stetigkeit lt. Def. 2.1.6 benötigt werden.

<sup>3</sup> Diese durchaus technische Proposition war ja als wichtig angekündigt!

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &\stackrel{(2.2)}{=} \exp(x_0) \cdot |\exp(x - x_0) - 1| \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} \exp(x_0) \cdot 2|x - x_0| \lesssim 2\exp(x_0) \cdot \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) *Der Betrag ist stetig* (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ ). Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , setze  $\delta = \varepsilon$  (weil der Anstieg  $a = \pm 1$ , vgl. (ii)), dann gilt für alle  $|x - x_0| < \delta$

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

verkehrte Dreiecksungleichung

(v) *Sprünge sind nicht stetig. Das ist das Erzbeispiel unstetiger Funktionen!* Sei

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  unstetig bei  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 1$ .

*Vorüberlegung:* Es gilt  $f(0) = 1$ , aber beliebig nahe „links“ von  $x_0 = 0$  gilt  $f = 0$ , das muss schiefgehen, und ebenso bei  $x_1 = 1$ ! Überall sonst ist  $\chi$  als konstante Funktion stetig.

*Beweis:* Sei also  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , dann gilt für alle  $\delta > 0$  (egal wie klein!)  $\exists x \in U_\delta(0)$  mit  $x < 0$  und somit

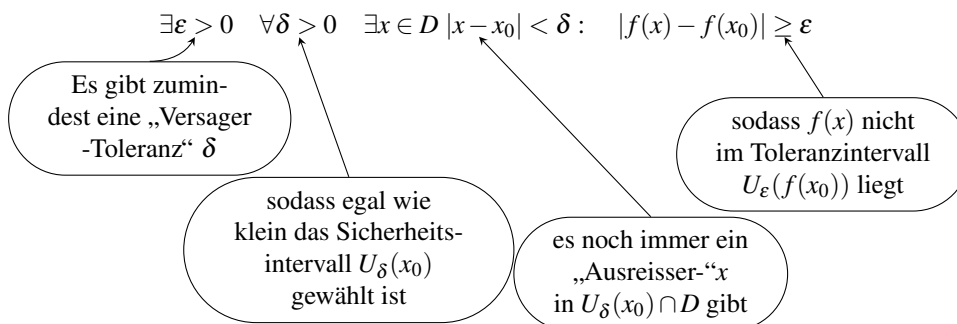
$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

### Bemerkung 2.1.9 (Stetige und unstetige Funktionen).

(i) Wie wir es in 2.1.8(v) gesehen haben, muss für einen Beweis der Unstetigkeit einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  nur ein „Versager- $\varepsilon$ “ angegeben werden (vgl. 1.2.9(iii)). Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (2.1)

$$\neg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) =$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \quad |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$



(ii) Wie schon in 2.1.7(iii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung 2.1 *zuerst die Toleranz  $\varepsilon$  vorgegeben wird und erst dann das Sicherheitsintervall gefunden werden muss.*

Kehrt man dies *fälschlicherweise* um zu

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

Ergibt sich auch, falls in (2.1) im hinteren Teil  $\varepsilon$  mit  $\delta$  verdreht wird.

dann wäre z.B. der Sprung in 2.1.8(v) stetig. Tatsächlich brauche ich nur  $\varepsilon > 1$  zu wählen, damit es sich ausseht, wie in Abbildung 2.15 zu sehen ist:

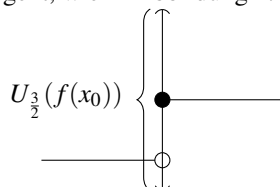


Abb. 2.15 Sprungfunktion mit  $\varepsilon = \frac{3}{2}$

- (iii) Die Funktionswerte  $f(x)$  einer bei  $x_0$  stetigen Funktion  $f$  bleiben also für  $x$  nahe bei  $x_0$  in der Nähe von  $f(x_0)$ . Anders ausgedrückt falls  $f(x_0) \neq C$ , dann bleibt  $f(x)$  nahe bei  $x_0$  auch weg von  $C$ . Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden – oft sehr brauchbaren – Lemma für  $c = 0$ ; der allgemeine Fall folgt sofort durch Verschieben des Graphen.

**Lemma 2.1.10 (Nichtverschwinden auf Umgebung).**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$  und sei  $f(x_0) \neq 0$ . Dann  $\exists \delta > 0$ , sodass auch  $\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$  gilt, dass  $f(x) \neq 0$ .

*Beweis.* Weil  $f(x_0) \neq 0$  ist, gilt

$$\Rightarrow \varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0.$$

Die Beweisidee lässt sich graphisch sehr schön darstellen, vgl. Abb.2.16. Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $f(x_0) > 0$  gilt.

Nach Gleichung (2.1) gilt daher

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt  $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$  mit der verkehrten  $\triangle$ -Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| \\ &> |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0. \quad \square \end{aligned}$$

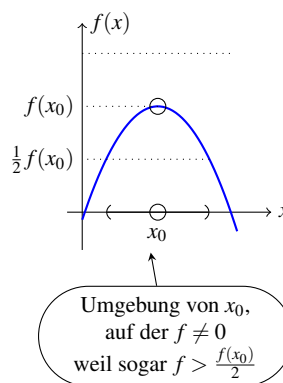


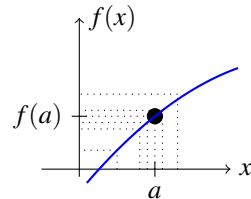
Abb. 2.16 graphische Beweisidee

**Motivation 2.1.11 (Stetigkeit und Folgen).**

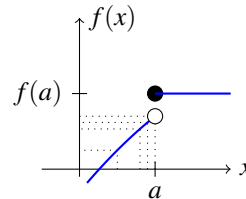
Die intuitive Idee der Stetigkeit von  $f$  in einem Punkt  $a \in D$  lässt sich wie folgt umformulieren:

Egal, wie sich  $x$  an  $a$  annähert, es nähert sich  $f(x)$  an  $f(a)$  an.

Wir können diese Idee auch graphisch darstellen, wie in Abb. 2.17 und 2.18:



**Abb. 2.17**  $x$  nähert sich an  $a$  an, und ebenso  $f(x)$  an  $f(a)$



**Abb. 2.18**  $x$  nähert sich an  $a$  an, aber *nicht*  $f(x)$  an  $f(a)$

Diese Idee lässt sich nun mittels Folgen präzisieren als

$$\forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a), \quad \text{bzw.,}$$

$$\forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

$f$  vertauscht  
mit Limiten

und sie funktioniert auch formal, wie das folgende essentielle Theorem lehrt:

**Theorem 2.1.12 (Stetigkeit via Folgen).**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $a \in D$ . Dann gilt

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ gilt } x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : (Im Wesentlichen müssen wir nur die entsprechenden Definitionen aneinander reihen.)

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  gilt. Sei also  $\varepsilon > 0$ , dann gilt wegen (2.1), dass

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(a) \cap D : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.4)$$

und weil  $x_n \rightarrow a$  haben wir

$$\exists N > 0 \quad \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta. \quad (2.5)$$

Daher

$$\forall n \geq N \stackrel{(2.5)}{\implies} |x_n - a| < \delta \stackrel{(2.4)}{\implies} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon,$$

also gilt  $\lim(f(x_n)) = f(a)$ .

$\Leftarrow$ : (Dieser Teil ist schwieriger. Wir gehen indirekt vor und benutzen die Unstetig-

keit von  $f$  um eine „Ausnahmenfolge“ zu konstruieren, die der Bedingung auf der rechten Seite widerspricht.)

Indirekt angenommen,  $f$  ist unstetig bei  $a \in D$ . Wir konstruieren eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ . Da  $f$  bei  $a$  unstetig ist gilt (vgl. 2.1.9(i))

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(a) \cap D : f(x) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

Wir fixieren dieses  $\varepsilon$  und wählen sukzessive  $\delta = \frac{1}{n}$  ( $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ ). Damit erhalten wir eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit

- $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ , d.h.  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ , also  $x_n \rightarrow a$ , aber
- $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$ , d.h.  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ , also  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ .  $\square$

### Bemerkung 2.1.13 (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit).

(i) Zur Terminologie: Bedingung (2.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren, man spricht daher von *Umgebungsstetigkeit*. Die rechte Seite in Theorem 2.1.12 hingegen verwendet Folgen und man spricht von *Folgenstetigkeit*.

(ii) Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken:

$$f \text{ vertauscht mit Limiten, d.h. } f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n))$$

- (iii) Theorem 2.1.12 besagt in dieser Terminologie, dass (für Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind [Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (aber wichtigen) Mengen ist das nicht der Fall. „ $\Rightarrow$ “ gilt immer, „ $\Leftarrow$ “ ist im Allgemeinen falsch!]
- (iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und als Unstetigkeitsstellen entlarven.

### Beispiel 2.1.14 (Sprünge).

(i) Die Gaußklammer (vgl. 2.1.2(v)) ist stetig in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und unstetig in jedem  $a \in \mathbb{Z}$ .

- Sei  $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor a \rfloor = a$  und die Folge  $x_n = a - \frac{1}{n}$  erfüllt  $x_n \rightarrow a$ , aber  $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor = a - 1$ , daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor x_n \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} a - 1 = a - 1 \neq a = \lfloor a \rfloor = \left\lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\rfloor.$$

- Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  gilt  $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$ . Daher gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow a$ :

$$\exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 : \lfloor a \rfloor < x_n < \lfloor a \rfloor + 1,$$

$$\text{also } \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor \quad \forall n \geq N_0 \text{ und somit } \lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor = \left\lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\rfloor.$$

(ii) Die Dirichlet-Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}}$  (vgl. 2.1.2(xi)) ist unstetig in jedem  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Wir unterscheiden die Fälle:

- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Dann ist  $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 0$ . Wegen der Dichtigkeit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  (vgl. 0.1.11(ii)) können wir in jedem Intervall  $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$  eine rationale Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  finden, d.h.  $\forall \delta > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |q - a| < \delta$ , aber klarerweise



gilt

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(q) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

- $a \in \mathbb{Q}$ . Dann ist  $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 1$ . Wegen der Dichtheit von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  (vgl. 0.1.11(ii)) gilt völlig analog zu Fall (ii):  $\forall \delta > 0 \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |r - a| < \delta$  und daher

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(r) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

**Warnung 2.1.15 (Zur (Un-)Stetigkeit).**

- (i) *Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit.* Auch „wilde Oszillation“ führt zu Unstetigkeit, denn sei z.B.  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(0) = 0$  und sonst durch die in Abb. 2.19 dargestellten immer schmäler werdenden „Zacken“

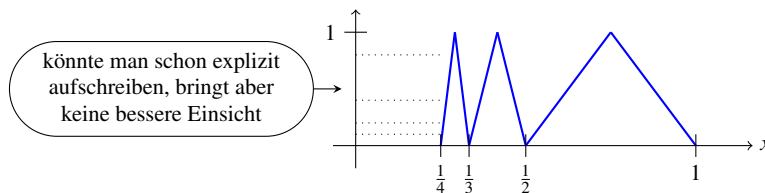


Abb. 2.19 Unstetige „Zackenfunktion“

Zunächst gilt für alle  $x_0 > 0$ , dass  $f$  stetig in  $x_0$  ist, denn dort ist  $f$  eine sogenannte stückweise lineare Funktion, vgl. 2.1.8(ii) und 2.1.8(iv).

Aber  $f$  ist in  $x_0 = 0$  nicht stetig, denn es gibt für jedes  $c \in [0, 1]$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $f(x_n) = c \forall n \in \mathbb{N}$ , siehe Abbildung.

Also ist  $f$  in 0 *unstetig*, obwohl die Funktion dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

- (ii) Folgende „Merkregel“, die auch in Schulbüchern zu finden ist, ist *sehr problematisch*:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span>?</span> <span>Eine reelle Funktion ist stetig,</span> <span>?</span> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span>?</span> <span>wenn man sie ohne Absetzen zeichnen kann.</span> <span>?</span> </div>
--

Erstens ist nicht *genau* klar, was das heißen soll — außer dass offensichtlich Sprünge ausgeschlossen werden sollen. Und zweitens ist etwa folgende Modifikation  $\tilde{f}$  von  $f$  aus (i),

$$\tilde{f}(x) = x \cdot f(x) \quad \text{siehe Abbildung 2.20}$$

stetig auf  $[0, 1]$ .

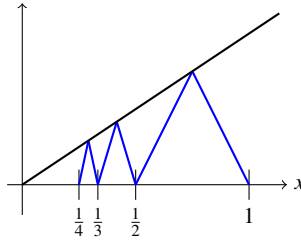


Abb. 2.20 Stetige „Zackenfunktion“

Die Stetigkeit bei  $x_0 = 0$  folgt, da offensichtlich  $\tilde{f}(x) \leq x$  für alle  $x$  gilt. Daher gilt auch für alle Nullfolgen  $x_n \rightarrow 0$

$$0 \leq \tilde{f}(x_n) \leq x_n \rightarrow 0,$$

womit nach dem Sandwich-Lemma 1.2.29  $\tilde{f}(x_n) \rightarrow 0$  und daher  $\tilde{f}$  mit 2.1.12 stetig in  $x_0 = 0$  ist.

Anschaulich können wir also sagen, dass die „wilde Oszillation“ von  $f$  hier durch Multiplikation mit  $x$  „gedämpft“ wird, also „gezähmte Oszillationen“ nicht unbedingt zur Unstetigkeit führen.

Nun ergibt sich aber beim Zeichnen des Graphen von  $\tilde{f}$  das folgende Problem: Die Länge des Graphen auf dem endlichen Intervall  $[0, 1]$  ist nicht endlich<sup>4</sup>. Genauer gilt nämlich für die Länge des Graphen von  $x = 1$  (nach links) bis  $x = \frac{1}{n}$

$$l\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}, \quad \text{was nach 1.4.7(ii) für } n \rightarrow \infty \text{ divergiert.}$$

Die Länge des Graphen von  $\frac{1}{k-1}$  bis  $\frac{1}{k}$  ist sicher größer als 2-mal die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion  $x$ , also  $2 \cdot \frac{1}{k}$

- (iii) *Es gibt Monster.* So anschaulich die Definition der Stetigkeit auch sein mag – es gibt völlig unanschauliche Funktion mit sehr eigenartigem Stetigkeitsverhalten. So gibt es zum Beispiel eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die in allen irrationalen Punkten stetig ist, in allen rationalen Punkten aber unstetig.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<sup>4</sup> Daher könnte man einwenden, dass alle Bleistifte dieser Welt verbraucht worden sind, bevor man  $x_0 = 0$  erreicht, also man vernünftigerweise nicht davon sprechen kann, den Graphen zeichnen zu können — mit oder ohne Absetzen.

Dann gilt:

- $f$  ist unstetig in allen  $x_0 \in \mathbb{Q}$ : Sei  $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  vollständig gekürzt, dann setze  $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{q}$ . Weil  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  dicht liegt (vgl. 0.1.11(ii)) gilt  $\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , aber

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| 0 - \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \frac{1}{q} = \varepsilon.$$

- $f$  ist stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Sei  $\varepsilon > 0$  gewählt. Von allen Zahlen  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $q < \frac{1}{\varepsilon}$  liegen in jedem Intervall nur endlich viele und keines davon ist gleich  $x_0$  weil  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  liegt!

Also gibt es ein  $\frac{p_0}{q_0}$ , das  $x_0$  am nächsten liegt. Definiere  $\delta = \left| x_0 - \frac{p_0}{q_0} \right|$ . Nun gilt  $\forall x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dass  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , denn falls

–  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon$  und falls

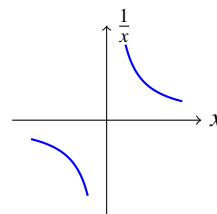
–  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p'}{q'}$  (gekürzt) mit  $q' > \frac{1}{\varepsilon}$ , denn in  $U_\delta(x_0)$  liegt nach Wahl von  $\delta$  keine Zahl  $\frac{p'}{q'}$  mit  $q' \leq \frac{1}{\varepsilon}$ . Also gilt  $f(x) = \frac{1}{q'} < \varepsilon$  und daher

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| 0 - \frac{1}{q'} \right| = \frac{1}{q'} < \varepsilon.$$

- (iv) *Offensichtlicher Unfug*: Wir betrachten die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ , vgl. 2.1.2(ix) und betrachten die folgende Frage (die auch im Schulkontext gelegentlich auftritt):

Ist  $f(x) = \frac{1}{x}$  im Punkt  $x_0 = 0$  stetig?

Diese Frage ist Unfug, weil  $x_0 = 0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , daher ist  $f$  in  $x_0$  gar nicht definiert (vgl. Abb. 2.21) und die Frage nach der Stetigkeit kann gar nicht gestellt werden! Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass alle rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig sind.



**Abb. 2.21** Graph der Funktion  $\frac{1}{x}$

Allerdings werden wir in Bemerkung 2.1.28 in einem gewissen Sinn zu obiger Frage zurückkehren, und diskutieren, ob man  $1/x$  nicht wenigstens zu einer auf ganz  $\mathbb{R}$  stetigen Funktion ausdehnen kann — in dem Sinne, dass  $1/x$  außerhalb von  $x_0 = 0$  erhalten bleibt. Die Antwort wird aber negativ ausfallen.

### Motivation 2.1.16 (Grundoperationen und Stetigkeit).

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der Grundoperationen für Funktionen aus 2.1.3 bedienen ( $\pm, \lambda, \cdot, -$ ) und zeigen, dass diese aus stetigen Funktionen wieder-

um stetige Funktionen machen. Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine sehr elegante Methode zum „Basteln“ vieler *neuer stetiger* Funktionen.

**Proposition 2.1.17 (Grundoperationen für stetige Funktionen).**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(i) Falls  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$  stetig sind, dann sind auch

$$f \pm g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad fg : D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $a$ . Falls  $a \in D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , dann ist auch

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $a$ .

(ii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subseteq E$  und  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls  $f$  stetig in  $a \in D$  und  $h$  stetig in  $b := f(a) \in E$  sind, dann ist auch die Zusammensetzung (vgl. 2.1.3(iii))

$$h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Genauer:

$$D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq E \xrightarrow{h} h(E) \subseteq \mathbb{R}$$

stetig in  $a$ .

*Beweis.* (Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze greifen hier optimal ineinander und liefern den Beweis frei Haus.)

(i) Wir beweisen nur die Aussage für die Summe, die anderen Fälle sind völlig analog. Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Wir zeigen  $(f+g)(x_n) \rightarrow (f+g)(a)$ , woraus mit 2.1.12 die Stetigkeit von  $f+g$  in  $a$  folgt.

$$(f+g)(x_n) \stackrel{2.1.3(i)}{=} f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[1.2.23]{f, g \text{ stetig}} f(a) + g(a) \stackrel{2.1.3(i)}{=} (f+g)(a) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Wir verwenden so wie oben 2.1.12. Sei also  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } a &\stackrel{2.1.12}{\Rightarrow} f(x_n) \rightarrow f(a) = b \\ &\Rightarrow (y_n) := (f(x_n)) \text{ ist Folge in } E \text{ mit } y_n \rightarrow b \\ h \text{ stetig in } b &\stackrel{2.1.12}{\Rightarrow} h(y_n) \rightarrow h(b). \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \rightarrow h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$$

und damit ist  $h \circ f$  stetig in  $a$ .  $\square$

**Korollar 2.1.18 (Stetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen).**

*Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.*

*Beweis.* (Jetzt nutzen wir unser Werkzeugkasten zum „Basteln“, vgl. 2.1.16)

Polynome sind endliche Summen endlicher Produkte konstanter Funktionen mit  $id$ , vgl. 2.1.4(ii). Alle *Bausteine* sind stetig (2.1.8(i), 2.1.8(ii) mit  $a = 1$ ), daher folgt aus 2.1.17(i)  $[+, \cdot]$  die Stetigkeit von Polynomen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, in denen der Nenner nicht verschwindet, vgl. 2.1.2(ii). Polynome sind nach Obigem stetig auf ihrem Definitionsbereich, also nach 2.1.17(i) auch rationale Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.  $\square$

**Beispiel 2.1.19 (Stetige Funktionen mittels Prop. 2.1.17).**

- (i)  $p(x) = -x^2$  ist als Polynom stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  wegen 2.1.18.  $\exp$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$  (Bsp. 2.1.8(iii)). Also gilt wegen Prop. 2.1.17(ii), dass die sogenannte Gaußglockenfunktion (siehe Abbildung 2.22)

$$\exp \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-x^2)$$

stetig auf  $\mathbb{R}$  ist.

- (ii) Der *hyperbolische Sinus* und *Cosinus* (vgl. Abb. 2.23) sind stetig.

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

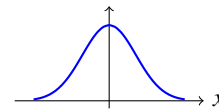


Abb. 2.22 Gaußglocke

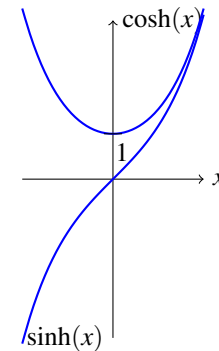


Abb. 2.23 Hyperbolischer Sinus und Cosinus

*Anmerkung:* Diese beiden Funktionen werden auch Hyperbelfunktionen oder *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* genannt. Sie parametrisieren die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  gemäß

$$\begin{pmatrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{pmatrix}$$

in völliger Analogie zur Parametrisierung des Kreises  $x^2 + y^2 = 1$  durch die „normalen“ Winkelfunktionen

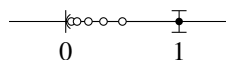
$$\begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix}.$$

**Motivation 2.1.20 (Grenzwerte von Funktionen).**

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffs führen. Genauer wollen wir eine Funktion  $f$  entlang beliebiger konvergenter Folgen  $(x_n)_n$  in  $D$  auswerten, also  $(f(x_n))_n$  betrachten. Diese Idee liegt sehr nahe an der Folgenstetigkeit, vgl. 2.1.11, 2.1.12.

Als neuer technischer Punkt ergibt sich allerdings, dass eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$ , die (als Folge in  $\mathbb{R}$ ) konvergiert, ihren Limes nicht notwendigerweise in  $D$  haben muss (vgl. Abb.2.24), z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in (0, 1] \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1].$$

**Abb. 2.24** Nullfolge

Grenzwerte von Folgen in  $D$ , die (in  $\mathbb{R}$ ) konvergieren, sind aber genau die *Berührungspunkte* (vgl. 1.2.37) von  $D$ , siehe Prop. 1.3.30(i). Die grundlegende Definition ist daher:

**Definition 2.1.21 (Grenzwert einer Funktion).**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $D$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad \text{falls für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \\ \text{mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt, dass } f(x_n) \rightarrow c,$$

wobei hier sowohl  $c \in \mathbb{R}$  als auch  $c = \pm\infty$  (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt sind.

**Beobachtung 2.1.22 (Zum Grenzwert von Funktionen).**

- (i) Wie in 2.1.20 wiederholt, gibt es wegen 1.3.30(i) für jeden Berührungspunkt  $a$  von  $D$  mindestens eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$ , i.A. wird es aber viele solcher Folgen geben.
- (ii) Wie oben gesagt, muss  $a$  nicht in  $D$  liegen. Falls dem aber so ist, dann ist die konstante Folge  $x_n = a$  für alle  $n$  eine gemäß Definition 2.1.21 erlaubte Folge. Falls dann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  überhaupt existiert, muss er schon  $f(a)$  sein, denn

$$\lim f(x_n) = \lim f(a) = f(a).$$

Wir werden unten in 2.1.27 außerdem sehen, dass  $f$  genau dann stetig in  $a \in D$  ist, falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gilt.

**Beispiel 2.1.23 (Limes rationaler Funktionen).**

(i)  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , vgl. Abb.2.25.

Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , denn sei  $x_n \in D$ , dann muss  $x_n \neq 1$  für alle  $n$  gelten und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

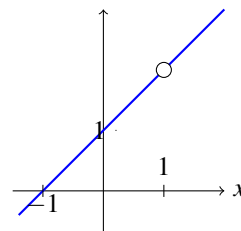
(Das ist natürlich nicht verwunderlich, da  $f$  ja gar keine „echte“ rationale Funktion ist — durch Kürzen ergibt sich ein Polynom. Nun zu einem „echteren“ Beispiel.)

(ii)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ , vgl. Abb.2.26

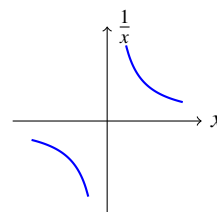
Hier gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ nicht existiert,}$$

weil z.B.  $f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \infty$ , aber  $f\left(-\frac{1}{n}\right) \rightarrow -\infty$  gilt.



**Abb. 2.25** Graph der Funktion  $\frac{x^2-1}{x-1}$



**Abb. 2.26** Graph der Funktion  $\frac{1}{x}$

**Motivation 2.1.24.**

Das letzte Beispiel drängt uns richtiggehend dazu, unseren Begriffsapparat zu erweitern. Genauer gesagt:

- (1) Wir brauchen einen Begriff, der auch „einseitiges“ Annähern erlaubt, also Folgen  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$  bzw.  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n < 0$
- (2) Wir sollten auch Grenzwerte für  $f$  längs Folgen  $x_n$  mit  $x_n \rightarrow +\infty$  und  $x_n \rightarrow -\infty$  zulassen.

Also formalisieren wir wie folgt:

**Definition 2.1.25 (Einseitige und uneigentliche Grenzwerte von Funktionen).**

Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- (i) Sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $D \cap (a, \infty)$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$$

Stellt sicher, dass wir von rechts gegen  $a$  „laufen“ können.

und sagen  $c$  ist der *rechtsseitige Grenzwert von  $f$  gegen  $a$* , falls für alle Folgen  $(x_n)$  in  $D$ , mit  $x_n > a$  und  $x_n \rightarrow a$  gilt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ . Dabei ist wieder sowohl  $c \in \mathbb{R}$  als auch  $c = \pm\infty$  (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt.

- (ii) Analog dazu definieren wir den *linksseitigen Limes*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

- (iii) Falls  $D$  nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , dann schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c,$$

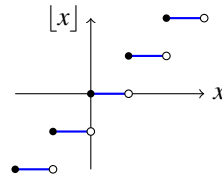
wobei wieder  $c \in \mathbb{R}$  oder  $c = \pm\infty$  (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt ist.

(iv) Analog definieren wir  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  für nach unten unbeschränkte Definitionsbereiche  $D$ .

**Beispiel 2.1.26 (Nochmals Grenzwerte von Funktionen).**

(i) Für die Gaußklammer  $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , vgl. Abb.2.27, gilt:

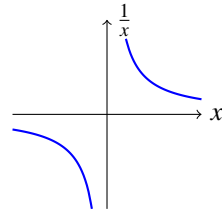
$$\begin{aligned} 1 < x_n < 2 &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 && \lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor = 1, \\ 0 < x_n < 1 &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 && \lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor = 0. \end{aligned}$$



**Abb. 2.27** Graph der Gaußklammer

(ii) Für  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$ , vgl. Abb.2.28, gilt

$$\begin{aligned} 0 > x_n \rightarrow 0 &\xRightarrow{1.2.47(ii)} f(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty && \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \\ \text{ditto 1.2.47(ii)} &&& \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \end{aligned}$$



**Abb. 2.28** Graph von  $\frac{1}{x}$

$$\forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |x_n| > K \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{K}$$

(iii) Sei  $m \geq 1$  und  $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$  ein Polynom. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{p(x)} = 0$$

Tatsächlich gilt:

$$p(x) = x^m \left( 1 + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^m} \right) \geq x^m \left( 1 - \frac{|a_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^m} \right)$$

Sei  $x \geq M := 2m \cdot \max\{1, |a_{m-1}|, \dots, |a_0|\}$ , dann gilt

$$p(x) \geq x^m \left( 1 - m \cdot \frac{1}{2m} \right) = \frac{x^m}{2}. \quad (2.6)$$

Sei nun  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \geq M \forall n \geq N$  und somit

$$p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$



also  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ .

Um die zweite Behauptung zu zeigen, bemerke, dass (2.6) impliziert, dass  $p(x) \geq \frac{1}{2} \forall x \geq M$ , daher ist  $\frac{1}{p(x)}$  für alle  $x \geq M$  definiert und das Resultat folgt aus 1.2.47(ii).

**Proposition 2.1.27 (Grenzwert und Stetigkeit).**

Sei  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

*Beweis.* (Wir setzen ganz einfach Definition 2.1.21 mit Theorem 2.1.12 zusammen.)  
Da  $f$  stetig in  $a$  ist, folgt mit Thm. 2.1.12

$$\forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a),$$

was wiederum nach Def. 2.1.21 bedeutet, dass  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.1.28 (Nochmals  $\frac{1}{x}$  – Zur Ehrenrettung von 2.1.15(iv)).**

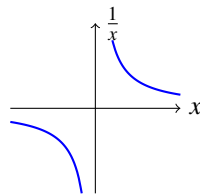


Abb. 2.29 Graph von  $\frac{1}{x}$

Wir betrachten nochmals  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , vgl. Abb.2.29. In 2.1.15(iv) haben wir bemerkt, dass es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0 = 0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zu fragen. Tatsächlich hat es aber etwas mit dem „unstetigen Aussehen“ von  $\frac{1}{x}$  bei  $x_0 = 0$  auf sich, und zwar:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ kann nicht stetig von } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ auf ganz } \mathbb{R} \text{ fortgesetzt werden.}$$

Genauer bedeutet das, dass es keine Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die die beiden Eigenschaften

- $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \neq 0$  (man sagt:  $\tilde{f}$  setzt  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fort) und
- $\tilde{f}$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  erfüllt.

Denn angenommen, es gäbe so ein  $\tilde{f}$ , so müsste wegen 2.1.27  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x)$  existieren (und gleich  $\tilde{f}(0)$  sein). Dieser Limes existiert aber *nicht*, da (vgl. 2.1.26(ii)) es Nullfolgen  $(x_n), (y_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) \stackrel{x_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty, \text{ aber}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(y_n) \stackrel{y_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

## 2.2 Sätze über stetige Funktionen

Nach der Diskussion des Stetigkeitsbegriffs und den eher praktischen Ausführungen zum Schluss des vorigen Abschnitts 2.1 lernen wir nun die *wesentlichen theoretischen Aussagen* über stetige Funktionen kennen

- den Zwischenwertsatz,
- den Satz vom Minimum und Maximum und
- den Umkehrsatz für stetige, streng monotone Funktionen.

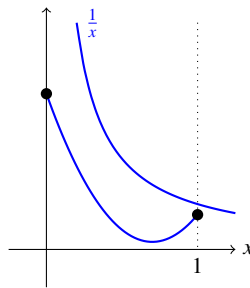
Während die ersten beiden Resultate uns Aufschluss darüber geben, wie stetige Funktionen aussehen („schön“!) ist das dritte ein wichtiges Werkzeug, das wir später z.B. zur Definition der Logarithmusfunktion verwenden werden. Schließlich lernen wir auch eine Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs kennen, die *gleichmäßige Stetigkeit*, also eine Bedingung, die Funktionen noch „schöner“ macht.

Bei den Hauptresultaten dieses Abschnitts spielen abgeschlossene, beschränkte Intervalle als Definitionsbereich von stetigen Funktionen oft die entscheidende Rolle. Wir befassen uns zu Beginn mit ihnen.

### Motivation 2.2.1 (Die Sonderrolle abgeschlossener, beschränkter Intervalle).

Bisher haben wir stetige Funktionen auf beliebigen Teilmengen  $D \subseteq \mathbb{R}$  betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den abgeschlossenen und beschränkten Intervallen  $[a, b]$  eine Sonderrolle zukommt. Solche Intervalle heißen auch *kompakt*.

Ein einfacher aber wesentlicher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  definiert sind mit solchen vergleichen, die (nur) auf dem offenen Intervall  $(0, 1)$  definiert sind: Etwa nimmt  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1)$  beliebig große positive Werte an, vgl. 2.1.2(ii). Für eine stetige Funktion auf  $[0, 1]$  ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar, siehe Abbildung 2.30 und wir werden zeigen, dass tatsächlich jede stetige Funktion auf  $[0, 1]$  nur beschränkte Werte annehmen kann und insbesondere ihr Maximum und Minimum annimmt.

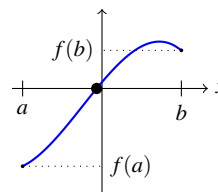


**Abb. 2.30** Während  $1/x$  auf  $(0, 1)$  unbeschränkt ist, sind stetige Funktionen auf  $[0, 1]$  beschränkt.

Wir beginnen unsere theoretischen Untersuchungen mit einer Aussage, die anschaulich klaren scheint, die aber — wieder einmal — essentiell die *Vollständigkeit* von  $\mathbb{R}$  verwendet!

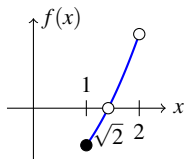
**Motivation 2.2.2 (Der Nullstellensatz).**

Wir betrachten eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die am linken Randpunkt des abgeschlossenen Definitionsbereichs negativ, am rechten Randpunkt aber positiv ist, d.h. für die  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  gilt. Es scheint klar zu sein, dass  $f$  eine Nullstelle haben muss: Aufgrund der Stetigkeit kann  $f$  nicht einfach den Wert 0 „überspringen“, siehe Abbildung 2.31.



**Abb. 2.31** Nullstelle einer stetigen Funktion

Tatsächlich ist das auf  $\mathbb{R}$  richtig — wie wir gleich sehen werden — aber etwa auf  $\mathbb{Q}$  falsch! Das liegt natürlich daran, dass die Nullstelle gerade in einem irrationalen Punkt (also einem „Loch“ von  $\mathbb{Q}$ ) auftreten kann. Ein explizites Beispiel dafür ist etwa, siehe auch Abbildung 2.32



**Abb. 2.32** Stetige Fkt. ohne Nullst. in  $\mathbb{Q}$ !

$$f : D = \{q \in \mathbb{Q} : 1 \leq q \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2.$$

Es gilt nämlich, dass  $f$  als Polynom stetig ist<sup>5</sup>  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 2$  aber es gibt kein  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) = 0$ : Ein solches  $x_0$  müsste nämlich die Gleichung

$$f(x_0) = x_0^2 - 2 = 0 \quad \text{also} \quad x_0^2 = 2$$

erfüllen, was in  $\mathbb{Q}$  aber nicht möglich ist (vgl. 0.1.9)!

**Theorem 2.2.3 (Nullstellensatz).**

Ein Hauptresultat der Vorlesung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) < 0 < f(b)$ . Dann  $\exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ .

Eine analoge Version gilt natürlich auch für  $f(a) > 0 > f(b)$ .

d.h.  $f$  hat eine Nullstelle in  $x_0$

Vor dem Beweis geben wir eine wichtige Anwendung dieses Resultats.

**Korollar 2.2.4 (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad).**

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

*Beweis.* Sei  $p(x) = b_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + b_0$  mit  $b_{2n+1} \neq 0$ . Nun können wir  $p$  umschreiben als

$$p(x) = b_{2n+1} \left( x^{2n+1} \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} + \dots + \frac{b_0}{b_{2n+1}} \right) =: b_{2n+1} q(x).$$

<sup>5</sup> Polynome sind nach 2.1.18 stetig auf  $\mathbb{R}$  und daher erst recht auf der Teilmenge  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ .

Also gilt für  $q$

$$q(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{mit } (a_j = \frac{b_j}{b_{2n+1}}, j = 0, \dots, 2n)$$

und damit ist  $q$  von der Form wie  $p$  in 2.1.26(iii). Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty \quad \text{und damit gibt es ein } x_+ > 0 \text{ mit } q(x_+) > 0.$$

Andererseits gilt

$$q(-x) = -x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} - \dots = -(x^{2n+1} - a_{2n}x^{2n} + \dots - a_0)$$

und damit gilt wiederum wegen 2.1.26(iii)

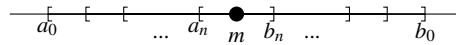
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = -\infty \quad \text{und damit gibt es ein } x_- < 0 \text{ mit } q(x_-) < 0.$$

Betrachten wir nun die Einschränkung<sup>6</sup>  $q|_{[x_-, x_+]}$  von  $q$  auf das Intervall  $[x_-, x_+]$ , so können wir den Nullstellensatz 2.2.3 anwenden und erhalten

$$\exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$$

und damit auch  $p(x_0) = 0$ .  $\square$

**Beweis des Nullstellensatzes 2.2.3.** Wir benutzen das Intervallschachtelungsprinzip 1.3.34, um mittels Intervallhalbierung eine Nullstelle  $x_0$  zu „fangen“, siehe Abbildung 2.33.



**Abb. 2.33** Grundkonstruktion des Beweises.

Sei also  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) < 0 < f(b)$ .

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $[a_n, b_n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit den Eigenschaften

(a)  $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$   $\longleftarrow$  Schachtelung der Intervalle

(b)  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$   $\longleftarrow$  Intervalllänge in jedem Schritt halbiert

(c)  $f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$   $\longleftarrow$  „Fangen“ der Nullstelle

Induktionsanfang:  $n = 0$ : Setze  $a_0 = a, b_0 = b$ , dann sind (a)–(c) offensichtlich erfüllt.

<sup>6</sup> Salopp kann man sagen: Die Einschränkung „vergisst“ einfach alles außerhalb von  $[x_-, x_+]$ , vgl. [7, 4.3.23].

**Induktionsschritt:**  $n \mapsto n+1$ : Angenommen, wir haben  $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$  bereits konstruiert, sodass (a)–(c) gelten. Wir müssen  $a_{n+1}, b_{n+1}$  finden, sodass (a)–(c) auch für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  gelten.

Dazu setzen wir

$$m = \frac{b_n - a_n}{2} \quad \leftarrow \text{Mittelpunkt von } [a_n, b_n]$$

und machen eine Fallunterscheidung, vgl. Abbildung 2.33.

- Ist  $f(m) \geq 0$ , dann setze  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = m$ . Nst. links von  $m$
- Ist  $f(m) < 0$ , dann setze  $a_{n+1} = m$ ,  $b_{n+1} = b_n$ . Nst. rechts von  $m$

Offensichtlich gelten damit (a)–(c) für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip 1.3.34 impliziert

$$\exists! x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$$

und lt. Konstruktion ist  $x_0 \in [a, b]$  und  $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$ .

(3) Weil  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist, gilt mit 2.1.12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

(4) Aus der Eigenschaft (c) in (1) folgt mit 1.2.28

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \stackrel{1.2.28}{\leq} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \stackrel{1.2.28}{=} f(x_0).$$

Damit müssen die  $\leq$ -s in obiger Gleichung alle  $=$ -s sein, also gilt  $f(x_0) = 0$  und wir haben eine Nullstelle gefunden.  $\square$

Nun bringen wir den Nullstellensatz noch in eine etwas allgemeinere Form und beweisen den sogenannten *Zwischenwertsatz*, der besagt, dass eine stetige Funktion  $f$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  alle Werte zwischen den „Randwerten“  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt.

**Korollar 2.2.5 (Zwischenwertsatz).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und liegt  $c \in \mathbb{R}$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ , d.h.  $f(a) \leq c \leq f(b)$  oder  $f(a) \geq c \geq f(b)$ , dann

$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ mit } f(x_0) = c. \quad \leftarrow \text{Jeder Wert zwischen } f(a) \text{ und } f(b) \text{ wird angenommen}$$

*Beweis.* (Reine Buchhaltung, denn alles Wesentliche ist schon in 2.2.3 passiert.)

Wir wenden 2.2.3 auf  $g(x) := f(x) - c$  an. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $f(a) < c < f(b)$  gilt. Tatsächlich, falls  $c = f(a)$  oder  $c = f(b)$  gilt, ist nichts zu zeigen und falls  $f(a) > c > f(b)$  gilt, verläuft der Beweis völlig analog.

Sei also  $g(x) = f(x) - c$ , dann ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und

$$g(a) = f(a) - c < 0 < f(b) - c = g(b).$$

Mit Theorem 2.2.3 folgt nun

$$\exists x_0 \in [a, b] : g(x_0) = 0$$

und daher  $f(x_0) = g(x_0) + c = c$ .  $\square$

Eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Zwischenwert- bzw. Nullstellensatz ist, dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden, d.h. insbesondere, dass stetige Bilder von Intervallen keine „Löcher“ haben bzw. nicht „zerreissen“. Offiziell:

**Korollar 2.2.6 (Stetige Bilder von Intervallen).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein möglicherweise unbeschränktes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I) \subseteq \mathbb{R}$  wieder ein Intervall oder enthält nur einen Punkt.

*Beweis.* (Wiederum hauptsächlich Anwenden des Zwischenwertsatzes, diesmal mit etwas mehr Buchhaltung.)

- (1) Wir setzen  $A = \inf(f(I))$  und  $B = \sup(f(I))$ , bzw.  $A = -\infty$ , falls  $f(I)$  nicht nach unten beschränkt ist und  $B = \infty$ , falls  $f(I)$  nicht nach oben beschränkt ist.

Falls  $A = B$  (was überhaupt nur im Fall  $A, B$  endlich möglich ist), enthält  $f(I)$  nur einen Punkt und wir sind fertig. Sei ab jetzt also  $A < B$ .

- (2) Wir zeigen

$$(A, B) \subseteq f(I).$$

Sei  $y \in (A, B)$ , dann  $\exists r, s \in I$  mit  $f(r) < y < f(s)$  (da  $A, B$  entweder  $\inf, \sup$  oder  $\pm\infty$ ) und wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $r < s$  gilt. (Der Fall  $r = s$  ist unmöglich und  $r > s$  ist analog zu behandeln.) Wegen dem Zwischenwertsatz 2.2.5 gilt nun

$$\exists x_0 \in [r, s] \subseteq I \text{ mit } f(x_0) = y$$

und damit ist  $y \in f(I)$  und da  $y$  beliebig war gilt  $(A, B) \subseteq f(I)$ .

- (3) Zusammengefasst gilt also

$$(A, B) \subseteq f(I) \subseteq [A, B] \text{ bzw. } (-\infty, B] \text{ oder } [A, \infty).$$

Daher ist  $f(I)$  eines der Intervalle  $(A, B)$ ,  $[A, B)$ ,  $(A, B]$  oder  $[A, B]$ , bzw.  $(-\infty, B)$ ,  $(-\infty, B]$  oder  $(A, \infty)$ ,  $[A, \infty)$ , jedenfalls ein Intervall.  $\square$

**Motivation 2.2.7 (Das Lösen von Gleichungen, „Existenzmaschinen“ & Fixpunktsätze).**

- (i) Eine der Hauptaufgaben der Mathematik ist es natürlich Gleichungen aller Art zu lösen. Zum Beispiel ist es eine der Hauptaufgaben der Linearen Algebra, lineare Gleichungssysteme zu lösen bzw. Sätze über ihre Lösbarkeit bereitzustellen.

Auch die Analysis trägt wesentlich zum Lösen von (nicht-linearen) Gleichungen bei, indem sie die Existenz von Lösungen garantiert—vor allem in Situationen, wo man diese Gleichungen nicht explizit, etwa durch eine Rechnung, lösen kann. Wir haben in Abschnitt 1.3 schon angedeutet, dass die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  eine „Existenzmaschine“ bereitstellt, z.B. in Form des Cauchy-Prinzips oder des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Beide garantieren unter bestimmten Voraussetzungen, dass ein bestimmtes Objekt, nämlich eine Zahl mit bestimmten Eigenschaften *existiert*—und zwar als Limes einer Folge, den man i.A. aber nicht explizit ausrechnen kann.

Natürlich ist auch der Zwischenwertsatz von dieser Bauart und daher ebenfalls eine „Existenzmaschine“: Er garantiert die *Existenz* eines Arguments  $x_0$  mit  $f(x_0) = c$  für jedes  $c$  zwischen den Funktionswerten am Rand  $f(a)$  und  $f(b)$ —ohne freilich zu sagen, *wo* genau dieses  $x_0 \in [a, b]$  liegt. Wir werden diese „Maschine“ jetzt so umgestalten, dass sie in besonders anschaulicher Weise formuliert und dazu verwendet werden kann, Gleichungen zu lösen—in dem Sinn, dass sie die Existenz von Lösungen sicherstellt. Diese besonders anschauliche Form ist die eines sogenannten *Fixpunktsatzes*.

- (ii) Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$g(x) = a, \quad (2.7)$$

wo etwa  $g$  ein Ausdruck in der gesuchten Variablen  $x$ , also eine Funktion ist und  $a$  eine vorgegebene Zahl. Diese Gleichung lässt sich nun gewinnbringend in ein sogenanntes *Fixpunktproblem* verwandeln. Setzen wir dazu  $f(x) = g(x) - a + x$ , dann löst nämlich ein Fixpunkt  $x_0$  von  $f$ , d.h. ein Punkt mit

$$f(x_0) = x_0$$

unser Problem. Tatsächlich gilt für so einen Fixpunkt  $x_0$  von  $f$

$$x_0 = f(x_0) = g(x_0) - a + x_0 \implies g(x_0) = a,$$

und wir haben eine Lösung  $x_0$  für die ursprüngliche Gleichung (2.7) gefunden.

- (iii) Daraus ergibt sich also, dass Sätze, die die Existenz von Fixpunkten garantieren, sogenannte *Fixpunktsätze*, nützliche Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen sind. Wir diskutieren jetzt einen einfachen Fixpunktsatz für stetige Funktionen, der sich direkt aus dem Zwischenwertsatz ergibt.

### Korollar 2.2.8 (Fixpunktsatz).

Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine stetige Funktion. Dann besitzt,  $f$  einen Fixpunkt.

Explizit heißt das

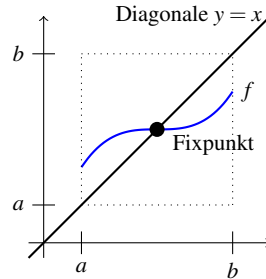
$$\exists x_0 \in [a, b] \quad \text{mit} \quad f(x_0) = x_0.$$

**Bemerkung 2.2.9 (Zum Fixpunktsatz).**

- (i) Die Aussage von 2.2.8 kann besonders eindringlich am Quadrat  $[a, b] \times [a, b]$  in  $\mathbb{R}^2$  veranschaulicht werden, siehe Abbildung 2.34. Der Graph von  $f$  beginnt bei  $x = a$ , also an der linken Kante des Quadrats, und endet bei  $x = b$  an der rechten Kante, daher *muss* er die Diagonale schneiden und dort gilt dann  $f(x_0) = x_0$ .

Dieses einfache Bild zeigt auch, warum wir in 2.2.7 Fixpunktsätze als besonders anschaulich bezeichnet haben!

- (ii) Die Tatsache, dass 2.2.8 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.2.3 ist, sieht man auch daran, dass das Kippen der Skizze 2.34 in (i) um  $45^\circ$  die Skizze 2.31 in 2.2.2 liefert.



**Abb. 2.34**  $f$  hat einen Fixpunkt in  $[a, b]$ .

**Beweis (Fixpunktsatz).** (Wir wenden einfach 2.2.3 auf die Funktion  $g(x) = f(x) - x$  an.)

Wir definieren  $g(x) := f(x) - x$ , dann ist  $g$  stetig auf  $[a, b]$  und es gilt

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0, \text{ und falls „} = 0 \text{“} \Rightarrow f(a) = a \\ g(b) = f(b) - b \leq 0, \text{ und falls „} = 0 \text{“} \Rightarrow f(b) = b \end{array} \right\} \text{ und wir sind fertig.}$$

Sei also  $g(a) > 0$  und  $g(b) < 0$ , dann folgt aus dem Nullstellensatz 2.2.3

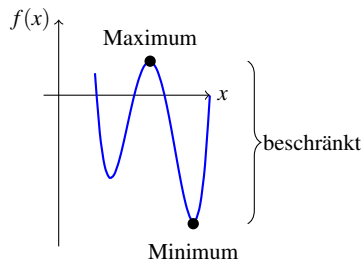
$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ mit } g(x_0) = 0$$

und daher  $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$ , also  $f(x_0) = x_0$ .  $\square$

**Motivation 2.2.10 (Annahme von Minimum und Maximum).**

Der Zwischenwertsatz lehrt uns, dass eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt, also der Graph von  $f$  keine Lücken lässt.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph auch *nicht* beliebig große oder kleine Werte beinhalten kann und außerdem  $f([a, b])$  ein Maximum und ein Minimum hat, wie in Abbildung 2.35 veranschaulicht.



**Abb. 2.35** Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall nimmt Min. und Max. an.



Wir benötigen zur exakten Formulierung etwas Terminologie.

**Definition 2.2.11 (Beschränkte Funktion).**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *beschränkt*, falls ihr Bild  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist, d.h. falls

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in D : |f(x)| \leq M. \quad (2.8)$$

**Theorem 2.2.12 (Satz vom Minimum und Maximum).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und nimmt Min. und Max. an.

Genauer gilt

$$\exists y \in [a, b] : f(y) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = \min^7 f[a, b],$$

natürlich auch  
 $y = \inf f[a, b]$

$$\exists z \in [a, b] : f(z) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = \max f[a, b].$$

natürlich auch  
 $z = \sup f[a, b]$

**Warnung 2.2.13 (Das Intervall muss beschränkt und abgeschlossen sein).**

- (i) Für den Satz vom Minimum und Maximum 2.2.12 ist es essentiell, dass das Intervall auf dem  $f$  stetig ist,

*abgeschlossen und beschränkt* ist.

Sonst muss  $f$  nämlich *nicht beschränkt* sein, denn für

- $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$  ist das Intervall nicht abgeschlossen und  $f$  nicht (nach oben) beschränkt und für
- $f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  ist das Intervall unbeschränkt und  $f$  nicht (nach oben) beschränkt.

Ebenfalls muss  $f$  dann weder *Minimum noch Maximum annehmen*, denn

- $f_3 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$  ist zwar beschränkt, hat aber weder Maximum noch Minimum.

- (ii) Die Punkte  $y, z$  in 2.2.12 sind i.A. nicht eindeutig, z.B. wenn  $f$  konstant ist.

*Beweis von Theorem 2.2.12.* Wir beweisen nur, dass  $f$  nach oben beschränkt ist und dass das Maximum angenommen wird. Dazu „basteln“ wir jeweils geschickt eine Folge und verwenden die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  sowie die Folgenstetigkeit von  $f$ . Der Beweis für „nach unten beschränkt“ und Minimum ist analog und kann durch Übergang von  $f$  zu  $-f$  gezeigt werden.

- (1) Wir zeigen zunächst, dass  $f[a, b]$  nach oben beschränkt ist.

Wäre dem nämlich nicht so, dann ergibt die Verneinung von (2.8)

<sup>7</sup> Hier ist das Minimum des Bilds von  $[a, b]$  unter der Funktion  $f$  als Menge gemeint. Die volle Schreibweise wäre daher  $\min(f([a, b]))$ , sie wird aber meistens wie oben abgekürzt.

$$\forall C > 0 \exists x \in [a, b] : f(x) > C. \quad (2.9)$$

Nun wählen wir in (2.9) sukzessive  $C = n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und erhalten so eine Folge<sup>8</sup>

$$(x_n)_n \in [a, b] \quad \text{mit } f(x_n) > n, \text{ also } f(x_n) \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist  $[a, b]$  beschränkt und daher hat  $(x_n)$  laut Bolzano-Weierstraß 1.3.11 eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ . Sei also  $z' := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , dann gilt

$$a \leq a_{n_k} \leq b \text{ und mit 1.2.28 } a \leq z' \leq b, \text{ also } z' \in [a, b].$$

Weil  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist, gilt weiters mit 2.1.12

$$f(z') = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty,$$

was der Definition von  $f$  als Funktion von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$  widerspricht. Also ist  $f$  nach oben beschränkt.

(2) Wir zeigen, dass das  $f$  sein Maximum annimmt.

Da  $f[a, b]$  nach oben beschränkt ist existiert wegen der Vollständigkeit  $A := \sup f[a, b]$ . Mittels der Definition des Supremums konstruieren wir eine Folge  $(a_n)$  wie folgt<sup>9</sup>:  $A - 1/n$  ist für jedes  $n \geq 1$  nicht obere Schranke für  $f[a, b]$  und daher

$$\exists a_n \in [a, b] : f(a_n) > A - \frac{1}{n}.$$

Also gilt

$$A - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq A, \text{ daher mit den Sandwich-Lemma 1.2.29 } f(a_n) \rightarrow A.$$

Nun führen wir die Schritte aus (1) für  $(a_n)_n$  statt  $(x_n)_n$  durch. Nach Bolzano-Weierstraß existiert  $z := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  für eine Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  von  $(a_n)_n$  mit  $z \in [a, b]$ . Und wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt

$$f(z) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[a, b],$$

also ist  $f(z) = A = \max f[a, b]$ .  $\square$

### Motivierendes Beispiel 2.2.14 (Die Abhängigkeit $\delta$ 's von $x_0$ ).

- (i) Wir haben bereits diskutiert, dass  $f(x) = 1/x$  auf  $D = (0, 1)$  unbeschränkt ist, vgl. 2.2.1. Tatsächlich hängt diese missliche Eigenschaft von  $f$  damit zusammen, dass die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  im folgenden Sinne immer „schwieriger zu erreichen“ ist, falls  $x_0$  näher an 0 rückt: Für eine vorgegebene Toleranz  $\varepsilon$  um  $f(x_0)$  müssen immer kleinere Sicherheitsintervalle  $U_\delta(x_0)$  gewählt werden um die Stetigkeitsabschätzung hinzubekommen.

<sup>8</sup> Das Konstruieren einer solchen „Ausnahmenfolge“ ist ein Standardtrick, den wir in sehr ähnlicher Weise schon im Beweis von Theorem 2.1.12, „ $\Leftarrow$ “ verwendet haben.

<sup>9</sup> Eine weitere Variante desselben Standardtricks.

- (ii) Bevor wir dieses Phänomen genauer diskutieren erinnern wir uns, dass die Stetigkeit einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf ganz  $D$  nach 2.1

$$\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

lautet. Das bedeutet, dass  $\delta$  hier nicht nur (und klarerweise nach 2.1.7(iii)) von  $\varepsilon$  abhängt, sondern auch von  $x_0$ .

- (iii) Diese Abhängigkeit wollen wir, wie oben angedeutet im Beispiel  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1)$  genauer untersuchen. Dazu fixieren wir  $\varepsilon > 0$ . Wie oben festgestellt ist anschaulich klar, dass für ein  $x_0$  näher bei 0 das entsprechende Sicherheitsintervall  $U_\delta(x_0)$  kleiner gewählt werden muss, siehe Abbildung 2.36.

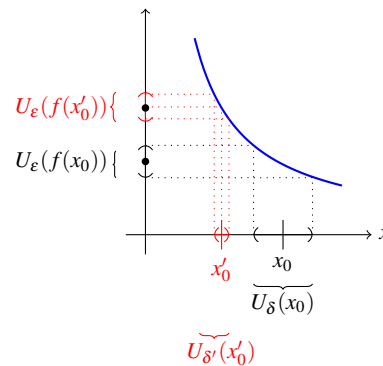
Rechnerisch können wir das wie folgt explizit machen: Zunächst brauchen wir nur jeweils  $x < x_0$  zu betrachten, da dort der Anstieg steiler und  $\delta$  daher kleiner gewählt werden muss. Setze also  $x_\delta = x_0 - \delta$  und betrachte

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_\delta}{x_\delta x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

Soll nun  $|f(x_\delta) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  sein, so muss gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \varepsilon x_0^2 - \varepsilon x_0 \delta \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}.$$

Also  $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$  und das bedeutet, dass bei kleinerem  $x_0$  auch  $\delta$  kleiner werden muss.



**Abb. 2.36** Das Sicherheitsintervall  $U_\delta(x_0)$  muss für  $x_0$  näher bei 0 immer kleiner gewählt werden.

- (iv) Wenn wir nun für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  fordern, dass  $\delta$  unabhängig vom Punkt  $x_0 \in D$  sein soll, so erhalten wir eine stärkere „Stetigkeitseigenschaft“: Für je 2 Punkte  $x, x' \in D$  soll, wenn sie nur  $\delta$ -nahe beieinander liegen,

$|x - x'| < \delta$  — und zwar *egal wo die beiden liegen* — schon die Abschätzung  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  gelten. Offiziell:

**Definition 2.2.15 (Gleichmäßige Stetigkeit).**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

gilt.

Wieder einmal Achtung auf Reihenfolge der Quantoren!

**Bemerkung 2.2.16 (Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit).**

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig auf } D.$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.2.14 zeigt, also

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \not\Leftarrow f \text{ stetig in } D.$$

Ganz explizit:  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Falls  $x_n = \frac{1}{n}$  und  $x'_n = \frac{1}{2n}$  ( $n \geq 1$ ), dann gilt

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}, \text{ aber}$$

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 2n - n = n$$

der Abstand der Punkte  $x_n, x'_n$  geht gegen 0, wenn die Punkte nach links rutschen

ist unbeschränkt und daher sicher nicht unterhalb einer fixen  $\varepsilon$ -Toleranz.

(iii) Essentiell am Gegenbeispiel ist, dass  $D = (0, 1]$  bei 0 ein offenes Intervall ist: Für jedes Intervall der Form  $[\eta, 1]$  mit  $0 < \eta < 1$  kann obiger Effekt nicht auftreten, denn  $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$  könnten nie kleiner als  $\eta$  werden — nach links ausweichen ist unmöglich.

Und tatsächlich sind auf abgeschlossen und beschränkten Intervallen beide Begriffe äquivalent, wie das nächste Theorem lehrt.

**Theorem 2.2.17 (Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  (dort) auch gleichmäßig stetig.

*Beweis.* (Wir konstruieren indirekt wieder eine „Ausnahmefolge“, verwedenden den Satz v. Bolzano-Weierstraß und erzwingen einen Widerspruch zur Stetigkeit.)

(1) Indirekt angenommen,  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\neg \left( \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon \right)$$

$$= \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : \quad \exists x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \text{ mit } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon. \quad (2.10)$$

- (2) Wir fixieren das  $\varepsilon$  aus (2.10) und konstruieren  $(x_n), (x'_n)$ , indem wir sukzessive  $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ) setzen<sup>10</sup>. So erhalten wir für jedes  $n \geq 1$

$$(x_n), (x'_n) \text{ in } [a, b] \text{ mit } |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \text{ aber } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \quad (2.11)$$

- (3) Weil  $(x_n)$  beschränkt ist gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ . Weiters gilt wegen 1.2.28

$$\tilde{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b].$$

(Genauer  $x_n \in [a, b] \forall n \Rightarrow a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq \tilde{x} \leq b$ .)

- (4) Die Teilfolge  $(x'_{n_k})_k$  von  $(x'_n)$  (mit den Indices  $n_k$  wie oben) konvergiert auch gegen  $\tilde{x}$ , denn

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| \stackrel{(2.11)}{\leq} \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

- (5) Die Stetigkeit von  $f$  in  $\tilde{x}$  liefert nun einen Widerspruch, denn

$$0 < \varepsilon \stackrel{(2.11)}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - f(x'_{n_k})| \stackrel{(4) \& 2.1.12}{\xrightarrow{}} 0 + 0 = 0. \quad \square$$

### Motivation 2.2.18 (Stetige inverse Funktion).

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : A \rightarrow B$  bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$ ,  $f(x) \mapsto x$ , vgl. [7, 4.3.29]. Wir stellen uns nun die Frage:

Falls  $f$  stetig ist, ist dann auch  $f^{-1}$  stetig?

Analoge Lin.-Algebra-Situation funktioniert:  
 $f : V \rightarrow W$  lin. & bij.  
 $\Rightarrow f^{-1} : W \rightarrow V$  lin.

Die Antwort ist im Allgemeinen

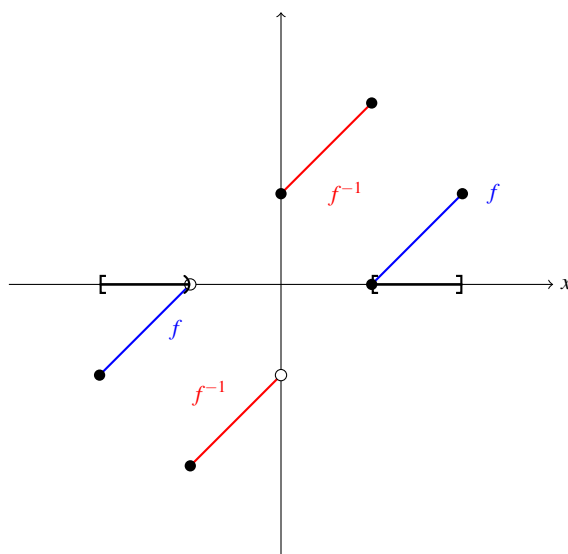
**NEIN!**

Ein Gegenbeispiel ist etwa, siehe Abbildung 2.37

$$f : D := [-2, -1) \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x+1, & x \in [-2, -1) \\ x-1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist als lineare Funktion stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich  $D$ , der allerdings etwas ungewohnt aus der Vereinigung zweier Intervalle besteht. Die Umkehrfunktion ist aber unstetig in  $x_0 = 0$ , für Details siehe Übungen.

<sup>10</sup> Wieder der Trick mit der „Ausnahmenfolge“, vgl. die Fußnoten im Beweis von 2.2.12 bzw. den Beweis von 2.1.12. „ $\Leftarrow$ “.



**Abb. 2.37**  $f$  ist bijektiv und stetig von  $D$  nach  $f(D) = [-1, 1]$ , hat aber eine unstetige Inverse.

**Warnung:** (Sprung vs. Nicht-Sprung) Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  in Abbildung 2.37 hat einen Sprung, was ihre Unstetigkeit begründet. Die Funktion  $f$  selbst hat *keinen Sprung*, nur einen etwas „seltsam-zerrissenen“ Definitionsbereich!

Durch die Annahme, dass der Definitionsbereich von  $f$  ein Intervall ist, können wir aber ein JA erreichen. Aus Gründen der besseren Anwendbarkeit setzen wir die Bijektivität von  $f$  aber nicht direkt voraus, sondern „erzwingen“ sie durch die Annahme, dass  $f$  streng monoton ist, d.h.

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ bzw. } f(x) > f(y) \text{ vgl. [7, 4.3.39f].}$$

Wie das im Detail funktioniert, zeigt das nächste Resultat.

**Theorem 2.2.19 (Umkehrsatz  $f$  streng monotone und stetige Funktionen).**

Sei  $I$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Dann gilt

- (i)  $J := f(I)$  ist ein Intervall
- (ii)  $f : I \rightarrow J$  ist bijektiv
- (iii)  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

**Bemerkung 2.2.20 (Notationelle Spitzfindigkeit).**

Ganz streng genommen müssten wir für die Abbildung  $f$  mit eingeschränktem Zielbereich  $f(I)$  eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B.

$$\tilde{f} : I \rightarrow J := f(I), \quad x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müssten wir dann  $\tilde{f}^{-1}$  schreiben. Gemäß einem allgemeinen üblichen Missbrauch der Notation schreiben wir aber wiederum  $f$  und  $f^{-1}$  [7, graue Box, p. 174].

*Beweis des Umkehrsatz 2.2.19.*

Wir beweisen nur den Fall „streng monoton wachsend“ und müssen im Wesentlichen nur bekannte Tatsachen zusammensetzen. Der fallende Fall ergibt sich, wenn man  $f$  durch  $-f$  ersetzt.

- (i) Nach Korollar 2.2.6 ist  $J = f(I)$  ein Intervall, da der „einpunktige Fall“ wegen der strengen Monotonie ausgeschlossen ist.
- (ii)  $f$  ist streng monoton wachsend und deswegen injektiv. Daher ist  $f$  als Funktion  $f : I \rightarrow J$  bijektiv. Jede Fkt. ist surjektiv auf ihr Bild!

- (iii) Sei  $f(x) < f(y)$  dann muss schon  $x < y$  gelten, denn  $x = y$  würde der Injektivität widersprechen und  $x > y$  dem monotonen Wachstum. Daher ist  $f^{-1}$  streng monoton wachsend.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass  $f^{-1}$  stetig ist in allen Punkten  $b \in J$ . Dazu unterscheiden wir drei Fälle

- Fall 1:  $b$  ist kein Randpunkt von  $J$ .

Dann ist auch  $a := f^{-1}(b)$  kein Randpunkt von  $I$ , denn sonst wäre wegen der strengen Monotonie  $b$  ein Randpunkt von  $J$ . Also gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $a - \varepsilon, a + \varepsilon \in I$  gilt und daher wegen der strengen Monotonie

$$f(a - \varepsilon) < f(a) = b < f(a + \varepsilon).$$

Daher gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$f(a - \varepsilon) < b - \delta < b + \delta < f(a + \varepsilon),$$

was aber nichts anderes bedeutet als

$$f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b)),$$

also das  $f^{-1}$  stetig in  $b$  ist, vgl. 2.1.7(i).

- Fall 2:  $b$  ist linker Randpunkt von  $J$ . Daher ist wegen der Monotonie  $a = f^{-1}(b)$  linker Randpunkt von  $I$  und wir können den Beweis wie in Fall 1 führen, aber mit „einseitigen Umgebungen“  $U_\delta(b) \cap J$ ,  $U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$  und  $f(a) = b < b + \delta < f(a + \varepsilon)$ .
- Fall 3 mit  $b$  ist rechter Randpunkt von  $J$  ist völlig analog zu Fall 2.  $\square$

**Bemerkung 2.2.21 (Umkehrsatz für streng monotone Funktionen).**

Im Beweis von 2.2.19 haben wir die Stetigkeit von  $f$  nur in (i) verwendet. Daher gilt die folgende Variante des Theorems:

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ streng monoton auf dem Intervall } I \text{ (aber nicht notwendigerweise stetig)} \\ \implies f^{-1} : f(I) \rightarrow I \text{ stetig und streng monoton}$$

Bemerke aber, dass falls  $f$  tatsächlich unstetig ist,  $f(I)$  im Allgemeinen kein Intervall mehr ist, siehe Abbildung 2.38.

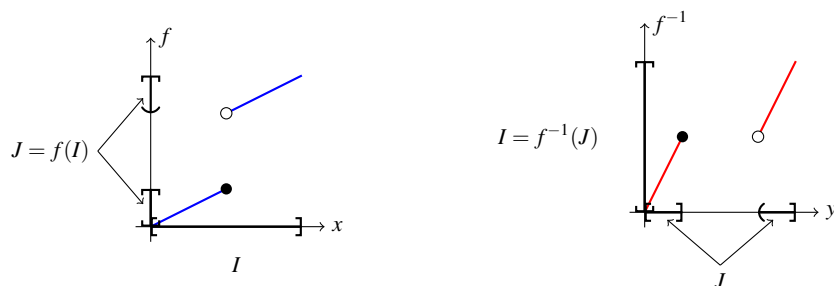


Abb. 2.38 Stetige Umkehrfunktion einer unstetigen Funktion.

Die Umkehrabbildung ist trotzdem stetig — auf dem etwas ungewohnten Definitionsbereich  $J$  der aus der Vereinigung zweier Intervalle besteht. Bemerke, dass hier dasselbe Phänomen auftritt wie im Beispiel in 2.2.18.

**Beispiel 2.2.22 (Stetigkeit der Wurzel).**

(i) Als Anwendung von 2.2.19 betrachten wir die Funktionen

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3,$$

die beide auf einem Intervall nämlich  $[0, \infty)$  bzw.  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  definiert sind, streng monoton wachsend und bijektiv, vgl. Abbildung 2.39. Daher sind wegen Theorem 2.2.19 die Umkehrfunktionen

$$f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

(vgl. 0.1.11(iii)) stetig und streng monoton wachsend.

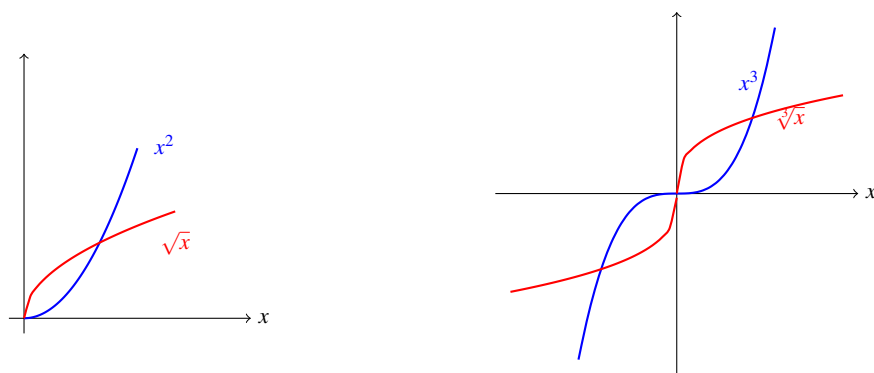


Abb. 2.39 Die Wurzelfunktionen  $\sqrt{x}$  und  $\sqrt[3]{x}$  sind stetig als Umkehrfunktionen von  $x^2$  und  $x^3$ .



(ii) Etwas allgemeiner betrachten wir für  $k \geq 1$  die Polynome

$$\begin{array}{ll} f_{2k} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) & f_{2k+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{2k} & x \mapsto x^{2k+1} \end{array}$$

Die Funktionen sind auf denselben Intervallen ( $[0, \infty)$ , bzw.  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ) definiert, stetig wegen 2.1.18, streng monoton wachsend und bijektiv auf  $[0, \infty)$  bzw.  $\mathbb{R}$ . Daher sind wieder mit Theorem 2.2.19 die Umkehrfunktionen

$$f_{2k}^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad f_{2k+1}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend. Klarerweise sind  $f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1}$  gerade die Wurzelfunktionen  $\sqrt[2k]{\cdot}$  bzw.  $\sqrt[2k+1]{\cdot}$ , vgl. 0.1.11(iii).

## 2.3 Elementare Transzendente Funktionen

In diesem Abschnitt definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die *Logarithmusfunktion* als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir *allgemeine Potenzen*  $x^\alpha$  ( $0 < x, \alpha \in \mathbb{R}$ ) definieren.

Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in  $\mathbb{C}$  – gerade soweit, dass wir die *komplexe Exponentialfunktion*,  $\exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  analog zu  $\mathbb{R}$  über die Reihendarstellung definieren können, vgl. 1.4.37. Diese verwenden wir, um die *Winkelfunktionen Sinus und Cosinus* zu definieren. Deren Grundeigenschaften studieren wir gründlich, um die Kreiszahl  $\pi$  zu definieren und um schließlich die Tangensfunktion und Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen, die Arcus-Funktionen, betrachten zu können.

### Definition und Proposition 2.3.1 (Logarithmus).

(i) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist

*stetig, streng monoton wachsend* und es gilt  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

(ii) Ihre *Umkehrfunktion* bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19!

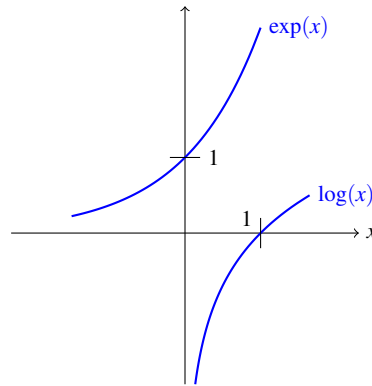
$$\begin{array}{l} \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d.h. } \exp(x) = a \\ \Leftrightarrow x = \log(a) \end{array}$$

und nennen sie den (*natürlichen*) *Logarithmus*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

(iii) Die Logarithmusfunktion erfüllt die Funktionalgleichung  $((x, y) \in (0, \infty))$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$



**Abb. 2.40** Der (natürliche) Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

*Beweis.* (Mittels Reihendarstellung, Funktionalgleichung und Zwischenwertsatz schaffen wir die Voraussetzungen zur Anwendung des Umkehrsatzes.)

- (i) Nach 2.1.8(iii) ist  $\exp$  stetig. Wir zeigen die *Monotonie*. Sei  $\xi > 0$  dann gilt nach Def. 1.4.37

$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \cdots > 1. \quad (2.12)$$

Sei nun  $x_1 < x_2$  und setze  $\xi = x_2 - x_1$ , dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \stackrel{(1.37)}{=} \exp(x_1) \exp(\xi) \stackrel{(2.12)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist  $\exp$  *streng monoton wachsend*.

Wir zeigen  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

Wegen 1.4.40(i) ist  $\exp(x) > 0$  auf  $\mathbb{R}$  und daher  $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ .

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0 \quad (2.13)$$

gilt. Denn dann werden wegen des Zwischenwertsatzes 2.2.3 alle Werte in  $(0, \infty)$  angenommen. (Genauer sei  $y \in (0, \infty) \stackrel{(2.13)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $\exp(-n) < y < \exp(n) \stackrel{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = y$ .)

Die Grenzwerte in (2.13) sind aber leicht zu kriegen. Zunächst gilt für  $n \in \mathbb{N}$  wegen 1.4.40(iii), dass  $\exp(n) = e^n$  und daher mit 1.4.43

$$e > 2 > 1 \stackrel{1.1.5(i)}{\Rightarrow} e^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

und schließlich

$$\exp(-n) \stackrel{1.4.40(ii)}{=} \frac{1}{\exp(n)} \stackrel{1.4.40(iii)}{=} \frac{1}{e^n} \stackrel{1.2.47(i)}{\rightarrow} 0.$$

- (ii) Wegen (i) sind die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.19 erfüllt und daher ist  $\exp^{-1} := \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend.

(iii) (Die Funktionalgleichung für  $\log$  folgt aus der für  $\exp$ , genauer:) Seien  $x, y \in (0, \infty)$ , dann setze  $\xi := \log(x)$ ,  $\eta := \log(y)$ . Nun gilt mit 1.4.39

$$\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y$$

eta

und damit

$$\log(xy) = \xi + \eta = \log(x) + \log(y). \quad \square$$

**Bemerkung 2.3.2 (Logarithmus von Potenzen).**

Als unmittelbare Konsequenz von 2.3.1(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k \log(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}). \quad (2.14)$$

**Motivation 2.3.3 (allgemeine Potenzen).**

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalem Exponenten definiert, d.h.  $x^q$  für  $\mathbb{R} \ni x > 0$ ,  $q \in \mathbb{Q}$ . Genauer haben wir folgende Definitionen für  $n \in \mathbb{N}$ , vgl. 0.1.11(iii)

$$x^n := x \cdots x, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{und} \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

und damit für  $\mathbb{Q} \ni q = \frac{m}{n}$

$$x^q := \sqrt[n]{x^m}$$

Wir werden nun die *allgemeine Potenz*, also

$$x^\alpha \quad \text{für } x > 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}$$

definieren, also  $x^q$  ( $q \in \mathbb{Q}$ ) zu  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) *verallgemeinern*. Als Leitidee werden wir dabei die Eigenschaft von  $x^n$  aus 2.3.2 benutzen, genauer

$$x^n = \exp(\log(x^n)) \stackrel{2.3.2}{=} \exp(n \log(x)).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung „funktioniert“ auch für  $\alpha \in \mathbb{R}$  statt für  $n \in \mathbb{N}$ , soll heißen,  $\exp(\alpha \log(x))$  ist für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  definiert. Das verwenden wir jetzt!

**Definition 2.3.4 (Allgemeine Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfunktion).**

(i) Sei  $x > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die *allgemeine Potenz* durch

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x)).$$

(ii) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren wir die *allgemeine Potenzfunktion*

$$\omega_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha (= \exp(\alpha \log(x))).$$

(iii) Die *Exponentialfunktion* mit Basis  $a \in (0, \infty)$  definieren wir als

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp_a(x) := a^x (= \exp(x \log(a))).$$

**Bemerkung 2.3.5 (Zur allgemeinen Potenz- und Exponentialfunktion).**

- (i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 2.3.4(i) ist ( $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ )

$$\log(x^\alpha) = \log(\exp(\alpha \log(x))) = \alpha \log(x),$$

also eine Verallgemeinerung von (2.14) von  $k \in \mathbb{N}$  zu  $a \in \mathbb{R}$ .

Ab jetzt können wir  $e^x$  statt  $\exp(x)$  schreiben!

- (ii) Bemerke, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$   $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$  gilt, denn

$$e \stackrel{1.4.37}{=} \exp(1) \stackrel{2.3.1(ii)}{\implies} \log(e) = 1 \implies e^x \stackrel{2.3.4}{=} \exp(x \log e) = \exp(x).$$

Damit „passen“ auch die Definitionen von  $\exp$  und  $\exp_a$  „zusammen“.

- (iii) Als nächstes fassen wir die Grundeigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion in einer Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den Definitionen (bzw. siehe teilweise auch Übungen).

**Proposition 2.3.6 (Die allgemeine Exponentialfunktion).**

Sei  $a > 0$ . Die allgemeine Exponentialfunktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (auf ganz  $\mathbb{R}$ ) und es gelten die Eigenschaften

- (i) Falls  $a > 1$  ( $a < 1$ ) gilt, dann ist  $\exp_a$  streng monoton wachsend (fallend).
- (ii) Es gilt die Funktionalgleichung  $a^{x+y} = a^x a^y$ .
- (iii) Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \dots a}_{m\text{-mal}}$  Konsistenz mit natürlichen Potenzen
- (iv) Für  $p \in \mathbb{Z}, \mathbb{N} \ni q \geq 1$  gilt  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$  Konsistenz mit rationalen Potenzen
- (v) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$ .
- (vi) Für alle  $b > 0, x \in \mathbb{R}$  gilt  $a^x b^x = (ab)^x$ .
- (vii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ .

**Beispiel 2.3.7 (Nützliche Grenzwerte).**

Hier versammeln wir eine Menge nützlicher Grenzwerte, die viel über das (Wachstums-)Verhalten der entsprechenden Funktionen aussagen und auf die wir später zurückgreifen werden<sup>11</sup>.

- (i) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty.$$

$\exp$  wächst stärker als jede Potenz

Denn sei  $x > 0$ , dann gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \implies \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

<sup>11</sup> Achtung: gefährliche Drohung!

(ii) Daraus folgt mit Prop. 1.2.47(i) sofort für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

(iii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

denn setze  $y = \frac{1}{x}$ , dann gilt  $\lim_{x \searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^k} \stackrel{(i)}{=} \infty$ .

(iv) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty,$$

denn wegen Prop. 2.3.1(ii) ist  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und streng monoton wachsend.

(v) Für alle  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty.$$

Wieder folgt wegen Prop. 1.2.47 die zweite Aussage aus der ersten. Um diese zu beweisen, schreiben wir  $x = e^{-\frac{y}{\alpha}}$  (d.h.  $y = -\alpha \log(x)$ ) und rechnen

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} \stackrel{1.2.47}{=} 0.$$

(vi) Für alle  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0.$$

$\log(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ), vgl. (iv) aber langsamer als jede Potenz!

Denn sei  $x > 0$  und setze  $x^\alpha = e^y$  (d.h.  $y = \alpha \log(x)$ ), dann erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} \stackrel{(ii)}{=} 0.$$

(vii) Für  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0.$$

$x^\alpha$  geht stärker gegen 0 als  $\log$  gegen  $-\infty$ .

Wir beobachten zuerst, dass

$$0 = \log(1) = \log\left(x \frac{1}{x}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

und daher

$$\log(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun setzen wir  $x = \frac{1}{y}$  und erhalten

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} \stackrel{(vi)}{=} 0.$$

(viii) Schließlich gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus Prop. 1.4.42 für  $N = 1$

$$|e^x - 1 - x| = |R_2(x)| \leq 2 \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \text{ für } 0 < |x| < \frac{3}{2}$$

und erhalten daher

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - 1 - x|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

### Motivation 2.3.8 (Die komplexe Exponentialfunktion – Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$ ).

Wir wollen nun die Exponentialfunktion nicht nur  $\forall x \in \mathbb{R}$ , sondern sogar  $\forall z \in \mathbb{C}$  definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen, vgl. Bem. 1.4.36. Um deren (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von  $\exp$  besprechen zu können, müssen wir zuerst diese Begriffe in  $\mathbb{C}$  definieren.

Eine Betrachtung der respektiven Begriffe in  $\mathbb{R}$  zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw. die  $\varepsilon$ -Umgebungen in  $\mathbb{R}$  durch ihr Analogon in  $\mathbb{C}$  ersetzen müssen. Daher stellt der folgende Exkurs über die Grundlagen der Analysis in  $\mathbb{C}$  auch eine Wiederholung derselben in  $\mathbb{R}$  dar – wobei wir ihre Verallgemeinerungsfähigkeit schamlos ausnutzen werden!

### 2.3.1 Exkurs: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$

#### (E 1) Wiederholung ( $\mathbb{C}$ ).

Die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

und wir verwenden die Schreibweisen, vgl. 0.1.4

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y), \quad z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z).$$

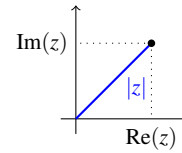


Abb. 2.41  $\mathbb{C}$

Die *komplex Konjugierte*  $\bar{z}$  von  $z = x + iy$  ist gegeben durch

$$\bar{z} = x - iy$$

und das Produkt  $z\bar{z}$  erfüllt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Außerdem gilt  $z \pm \bar{z} = x + iy \pm (x - iy)$  und daher

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z).$$

#### (E 2) Definition (Betrag in $\mathbb{C}$ ).

Der (*Absolut-*)*Betrag*  $|z|$  von  $z \in \mathbb{C}$  ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

Nach 0.1.4(iv) identifizieren wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x + i0 \in \mathbb{C}$  und daher ist der Betrag von  $x$  als komplexe Zahl gleich seinem Betrag als reelle Zahl,

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|.$$

#### (E 3) Lemma (Grundeigenschaften des Betrags).

Die Abbildung  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  hat dieselben Eigenschaften wie der Betrag in  $\mathbb{R}$ , d.h. für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

(N1)  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \iff z = 0$  (positiv definit),

(N2)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  (multiplikativ),

(N3)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  ( $\Delta$ -Ungl.).

Weiters gilt:

(i)  $|\bar{z}| = |z|$ ,

$$(ii) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

*Beweis.* (Wie im reellen Fall folgen alle Eigenschaften mehr oder weniger leicht aus den Definitionen.) Sei  $z = x + iy$  und  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, 2$ ).

(N1)  $|z| \geq 0$  und  $|0| = 0$  sind klar. Falls  $|z| = 0$ , dann gilt

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \text{ und } 0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0,$$

also  $x = 0 = y$ .

$$(N2) |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

(i) Klar aus der Definition.

$$(ii) |\operatorname{Re}(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2 \text{ und ebenso für } \operatorname{Im}(z).$$

$$(N3) |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \stackrel{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \quad \square$$

**(E 4) Definition (Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{C}$ ).**

(i) Eine komplexe Folge bzw. eine *Folge in  $\mathbb{C}$*  ist eine Abbildung  $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Analog zum reellen Fall schreiben wir  $c_n = c(n)$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für die Folge.

(ii) Eine komplexe Folge  $(c_n)$  *konvergiert* gegen  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c_n \rightarrow c$ , falls

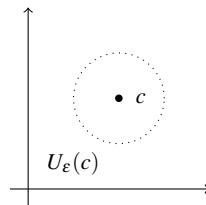
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |c_n - c| < \varepsilon,$$

bzw. äquivalent dazu mit der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $c \in \mathbb{C}$  (siehe Abbildung 2.42) definiert als

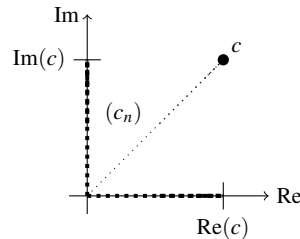
$$U_\varepsilon(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon\},$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : c_n \in U_\varepsilon(c).$$



**Abb. 2.42**  $\varepsilon$ -Umgebung in  $\mathbb{C}$ .



**Abb. 2.43** Konvergenz in  $\mathbb{C}$  ist Konvergenz von Real- und Imaginärteil.

**(E 5) Proposition (Konvergenz in  $\mathbb{C}$  ist Konvergenz von Re und Im).**

Sei  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt



$$c_n \rightarrow c \text{ in } \mathbb{C} \iff \operatorname{Re}(c_n) \rightarrow \operatorname{Re}(c) \text{ und } \operatorname{Im}(c_n) \rightarrow \operatorname{Im}(c) \text{ in } \mathbb{R}.$$

*Beweis.* (Reine Buchhaltung.)

Wir setzen  $a_n = \operatorname{Re}(c_n)$ ,  $b_n = \operatorname{Im}(c_n)$  und  $a = \operatorname{Re}(c)$ ,  $b = \operatorname{Im}(c)$ .

$\Rightarrow$ : Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt mit (E 4) (ii)  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |c_n - c| < \varepsilon$  und daher  $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\operatorname{Re}(c_n - c)| \stackrel{(\text{E } 3) \text{ (ii)}}{\leq} |c_n - c| < \varepsilon \\ |b_n - b| &= |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon, \end{aligned}$$

also  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ .

$\Leftarrow$ : Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  und daher  $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |c_n - c| &= |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**(E 6) Korollar (Limes und Komplexkonjugation).**

Sei  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt  $c_n \rightarrow c \implies \overline{c_n} \rightarrow \bar{c}$ .

*Beweis.* (Detto.) Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{\operatorname{Re}(c_n) - i \operatorname{Im}(c_n)}) \stackrel{(\text{E } 5)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(c_n) - i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\overline{c_n}) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\overline{c_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{c_n}. \quad \square \end{aligned}$$

**(E 7) Korollar (Grenzwertsätze).**

Seien  $(c_n), (d_n)$  konvergente komplexe Folgen und sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n & \text{(iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) &= (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n) (\lim_{n \rightarrow \infty} d_n) \\ \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda c_n) &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} c_n & \text{(iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} d_n}, \text{ falls } d_n \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

*Beweis.* Wieder reine Buchhaltung: Aufspalten in Real- und Imaginärteil und Verwenden der reelle Grenzwertsätze 1.2.23 und 1.2.26.  $\square$

**(E 8) Theorem (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ ).**

Sei  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} (c_n) \text{ konvergiert} &\iff (c_n) \text{ ist Cauchy-Folge, d.h.} \\ &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : |c_n - c_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$



(ii) *stetig auf  $D$* , falls  $f$  stetig in jedem  $z_0 \in D$  ist.

**(E 12) Bemerkung (Zur Stetigkeit).**

(i) (Umgebungsstetigkeit) Die Bedingung in (E 11) (i) kann wie im reellen Fall umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0)).$$

(ii) (Stetigkeit ist Folgenstetigkeit). Wie in  $\mathbb{R}$  kann die Stetigkeit in  $\mathbb{C}$  via Folgen charakterisiert werden. Wortwörtlich mit demselben Beweis erhalten wir

$$f \text{ stetig in } z_0 \in D \iff \forall \text{ Folgen } (c_n) \text{ in } D \text{ mit } c_n \rightarrow z_0 \text{ gilt} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(z_0) (= f(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n)).$$

Daher gilt auch, vgl. 2.1.28

$$f \text{ stetig in } z_0 \in D \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

wobei wir den Grenzwert für komplexe Funktionen wortwörtlich wie in  $\mathbb{R}$ , also wie in 2.1.21 definieren.

**Bemerkung 2.3.9 (Komplexe Exponentialreihe).**

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

absolut konvergent, denn für  $z = 0$  ist die Aussage trivial und für  $z \neq 0$  verwenden wir den Quotiententest (E 9) (ii): Für alle  $n$  mit  $n > 2|z|$  gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}n!}{z^n(n+1)!} \right| = \left| \frac{|z|}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Analog zum reellen Fall definieren wir nun die Exponentialfunktion.

**Definition 2.3.10 (Komplexe Exponentialfunktion).**

Die *Exponentialfunktion*  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

**Bemerkung 2.3.11 (Komplexe und reelle Exponentialfunktion).**

Wenn wir  $\exp$  aus 2.3.10 auf  $\mathbb{R}$  einschränken, so erhalten wir  $\exp$  aus Definition 1.4.37, denn es gilt

$$\exp(x + i0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + i0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden — wir haben tatsächlich  $\exp$  von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  ausgedehnt.

**Theorem 2.3.12 (Eigenschaften von  $\exp$ ).**

Die komplexe Exponentialfunktion hat die folgenden Eigenschaften:

(i) (Funktionalgleichung) Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

(ii) (Fehlerabschätzung) Für alle  $N \in \mathbb{N}$  und  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z)$$

wobei für den „Restterm“  $R_{N+1}(z)$  für  $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$  die Abschätzung

$$|R_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{gilt.}$$

Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt weiters

$$(iii) \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \quad (iv) \exp(z) \neq 0 \text{ und} \quad (v) \lim_{0 \neq z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

(vi) Schließlich ist  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

*Beweis.* (i), (ii) Wortwörtlich wie in  $\mathbb{R}$ , d.h. wie in Thm. 1.4.39 bzw. Prop. 1.4.42.

(iii) folgt aus (E 6), denn setze  $s_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ , dann gilt

$$\exp(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\bar{z}) \stackrel{\text{endl. } \Sigma}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{s_n(z)} \stackrel{(E 6)}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)} = \overline{\exp(z)}.$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$$

und daher ist  $\exp(z) \neq 0$ .

(v) Genau wie in 2.3.7(viii): Wegen (ii) mit  $N = 1$  gilt  $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \leq 2 \frac{|z|^2}{2} = |z|^2$  für alle  $|z| \leq \frac{3}{2}$  und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0).$$

Genau wie in 2.1.8(iii), nur anders herum aufgezogen.

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit  $N = 0$ , denn  $\forall |z| \leq 1$

$$|e^z - 1| = |R_1(z)| \leq 2|z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$$

und daher  $\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 = e^0$  und mit (E 12) (ii) ist  $\exp$  stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei  $w \in \mathbb{C}$  folgt nun mittels Funktionalgleichung. Sei  $(z_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $z_n \rightarrow w$ , dann  $z_n - w \rightarrow 0$  und daher

$$1 = \exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n - w) \stackrel{(i)}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) \right) \exp(-w),$$

exp stetig bei 0

also nochmals mit (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$ .  $\square$

**Motivation 2.3.13 (Winkelfunktionen).** Jetzt (endlich!) sind wir in der Lage, die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exponentialfunktion zu definieren. Sinus und Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht gerade unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den eindeutigen Vorteil innerhalb unseres deduktiven Vorgehens konsistent zu sein und keine bisher undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

Kommt später basierend auf dem Integralbegriff.

Außerdem kommen wir so sehr „billig“ zu den wesentlichen Eigenschaften der Winkelfunktionen wie der Euler-Formel oder den Additionstheoremen. Wir werden aber rasch nach der Definition den Anschluss an unser Vorwissen bzw. unsere Intuition wiederfinden wenn wir die Grundeigenschaften der Winkelfunktionen herleiten.

**Definition 2.3.14 (Sinus und Cosinus).**

Wir definieren die Winkelfunktionen *Cosinus* und *Sinus* durch

$$\begin{array}{ll} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \operatorname{Re}(e^{ix}), \\ \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \operatorname{Im}(e^{ix}). \end{array}$$

**Bemerkung 2.3.15 (Grundeigenschaften von sin und cos).**

- (i) Wegen  $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i\operatorname{Im}(e^{ix})$  erhalten wir unmittelbar aus der Definition die *Eulersche Formel*

$$\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}.$$

- (ii) Die Winkelfunktionen sin und cos sind *stetig auf ganz*  $\mathbb{R}$ , da für  $x_n \rightarrow x$  in  $\mathbb{R}$  mit 2.3.12(vi) gilt, dass

$$e^{ix_n} \rightarrow e^{ix} \text{ also mit (E 3) (ii) } \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{ix}) \text{ und } \operatorname{Im}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

- (iii) *Geometrische Interpretation:* Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

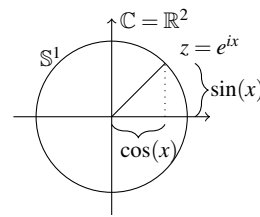
$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1 \quad \text{und daher} \quad |e^{ix}| = 1.$$

Das bedeutet also, alle komplexen Zahlen der Form  $e^{ix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  liegen auf dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Darüber hinaus sind  $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$  und  $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$  genau die kartesischen Koordinaten von  $z = e^{ix}$ , siehe Abbildung 2.44. Insbesondere ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$



**Abb. 2.44** sin & cos am Einheitskreis

- (iv) *Cosinus ist gerade, Sinus ungerade.* Genauer gilt

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x),$$

also ist der Graph von  $\cos$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse und der von  $\sin$  punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

Tatsächlich gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$ , vgl. (E 1)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ . Daher folgt aus der Definition der Winkelfunktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

also

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(v) Es gelten die *Additionstheoreme*. Genauer für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad (2.15)$$

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \quad (2.16)$$

und

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad (2.17)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (2.18)$$

Tatsächlich ergeben sich die beiden Formeln (2.15), (2.16) als Real- bzw. Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}.$$

Die Formeln (2.17), (2.18) ergeben sich dann aus (2.15) bzw. (2.16) mittels der Substitution  $u = \frac{1}{2}(x+y)$ ,  $v = \frac{1}{2}(x-y)$ .

(vi) *Reihendarstellung für  $\sin$  und  $\cos$* : Die natürlichen Potenzen von  $i$  folgen einem einfachen Muster:  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ , usw., also

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, 4, 8, \dots \text{ also } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ i & \text{falls } n = 1, 5, 9, \dots \text{ also } n = 4m + 1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{falls } n = 2, 6, 10, \dots \text{ also } n = 4m + 2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ -i & \text{falls } n = 3, 7, 11, \dots \text{ also } n = 4m + 3 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \sin(x) &\stackrel{(i)}{=} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left(1 + ix - \frac{x^2}{2} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\operatorname{Re}(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\operatorname{Im}(e^{ix})} \end{aligned}$$

und daher

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

also explizit

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

- (vii) *Verhalten nahe  $x = 0$ .* Für kleine  $x$  ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung  $x^2$  oder höher, dass sich der Cosinus in etwa so verhält wie die Funktion 1 und der Sinus in etwa so wie  $x$ , also heuristisch

$$\cos(x) \approx 1, \quad \sin(x) \approx x \quad \text{für } |x| \text{ klein.}$$

Tatsächlich gelten sogar die folgenden Grenzwerte für  $x \rightarrow 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Denn zunächst folgt aus 2.3.12(v)

$$1 = 1 + i0 \stackrel{2.3.12(v)}{=} \lim_{0 \neq x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} \stackrel{(E.5)}{=} \lim_{0 \neq x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) + i \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \quad (2.19)$$

und daher

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = -\operatorname{Im} \left( \frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) = -\operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(2.19)}{\rightarrow} 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

sowie  $\frac{1}{i} = -i$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Re} \left( \frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(2.19)}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

### Motivation 2.3.16 (Die Kreiszahl $\pi$ ).

Wie schon den Winkelfunktionen werden wir uns der Kreiszahl  $\pi$  auf einem etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Weg nähern. Wir werden  $\pi$  als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von  $\cos$  auf  $[0, 2]$  definieren — erst später werden wir mittels des Integralbegriffs sehen, dass  $\pi$  der halbe Umfang des Einheitskreises ist.

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten.



**Lemma 2.3.17 (Technisches zu sin und cos).***Es gilt*

$$(i) \cos(0) = 1 \text{ und } \cos(2) \leq -\frac{1}{3},$$

$$(ii) \sin(x) > 0 \text{ auf dem Intervall } (0, 2],$$

$$(iii) \cos(x) \text{ ist streng monoton fallend auf } [0, 2].$$

*Beweis.* (Mühsames Rechnen mit der Reihendarstellung.)

$$(i) \text{ Zunächst ist einfach } \cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = 1.$$

Um  $\cos(2)$  abzuschätzen, verwenden wir die Reihendarstellung aus 2.3.15(v):

$$\begin{aligned} \cos(2) &= 1 - \underbrace{\frac{2^2}{2!}}_{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \\ &= -1 + \frac{2^4}{4!} \underbrace{\left( 1 - \underbrace{\frac{2^2}{5 \cdot 6}}_{|\cdot| \leq 1} + \underbrace{\frac{2^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}_{\leq \frac{2^2}{5 \cdot 6}} - \underbrace{\dots}_{\text{usw.}} \right)}_{\leq 1} \leq -1 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1. Term herausgehoben

(ii) Wir verwenden wieder 2.3.15(v). Sei  $0 < x \leq 2$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \underbrace{\left( 1 - \underbrace{\frac{x^2}{4 \cdot 5}}_{|\cdot| \leq 1} + \underbrace{\frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}}_{\frac{x^2}{4 \cdot 5}} - \dots \right)}_{\leq 1} \geq x - \frac{x^3}{3!} \geq x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} > 0. \end{aligned}$$

$\frac{x^3}{3!} = x \frac{x^2}{6} \stackrel{x \leq 2}{\leq} x \frac{4}{6} = \frac{2x}{3}$

(iii) Sei  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ , dann gilt

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq 2 \quad (2.20)$$

und daher

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) \stackrel{2.3.15(iv)}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}_{\substack{(2.20) \\ \geq 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{\substack{(2.20) \\ \geq 0}} < 0. \quad \square$$

**Proposition 2.3.18 (1. Nullstelle des Cosinus).**

Es gibt genau ein  $x_0 \in [0, 2]$  mit  $\cos(x_0) = 0$ .

*Beweis.* (Zwischenwertsatz als „Existenzmaschine“; Injektivität gibt Eindeutigkeit.)  
Wegen 2.3.17(i) gilt  $\cos(0) > 0$ ,  $\cos(2) < 0$  und da  $\cos$  nach 2.3.15(ii) stetig ist, liefert uns der Zwischenwertsatz

$$\exists x_0, 0 < x_0 < 2 \text{ mit } \cos(x_0) = 0.$$

Weiters ist  $\cos$  nach 2.3.17(iii) streng monoton fallend auf  $[0, 2]$  und somit injektiv. Daher ist  $x_0$  die einzige Nullstelle.  $\square$

**Definition 2.3.19 (Kreiszahl  $\pi$ ).**

Sei  $x_0$  die eindeutige Nullstelle von  $\cos$  in  $[0, 2]$  gemäß 2.3.18. Wir definieren die reelle Zahl  $\pi$  als

$$\pi = 2x_0.$$

**Bemerkung 2.3.20 (Ein bisschen in Richtung Gewohntes).**

Mit dieser Definition werden einige der obigen Aussagen vertrauter.

(i) Lemma 2.3.17(i),(iii) und Definition 2.3.19 liefern

$$\cos(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \text{für } x = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < 2 \end{cases}$$

Außerdem gilt  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  und nach 2.3.17(ii)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ , daher also

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i. \quad (2.21)$$

(ii) (Extrema und Nullstellen für Sinus und Cosinus)

Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  folgt mit 2.21  $e^{ik\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k = i^k$  und damit insbesondere

$$\begin{aligned} e^{i0} &= 1 = \cos(0) + i\sin(0), & e^{i\frac{\pi}{2}} &= i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ e^{i\pi} &= -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi), & e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \\ e^{i2\pi} &= 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi). \end{aligned}$$

Fassen wir unsere Erkenntnisse in folgender Wertetabelle zusammen, so ergibt sich bereits einiges Vertrautes:

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

**Korollar 2.3.21 (Weitere Eigenschaften von sin und cos).**

Die Winkelfunktionen haben die folgende Eigenschaften ( $x \in \mathbb{R}$ ):

(i) (Periodizität mit Periodenlänge  $2\pi$ )

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

(ii) (Verschiebung um halbe Periode)

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

(iii) ( $\frac{\pi}{2}$ -Verschiebung ergibt jeweils die andere Funktion)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

(iv) (Nullstellen)

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\iff x \in \pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ \cos(x) = 0 &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* ((i)-(iii) folgen unmittelbar aus den Additionstheoremen und der Wertetabelle, (iv) ist etwas technisch.)

(i)  $\cos(x + 2\pi) \stackrel{2.3.15(iv)}{=} \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} \cos(x)$  und analog für sin.

(ii)  $\cos(x + \pi) \stackrel{2.3.15(iv)}{=} \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} -\cos(x)$  und analog für sin.

(iii)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{2.3.15}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \stackrel{2.3.15(iii)}{=} \cos(x)$  und analog für cos.

(iv) Wegen der  $2\pi$ -Periodizität (i) genügt es, die Aussage für  $x \in [0, 2\pi)$  zu zeigen.

Wir beginnen mit sin. Die zwei behaupteten Nullstellen in  $[0, 2\pi)$ , nämlich  $0, \pi$  haben wir schon in 2.3.20(ii) gefunden. Es genügt daher zu zeigen, dass es keine weiteren Nullstellen in  $[0, 2\pi)$  gibt. Das tun wir, indem wir zeigen, dass  $\sin(x)$  auf  $(0, \pi)$  positiv und auf  $(\pi, 2\pi)$  negativ ist.

Sei dazu  $x \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und daher

$$\sin(x) \stackrel{(ii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0. \quad (2.22)$$

Wegen  $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$  gilt

2.3.20(i), 2.3.15(iii)

$$\sin(x + \pi) \stackrel{(ii)}{=} -\sin(x) \stackrel{(2.22)}{<} 0.$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus  $\cos(x) \stackrel{(ii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.3.22 (Der Graph von Sinus und Cosinus).**

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein gutes qualitatives Bild der Graphen der Funktionen sin und cos gewinnen, insbesondere gilt:

(i) Eine Verschiebung des Graphen von cos um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts ergibt den Graphen von sin, denn 2.3.21(iii) und 2.3.15(iii) ergeben  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ .

- (ii) Neben den Nullstellen, vgl. 2.3.21(iv) kennen wir die Maxima und Minima. Sie sind wegen 2.3.15(iii) jeweils die Nullstellen der anderen Funktion. Dort ändern die Funktionen jeweils das Monotonieverhalten.

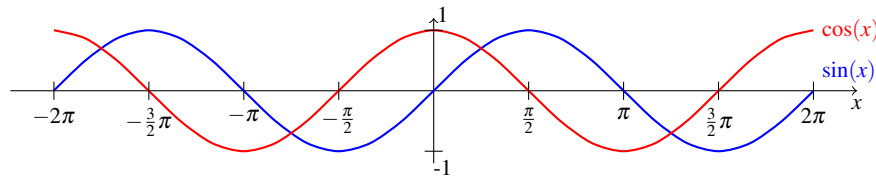


Abb. 2.45 Die Graphen von Sinus und Cosinus

**Definition 2.3.23 (Tangens und Cotangens).**

Wir definieren die Funktionen *Tangens* und *Cotangens* wie folgt:

- (i)  $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

genau die Nst. von cos

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

- (ii)  $\cot : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

genau die Nst. von sin

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

**Bemerkung 2.3.24 (Eigenschaften des Tangens).**

- (i) Eine geometrische Interpretation von  $\tan(x)$ , siehe Abb.2.46 für  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  ergibt sich mit dem Strahlensatz:

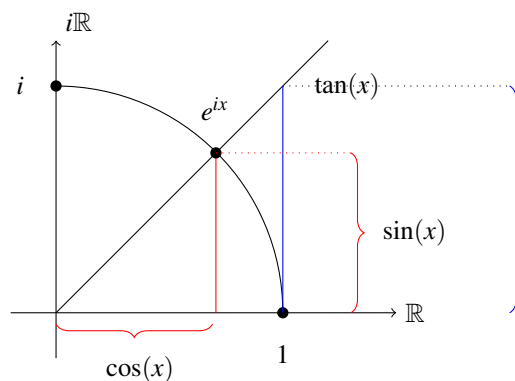


Abb. 2.46 Der Tangens konstruiert mithilfe des Strahlensatzes

- (ii) Der Graph auf  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ergibt sich aus den Eigenschaften von sin und cos zu

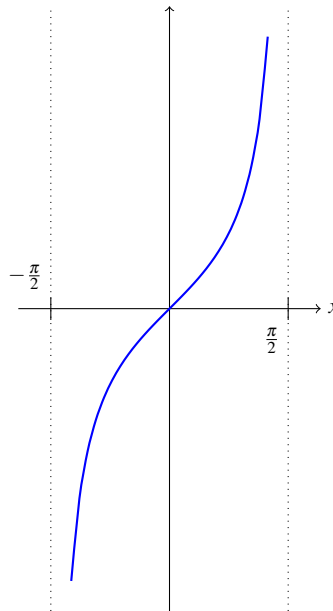


Abb. 2.47 Der Graph der Tangensfunktion auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(iii) (*Periodizität*) Es gilt

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \stackrel{2.3.21(\text{iii})}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x),$$

also ist  $\tan$  periodisch mit Periode  $\pi$ . Der gesamte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben des Graphen in  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  um  $\pi\mathbb{Z}$ .

**Motivation 2.3.25 (Arcusfunktionen).** Zu guter Letzt behandeln wir die Umkehrfunktionen von  $\cos$ ,  $\sin$  und  $\tan$ . Sie geben also zu gegebenem Winkelfunktionswert den jeweiligen Winkel (im Bogenmaß) an, also die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis — daher die Namen Arcussinus /-cosinus /-tangens. Wesentliches Werkzeug ist hier – wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus – der Umkehrsatz 2.2.19.

**Definition und Proposition 2.3.26 (Arcussinus /-cosinus /-tangens).**

- (i) Die Cosinusfunktion ist stetig, streng monoton fallend auf  $[0, \pi]$  und  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ . Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19!

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

und nennen sie *Arcuscosinus*. Sie ist stetig und streng monoton fallend.

- (ii) Die Sinusfunktion ist stetig, streng monoton wachsend auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ . Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19!

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und nennen sie *Arcussinus*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

- (iii) Die Tangensfunktion ist stetig, streng monoton wachsend auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ . Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19!

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und nennen sie *Arcustangens*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

*Beweis.* Wir zeigen jeweils die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.19 — dieser besorgt dann den Rest.

- (i) Wegen 2.3.15(i) ist  $\cos$  stetig und wegen 2.3.17(ii) streng monoton fallend auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Weiters gilt wegen 2.3.21(ii)  $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$  und daher ist  $\cos$  streng monoton fallend auch auf  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Insgesamt ist  $\cos$  daher streng monoton fallend auf  $[0, \pi]$ .

Aus 2.3.20(ii) wissen wir, dass  $\cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$  gilt und mit dem Zwischenwertsatz folgt  $[-1, 1] \subseteq \cos([0, \pi])$ . Wegen der strengen Monotonie gilt aber auch  $\cos([0, 2\pi]) \subseteq [-1, 1]$ . Also gilt insgesamt für das Bild,  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ .

Nun schlägt der Umkehrsatz 2.2.19 zu und liefert eine streng monoton fallende und stetige Inverse  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

- (ii) Mit  $\sin(x) \stackrel{2.3.21(\text{iii})}{=} \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von  $\sin$  auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , der Umkehrsatz besorgt dann wieder den Rest.
- (iii) Der Tangens ist streng monoton wachsend auf  $[0, \frac{\pi}{2})$ , denn für  $0 \leq x < x' < \frac{\pi}{2}$  gilt mit (i) bzw. (ii), dass

$$\cos(x) > \cos(x') \quad \text{und} \quad \sin(x) < \sin(x')$$

und damit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x').$$

$\tan$  ist auch streng monoton wachsend auf  $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ , denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x). \quad (2.23)$$

Weiters ist  $\tan$  als Quotient stetiger Funktionen stetig, vgl. 2.1.17(i). Schließlich gilt

$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R},$$

denn  $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0$  auf  $(0, \frac{\pi}{2})$  und

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \stackrel{2.1.27}{=} \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \stackrel{2.3.20(ii)}{=} 0, \quad \text{daher mit 1.2.47(ii) } \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty.$$

Daher sagt der Zwischenwertsatz, dass  $\tan([0, \frac{\pi}{2})) = [0, \infty)$ . Mit (2.23) ist aber  $\tan((-\frac{\pi}{2}, 0]) = (-\infty, 0]$ .

Nun schlägt der Umkehrsatz ein letztes Mal zu.  $\square$

**Bemerkung 2.3.27 (Zu den Arcusfunktionen).**

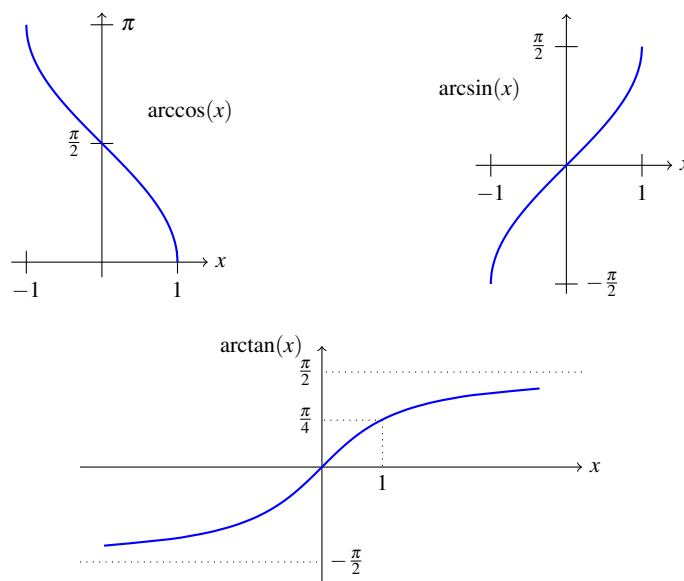
- (i) Natürlich hätten wir den „Umkehrprozess“ statt auf  $[0, \pi]$  bzw.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  auf jedem Intervall durchführen können, wo die jeweilige Funktion streng monoton ist.

tan

cos

sin

- (ii) Die Graphen der Arcusfunktionen, wie in Abb. 2.48 zu sehen ist, haben die folgende Gestalt (Spiegelung an der 1. Mediane):



**Abb. 2.48** Graphen der Arcusfunktionen





## Kapitel 3

# Differentiation

**Zusammenfassung.** In diesem Kapitel kommen wir nun endlich zum Hautthema der Analysis, der *Differential- und Integralrechnung*. Wir beginnen mit dem Differenzieren, genauer mit dem Studium differenzierbarer Funktionen, also von Funktionen, die noch „schöner“ als die stetige Funktionen aus Kapitel 2 sind. Sie haben die Eigenschaft, dass sie (in den Nähe eines Punktes)

besonders gut durch eine Gerade angenähert werden können.

Zunächst werden wir in §3.1 die Begriffe *Differenzierbarkeit* und *Ableitung* von Funktionen gründlich untersuchen. Natürlich werden hier die „alten Bekannten“ *Differenzenquotient* und *Differentialquotient* eine wichtige Rolle spielen. *Neu* hinzu kommt ein anderer Gesichtspunkt, der viel allgemeiner gefasst werden kann und daher auch viel weiter trägt:

Die Ableitung als lineare Bestapproximation an die Funktion.

Wir klären das Verhältnis der Differenzierbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekannten“<sup>1</sup> Ableitungsregeln her, um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

Dann lernen wir in §3.2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung — eines *der* Hauptresultate der Vorlesung, Kriterien für (lokale) Extremstellen, Monotonie und Konvexität. So verschaffen wir uns einen Überblick über die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, beleuchten also gründlich den theoretischen Hintergrund der berühmten „Kurvendiskussionen“ der Schulanalysis.

---

<sup>1</sup> in Analogie zu amtsbekannt.

### 3.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differentialrechnung starten, setzen wir dieses in Beziehung zum bisherigen Verlauf der Vorlesung.

#### Rückblick 3.1.1 (Was will und was soll die Analysis).

- (i) Der inhaltliche Kern der Analysis ist (vgl. 0.0.2) die *Differential-* und *Integralrechnung*, genauer: das *Verstehen und Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen*. Noch genauer ist das Hauptthema der Analysis:

Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu, die Änderung einer Funktion im Kleinen (d.h. lokal um einen Punkt im Definitionsbereich) zu verstehen und was kann man daraus über die Funktion im Großen (d.h. über ihren Gesamtverlauf) lernen bzw. aussagen!

- (ii) Der Begriff der Stetigkeit aus Kapitel 2 beschreibt zwar *genau* das lokale Änderungsverhalten von Funktionen, aber noch *nicht genau genug*! Bevor wir weiter überlegen, erinnern wir uns, dass die Stetigkeit zentral auf dem Grenzwertbegriff aus Kapitel 1 aufbaut. Dieser liefert via absoluter Konvergenz von Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessanter Funktionen(klassen), die über Polynome und rationale Funktionen hinausgehen.

$\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \arcsin, \arccos, \arctan, x^\alpha, \sinh, \cosh, \tanh$

Mit der Stetigkeit und der Konvergenztheorie haben wir einen Grundstein gelegt, auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

- (iii) In diesem Kapitel nimmt unser Studium des Änderungsverhaltens von Funktionen die alles entscheidende Wendung, wobei wir mit der folgenden Idee weit über die Stetigkeit hinausgehen: Wir vergleichen die Änderung einer Funktion  $f$  nahe eines Punkts  $\xi$  im Definitionsbereich mit der einfachsten nicht-konstanten Funktion, nämlich einer Geraden. Wir werden sehen, dass diese Idee *enorm weit trägt*!

#### Motivation 3.1.2 (Änderungsverhalten von Funktionen).

- (i) Wir haben im Verlauf der Vorlesung schon öfters gesehen, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen, als vielmehr die

Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

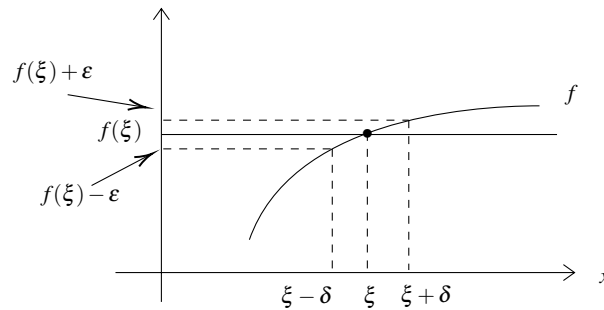
Zwei dieser „Änderungsmodi“ haben wir schon kennengelernt: *Monotonie* (siehe 2.2.18) und *Stetigkeit* (siehe Abschnitt 2.1).

- (ii) Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit (vgl. 2.1.6) für eine Funktion  $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $\xi \in D$ :

$\xi$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \text{ mit} \\ |x - \xi| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich  $f$  nahe  $\xi$  wie die konstante Funktion  $x \mapsto f(\xi)$  verhält, in dem Sinne, dass sie nicht zu weit von  $f(\xi)$  abweicht, siehe Abbildung 3.1.

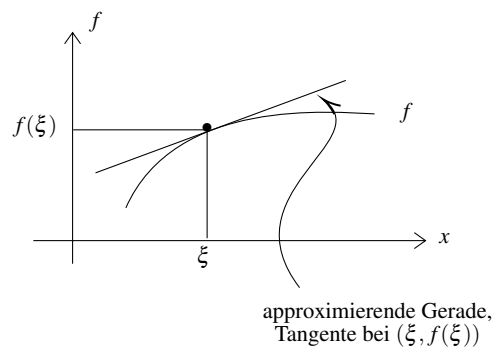


**Abb. 3.1** Approximation von  $f$  durch die konstante Funktion  $x \mapsto f(\xi)$

- (iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  können wir uns (unter vielen alternativen Zugängen, siehe auch später) auf ähnliche Weise nähern.

Wir werden  $f$  bei  $\xi \in D$  *differenzierbar* nennen, wenn  $f$  „in der Nähe“ von  $\xi$  „sehr gut“ durch eine (i.a. nicht waagrechte) Gerade approximiert werden kann. (3.1)

Diese Gerade wird sich dann natürlich als die Tangente (der Schulmathematik) herausstellen, siehe Abbildung 3.2



**Abb. 3.2** Approximation von  $f$  durch eine Gerade

Um die Idee (3.1) zu präzisieren und in eine offizielle Definition gießen zu können, müssen wir sie zunächst etwas formaler ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat — so wie jede Gerade — die Form

$$g(x) = \alpha x + \beta. \quad (3.2)$$

Anstieg

„y-Abschnitt“

Außerdem passiert  $g$  den Punkt  $(\xi, f(\xi))$ , d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha \xi + \beta. \quad (3.3)$$

Daher ergibt sich in den Punkten  $x = \xi + h$

$$g(x) = g(\xi + h) \stackrel{(3.2)}{=} \alpha(\xi + h) + \beta = \alpha \xi + \beta + \alpha h \stackrel{(3.3)}{=} f(\xi) + \alpha h.$$

Im Sinne unserer Approximationsidee  $(*)$  bedeutet das, dass für  $x$  „nahe bei“  $\xi$ , d.h. für „kleine“  $h$

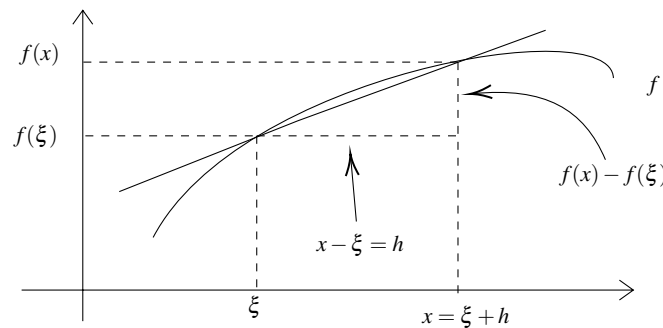
$$f(x) = f(\xi + h) \approx g(\xi + h) = f(\xi) + \alpha h \quad (3.4)$$

gilt.

Noch bevor wir (3.4) präziser fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekannten Anstieg  $\alpha$  der approximierenden Geraden  $g$  zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Diesen Ausdruck werden wir als *Differenzenquotient* bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist, dass er die Steigung der Sekante zwischen den Punkten  $(\xi, f(\xi))$  und  $(\xi + h, f(\xi + h)) = (x, f(x))$  angibt, siehe Abbildung 3.3.



**Abb. 3.3** Die Bedeutung des Differenzenquotienten

- (iv) Der weitere Weg der Präzisierung von (3.1) ist nun vorgezeichnet. Um der Idee gerecht zu werden, müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{x \rightarrow \xi, x \neq \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

sonst sinnlos!

befassen, bzw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

Nun aber offiziell:

**Definition 3.1.3 (Differenzenquotient).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\xi \in I$  fix. Für  $I \ni x \neq \xi$  heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Differenzenquotient von  $f$  bei  $\xi$ .

**Bemerkung 3.1.4 (Zwei Variable).**

Formal hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von *zwei Variablen*, nämlich  $\xi$  und  $x$ , abhängt. Das sind die zwei Punkte, die die Sekante festlegen. Wie in 3.1.2(iv) angedeutet, wollen wir die Abhängigkeit von  $x$  durch Übergang zum Limes  $x \rightarrow \xi$  loswerden. Um diesen Limes (von Funktionen!) sauber durchführen zu können, wiederholen wir:

**Definition 3.1.5 (Limes von Funktionen auf Intervallen; Spezialfall von 2.1.21).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\xi \in I$ .

Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = c,$$

damit automatisch BP, siehe 1.3.28(i)

$c \in \mathbb{R}$ , oder auch  $\pm\infty$

falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $I$  mit  $x_n \rightarrow \xi$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow c$ .

**Bemerkung 3.1.6 (Technisches Detail).**

Wir haben in 3.1.2(iv) gesehen, dass im Differenzenquotienten  $x = \xi$  sinnlos ist und diesen Fall daher auch in 3.1.3 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Definition 3.1.5 explizit auch die Folge  $x_n = \xi$  für alle  $n$  (konvergiert ja trivialerweise, vgl. 1.2.11(i)). Daher müssen wir im Folgenden bei  $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$  immer die konstante Folge  $x_n = \xi$  explizit verbieten und schreiben  $\lim_{x \neq \xi, x \rightarrow \xi}$  oder kürzer  $\lim_{x \rightarrow \xi, x \neq \xi}$ .

**Warnung:** Manche Quellen (z.B. [8]) verbieten in der Definition für Konvergenz von Funktionen  $x_n = \xi$ . Dann muss bei der Differenzierbarkeit  $x_n = \xi$  nicht ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details im Zusammenhang mit Limiten von Funktionen anders zu handhaben. Jetzt aber los!

Eine Schlüsseldefinition!

**Definition 3.1.7 (Differenzierbarkeit und Ableitung).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion.

- (i) Sei  $\xi \in I$ . Die Funktion  $f$  heißt *differenzierbar* an der Stelle  $\xi$  bzw. *differenzierbar* in  $\xi$ , falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{oder, was dasselbe ist} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert und endlich ist<sup>2</sup>.

In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die *Ableitung* von  $f$  in  $\xi$  und schreiben  $f'(\xi)$ .

- (ii) Ist  $f$  differenzierbar in allen Punkten  $\xi \in I$ , dann heißt  $f$  *differenzierbar auf  $I$*  oder einfach *differenzierbar*.

**Bemerkung 3.1.8 (Ableitung, Differentialquotient, Schmiegegerade & Tangente).**

- (i) Zusammengefasst können wir also für die Ableitung schreiben

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \text{ falls existent \& endlich.}$$

- (ii) Falls der Limes in (i) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie in 3.1.2(iii) antizipiert, dass die Ableitung (an der Stelle  $\xi$ ) gleich dem Limes des Differenzenquotienten (an der Stelle  $\xi$ ) ist. Oft wird (im Falle der Existenz) der Ausdruck

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

als *Differentialquotient* von  $f$  an der Stelle  $\xi$  bezeichnet. Es gilt dann also, dass der Differentialquotient (in  $\xi$ ) der Limes des Differenzenquotienten (in  $\xi$ ) ist.

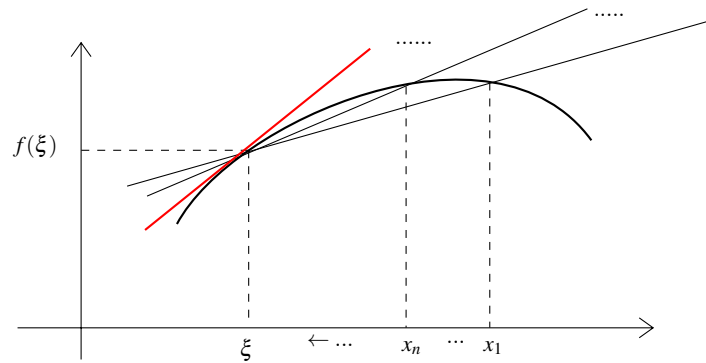
- (iii) Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Funktion im Punkt  $\xi$  bzw. als die Steigung des Graphen von  $f$  in  $(\xi, f(\xi))$  interpretiert werden, siehe Abbildung 3.4.

Die Gerade durch den Punkt  $(\xi, f(\xi))$  mit dem Anstieg  $f'(\xi)$ , also der Ableitung in  $\xi$ , d.h.

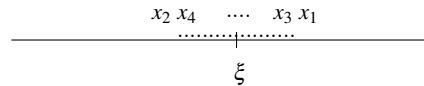
$$g(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

heißt die *Tangente* an  $f$  in  $(\xi, f(\xi))$ . Sie wird oft auch als *Schmiegegerade* bezeichnet, denn sie ist gewissermaßen „Grenzwert der Sekanten“, also eine Gerade, die sich besonders gut an den Graphen von  $f$  „anschmiegt“. Mit dieser Lösung des sogenannten *Tangentenproblems* befassen wir uns näher in 3.1.12.

<sup>2</sup> D.h. uneigentliche Grenzwerte sind *nicht* erlaubt!

Abb. 3.4 Die Tangente als Schmiegegerade an den Graphen von  $f$ **Bemerkung 3.1.9 (Einseitige Ableitungen).**

- (i) Bisher haben wir suggestiv immer  $x > \xi$  gezeichnet. Das diene aber nur der Veranschaulichung. Klarerweise sind in der Definition 3.1.7 resp. 3.1.5 auch Folgen erlaubt, die von links/unten gegen  $\xi$  konvergieren, ebenso wie Folgen die „hin- und herspringen“. Nach den Definitionen 3.1.5 und 3.1.7 sind alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $I$  erlaubt mit  $x_n \neq \xi$  für alle  $n$  und  $x_n \rightarrow \xi$ , siehe Abbildung 3.5

Abb. 3.5 Allgemeine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow \xi$  und  $x_n \neq \xi$  für alle  $n$ 

- (ii) Ist  $I$  ein (wenigstens halb-) abgeschlossenes Intervall und  $\xi$  ein Randpunkt von  $I$ , dann kommen nur Folgen in Frage die von oben bzw. unten gegen  $\xi$  konvergieren. Man spricht dann von *einseitigen Ableitungen*. Natürlich können solche auch für innere Punkte eines beliebigen Intervalls betrachtet werden.

**Beispiel 3.1.10 (Höchste Zeit: Diffbare<sup>3</sup> und nichtdiffbare Funktionen).**

- (i) *Konstante Funktionen* sind (überall) differenzierbar mit Ableitung 0:

Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  für alle  $x$ . Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

- (ii) *Potenzfunktionen* sind differenzierbar. Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ . Wir betrachten  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = cx^n$ . Es gilt

<sup>3</sup> „Diffbar“ ist eine oft gebräuchliche Abkürzung für „differenzierbar“.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &\stackrel{(\text{BLS})}{=} c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} \\
 &= c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{h \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \left( \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \underbrace{h^{k-1} x^{n-k}}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= cnx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

und für lineare Funktionen

$$(cx)' = c.$$

Vereinigung zweier Intervalle; funktioniert genauso!

- (iii)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$  ist (überall) differenzierbar und  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .  
Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \\
 &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

- (iv) Die Exponentialfunktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und gleich ihrer Ableitung, d.h.

$$\exp(x)' = \exp(x).$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &\stackrel{1.4.39}{=} \exp(x) \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\
 &\stackrel{2.3.7(viii)^4}{=} \exp(x).
 \end{aligned}$$

- (v) Die Winkelfunktionen sin und cos sind differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Tatsächlich gilt für den Sinus

<sup>4</sup> Dieser und die anderen Grenzwerte in 2.3.7 waren als wichtig angekündigt, vgl. Fußnote auf Seite 120.



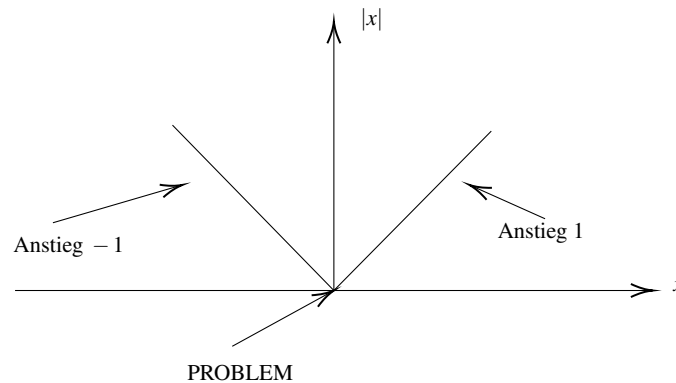
$$\begin{aligned}
\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &\stackrel{(2.18)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}_{\rightarrow \cos(x) \text{ (2.3.15(i))}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1 \text{ (2.3.15(vi))}} \stackrel{1.2.23}{=} \cos(x).
\end{aligned}$$

Der Cosinus-Fall lässt sich analog erledigen.

(vi) Der *Absolutbetrag*  $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber *nicht differenzierbar* in  $x = 0$ , siehe Abbildung 3.6.

Tatsächlich gilt für

$$\begin{aligned}
x > 0 : \quad \text{abs} &= \text{id} \stackrel{(ii)}{\implies} \text{abs}'(x) = 1, \\
x < 0 : \quad \text{abs} &= -\text{id} \stackrel{(ii)}{\implies} \text{abs}'(x) = -1.
\end{aligned}$$



**Abb. 3.6** Der Absolutbetrag ist überall differenzierbar außer im Punkt  $\xi = 0$ .

Aber  $\text{abs}'(0)$  existiert nicht, denn sei  $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , dann gilt  $0 \neq h_n \rightarrow 0$  aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht, denn

$$\frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{divergiert nach 1.2.11(iii).}$$

Die Folge  $(h_n)$  ist natürlich absichtlich so gewählt, dass sie abwechselnd Differenzenquotienten  $\pm 1$  produziert.

**Bemerkung 3.1.11 (Nicht-diffbare Funktionen).**

(i) Bemerke, dass

abs in  $\xi = 0$  nach 2.1.2(iv) zwar *stetig* ist, aber eben *nicht differenzierbar*!

- (ii) In gewisser Weise ist der *Knick* von *abs* bei  $x = 0$  ein *Prototyp* einer Nichtdifferenzierbarkeit — etwa wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind, vgl. 2.1.8(v) aber auch 2.1.15! Aber auch hier ist die ganze Wahrheit komplizierter. Es gibt etwa Funktionen, die auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig aber nirgends differenzierbar sind, z.B. die Weierstraß-Funktion  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$ . (Topologisch gesehen gibt es sogar viele solche Funktionen - sie liegen dicht in den stetigen Funktionen.)
- (iii) Das „Problem“ von *abs* bei  $x = 0$  lässt sich mittels einseitiger Ableitungen (vgl. 3.1.9(iii)) genauer analysieren. Offensichtlich gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{|0+h| - |h|}{h} = -1,$$

← siehe 2.1.25(i)

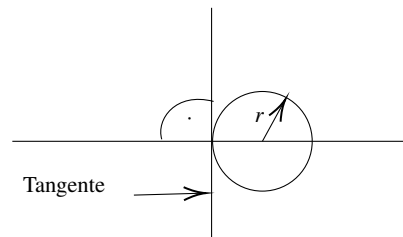
sodass die einseitigen Ableitungen bei  $x = 0$  existieren und  $\pm 1$  ergeben.

**Bemerkung 3.1.12 (Historische Bemerkung 1: Das Tangentenproblem).**

Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung bildete sich im 17. Jahrhundert unter dem Namen *Tangentenproblem* heraus:

Finde die Tangente in einem Punkt an eine beliebige Kurve.

Dabei ist zunächst das Problem wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie z.B. dem Kreis, siehe Abbildung 3.7 zu einer guten Verallgemeinerung gelangen soll/kann.



**Abb. 3.7** Die Tangente an einen Kreis schneidet den Radiusstrahl im rechten Winkel.

Ein naheliegender Ansatz ist es, jene Gerade als Tangente zu *definieren*, die die Kurve im Punkt des Interesses berührt (bzw. schneidet) und deren Anstieg durch „nahe“ Sekantensteigungen angenähert wird — also genau die Idee (\*) aus 3.1.2(iii). In der Terminologie von 3.1.9 bedeutet dies also die *Tangente als Schmiegegerade* zu *definieren*.

Glücklicherweise, liefert dieser Ansatz auch gleich eine Möglichkeit, den Tangentenanstieg konkret zu berechnen, wie wir es ja bisher schon getan haben. Aller-

dings, das was wir in Definition 3.1.7(i) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte Mathematiker\*innen im 17. Jahrhundert vor gewaltige technische Probleme.

Nach früheren Ansätzen von P. Fermat ( $\sim 1600$ –1665) und R. Descartes (1596–1650) gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm *Leibniz* (1646–1716) und Isaac *Newton* (1643–1727) funktionierende Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypotenuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt, siehe Abbildung 3.8. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen“, ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt. Bezeichnen wir eine Funktion mit  $y$  (wie früher oft üblich), etwa  $y = x^3 + 2x^2 + 7$ , dann schreibt man für die Ableitung statt  $y'$  auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$

Leibniz hat sich dabei  $\frac{dy}{dx}$  wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete ( $dy$ ) und Ankathete ( $dx$ ) vorgestellt, wobei  $dx$  und  $dy$  „unendlich klein“ sind.

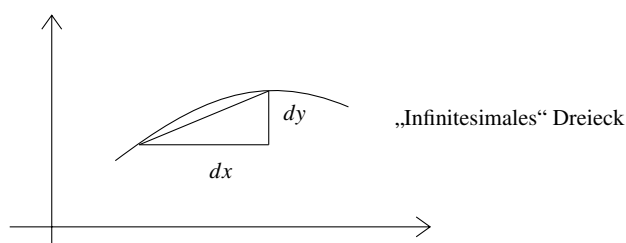


Abb. 3.8 Tangentensteigung mittels „unendlich kleiner“ Dreiecke.

Der moderne Grenzwertbegriff erspart es uns mit diesen, eine gewisse „richtige“ Anschauung voraussetzenden „unendlich kleinen Größen“ hantieren zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson (1918–1974) u.a. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen rigorosen Umgang mit „unendlich kleinen“ (und „unendlich großen“) Größen ermöglicht. Dieses mathematische Teilgebiet heißt *Nichtstandard-Analysis*.

### Bemerkung 3.1.13 (Historische Bemerkung 2: Newtonsche Mechanik).

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „*Principia Mathematica*“<sup>5</sup> hat er gezeigt, dass wesentliche Probleme in der Natur

<sup>5</sup> Mit vollem Titel eigentlich *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, eines der einflussreichsten Bücher überhaupt!

erfolgreich durch mathematische Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er seine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der *Momentangeschwindigkeit* ausging, das wir im Folgenden vereinfacht beschreiben.

Ein Massenpunkt  $P$  bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben wir mit der Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto s(t)$ . Unsere Anschauung drängt uns dazu, zu glauben, dass  $P$  zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Einfach zu bestimmen sind aber nur *Durchschnittsgeschwindigkeiten* (auch: mittlere Geschwindigkeiten), etwa zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t$ , also

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir die Momentangeschwindigkeit  $v(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten definieren — falls dieser existiert, d.h. dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten genügend „stabil“ sind, falls  $t$  „in der Nähe“ von  $t_0$  variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t \neq t_0 \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{falls existent}).$$

Zum Beispiel gilt für den *freien Fall*  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$  und daher

$$v(t) = \left( \frac{1}{2}gt^2 \right)' \stackrel{3.1.10(ii)}{=} gt.$$

Erdbeschleunigung  
 $\sim 9.81 \text{ms}^{-2}$

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschwindigkeit  $v$  selbst eine Funktion der Zeit  $t$ ; also  $t \mapsto v(t)$ . Die *mittlere Beschleunigung* von  $P$  zwischen  $t_0$  und  $t$  ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschwindigkeit definieren wir die *Momentanbeschleunigung* zum Zeitpunkt  $t_0$  als

$$b(t_0) := \lim_{t \neq t_0 \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{falls existent}).$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$b(t) = v'(t) = (gt)' = g,$$

was auch den Namen der Konstanten  $g$  erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung ermöglichen einen *analytischen Zugriff* auf Newtons Kraftgesetz (auch 2. Newtonsches Axiom)

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung},}$$

nämlich

$$\boxed{F(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t).}$$

Diese Gleichung ist Ausgangs- und Angelpunkt der *klassischen Mechanik* (auch Newtonsche Mechanik) eines großen Teilgebiets der Physik, das sich wesentlich mit der in große abstrakte Höhen getriebenen Lösungstheorie genau dieser *Bewegungsgleichungen* beschäftigt.

**Bemerkung 3.1.14 (Differenzierbarkeit vs Stetigkeit).**

Bsp. 3.1.10(vi) zeigt, dass die Stetigkeit einer Funktion  $f$  im Punkt  $\xi$  *nicht* die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\xi$  impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Theorem zeigt. Insgesamt gilt also für  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in I$

$$\boxed{f \text{ differenzierbar in } \xi \quad \begin{array}{c} \implies \\ \not\Leftarrow \end{array} \quad f \text{ stetig in } \xi.}$$

**Theorem 3.1.15 (Differenzierbar  $\Rightarrow$  stetig).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Falls  $f$  differenzierbar in  $\xi \in I$  ist, dann ist  $f$  in  $\xi$  auch stetig.

*Beweis. (Eigentlich ganz einfach, aber mit Trick!)*

Sei  $I \ni x \neq \xi$ , dann gilt laut Voraussetzung

$$\text{Trick} \quad f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} (x - \xi) \xrightarrow{x \rightarrow \xi} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also  $f(x) \rightarrow f(\xi)$  und mit 2.1.27 folgt, dass  $f$  stetig in  $\xi$  ist.  $\square$

**Motivation 3.1.16 (Weiteres Vorgehen: „Baukastensystem“).**

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe — hier Differenzierbarkeit — ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispiele(n) und Nicht-Beispiele(n) zu finden.

Um dabei nicht immer (mühsam!) auf die Definition zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in Abschnitt 2.1 im Falle der Stetigkeit ein „Baukastensystem“ etablieren (vgl. 2.1.16) und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für Funktionen aus 1.1.3 die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differentiationsregeln (wieder-)entdecken.

**Proposition 3.1.17 (Grundops & Diffbarkeit — Differentiationsregeln).**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\xi \in I$  und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\xi$ . Dann gilt:

- (i) (Linearkombinationen) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda f + \mu g$  differenzierbar in  $\xi$  und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel)  $f \cdot g$  ist differenzierbar in  $\xi$  und es gilt

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).$$

(iii) (Quotientenregel) Falls  $g(\xi) \neq 0$ , dann ist  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $\xi$  und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

*Beweis.* („Baukastensystem“ wie bei der Stetigkeit.)

(i) folgt sofort aus den Grenzwertsätzen 1.2.25.

(ii) Sei  $0 \neq h$  mit  $\xi + h \in I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h} \\ \text{Trick} \rightarrow & \frac{1}{h} \left( f(\xi+h)(g(\xi+h) - g(\xi)) + (f(\xi+h) - f(\xi))g(\xi) \right) \\ & = f(\xi+h) \frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} g(\xi) \\ & \xrightarrow[1.2.25]{0 \neq h \rightarrow 0} f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi). \quad \leftarrow \begin{array}{l} f \text{ stetig in } \xi \text{ nach 3.1.15} \end{array} \end{aligned}$$

(iii) Sei zunächst  $f(x) = 1$  auf  $I$ . Für  $0 \neq h$  mit  $\xi + h \in I$  gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)} \right) = \frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{hg(\xi)g(\xi+h)} \\ & = \underbrace{\frac{1}{g(\xi)g(\xi+h)}}_{\rightarrow g(\xi)^2 \text{ wg. 3.1.15}} \underbrace{\frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{h}}_{\rightarrow g'(\xi)} \xrightarrow[1.2.23]{1.2.26} -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = \frac{-g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \quad (3.5)$$

auch  
unabhängig  
wichtige Formel

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii), genauer:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(\xi) \stackrel{(ii)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) + f(\xi) \left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) - f(\xi) \frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)} = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 3.1.18 (Weitere differenzierbare Funktionen).**

Ganz im Sinne von 3.1.16 wenden wir nun 3.1.17 an und halten reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Funktionen)

Sei  $\mathbb{N} \ni n \geq 1$  und sei  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n}$ , dann gilt wegen 3.1.17(iii) (bzw.

(\*) im Beweis davon — ist ja nur ein Spezialfall!) unter Beachtung von  $\frac{1}{x^n} \neq 0$  für  $x \neq 0$ :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \stackrel{3.1.10(ii)}{=} \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

d.h.

$$\boxed{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

(ii)  $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &\stackrel{2.3.23(i)}{=} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{3.1.17(iii)}{=} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &\stackrel{3.1.10(v)}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x). \end{aligned}$$

(iii) Polynome und rationale Funktionen sind überall differenzierbar.

**Motivation 3.1.19 (Differentiation als lineare Approximation).**

Bevor wir unser Baukastensystem aus 3.1.17 (vgl. 3.1.16) erweitern (können), werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differentiation und zwar vom Gesichtspunkt der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion,

den wir schon in 3.1.2(iii) angedeutet haben. *Achtung*, obwohl er in der Schulmathematik (scheinbar) eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Mathematik insgesamt bestimmende Aspekt des Begriffs der Differenzierbarkeit!

Er ermöglicht — im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotient — weitreichende Verallgemeinerungen (z.B. Differentiation von Funktionen, die auf  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^n$ , ja sogar auf unendlich-dimensionalen Räumen definiert sind) und ist sozusagen *der Kern* der Sache. Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

**Bemerkung 3.1.20 (Differentialquotient vs. lineare Approximation).**

- (i) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(\xi) =: a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt nach Definition 3.1.7(i)

$$0 = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - a = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h}. \quad (3.6)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren: Die lineare Funktion  $h \mapsto a \cdot h$  ist (im Sinne von (3.6)) eine Approximation der Funktion  $h \mapsto f(\xi + h) - f(\xi)$ ; mehr dazu in 3.1.22 unten.

- (ii) Nehmen wir umgekehrt an, dass es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft (3.6) gibt, d.h.

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h} = 0,$$

dann gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) = a$  und somit ist  $f$  in  $\xi$  differenzierbar mit  $f'(\xi) = a$ .

- (iii) Insgesamt haben wir also gezeigt:

$$f \text{ differenzierbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h} = 0$$

und in diesem Fall ist  $f'(\xi) = a$ .

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee halten wir als Theorem fest.

**Theorem 3.1.21 (Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion auf einem Intervall  $I$  und sei  $\xi \in I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ differenzierbar in } \xi &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \exists \text{ Funktion } r : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sodass} \\ &\quad f(\xi + h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \\ &\quad \text{und } \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt  $f'(\xi) = a$ .

*Beweis.* (Im wesentlichen nur eine Umschreibung von 3.1.20)

$\Rightarrow$ : Setze  $r(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - f'(\xi)h$ . Für  $0 \neq h$  mit  $\xi + h \in I$  gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(\xi) - f'(\xi) = 0.$$

$\Leftarrow$ : Sei wieder  $0 \neq h$  mit  $\xi + h \in I$ . Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a + 0,$$

also ist  $f$  differenzierbar in  $\xi$  mit  $f'(\xi) = a$ .  $\square$



**Bemerkung 3.1.22 (Zur Bedeutung von Theorem 3.1.21).**

- (i) Um die Bedeutung von 3.1.21 besser zu verstehen, definieren wir das *Inkrement* der Funktion  $f$  bei  $\xi$  als

$$\varphi(h) := f(\xi + h) - f(\xi).$$

Zunahme von  $f$   
zwischen  $\xi$  und  $\xi + h$

Also besagt 3.1.21, dass das Inkrement bis auf einen „Fehler“  $r(h)$  proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen  $h$  ist, wobei der Proportionalitätsfaktor genau  $f'(\xi)$  ist,

$$\varphi(h) = f(\xi + h) - f(\xi) = f'(\xi) \cdot h + r(h).$$

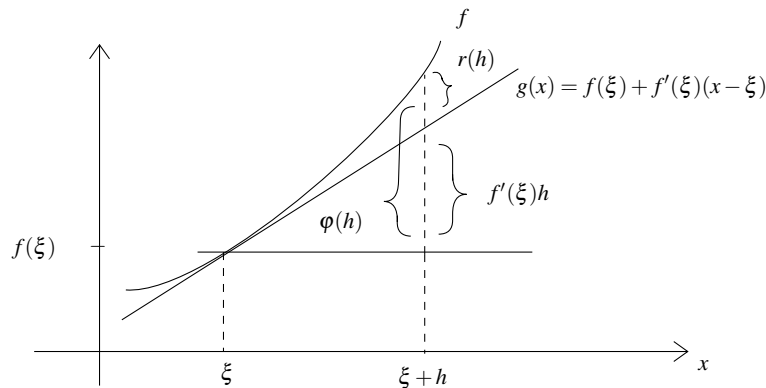
Oder noch anders formuliert: Die Inkrementfunktion  $h \mapsto \varphi(h)$  wird bis auf den „Fehler“  $r(h)$  durch die lineare Funktion  $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$  approximiert.

- (ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als (vgl. 3.1.2(iii)), dass die Tangente an  $f$  im Punkt  $\xi$  definiert als

$$g(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

im präzisen Sinne von 3.1.21 für  $x$  nahe  $\xi$  (d.h. für kleine  $h$ ) eine gute Approximation ist, siehe Abbildung 3.9. Denn 3.1.21 sagt ja

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h) = g(x) + r(h).$$



**Abb. 3.9** Die Tangente als lineare Bestapproximation

- (iii) Besondere Beachtung verdient hier das Verhalten des „Fehlers“  $r^6$ . Dieser erfüllt nicht nur  $r(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), sondern sogar

<sup>6</sup> Die Bezeichnung  $r$  steht für Rest.

$$\boxed{\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).}$$

Diese Bedingung besagt insbesondere, dass  $r(h)$  für  $h \rightarrow 0$  schneller gegen 0 geht als  $h$  selbst. Oft schreibt man dafür auch  $r(h) = o(h)$ .

(iv) Damit sieht man auch besonders schön, dass (oder sogar worin)

Differenzierbarkeit stärker ist als Stetigkeit, vgl. 3.1.14. Es gilt ja, vgl. 2.1.27

$$f \text{ stetig in } \xi \iff f(\xi + h) - f(\xi) \rightarrow 0. \leftarrow \begin{array}{l} \text{„klein oh“ von } h \\ \text{nur das und} \\ \text{nicht mehr} \end{array}$$

Wählen wir also irgendein  $a \in \mathbb{R}$  und schreiben

$$f(\xi + h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \quad (\text{d.h. } r(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - ah)$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \iff r(h) \rightarrow 0$$

und es ist keine Rede von  $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  oder davon, dass  $a$  eindeutig bestimmt ist — was ja aus dem Zusatz in 3.1.21 folgt.

### Beispiel 3.1.23 (Der Sinus bei 0).

Wir veranschaulichen die Situation von 3.1.21 am Beispiel der Sinusfunktion  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wegen Bsp. 3.1.10(v) gilt

$$\sin'(x) = \cos(x) \implies \sin'(0) = \cos(0) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} 1 \quad (3.7)$$

und daher ergibt sich mit Thm. 3.1.21 für  $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \sin(h) &= \sin(0 + h) = \sin(0) + \sin'(0) \cdot h + r(h) \\ &\stackrel{2.3.20(ii)}{=} 0 + h + r(h) = h + r(h) \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit  $r(h) = \sin(h) - h = o(h)$ . (Die Tatsache, dass  $r(h)/h \rightarrow 0$ , folgt alternativ auch aus 2.3.15(vii),  $\sin(h)/h \rightarrow 1$  ( $h \rightarrow 0$ ).) Anschaulich bedeutet das, dass  $\sin$  nahe 0 wie die Identität aussieht—und zwar bis auf einen Fehler  $r(h)$ , der schneller gegen 0 geht als  $h$  selbst, siehe Abbildung 3.10.

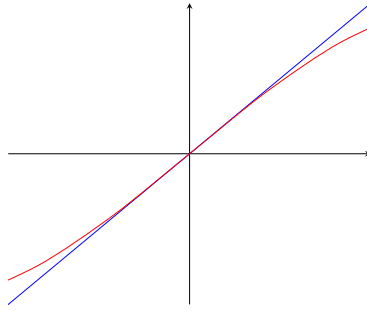


Abb. 3.10 Der Sinus bei 0

**Motivation 3.1.24 (Zurück zum „Baukasten“).**

Jetzt kehren wir (endlich) wieder zu unserem „Baukastensystem“ zurück und erweitern es. Proposition 3.1.17 hat ja schon einiges gebracht, aber zum ganzen Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differentiation mit der Verknüpfung (vgl. auch 2.1.17(ii) im Fall der Stetigkeit). Sie wird uns auch die Türe zur Differentiation von Umkehrfunktionen öffnen.

Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel — dabei können wir die Restschreibweise aus 3.1.21 gleich gut gebrauchen. (Wir müssten sie wir aber nicht verwenden, vgl. z.B. den Beweis in [5, §15, Satz 4]).

sonst Verknüpfung nicht def., vgl. 2.1.3(iii)

**Theorem 3.1.25 (Kettenregel).**

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen mit  $f(I) \subseteq J$ . Ist  $f$  differenzierbar in  $\xi \in I$  und ist  $g$  differenzierbar in  $\eta := f(\xi) \in J$ , dann ist die Verknüpfung  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\xi$  und es gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

**Bemerkung 3.1.26 (Zur Kettenregel).**

- (i) (Schreibweise) In der Leibnitz'schen Schreibweise (vgl. 3.1.12) hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{d\xi}.$$

Wobei hier  $g$  mittels Verknüpfung mit  $f$  als Funktion von  $\xi$  zu verstehen ist, also  $g(\xi) := g \circ f(\xi)$ .

- (ii) (Beweisidee für 3.1.25) Folgende (einfache und brutale) Beweisstrategie/Rechnung ist naheliegend: Sei  $\xi \neq x \in I$ , dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \rightarrow g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Das Problem dabei ist aber, dass  $f(x) - f(\xi) = 0$  gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar! Er kann repariert werden, siehe z.B. [5, §15, Satz 4] oder man kann — wie wir es gleich tun werden — das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 3.1.21 umgehen.

*Beweis von Theorem 3.1.25.* (Wiederholtes Anwenden von 3.1.21 und die Rechnung konsequent bis zum Schluss durchstehen.)

Zunächst verwenden wir 3.1.21 um die Voraussetzung umzuschreiben. Seien  $h$  und  $k$  so, dass  $\xi + h \in I$  und  $\eta + k \in J$  gilt. Weil  $f$  differenzierbar in  $\xi$  ist, gilt

$$f(\xi + h) - f(\xi) = f'(\xi)h + r_1(h) \quad \text{mit} \quad \rho_1(h) := \frac{r_1(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.8)$$

und weil  $g$  differenzierbar in  $\eta$  ist, gilt analog

$$g(\eta + k) - g(\eta) = g'(\eta)k + r_2(k) \quad \text{mit} \quad \rho_2(k) := \frac{r_2(k)}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0). \quad (3.9)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g \circ f(\xi + h) - g \circ f(\xi) &= g(f(\xi + h)) - g(f(\xi)) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} g'(\eta)(f(\xi + h) - f(\xi)) + r_2(f(\xi + h) - f(\xi)) \\ &\stackrel{(3.8)}{=} g'(\eta)(f'(\xi)h + r_1(h)) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ &=: g'(\eta)f'(\xi)h + r(h), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\eta = f(\xi) \text{ und } k = f(\xi + h) - f(\xi)$

Diesen Ausdruck müssen wir anschauen, vgl. 3.1.21

wobei für den „Restterm“ gilt

$$\begin{aligned} r(h) &= g'(\eta)r_1(h) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ &\stackrel{(3.8)}{\stackrel{(3.9)}}{=} g'(\eta)\rho_1(h)h + \rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))(f'(\xi)h + r_1(h)). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\frac{r(h)}{h} = g'(f(\xi)) \underbrace{\rho_1(h)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \underbrace{(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

und mit (der Rückrichtung von) 3.1.21 folgt, dass  $g \circ f$  differenzierbar in  $\xi$  ist mit

$$(g \circ f)'(\xi) \stackrel{(3.10)}{=} g'(f(\xi))f'(\xi). \quad \square$$

### Bemerkung 3.1.27 (Ableitung der Umkehrfunktion).

Sei  $f: I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$  eine reelle, bijektive Funktion auf einem Intervall. Angenommen,

Dieser Ausdruck muss ja berechnet werden

Trick!

$f$  ist differenzierbar in  $\xi \in I$  und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  (existiert, weil  $f$  bijektiv) ist differenzierbar in  $\eta := f(\xi)$ . Wir können daher die Kettenregel in  $\xi$  anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_I, \quad (3.11)$$

wobei  $\text{id}_I$  die Identität auf  $I$  ist, vgl. [7, 4.3.30]. Das ergibt

$$(f^{-1} \circ f)'(\xi) \stackrel{3.1.25}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \stackrel{(3.11)}{=} \text{id}'(\xi) \stackrel{3.1.10(ii)}{=} 1. \quad (3.12)$$

Insbesondere gilt also  $f'(\xi) \neq 0$  und wir können (3.12) mit  $\xi = f^{-1}(\eta)$  umschreiben zu

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \quad (3.13)$$

Bemerke, dass diese Überlegungen den entscheidenden Nachteil haben, dass wir die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in  $\eta$  *voraussetzen* mussten. Wie wir diesen „Schönheitsfehler“ vermeiden und die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  aus der von  $f$  folgern können, diskutieren wir als nächstes. Zuvor erinnern wir noch an den Umkehrsatz 2.2.19 für stetige Funktionen.

### Erinnerung und Motivation 3.1.28 (Umkehrfunktion).

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow J := f(I)$  stetig und streng monoton. Dann besagt Theorem 2.2.19, dass  $J$  ein Intervall,  $f$  bijektiv und  $f^{-1} : J \rightarrow I$  stetig und streng monoton ist.

Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\xi \in I$  unter der Bedingung  $f'(\xi) \neq 0$  schon die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in  $\eta := f(\xi)$  folgt. Wegen 3.1.27 ist diese Bedingung auch *notwendig*: Denn falls Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in  $\eta = f(\xi)$  gegeben ist, gilt die Formel (3.13), also muss  $f'(f^{-1}(\eta)) = f'(\xi) \neq 0$  gelten!

### Theorem 3.1.29 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion).

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und stetig auf dem Intervall  $I$ . Ist  $f$  differenzierbar in  $\xi$  mit  $f'(\xi) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J := f(I) \rightarrow I$  differenzierbar in  $\eta := f(\xi)$  und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

*Beweis.* (Geschickte Kombination der Differenzierbarkeitsvoraussetzung an  $f$  mit der Stetigkeit der Inversen)

Sei  $(\eta_n)_n$  eine Folge in  $J \setminus \{\eta\}$  mit  $\eta_n \rightarrow \eta$ . Da  $f$  bijektiv ist (vgl. 2.2.19(ii)), ist  $(\xi_n) := (f^{-1}(\eta_n))$  eine Folge in  $I \setminus \{\xi\}$  und aufgrund der Stetigkeit von  $f^{-1}$  (vgl. 2.2.19(iii)) gilt  $\xi_n \rightarrow \xi$ . Daher

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \rightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

also ist  $f^{-1}$  differenzierbar in  $\eta$  (vgl. 3.1.7(i), 3.1.5) mit Ableitung

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \quad \square$$

**Beispiel 3.1.30 (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel).**

- (i) Die Logarithmusfunktion ist differenzierbar auf  $(0, \infty)$  (also auf ihrem gesamten Definitionsbereich) und es gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Tatsächlich ist  $\log = \exp^{-1}$  (per definitionem, siehe 2.3.1(ii)) und  $\exp$  ist differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}$  nach 3.1.10(iv) mit  $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$  wegen 1.4.40(i). Also können wir 3.1.29 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

- (ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

herleiten, die oft auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet wird<sup>7</sup>. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(i)}{=} \log'(1) \stackrel{3.1.7(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log(1)}{\frac{1}{n}} \\ &\stackrel{\log(1)=0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \stackrel{2.3.2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &\stackrel{\substack{\log \text{ stetig} \\ 2.3.20(ii)}}{=} \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right), \end{aligned}$$

und daher mittels  $\exp$  auf beiden Seiten der Gleichung angewandt

$$e = \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Beispiel 3.1.31 (Weitere differenzierbare Funktionen).**

- (i) Die *allgemeine Potenzfunktion*  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, \infty)$ ) ist differenzierbar und es gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

<sup>7</sup> Wir haben  $e$  ja als  $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  definiert, vgl. 1.4.37.  
 $f$  diffbar in  $\xi$  mit  $f'(\xi) \neq 0$  & 1.2.26

und daher insbesondere

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{und} \\ (\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Tatsächlich können wir nämlich rechnen

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &\stackrel{2.3.4(i)}{=} (\exp(\alpha \log(x)))' \stackrel{3.1.25}{=} \exp'(\alpha \log x) (\alpha \log x)' \\ &\stackrel{3.1.10(iv)}{=} \exp(\alpha \log x) \alpha \log'(x) \stackrel{3.1.30(i)}{=} x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

- (ii) (Affine Variablentransformation) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $g(x) := f(ax+b)$  differenzierbar mit

$$g'(x) \stackrel{3.1.25}{=} f'(ax+b)(ax+b)' = af'(ax+b).$$

- (iii) Der Arcussinus (vgl. 2.3.26(ii))  $\arcsin = \sin^{-1}$  ist auf  $(-1, 1)$  differenzierbar und es gilt

$$\arcsin'(x) \stackrel{3.1.29}{=} \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$   
auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$

- (iv) Der Arcustangens (vgl. 2.3.26(iii)) ist differenzierbar auf seinem ganzen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\arctan'(x) \stackrel{3.1.29}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \stackrel{3.1.18(ii)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

### Bemerkung 3.1.32 (Höhere Ableitungen).

- (i) (Notation und Definition) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (auf ganz  $I$ ) differenzierbar. Dann definieren wir die *Ableitungsfunktion* durch

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Funktion  $f'$  stellen — insbesondere nach ihrer Differenzierbarkeit.

Ist die Ableitungsfunktion  $f'$  ihrerseits in  $\xi \in I$  differenzierbar, so schreiben wir  $f''(\xi)$  für die Ableitung von  $f'$  in  $\xi$  und nennen  $f''(\xi)$  die 2. *Ableitung* von  $f$  in  $\xi$ . Ist  $f'$  auf ganz  $I$  differenzierbar, so definieren wir die 2. *Ableitungsfunktion* von  $f$  als

$$f'': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f''(x).$$

Oft schreibt man auch  $f^{(2)}$  für  $f''$ . Induktiv definieren wir nun die  $n$ -te Ableitung von  $f$  in  $\xi \in I$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  (sofern sie überhaupt existiert) durch

$$f^{(n)}(\xi) := (f^{(n-1)})'(\xi)$$

die  $n$ -te Ableitung  
ist die Ableitung  
der  $(n-1)$ -ten Ableitung

und ebenso die  $n$ -te Ableitungsfunktion  $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Zusammenhang schreiben wir auch  $f^{(0)}$  für  $f$  selbst.

(ii) (Ein Beispiel) Wir berechnen sukzessive die Ableitungen des Sinus:

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x), \\ \sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x), \\ \sin'''(x) &= -\sin'(x) = -\cos(x), \\ \sin^{(4)}(x) &= -\cos'(x) = \sin(x), \\ \sin^{(5)}(x) &= \sin'(x) = \cos(x),\end{aligned}$$

usw., also gilt allgemein für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin \quad \text{und} \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos.$$

Somit ist  $\sin$  beliebig oft differenzierbar, d.h.  $n$ -mal differenzierbar für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Solche Funktionen nennt man auch *glatt* oder  $C^\infty$ -Funktionen.

Funktionen, die  $n$ -mal differenzierbar sind und deren  $n$ -te Ableitung stetig ist, nennt man auch  $n$ -mal stetig differenzierbar oder  $C^n$ -Funktionen. Genauer bezeichnet man mit  $C^n(I)$  die Menge (eigentlich den Vektorraum) der auf dem Intervall  $I$  definierten und  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen. In diesem Zusammenhang schreiben wir auch  $C^0(I)$  für die (den Vektorraum der) stetigen Funktionen auf  $I$ .

(iii) **Warnung 1.** ( $C^n \not\subset C^{n+1}$ )

Eine differenzierbare Funktion muss keine differenzierbare Ableitung haben, denn z.B. ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

zwar  $C^1$  aber nicht zweimal differenzierbar in  $\xi = 0$ . (Details: UE)

(iv) **Warnung 2.** (differenzierbar  $\not\subset C^1$ )

Noch schlimmer, es muss die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht einmal stetig sein, z.B. ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar aber nicht  $C^1$ , denn  $f'$  ist nicht stetig in  $\xi = 0$ . (Details: UE)



## 3.2 Eigenschaften Differenzierbarer Funktionen

### 3.2.1 (Intro).

In diesem Abschnitt kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Funktionen in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 3.1.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mithilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Funktion selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von De L'Hospital beweisen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS), den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise.

#### 3.2.1A Notation/Sprechweise. (Randpunkte und innere Punkte von Intervallen)

Sei  $I$  ein Intervall.

- (i) Falls  $I$  beschränkt ist, also von der Form (vgl. 0.1.6)  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  oder  $(a, b)$ , dann heißen  $a$  und  $b$  *Randpunkte* von  $I$ .
- (ii) Falls  $I$  halbbeschränkt ist, also von der Form  $[a, \infty)$  oder  $(a, \infty)$  (bzw.  $(-\infty, b]$  oder  $(-\infty, b)$ ), dann heißt  $a$  (bzw.  $b$ ) *Randpunkt* von  $I$ .
- (iii)  $\xi \in I$  heißt *innerer Punkt* von  $I$ , falls  $\xi$  kein Randpunkt ist.
- (iv) Z.B. ist die Menge der inneren Punkte (das sog. *Innere*) von  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  und  $(a, b)$  jeweils  $(a, b)$ .

Insbesondere besteht jedes offene Intervall nur aus den inneren Punkten, ist also gleich seinem Inneren.

#### Definition 3.2.2 (lokale Extremwerte).

Sei  $I$  ein Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion.

- (i) Ein Punkt  $\xi \in I$  heißt *lokales Maximum* von  $f$ , falls es eine Umgebung von  $\xi$  gibt auf der  $f$  nur Funktionswerte kleiner-gleich  $f(\xi)$  annimmt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \quad f(\xi) \geq f(x). \quad (3.14)$$

- (ii) Der Punkt  $\xi$  heißt *striktes lokales Maximum* (lokales Maximum!striktes) von  $f$ , falls in (3.14) „ $\geq$ “ nur im Punkt  $x = \xi$  gilt.
- (iii) Analog sind (*strikte*) *lokale Minima* definiert, d.h.  $\xi$  heißt (striktes) lokales Minimum, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \quad f(\xi) \leq f(x) \quad (\text{und „}\leq\text{“ nur im Punkt } x = \xi \text{ gilt}).$$

- (iv) In beiden Fällen spricht man von einer (*strikten*) *lokalen Extremstelle* oder einem (*strikten*) *lokalen Extremum*.

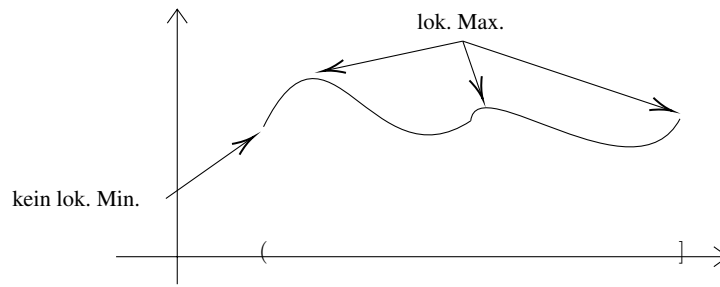


Abb. 3.11 Lokale Minima und Maxima

**Bemerkung 3.2.3 (Extrema und Ableitung, die Idee).** Den Inhalt von Definition 3.2.2 für *innere* Punkte  $\xi$  für ein striktes lokales Maximum können wir wie in Abbildung 3.12 veranschaulichen. Geometrisch erwarten wir uns, dass — falls  $f$  differenzierbar in  $\xi$  ist —  $f$  dort eine waagrechte Tangente hat, also  $f'(\xi) = 0$  gilt. Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden.

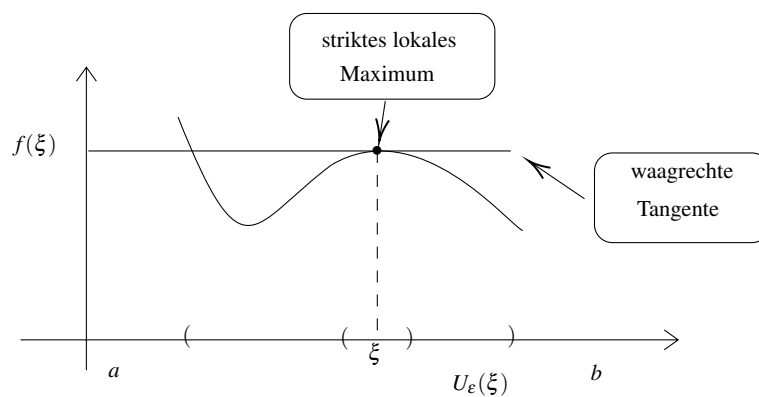


Abb. 3.12 Ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion und ihre Tangente

**Proposition 3.2.4 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $\xi$  ein innerer Punkt von  $I$ .

Falls  $\xi$  lokales Extremum von  $f$  ist, dann gilt  $f'(\xi) = 0$ .

*Beweis.* (Explizites Auswalzen der Idee aus 3.2.3) Wir behandeln nur den Fall des lokalen Maximums, der Fall des Minimums ist völlig analog.

Sei also  $\xi$  ein (nicht notwendigerweise striktes) lokales Maximum. Dann gilt nach Definition 3.2.2(i)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x).$$

Da  $f$  in  $\xi$  differenzierbar ist, ergibt sich für den Differentialquotienten

$$\lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\substack{\geq 0, \text{ da} \\ \text{Zähler} \leq 0, \text{ Nenner} \leq 0}} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\substack{\leq 0, \text{ da} \\ \text{Zähler} \leq 0, \text{ Nenner} \geq 0}},$$

also  $0 \leq f'(\xi) \leq 0$  und damit  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Beispiel 3.2.5 (Extrema des Sinus).**

Wir betrachten  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In 2.3.22(ii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) liegen, siehe Abbildung 3.13, denn via  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  sind es genau die Nullstellen des  $\cos$ . Tatsächlich gilt auch

$$\sin' \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \stackrel{2.3.21(iv)}{=} 0.$$

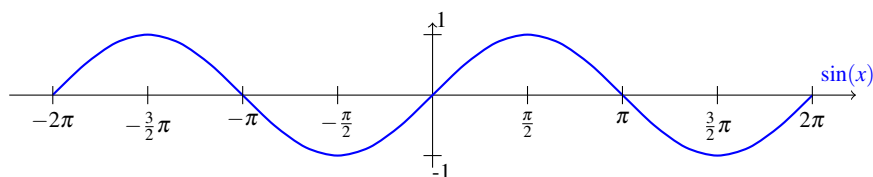


Abb. 3.13 Die Extrema des Sinus

**Warnung 3.2.6 (Notwendig vs. hinreichend, lokal vs. global).**

- (i) Proposition 3.2.4 sagt, dass  $f'(\xi) = 0$  eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist.

Sie ist aber *nicht hinreichend*<sup>8</sup>, wie das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

zeigt. Es gilt  $f'(x) = 3x^2$  und daher  $f'(0) = 0$ . Aber  $\xi = 0$  ist kein lokales Extremum, denn  $f(0) = 0$  und jede Umgebung  $U_\varepsilon(0)$  enthält positive und negative  $x$  und damit nimmt  $f$  auf  $U_\varepsilon(0)$  positive und negative Werte an.

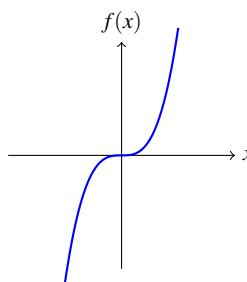


Abb. 3.14  $f(x) = x^3$  hat in 0 kein Extremum

<sup>8</sup> Für die wichtige Terminologie „notwendig“ und „hinreichend“ siehe [7, p. 86, graue Box].

Daher gilt also

$$\boxed{\xi \text{ lokales Extremum} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \nRightarrow \end{array} \quad f'(\xi) = 0.}$$

Daher sind Nullstellen von  $f'$  *nur Kandidaten* für lokale Extrema.

- (ii) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann besagt 2.2.12, dass  $f$  globale Maxima und Minima auf  $[a, b]$  besitzt.

Diese können am Rand von  $[a, b]$  liegen, also in  $a$  oder in  $b$ . Selbst falls  $f$  differenzierbar auf  $[a, b]$  ist (mit einseitigen Ableitungen in  $a, b$ ), müssen  $f'(a)$  und  $f'(b)$  *nicht* verschwinden, wie das

Beispiel

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x$$

zeigt. Tatsächlich hat  $f$  ein Minimum in  $\xi = 0$  und ein Maximum in  $\xi = 1$ , aber  $f'(0) = 1 = f'(1)$ .

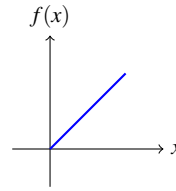


Abb. 3.15  $f'(x) = x' = 1 \neq 0$

Beachte, dass dieses Beispiel *nicht* im Widerspruch zu 3.2.4 steht, da 0 und 1 *keine inneren* Punkte von  $I = [0, 1]$  sind, also 3.2.4 über  $f'(0)$  und  $f'(1)$  keine Aussage macht.

Ebenso, wenn wir  $f(x) = x$  auf  $I = (0, 1)$  betrachten: dann hat  $f$  weder Minima noch Maxima (nur inf und sup) und 3.2.4 sagt auch in diesem Fall gar nichts aus.

### Motivation 3.2.7 (lokale Änderungsrate - globale Eigenschaften - MWS).

- (i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlauben wird, aus der Kenntnis der Ableitung einer Funktion (in allen Punkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Funktion abzuleiten: den *Mittelwertsatz* (MWS).
- (ii) Dessen Aussage ist anschaulich evident: Im Intervall  $[a, b]$  muss es einen Punkt geben, in dem die Tangente parallel zur Sekante ist, siehe Abbildung 3.16.

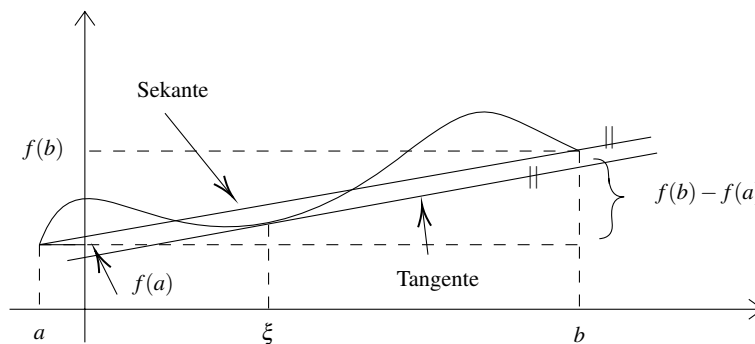


Abb. 3.16 Die Aussage des MWS

- (iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der Mechanik (vgl. 3.1.13):

Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muss irgendwann die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130km/h überschritten worden sein.

Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muss einen Zeitpunkt geben, an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135km/h ist.

Nun zur Formulierung des MWS:

**Theorem 3.2.8 (Mittelwertsatz).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es einen Punkt  $\xi \in (a, b)$  mit

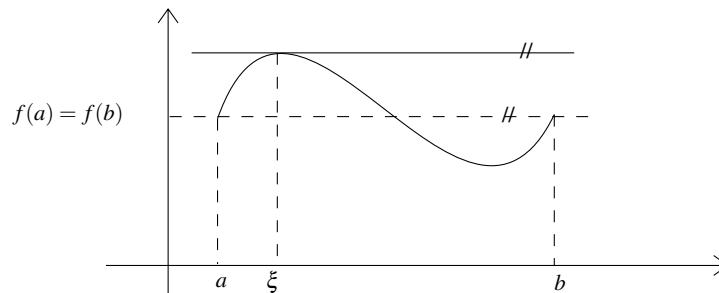
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

oder (was dasselbe ist)

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).} \quad (3.15)$$

**Bemerkung 3.2.9.** (Beweisstrategie: „Drehen“ des Graphen)

- (i) Die grundlegende Beweisstrategie besteht darin, den Graphen von  $f$  zu modifizieren und so  $f(a) = f(b)$  zu erreichen. Damit müssen wir nur einen Punkt mit  $f'(\xi) = 0$  finden, was wir mittels 3.2.4 tun werden.



**Abb. 3.17** Die Aussage des MWS nach Drehung des Graphen

- (ii) Die Idee ein solches  $\xi$  zu finden ist die folgende. Interpretieren wir  $f$  als die „Höhenfunktion“ bei einer Bergwanderung. Dann bedeutet  $f(a) = f(b)$ , dass wir uns am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klarerweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort, wo wir vom Bergauf gehen zum Bergab gehen übergegangen sind — also jedenfalls am Gipfel, der einem lokalen Maximum entspricht — eine waagrechte Tangente gehabt haben.

Diese Idee gießen wir nun in wasserdichte Mathematik.

**Lemma 3.2.10 (Satz von Rolle).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Falls  $f(a) = f(b)$ , dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = 0.$$

*Beweis.* (Erfreulich kurz: Wir erzwingen die Existenz eines Extremums im Inneren und verwenden 3.2.4)

- (1) Falls  $f$  konstant ist, also  $f(x) = f(a) = f(b)$  für alle  $x \in (a, b)$  gilt, ist die Aussage trivial ( $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$  nach 3.1.10(i)).

Sei also  $f$  nicht konstant, dann gibt es ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) > f(a)$  oder  $f(x) < f(a)$ . O.B.d.A. können wir also annehmen, dass

$$\exists x \in (a, b) : \quad \text{mit } f(x) > f(a) = f(b) \quad (3.16)$$

(sonst können wir analog vorgehen).

- (2) Da  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist, hat  $f$  wegen 2.2.12 ein Maximum in  $[a, b]$ , d.h.

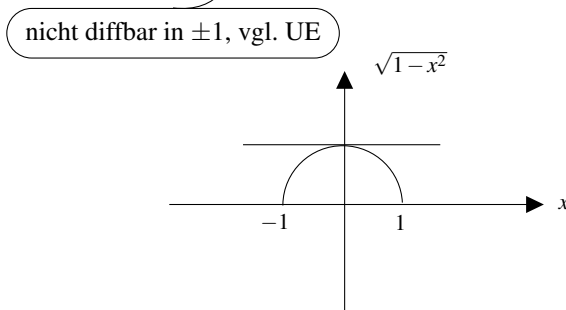
$$\exists \xi \in [a, b] \text{ mit } f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.17)$$

- (3) Wegen (3.16) kann  $\xi$  nicht am Rand liegen, also ist  $\xi$  ein innerer Punkt,  $\xi \in (a, b)$  und wir können 3.2.4 verwenden. Mit (3.17) folgt daher  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.11 (Zum Satz von Rolle und seinem Beweis).**

- (i) Beachte, dass der Beweis und auch der Satz wesentlich auf Theorem 2.2.12 beruhen, also darauf, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Minima und Maxima besitzen — und somit letztlich wiederum auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ !
- (ii) Die Voraussetzungen, also dass  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf dem Inneren  $(a, b)$  von  $[a, b]$  sei, sind natürlich teilweise redundant: Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $(a, b)$  folgt natürlich die Stetigkeit von  $f$  in  $(a, b)$ , vgl. 3.1.15.

Natürlich hätten wir auch  $f$  differenzierbar auf  $[a, b]$  voraussetzen können. Da diese Voraussetzung stärker ist, würde das Lemma schwächer werden, z.B. wäre die Funktion  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  auf  $[-1, 1]$  nicht erfasst,



**Abb. 3.18** Graph der Funktion  $\sqrt{1-x^2}$

- (iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind (Details: UE).
- (iv) Wir beweisen jetzt den MWS, indem wir den Graphen der Funktion im MWS in „Rolle-Position“ bringen.

**3.2.12. Beweis des MWS.** (Drehen des Graphen in „Rolle-Position“ erledigt alles.) Sei  $f$  wie im Theorem. Wir definieren

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \quad (3.18)$$

Dann ist  $g$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Außerdem gilt  $g(a) = f(a) = g(b)$ . Daher liefert der Satz von Rolle 3.2.10

$$\exists \xi \in (a, b) \quad \text{mit} \quad 0 = g'(\xi) \stackrel{(3.18)}{=} f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

**Bemerkung 3.2.13 (Anwenden des MWS).**

Der MWS ist ein *reines* Existenzresultat — in dem Sinn, dass die Existenz von  $\xi$  mit der entsprechenden Eigenschaft zwar garantiert ist, er aber keine Möglichkeit liefert,  $\xi$  auch tatsächlich konkret zu bestimmen. Das ist bei „Existenzmaschinen“ (fast) immer so, vgl. 2.2.7.

Daher wird der MWS meist in der Form (3.15) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung (vgl. 3.1.1) kennenlernen, die globale Aussagen über die Funktion ermöglichen, genauer über *Wachstumsschranken und Monotonie*.

**Korollar 3.2.14 (Wachstumsschranken).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ .

(i) Falls  $f'$  beschränkt ist, d.h.  $\exists C > 0$  mit

$$|f'(x)| \leq C \quad \forall x \in (a, b),$$

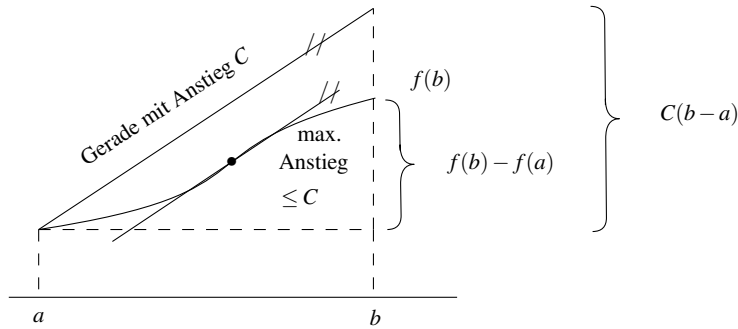
dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C |x_2 - x_1|. \quad (3.19)$$

(ii) Falls  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann ist  $f$  konstant, genauer:  $f(x) = f(a) = f(b)$  für alle  $x \in (a, b)$ .

**Bemerkung 3.2.15 (Lipschitz-Stetigkeit).**

(i) Die Bedeutung von 3.2.14(i) können wir leicht veranschaulichen, siehe Abbildung 3.19



**Abb. 3.19** Wachstumsschranken durch Gerade mit maximalem Anstieg.

Eine Funktion  $f$  mit  $|f'(x)| \leq C$  für alle  $x$  kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg  $C$ , die in  $(a, f(a))$  startet, genauer  $f(x)$  muss kleiner sein als  $f(a) + C(x - a)$ , also insbesondere gilt  $f(b) - f(a) \leq C(b - a)$ .

- (ii) Funktionen, die (3.19) erfüllen, heißen *Lipschitz-stetig* oder *dehnungsbeschränkt*, genauer:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  ein Intervall) heißt Lipschitz-stetig, falls

$$\exists C > 0 : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

Die Funktionswerte liegen also nicht weiter auseinander als die Argumente mal einer fixen Konstante  $C$ , genannt *Dehnungsschranke* oder *Lipschitz-Konstante*.

- (iii) Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, ja sogar gleichmäßig stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt (jeweils auf  $I$ )

$$\text{Lipschitz-stetig} \xRightarrow{\quad} \text{gleichmäßig stetig} \xRightarrow{\quad} \text{stetig.} \quad (2.2.16)$$

- (iv) Wir können 3.2.14(i) nun auch so ausdrücken: Differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung sind nicht nur (gleichmäßig) stetig sondern sogar Lipschitz-stetig.

*Beweis von 3.2.14.* (Nur Buchhaltung und erfreulich einfach)

- (i) Sei  $f$  wie in der Behauptung. Dann gilt wegen des Mittelwertsatzes: Für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$   $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , sodass

$$|f(x_2) - f(x_1)| \stackrel{(3.15)}{=} |f'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq C |x_2 - x_1|. \quad \text{laut Voraussetzung}$$

- (ii) Laut Voraussetzung ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$  und damit gilt wegen (3.20) mit  $C = 0$

$$f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad \square$$



**Beispiel 3.2.16 (Der Sinus ist dehnungsbeschränkt).**

Sei  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$ . Dann gilt

$$f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{sogar } \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right])$$

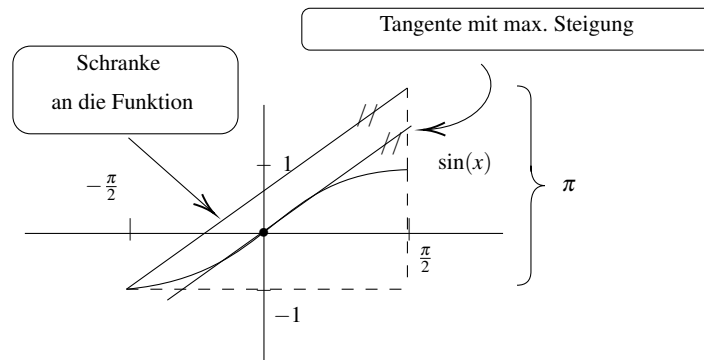
und daher

$$|f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Mit 3.2.14(i) ergibt sich also

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

siehe auch Abbildung 3.20.



**Abb. 3.20** Dehnungsschranke für den Sinus

**Proposition 3.2.17 (Monotonie via Ableitung).**

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt:

- |   |            |  |
|---|------------|--|
| (i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ | $\iff$     | $f$ ist monoton wachsend auf $[a, b]$        |
| (ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$   | $\implies$ | $f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$ |

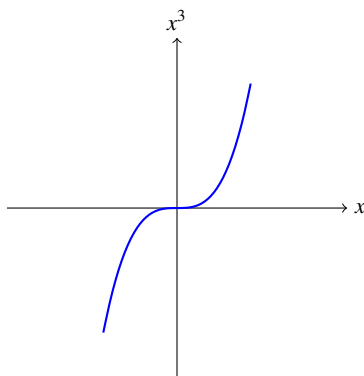
(iii) Beide Punkte (i) und (ii) gelten analog für  $f'(x) \leq 0$  bzw.  $f'(x) < 0$  und (streng) monoton fallend.

**Warnung 3.2.18.**

Die Umkehrung von (ii) ist falsch, d.h.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \not\implies f \text{ ist streng monoton wachsend auf } [a, b].$
--

Tatsächlich kann die Ableitung streng monotoner Funktionen in einzelnen Punkten verschwinden, wie etwa für  $f(x) = x^3$ . Zwar ist  $f$  streng monoton wachsend, etwa auf  $[-1, 1]$ , aber  $f'(0) = 0$ , siehe Abbildung 3.21.



**Abb. 3.21**  $f(x) = x^3$  ist streng monoton wachsend, obwohl  $f'(0) = 0$  gilt!

*Beweis von 3.2.17.*

(i)  $\Rightarrow$  und (ii): (Eine geschickte Anwendung des MWS.)

Wir gehen indirekt vor und nehmen an,  $f$  sei nicht (streng) monoton wachsend, d.h.

$$\exists x_1 < x_2 \in [a, b] \text{ mit } f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Der Mittelwertsatz ergibt nun

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Aber das bedeutet, dass  $f'(\xi) < 0$  (bzw.  $f'(\xi) \leq 0$ ), was ein Widerspruch ist.

(i)  $\Leftarrow$ : (Einfach die Definition der Ableitung verwenden und über die Vorzeichen Buchführen)

Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt für alle  $x, \xi \in (a, b)$  mit  $x \neq \xi$ , dass

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0, \quad \left( \begin{array}{l} \xi > x \Rightarrow \text{Zähler und Nenner} \geq 0 \\ \xi < x \Rightarrow \text{Zähler und Nenner} \leq 0 \end{array} \right)$$

somit  $f'(\xi) \geq 0$  für alle  $\xi \in (a, b)$ .  $\square$

### Motivation 3.2.19 (Bedingungen für lokale Extrema).

Wir haben nun die Theorie soweit entwickelt, dass wir unser Wissen über das Auftreten lokaler Extrema mit Hilfe der Differentialrechnung entscheidend erweitern können. Sei dazu  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall definierte, differenzierbare Funktion. Wir haben schon in 3.2.4 gesehen, dass für das Auftreten eines lokalen Extremums in einem inneren Punkt  $\xi$  von  $I$  notwendigerweise die Ableitung  $f'(\xi)$  verschwinden muss. Wir haben in 3.2.6 allerdings auch gesehen, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, also  $f'(\xi) = 0$  nicht unbedingt dazu führen muss, dass tatsächlich ein lokales Extremum vorliegt — in diesem Fall ist  $\xi$  nur Kandidat für eine Extremstelle.

Mit unserer Beschreibung der Monotonie mittels Ableitungen in 3.2.17 können wir nun eine hinreichende Bedingung für Extrema angeben. Genauer können wir eine Zusatzbedingung angeben, die aus einer „Kandidatenstelle“  $\xi$  mit  $f'(\xi) = 0$  eine Extremstelle macht. Dazu müssen wir unsere Monotonieüberlegungen aus 3.2.17 anwenden und werden dabei eine aus der Schule altbekannte „Merkregel“ für „Kurvendiskussionen“ wiederentdecken!

**Korollar 3.2.20 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema).**

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, sei  $\xi \in (a, b)$  und sei  $f$  in  $\xi$  zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \quad \text{und} \\ f''(\xi) > 0 \quad (f''(\xi) < 0) \end{array} \implies f \text{ hat in } \xi \text{ ein striktes lokales Minimum (Maximum).}$$

*Beweis.* (Wiederum Buchhaltung über die Vorzeichen des Differenzenquotienten, diesmal für  $f'$ .)

Sei  $\xi$  wie oben und  $f'(\xi) = 0$ ,  $f''(\xi) > 0$  (der Fall  $f''(\xi) < 0$  ist völlig analog). Dann gilt nach Definition der 2. Ableitung

$$0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}.$$

Daher gibt es nach der Grenzwertdefinition 2.1.21 für Funktionen ein  $\varepsilon > 0$  sodass

$$\text{für alle } x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon), x \neq \xi : 0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} \stackrel{f'(\xi)=0}{=} -\frac{f'(x)}{\xi - x}.$$

Somit gilt für  $x \neq \xi$  mit

$$x \in (\xi - \varepsilon, \xi) : f'(x) < 0 \stackrel{3.2.17(i)}{\implies} f \text{ streng monoton fallend,}$$

$$x \in (\xi, \xi + \varepsilon) : f'(x) > 0 \stackrel{3.2.17(i)}{\implies} f \text{ streng monoton wachsend.}$$

Daraus folgt, dass  $f(x)$  für alle  $x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$  (also „knapp links“ von  $\xi$ ) und auch für alle  $x \in (\xi, \xi + \varepsilon)$  (also „knapp rechts“ von  $\xi$ ) größer  $f(\xi)$  ist. Damit ist  $\xi$  tatsächlich striktes lokales Minimum, vgl. 3.2.2.  $\square$

**Beispiel 3.2.21 (Nochmals Extrema des Sinus).**

Wie in 3.2.5 wiederholt, wissen wir seit 2.3.22(ii), dass die Extrema des Sinus in  $\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$  liegen. Wie in 3.2.5 nachgeprüft, gilt klarerweise die notwendige Bedingung für Extrema 3.2.4. Es sind aber auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 3.2.20 erfüllt:

$$\begin{aligned} \sin' \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) &= \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \stackrel{2.3.20(iv)}{=} 0, \\ \sin'' \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) &= -\sin \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \begin{cases} +1, & k \text{ ungerade,} \\ -1, & k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Daher sind die Stellen  $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) Minima und die Stellen  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) Maxima des Sinus, vgl. auch Abbildung 3.13.

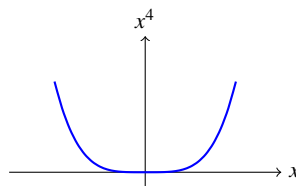
**Warnung 3.2.22 (Hinreichend nicht notwendig!).**

Es ist wichtig zu betonen, dass die Bedingung 3.2.20 zwar hinreichend aber *nicht notwendig* ist. Das zeigt etwa das Beispiel

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^4.$$

Denn  $f$  hat ein striktes lokales Minimum in  $\xi = 0$ , weil  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x^4 > 0$  für alle  $x \neq 0$ . Aber  $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$  und somit gilt  $f'(0) = 0$ .

Anschaulich gesprochen ist  $x^4$  bei Null so flach, dass die 2. Ableitung „nicht sieht“, dass ein Minimum auftritt.

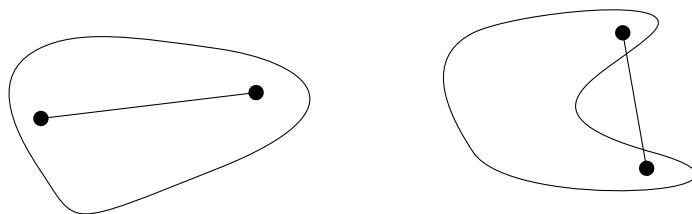


**Abb. 3.22**  $f(x) = x^4$  hat in  $\xi = 0$  ein str. lok. Minimum, obwohl  $f''(x) = 0$  gilt.

**Motivation 3.2.23 (Konvexität).**

Als nächsten Begriff, den wir mittels Differentialrechnung beschreiben können, befassen wir uns mit dem Krümmungsverhalten von Funktionen und mit dem Begriff *Konvexität*. Diesen werden wir über die 2. Ableitung „erkennen“ können.

- (i) Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesamte Verbindungsgerade in der Menge liegt, siehe Abbildung 3.23.



**Abb. 3.23** Eine konvexe und eine nicht konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$

- (ii) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  werden wir konvex nennen (offizielle Definition unten), falls die Menge *über* ihrem Graphen konvex ist. Anders ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je zwei Punkten *über* dem Graphen liegt, siehe Abbildung 3.24.
- (iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für  $\lambda \in [0, 1]$  durchläuft

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

das abgeschlossene Intervall  $[x_1, x_2]$ . Analog durchläuft

$$y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (3.21)$$

die Sekante von  $f(x_2)$  bis  $f(x_1)$ . Jetzt brauchen wir nur noch  $f(x)$  mit einem  $y$  wie in (3.21) zu vergleichen: Ist  $y \geq f(x)$ , so liegt die Sekante über der Kurve, siehe Abbildung 3.24.

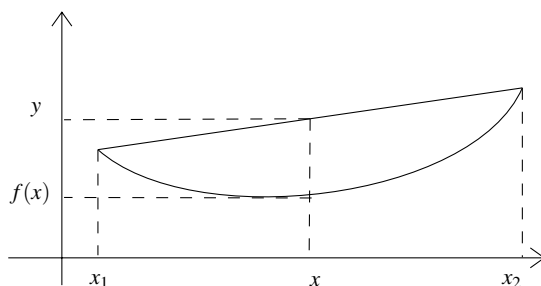


Abb. 3.24 Bei einer konvexen Funktion liegt die Sekante über dem Graphen

Jetzt aber offiziell:

**Definition 3.2.24 (Konvexe Funktion).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Intervall  $I$ .

- (i) Wir nennen  $f$  *konvex (linksgekrümmt)*, falls für alle  $x_1, x_2 \in I$  und für alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt, dass

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

- (ii) Wir nennen  $f$  *konkav (rechtsgekrümmt)*, falls  $-f$  konvex ist.

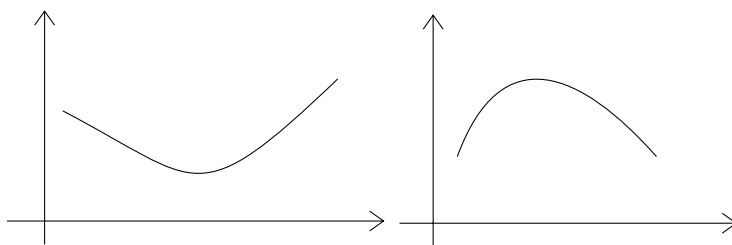


Abb. 3.25 Eine konvexe und eine konkave Funktion

**Proposition 3.2.25 (Konvexität via  $f''$ ).**

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$f \text{ konvex} \iff f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b).$
---

*Beweis.* (Mittelwertsatz und ziemlich technisch — das war aber aufgrund von 3.2.24 auch zu erwarten.)

⇐: Wir prüfen die Bedingung in 3.2.24(i) nach. Dazu sei o.B.d.A.  $x_1 < x_2$  und sei  $0 < \lambda < 1$ . Wir setzen  $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  und daher gilt  $x_1 < x < x_2$ .

Nach 3.2.17(i) ist  $f'$  monoton wachsend auf  $[x_1, x_2]$ . Ferner gibt es nach dem MWS auf  $[x_1, x_2]$  ein  $\xi_1 \in (x_1, x)$  und  $\xi_2 \in (x, x_2)$  mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (3.22)$$

Nun schreiben wir  $x - x_1$  um zu

$$x - x_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1) > 0$$

und

$$x_2 - x = x_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1) > 0.$$

Damit folgt aus (3.22)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Umformen ergibt

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

was sich durch Ausrechnen auf der linken Seite zur gesuchten Bedingung

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

vereinfacht.

⇒: Wir nehmen indirekt an, es gibt ein  $\xi$  mit  $f''(\xi) < 0$  und setzen

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x - \xi) \quad (x \in I). \quad (3.23)$$

Dann gilt:

- $\varphi$  ist 2-mal differenzierbar auf  $I$ ,
- $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$  und
- $\varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$ .

Wegen 3.2.20 hat  $\varphi$  ein striktes lokales Maximum in  $\xi$ , also gibt es nach Definition 3.2.2(ii) ein  $\varepsilon_0 > 0$  sodass

$$\varphi(x) < \varphi(\xi) \quad \forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \subseteq I.$$

Insbesondere gilt für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , dass

$$\varphi(x - \varepsilon) < \varphi(\xi), \quad \varphi(x + \varepsilon) < \varphi(\xi)$$

und daher

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2}(\varphi(\xi - \varepsilon) + \varphi(\xi + \varepsilon)) \stackrel{(3.23)}{=} \frac{1}{2}(f(\xi - \varepsilon) + f(\xi + \varepsilon)). \quad (3.24)$$

Setzen wir nun  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = \xi - \varepsilon$ ,  $x_2 = \xi + \varepsilon$ , dann lautet (3.24)

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}_{=\xi}) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

was ein Widerspruch zur Konvexität ist.  $\square$

**Beispiel 3.2.26 (Konvexe und konkave Funktionen).**

(i) (Quadratische Polynome) Sei  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Es gilt  $f''(x) = 2a$  und damit wegen 3.2.25

$$f \text{ ist konvex} \iff a > 0 \quad \text{und} \quad f \text{ ist konkav} \iff a < 0.$$

(ii) Die Exponentialfunktion ist konvex, denn mit 3.1.10(iv) und 1.4.40(i) gilt

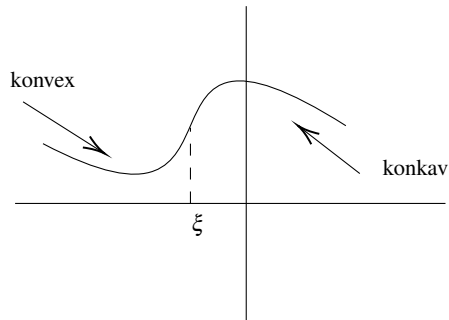
$$\exp''(x) = \exp(x) > 0.$$

(iii) Die Logarithmusfunktion ist konkav, denn mit 3.1.30(i),(iii) gilt

$$\log''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

**Bemerkung 3.2.27 (Wendestellen).**

(i) Punkte  $\xi \in I$ , in denen eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Krümmungsverhalten ändert, heißen *Wendestellen*. In einer Wendestelle ändert  $f$  ihr Verhalten also von konkav auf konvex oder umgekehrt, siehe Abbildung 3.26



**Abb. 3.26** Links der Wendestelle  $\xi$  ist  $f$  konvex, rechts davon konkav

- (ii) Falls  $f$  zweimal differenzierbar ist, dann besagt 3.2.25, dass eine Wendestelle ein Punkt ist, in dem  $f''$  das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von  $f''$  ist.

Analog zum Fall lokaler Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wendestellen  $\xi$  (nämlich  $f''(\xi) = 0$ ) und eine hinreichende Bedingung (nämlich  $f''(\xi) = 0, f'''(\xi) \neq 0$ ). (Details UE)

**Motivation 3.2.28 (Die Regeln von De L'Hospital).**

- (i) *Das Problem:* Bei der Betrachtung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$$

kann es vorkommen, dass zwar Zähler und Nenner (evtl. uneigentlich) konvergieren, aber trotzdem keine Aussage über den Limes des Quotienten gemacht werden kann. Das ist der Fall, wenn  $f, g \rightarrow 0$  oder  $f, g \rightarrow \pm\infty$  gilt<sup>9</sup>, wie etwa in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Zwar haben wir diese Probleme — jeweils mit passenden Methoden/Tricks — schon geknackt, vgl. 2.3.7 und 2.3.15(vii), praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differentialrechnung tatsächlich angegeben werden.

- (ii) *Die Idee:* Wir betrachten zur Illustration der Idee den Fall  $f, g$  differenzierbar und  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$  und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x$ . Dann gilt wegen 3.1.15  $f(\xi) = 0 = g(\xi)$  und somit

<sup>9</sup> In der Schulmathematik spricht man dann auch von den „undefinierten Ausdrücken“  $\frac{0}{0}$  bzw.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (3.25)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den Limes  $\frac{f(x)}{g(x)}$  durch den Limes  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir aber eine technische Verallgemeinerung des MWS.

**Lemma 3.2.29 (Verallgemeinerter MWS).**

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es einen Punkt  $\xi \in (a, b)$  mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

**Bemerkung 3.2.30 (Zum VMWS).**

Falls  $g'(x) \neq 0$  auf  $(a, b)$  dann gilt auch  $g(b) - g(a) \neq 0$ , denn nach dem MWS gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$ . Wegen  $g'(\xi) \neq 0$  für alle  $\xi \in (a, b)$  ergibt sich tatsächlich  $g(b) - g(a) \neq 0$ .

Damit können wir nun die Formel in 3.2.29 umschreiben zu

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments (3.25) in 3.2.28(ii).

*Beweis von 3.2.29.* Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad x \in [a, b],$$

an.  $\square$

**Satz 3.2.31 (Regeln von De L'Hospital).**

Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  differenzierbar und sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Sei zusätzlich

$$(i) \lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x), \quad \text{oder } (ii) \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty,$$

dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert (evtl. als uneigentlicher Limes  $\pm\infty$ ) existiert. Analoges gilt für den Limes  $x \nearrow b$ .

*Beweis.* (Lang & technisch). Wir betrachten nur den Fall  $x \searrow a$ .

(1) Sei zunächst

$$\eta := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \quad (3.26)$$

Wir wählen  $y_0, y_1$  mit  $\eta < y_1 < y_0 \stackrel{(3.26)}{\Rightarrow} \exists x_1 \in (a, b)$  sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (a, x_1). \quad (3.27)$$

Seien nun  $x, u \in (a, x_1) \stackrel{\text{VMWS}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x, u)$ :

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{(3.27)}{<} y_1 < y_0. \quad (3.28)$$

$g(x) - g(u) \neq 0$   
vgl. 3.2.30

Im Fall (i) gilt für  $x \searrow a$  wegen (3.28)

$$\frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0 \quad \forall u \in (a, x_1). \quad (3.29)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur  $g(x) \rightarrow +\infty$ , der andere Fall ist analog.

Zu festem  $u \in (a, x_1)$  bestimmen wir ein  $x_2 \in (a, u)$ , sodass

$$\begin{aligned} g(x) &> \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (a, x_2) \\ \Rightarrow \quad \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} &> 0 \quad \forall x \in (0, x_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.28)}{\Rightarrow} \quad \frac{f(x) - f(u)}{g(x)} &< y_1 \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} \\ \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} &< y_1 - y_1 \underbrace{\frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}}_{\rightarrow y_1 (x \searrow a)} \quad \forall x \in (a, x_2) \\ \stackrel{(3.28)}{\Rightarrow} \quad \exists x_3 : \quad \frac{f(x)}{g(x)} &< y_0 \quad \forall x \in (a, x_3). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zusammengefasst gilt also in den beiden Fällen (i) und (ii):  $\forall y_0 > \eta \exists x_0$ , sodass ((3.29), (3.30))

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (a, x_0). \quad (3.31)$$

(2) Analog folgt für  $\eta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :  $\forall \tilde{y}_0 < \eta \exists \tilde{x}_0$ :

$$\tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (a, \tilde{x}_0). \quad (3.32)$$

(3) Aus (3.31) und (3.32) ergibt sich nun die Behauptung, denn falls  $\eta = \pm\infty$  wird durch (3.31) bzw. (3.32) alles erledigt. Falls  $\eta \in \mathbb{R}$  ergibt die Kombination von (3.31) und (3.32):  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{x}_0$ , sodass

$$\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon \quad \forall x \in (a, \tilde{x}_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \eta. \quad \square$$

**Beispiel 3.2.32 (Die Regeln von De L'Hospital).**

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für (vgl. 2.3.7(vi))

$$\frac{\log(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Tatsächlich gilt

$$f(x) = \log(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \text{ und } g(x) = x^\alpha \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

und wir können 3.2.31 anwenden. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ und } g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

(ii) Wir berechnen

$$\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right).$$

Es gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

und wir versuchen 3.2.31 anzuwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \searrow 0), & g(x) &= x \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \searrow 0), \\ f'(x) &= 1 - \cos(x), & g'(x) &= \sin(x) + x \cos(x). \end{aligned}$$

Nun gilt  $f'(x) \rightarrow 0 \ (x \searrow 0)$  und  $g(x) \rightarrow 0 \ (x \searrow 0)$  und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten Anwendung von 3.2.31 diesmal auf  $f'/g'$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sin(x), & f'(x) &\rightarrow 0 \ (x \searrow 0), \\ g''(x) &= \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x), & g'(x) &\rightarrow 2 \ (x \searrow 0). \end{aligned}$$

Also erhalten wir schließlich

$$\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{3.2.31}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{3.2.31}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0.$$

## Kapitel 4

# Integration

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, der zweiten tragenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In 4.1 entwickeln wir den *Integralbegriff* für „schöne“ Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. Genauer definieren wir das *Riemann-Integral* über den Zugang über Treppenfunktionen. In 4.2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir *das* Hauptresultat der Vorlesung kennen, den

*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,*

der salopp gesprochen besagt, dass Differenzieren und Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen. In 4.3 lernen wir den *Satz von Taylor* kennen, der es erlaubt, *schöne* Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

In 4.4 werden wir uns schließlich mit *uneigentlichen Integralen* beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder solche, bei denen der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

### 4.1 Das Riemann-Integral

In diesem Paragraphen entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfacher Funktionen — der Treppenfunktionen — definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken). Das Integral für allgemeinere Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfunktionen definiert. Wir beginnen mit einer

**Motivation 4.1.1 (Zwei Wege zum Integralbegriff).**

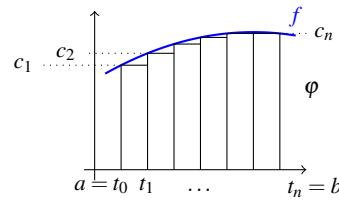
- (i) *Geometrische Motivation.* Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Funktion, d.h.  $f(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse bestimmen, also die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Falls  $f$  „hinreichend flach“ ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann. Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer *Treppenfunktion* (vgl. 2.1.2(x) und 4.1.2(i) unten) auffassen, siehe Abbildung 4.1.

phi

Sei also  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion, d.h. von der Form

$$\varphi(t) = \begin{cases} c_1 & a = t_0 \leq t < t_1 \\ c_2 & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & t_{n-1} \leq t < t_n = b \end{cases}$$



**Abb. 4.1** Treppenfunktion unterhalb des Graphen von  $f$

wobei  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  passend für  $f$  gewählt sind. Ein Näherungswert für die Fläche  $A$  unter dem Graphen von  $f$  ist die Fläche unter dem Graphen von  $\varphi$  — und diese können wir ganz leicht berechnen. Wir erhalten nämlich

$$A \approx \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \varphi(t_j) (t_j - t_{j-1}).$$

Höhe des Rechtecks

Basis des Rechtecks

- (ii) *Motivation aus der Mechanik* (vgl. 3.1.13) Sei  $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Ortsfunktion eines Massenpunkts  $P$ , d.h.  $s(t)$  gibt die Position von  $P$  zum Zeitpunkt  $t$  an. Dann ist die Momentangeschwindigkeit  $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Ableitungsfunktion von  $s$ , also

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende *Aufgabe*. Angenommen, wir kennen  $s(0)$ , also den Ausgangspunkt von  $P$  und wir kennen  $v(t) \forall t \in [0, T]$ . Wie können wir  $s(t)$  für  $0 < t \leq T$  bestimmen?

Betrachten wir dazu ein „kleines“ Zeitintervall  $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$ . Falls sich  $v(t)$  auf  $[t_1, t_2]$  wenig ändert (also fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den *Weggewinn* (Ortszunahme) gemäß der *Formel*

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit},$$

also

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \quad t \in (t_1, t_2).$$

Wenn wir diese Approximation auf den „kleinen“ Zeitintervallen  $[a = t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $[t_{n-1}, t_n = T]$  durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^n v(t_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktion  $\varphi$  auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \text{ für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

(iii) In beiden Fällen haben wir gesehen, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine für eine Integrationstheorie anbieten, ja geradezu aufdrängen. Daher beginnen wir damit, ein Integral für Treppenfunktionen zu definieren und seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch anmutende) Definition dieser Klasse (schöner!) Funktionen.

**Definition 4.1.2 (Treppenfunktionen).**

(i) Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion* (siehe auch Abbildung 4.2), falls es

- eine endliche Zerlegung  $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  des Intervalls  $[a, b]$  gibt, d.h.  $t_i \in [a, b]$  mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

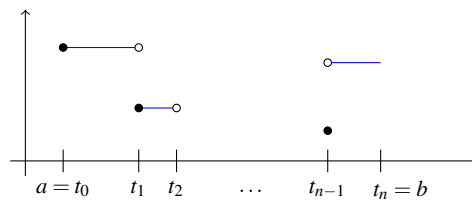
- und Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\varphi(t) = c_j \text{ für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n).$$

$\varphi$  stückweise konstant auf den offenen Intervallen  $(t_{j-1}, t_j)$ ; über die Werte an den Zerlegungspunkten  $\varphi(t_j)$  wird nichts vorausgesetzt.

(ii) Wir bezeichnen die *Menge der Treppenfunktionen* auf  $[a, b]$  mit

$$\mathfrak{T}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}.$$



**Abb. 4.2** Graph einer Treppenfunktion

**Lemma 4.1.3 (Operationen für Treppenfunktionen).**

Es gilt

- (i)  $\varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathfrak{T}[a, b]$ ,
- (ii)  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$ .

Mit anderen Worten:  $\mathfrak{T}[a, b]$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , genauer ist  $\mathfrak{T}[a, b]$  ein Teilvektorraum von  $\mathbb{R}^{[a, b]} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ , dem Vektorraum aller reellen Funktionen auf  $[a, b]$ .

*Beweis.* (Reine Buchhaltung — aber das war bei dieser technischen Definition auch zu erwarten.)

- (i) Aus den Zerlegungen  $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_n\}$  für  $\varphi$  und  $\mathfrak{Z}' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$  für  $\psi$  bilden wir die Zerlegung  $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}'$ . Diese schreiben wir als  $\tilde{\mathfrak{Z}} = \{a = s_0, \dots, s_e = b\}$  und sehen, dass  $\varphi$  und  $\psi$  und damit  $\varphi + \psi$  auf  $(s_{j-1}, s_j)$  konstant sind.
- (ii) ist sofort klar nach Definition, denn  $\varphi(t) = c_j, t \in (t_{j-1}, t_j) \Rightarrow (\lambda \varphi)(t) = \lambda \varphi(t) = \lambda c_j, t \in (t_{j-1}, t_j)$ .  $\square$

**Definition 4.1.4 (Integral für Treppenfunktionen).**

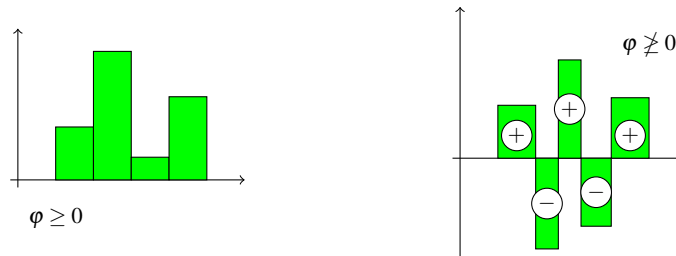
Sei  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit Zerlegung  $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  und Werten  $\varphi(t) = c_j [t \in (t_{j-1}, t_j), 1 \leq j \leq n]$ . Wir definieren das *Integral* von  $\varphi$  auf  $[a, b]$  als

Wir schreiben oft auch einfach  
nur  $\int \varphi$  statt  $\int_a^b \varphi(t) dt$ .

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1}).$$

**Bemerkung 4.1.5 (Zum Integral 4.1.4).**

- (i) *Achtung auf das Vorzeichen.* Wie in 4.1.1(i) diskutiert, ist für  $\varphi$  positiv  $\int \varphi$  gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat  $\varphi$  negative Werte, so werden gemäß Definition 4.1.4 die entsprechenden Rechtecksflächen subtrahiert, denn es gilt ja  $c_j < 0$ !, siehe auch Abbildung 4.3.



**Abb. 4.3** Flächenstücke unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt

- (ii) *Wohldefiniertheit:* Streng genommen müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 4.1.4 wohldefiniert ist. Genauer: Definition 4.1.2(i) verlangt für  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$



die Existenz einer endlichen Zerlegung — es könnte aber mehrere Zerlegungen für  $\varphi$  geben, siehe Abbildung 4.4.

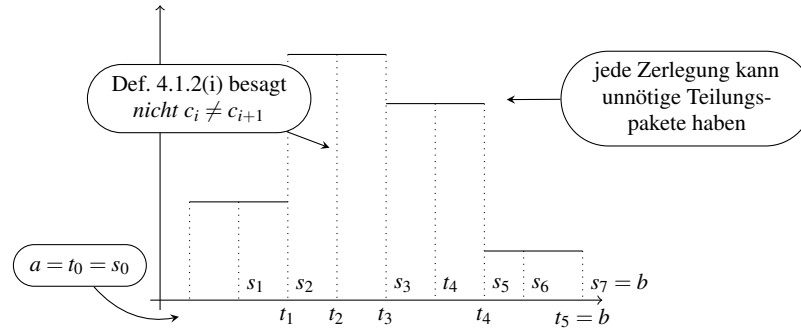


Abb. 4.4 Zwei unterschiedliche Zerlegungen für  $\varphi$

Definition 4.1.4 bezieht sich aber auf eine *bestimmte* Zerlegung und es ist zu zeigen, dass  $\int \varphi$  nicht von der Wahl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Das ist graphisch natürlich evident, allerdings etwas aufwendig hinzuschreiben, siehe z.B. [10, Lemma in 9.2], [5, Bem. p. 187]. Der springende Punkt ist, dass die „unnötigen“ Teilungspunkte keinen Schaden anrichten — aber Arbeit machen.

- (iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 4.1.4 erlaubt es uns das Integral als Abbildung aufzufassen, die jeder Treppenfunktion auf  $[a, b]$  ihr Integral zuordnet, d.h.

$$\int : \mathfrak{T}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen, z.B. besagt die nächste Proposition, dass  $\int$  ein *lineares Funktional* (lineare Abbildung aus einem Vektorraum in den Grundkörper im Sinne der linearen Algebra) auf dem Vektorraum  $\mathfrak{T}[a, b]$  ist, das zusätzlich *monoton* ist.

**Proposition 4.1.6 (Linearität und Monotonie des Integrals für Treppenfkt).**

Seien  $\varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b]$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$(i) \int_a^b (\varphi + \psi)(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + \int_a^b \psi(t) dt,$$

$$(ii) \int_a^b (\lambda \varphi)(t) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt,$$

$$(iii) \varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt.$$

d.h.  $\varphi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]$

*Beweisskizze (Einfach & nur Buchhaltung).*

- (i) Verwende für  $\varphi, \psi$  eine gemeinsame Zerlegung wie im Beweis von Lemma 4.1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen.

(ii) und (iii) sind klar.  $\square$

d.h. mit *guten* Eigenschaften also als lineares, monotones Funktional

**Motivation 4.1.7 (Das Riemann-Integral).**

- (i) Wir haben also einen *vernünftigen* Integralbegriff für besonders schöne Funktionen, die Treppenfunktionen, definiert. Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine *interessantere* Klasse von Funktionen auszudehnen.
- (ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben ist eine *beschränkte* Funktion (siehe Definition 2.2.11)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann betrachten wir alle Treppenfunktionen  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit  $f \leq \varphi$  und das Infimum der Integrale über allen solchen  $\varphi$ , also

$$\alpha := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\}.$$

Ebenso können wir alle  $\psi \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit  $\psi \leq f$  und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}.$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen — im Allgemeinen gilt natürlich  $\beta \leq \alpha$  — dann werden wir

$$\int_a^b f(t) dt = \alpha = \beta$$

definieren.

- (iii) Wie zwingend ist diese etwas ungewöhnliche Vorgehensweise? Sie ergibt sich zwangsläufig, falls

- das neue Integral für Treppenfunktionen mit dem Integral 4.1.4 übereinstimmen soll, und
- $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$  gelten soll.

Denn für alle  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit  $f \leq \varphi$  gilt dann  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \varphi(t) dt$ , also

$\int_a^b f(t) dt \leq \alpha$ , und für alle  $\psi \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit  $\psi \leq f$  gilt  $\int_a^b \psi(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$ ,

also  $\beta \leq \int_a^b f(t) dt$ . Insgesamt also

$$\beta \leq \int_a^b f(t) dt \leq \alpha$$

und, falls  $\alpha = \beta$ , ergibt sich zwangsläufig  $\int_a^b f(t) dt = \alpha = \beta$ .

Nun offiziell:

**Definition 4.1.8 (Riemann-Integral).** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

(i) Wir definieren das *Ober-* und *Unterintegral* von  $f$  als

$$\int_a^{b*} f(t) dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\} \text{ bzw.}$$

$$\int_{a*}^b f(t) dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}$$

(ii) Wir nennen  $f$  *Riemann-integrierbar*, falls

$$\int_a^{b*} f(t) dt = \int_{a*}^b f(t) dt$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral* von  $f$  von  $a$  nach  $b$  als

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^{b*} f(t) dt.$$

**Beispiel 4.1.9 ((Nicht) Riemann-integrierbare Funktionen).**

(i) *Treppenfunktionen.* Wie erwartet und gewünscht(!) sind Treppenfunktionen Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Integral aus 4.1.4 überein.

Tatsächlich gilt für  $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$

Sonst hätten wir zwei unterschiedliche  $\int$  für  $\mathfrak{T}$  und das wäre *Quatsch*!

$$\int_a^{b*} \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt = \int_{a*}^b \varphi(t) dt \quad \text{also ist}$$

$\varphi$  Riemann-integrierbar und  $R - \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt$ . ← Integral 4.1.4

(ii) Die *Dirichletfunktion*  $\chi_{\mathbb{Q}}$  ist nicht Riemann-integrierbar. Tatsächlich ist

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

beschränkt auf  $\mathbb{R}$ , also auch auf jedem  $[a, b]$ . Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen, vgl. 0.1.11(ii) und daher gilt

- $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b], \chi_{\mathbb{Q}} \leq \varphi \Rightarrow \varphi \geq 1$  auf jedem Teilintervall einer Zerlegung und
- $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq \chi_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \psi \leq 0$  auf jedem Teilintervall einer Zerlegung.

Daher gilt

$$\int_a^{b*} \chi_{\mathbb{Q}}(t) dt = 1 \neq 0 = \int_{a*}^b \chi_{\mathbb{Q}}(t) dt$$

und daher ist  $\chi_{\mathbb{Q}}$  nicht Riemann-integrierbar.

**Motivation 4.1.10 (Integrabilitätskriterium).**

Bei genauerer Betrachtung erweist sich die Definition der Riemann-Integrierbarkeit als sperrig und schwer handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrabilitätskriterium, das besagt, dass ein beschränktes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann Riemann-integrierbar ist, falls es zwischen zwei Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  „eingezwickt“ werden kann (d.h. es gilt  $\psi \leq f \leq \varphi$ ), deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Definition und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen, ganze Klassen von Funktionen, nämlich stetige Funktionen und monotone Funktionen, als integrierbar zu entlarven.

**Theorem 4.1.11 (Integrabilitätskriterium: „Einzwicken“ zw. Treppenfkt.).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar} \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 : \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \text{ mit} \\ \psi \leq f \leq \varphi \text{ und} \\ 0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt \leq \varepsilon. \end{array}$$

klar wegen Monotonie 4.1.6(iii)

*Beweis.* Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der Riemann-Integrierbarkeit und den Eigenschaften von inf und sup.  $\square$

**Korollar 4.1.12 (Stetige Fkt. & monotone Fkt sind Riemann-integrierbar).**

- (i) Jedes stetige  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.  
 (ii) Jedes monotone  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen in Abschnitt 2.2.1 herausgefunden haben.

**Satz 4.1.13 (Approximation stetiger Funktionen durch Treppenfunktionen).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$  mit den Eigenschaften

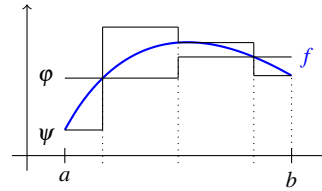
- (i)  $\psi \leq f \leq \varphi$  und  
 (ii)  $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ .

*Beweis.* (Gleichmäßige Stetigkeit gibt uns die Möglichkeit, mit einer äquidistanten Zerlegung ans Ziel zu kommen.) Sei  $\varepsilon > 0$ .

## (1) (Ausnutzen der glm. Stetigkeit)

Wegen 2.2.17 ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ . Daher gibt es mit 2.2.15 ein  $\delta > 0$  sodass für alle  $x, x' \in [a, b]$  mit  $|x - x'| < \delta$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{gilt.} \quad (4.1)$$

Abb. 4.5 Konstruktion von  $\varphi$  und  $\psi$ (2) (Konstruktion von  $\varphi, \psi$ , siehe Abbildung 4.5)

Sei  $n$  so groß, dass

$$\frac{b-a}{n} < \delta. \quad (4.2)$$

Wir definieren eine (äquidistante) Zerlegung von  $[a, b]$  via

$$t_k := a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, \dots, n).$$

Es gilt dann

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad \text{und} \quad |t_k - t_{k+1}| \stackrel{(4.2)}{<} \delta. \quad (4.3)$$

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren wir für  $1 \leq k \leq n$  als

$$c_k := \sup\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \quad \text{und} \quad c'_k := \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}. \quad (4.4)$$

Nun setzen wir  $\varphi(a) := f(a) =: \psi(a)$  und für  $1 \leq k \leq n$

$$\varphi(t) := c_k \quad \text{falls} \quad t_{k-1} < t \leq t_k \quad \text{bzw.} \quad \psi(t) := c'_k \quad \text{falls} \quad t_{k-1} < t \leq t_k.$$

## (3) (Zusammensetzen &amp; ernten des Ergebnisses)

Nun gilt (i) nach Konstruktion, vgl. 4.4. Und auch (ii) gilt, denn nach dem ZWS 2.2.12 existieren für alle  $1 \leq k \leq n$

$$\xi_k, \xi'_k \in [t_{k-1}, t_k] \quad \text{mit} \quad f(\xi_k) = c_k \quad \text{und} \quad f(\xi'_k) = c'_k.$$

Nun ergibt (4.3)  $|\xi_k - \xi'_k| < \delta$  und daher gilt mit (4.1)  $|c_k - c'_k| < \varepsilon$ , also auch (ii).  $\square$

*Beweis von 4.1.12.*

(i) (Zusammensetzen von 4.1.11 mit 4.1.13) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann können wir  $f$  gemäß 4.1.13 „einzwickeln“, d.h.

$$\exists \varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \quad \text{mit} \quad \psi \leq f \leq \varphi \quad \text{und} \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (4.5)$$

Daher gilt mit den Eigenschaften des Integrals

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{4.1.6(\text{iii})}{\leq} \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt && \text{Zerlegung } a = t_0 < t_1 = b \\
&\stackrel{4.1.6(\text{i})}{=} \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) dt && \stackrel{(4.5)}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist  $f$  mit 4.1.11 Riemann-integrierbar.

- (ii) (Konstruktion geeigneter Treppenfunktionen und noch einmal 4.1.11) Wir beweisen nur den Fall  $f$  *monoton wachsend*, der fallende Fall ist analog. Wir konstruieren wie im Beweis 4.1.13, Schritt (2) eine (äquidistante) Zerlegung von  $[a, b]$  via

$$t_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfunktion setzen wir

$$\psi(t) = f(t_{k-1}), \quad \varphi(t) = f(t_k) \quad \text{für } t_{k-1} \leq t < t_k, \quad \psi(b) := f(b) =: \varphi(b).$$

Weil  $f$  monoton wachsend ist, haben wir  $\psi \leq f \leq \varphi$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{4.1.6(\text{iii})}{\leq} \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) \\
&\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

Also gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , dass

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt < \varepsilon,$$

falls  $n$  nur groß genug ist. Daher ist  $f$  mit 4.1.11 Riemann-integrierbar.  $\square$

#### Motivation 4.1.14 (Grundeigenschaften — zum Zweiten).

Nachdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist — in dem Sinn, dass die Grundeigenschaften aus 4.1.6 erhalten bleiben, vgl. 4.1.11. Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im letzten Beweis gesehen, wo 4.1.6 essentiell an mehreren Stellen eingegangen ist.

#### Proposition 4.1.15 (Linearität und Monotonie des Riemann-Integrals).

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt

- (i)  $f + g$  ist Riemann-integrierbar und  $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ .
- (ii)  $\lambda f$  ist Riemann-integrierbar und  $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$ .
- (iii)  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

**Beweis.** (Hantieren mit Treppenfunktionen und dem Integrabilitätskriterium)

- (i) Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wählen wir mit 4.1.11  $\varphi_j, \psi_j \in \mathfrak{T}[a, b]$  ( $i, j = 1, 2$ ) mit  $\psi_1 \leq f \leq \varphi_1, \psi_2 \leq g \leq \varphi_2$  und  $(1 \leq i, j \leq 2)$

$$0 \leq \int_a^b \varphi_j - \int_a^b \psi_j \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann sind  $\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2 \in \mathfrak{T}[a, b]$ , siehe 4.1.3(i) und es gilt

$$\psi_1 + \psi_2 \leq f + g \leq \varphi_1 + \varphi_2 \text{ und}$$

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(t) dt - \int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(t) dt \leq \varepsilon.$$

Somit ist  $f + g$  Riemann-integrierbar laut 4.1.11. Außerdem gilt 4.1.8(ii), denn

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b (f + g) \stackrel{\text{Seien } \psi_1, \psi_2 \text{ wie im sup in 4.1.8(i) für } f \text{ bzw. } g, \text{ dann ist } \psi_1 + \psi_2 \text{ zulässige Funktion im sup für } f + g}{=} \int_a^{b^*} (f + g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

(analog für inf)

(f + g) Riemann-integrierbar

Da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist, gilt immer  $=$  statt  $\leq$  und wir erhalten

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g).$$

- (ii) ähnlich wie (i), separat für  $\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda = -1, \lambda < 0$ .
- (iii) Sofort klar aufgrund der Definition, denn  $\int^* f < \int^* g$ .  $\square$

#### Motivation 4.1.16 (In Richtung Dreiecksungleichung fürs Integral).

Unser nächstes Ziel ist es, die Dreiecksungleichung für Integrale – eine *sehr wichtige* Abschätzung –

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung  $|x + y| \leq |x| + |y|$  bzw. der verallgemeinerten Dreiecksungleichung, vgl. Bew. 1.4.42)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

aufgefasst werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe – die auch unabhängig wichtig sind.

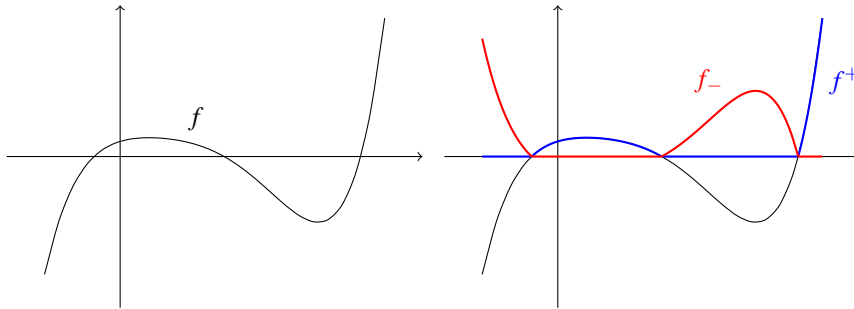
**Definition 4.1.17 (positiver und negativer Teil einer Funktion).**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren positiven und negativen Teil von  $f$  als

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Bemerkung 4.1.18 (Zu 4.1.17 und zum Betrag).**

(i) Abbildung 4.6 illustriert Definition 4.1.17:



**Abb. 4.6** Betrag der Funktion  $f$

(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0),$$

$$f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_- \quad \text{und}$$

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, g_- \leq f_-$$

**Proposition 4.1.19 (Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale).**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, dann sind auch  $f^+$ ,  $f_-$  und  $|f|$  Riemann-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

*Beweis.* Wir beweisen zuerst die Riemann-Integrierbarkeit von  $f^+$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt mit 4.1.11

$$\exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \text{ mit } \psi \leq f \leq \varphi \quad \text{und} \quad 0 \leq \int \varphi - \int \psi \leq \varepsilon.$$



Nun sind  $\varphi^+, \psi^+ \in \mathfrak{T}[a, b]$  mit  $\psi^+ \leq f^+ \leq \varphi^+$  und es gilt mit 4.1.18(ii)

$$\varphi^+ - \varphi = \varphi_- \leq \psi_- = \psi^+ - \psi, \quad \text{daher} \quad \varphi^+ - \psi^+ \leq \varphi - \psi \quad \text{und}$$

$$0 \leq \int \varphi^+ - \psi^+ \leq \int \varphi - \psi \leq \varepsilon.$$

Daher ist  $f^+$  nach 4.1.11 Riemann-integrierbar, und die Riemann-Integrierbarkeit von  $f_-$  folgt analog.

Der Betrag  $|f|$  ist Riemann-integrierbar wegen  $|f| = f^+ + f_-$  (siehe 4.1.18(ii)) und 4.1.15(i).

Schließlich gilt wegen  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$  mit 4.1.15(iii)  $\int f \leq \int |f|$  und  $-\int f \leq \int |f|$  und somit

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|. \quad \square$$

**Korollar 4.1.20 (Integrierbarkeit von Produkten).**

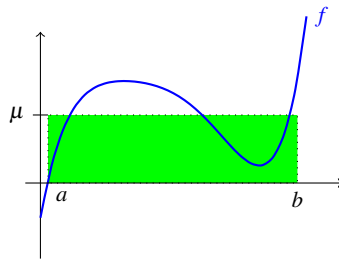
Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann gilt

- (i)  $\forall p \in [1, \infty) : |f|^p$  ist Riemann-integrierbar.
- (ii)  $f \cdot g$  ist Riemann-integrierbar.

*Beweis.* siehe z.B. [10, 9.11, Prop.(ii), (iii)].  $\square$

**Motivation 4.1.21 (MWS der Integralrechnung).**

- (i) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und positiv. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar nach 4.1.12(i) und  $\int_a^b f(t) dt$  entspricht der Fläche  $A$  unter dem Graphen. Anschaulich ist klar (vgl. Abb.4.7), dass es ein Rechteck der Höhe  $\mu$  über  $[a, b]$  geben muss, das den gleichen Flächeninhalt hat, also dass  $\mu(b-a) = A$  gilt.



**Abb. 4.7** Graphische Darstellung des MWS der Integralrechnung

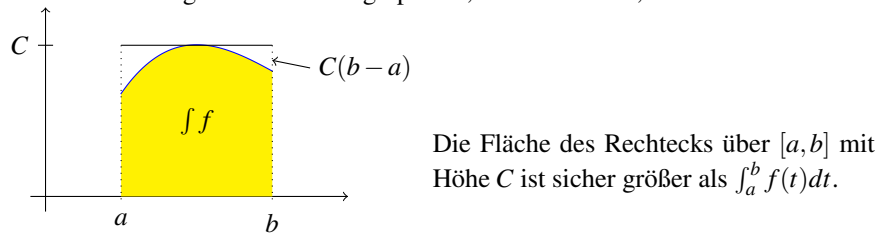
Dies ist tatsächlich der Fall, wie die nächste Proposition zeigt. Zusätzlich besagt dieser Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass es ein  $\xi \in [a, b]$  gibt mit  $f(\xi) = \mu$ . Also zusammengefasst:

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b-a) \quad (4.6)$$

- (ii) Ähnlich wie der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann der Mittelwertsatz der Integralrechnung hervorragend dazu verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten, vgl. 3.2.13. Gilt zum Beispiel  $f(x) \leq C$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann folgt sofort aus (4.6),

$$\int_a^b f(t) dt \leq C(b-a).$$

Diese Abschätzung lässt sich auch graphisch, wie in Abb.4.8, verstehen.



**Abb. 4.8** Die Fläche unter  $f$  ist kleiner als die des Rechtecks

- (iii) Wir formulieren nun den Mittelwertsatz der Integralrechnung exakt und beginnen mit einer etwas *allgemeineren Version*.

**Proposition 4.1.22 (Mittelwertsatz der Integralrechnung).**

Seien  $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\varphi \geq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$ , sodass

$$\int_a^b f(t)\varphi(t) dt = f(\xi) \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Insbesondere ergibt sich mit  $\varphi(t) = 1$  für alle  $t \in [a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b-a).$$

*Beweis.* (Erfreulich kurz: Verwenden der Stetigkeit und Hantieren mit den Integraleigenschaften)

Weil  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist, ist  $f$  nach 2.2.12 auch beschränkt, d.h.  $m := \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$  und  $M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$  existieren. Damit gilt

$$m \leq f \leq M \stackrel{\varphi \geq 0}{\Rightarrow} m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$$

und somit mit 4.1.15(iii)

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \varphi \leq M \int_a^b \varphi.$$

Daher gibt es aber ein  $\mu \in [m, M]$  mit  $\int_a^b f \varphi = \mu \int_a^b \varphi$ .

Schließlich gibt es wegen dem ZWS 2.2.12 ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \mu$ , also gilt

$$\int_a^b f \varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi. \quad \square$$

**Bemerkung 4.1.23 (Teilintervalle und Orientierung).**

- (i) Seien  $a < b < c$  und  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ergibt sich durch das Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfunktionen.

$f$  ist Riemann-integrierbar  $\Leftrightarrow f|_{[a,b]}$  und  $f|_{[b,c]}$  sind Riemann-integrierbar

In diesem Fall gilt  $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ . Einschränkung von  $f$  auf  $[a, b]$  bzw.  $[b, c]$

- (ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls  $b < a$ , dann setzen wir

$$\int_a^b f(t) dt := - \int_b^a f(t) dt.$$

Das entspricht der Idee, dass die y-Achse in Richtung größerer Werte von  $x$  orientiert ist.

- (iii) Wir setzen  $\int_a^a f(t) dt = 0$ .

**Bemerkung 4.1.24 (Riemannsummen).**

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum Riemann-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des Riemann-Integrals erlaubt (*die Methode*, Integrale zu berechnen, lernen wir im nächsten Abschnitt kennen) und oft als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition.

- (i) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\mathcal{Z} := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Wir wählen in jedem der Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  einen Punkt  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ , genannt *Stützstelle*. Die Teilungspunkte  $t_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) und die Stützstellen  $\xi_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) fassen wir notationell zusammen zu

$$\mathfrak{Z} := ((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n).$$

und definieren die Riemann-Summe von  $f$  bezüglich  $\mathfrak{Z}$  als

$$S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspunkte und Höhe =  $f$  an der entspr. Stützstelle

Wir nennen

$$\mu(\mathfrak{Z}) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \leftarrow \text{Länge des größten Teilintervalls}$$

die *Feinheit* der Zerlegung  $\mathfrak{Z}$ .

(ii) Wir können diese Definition graphisch, wie in Abb.4.9, veranschaulichen:

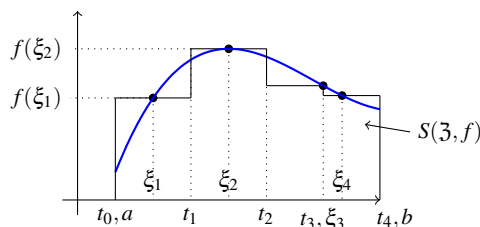


Abb. 4.9 Riemannsummen von  $f$

Wir sehen, dass die Riemann-Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktion  $\varphi$  interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und daher genauer

$$\int_a^b \varphi(t) dt = S(\mathfrak{Z}, f).$$

Die Treppenfunktion  $\varphi$  interpoliert also  $f$  an den Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Die Kernidee ist es nun, den Grenzwert von  $R(\mathfrak{Z}, f)$  für  $\mu(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$  zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximation durch an den Stützstellen interpolierende Treppenfunktionen zu konstruieren.

Dieser Zugang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfunktion ist etwas expliziter.

Da es im Limes  $\mu(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$  anschaulich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Zugänge äquivalent sind. Genauer gilt:

- (iii) **Theorem.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt  
 $f$  ist Riemann integrierbar  $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ,  
 sodass für jede Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  mit  $\mu(\mathfrak{Z}) < \delta$ ,  
 $|S(\mathfrak{Z}, f) - s| < \varepsilon$ .

In diesem Fall gilt  $s = \int_a^b f(t) dt$ .

Die Riemann-Summen kommen  $s$  beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist

(iv) *Beispiel.* Wir berechnen exemplarisch das Integral

$$\int_0^a t \, dt \quad \text{für } a > 0$$

mittels Riemann-Summen.

Sei  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ . Wir wählen als Zerlegungspunkte  $t_k = \frac{ka}{n}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) und Stützstellen  $\xi_k = t_k$ . Dann ist also  $\mathfrak{Z} = ((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n) = \left( \left( \frac{ka}{n} \right)_{k=0}^n, \left( \frac{ka}{n} \right)_{k=1}^n \right)$  und  $\mu(\mathfrak{Z}) = \frac{a}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

Also ergeben sich die Riemann-Summen, vgl. Abb.4.10,

$$\begin{aligned} S_n = S(\mathfrak{Z}, f) &= \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

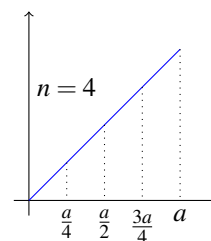


Abb. 4.10 Riemannsummen der linearen Funktion

und somit

$$\boxed{\int_0^a t \, dt = \frac{a^2}{2} .}$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementar-geometrisch; *richtig* Integrale berechnen lernen wir im nächsten Abschnitt.

## 4.2 Integral und Ableitung

### Motivation 4.2.1 (Integral und Ableitung).

Im vorigen Abschnitt haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennengelernt und diskutiert. Eine drängende Frage ist nun: Wie berechnet man *konkret* ein Integral z.B. *einer stetigen Funktion*?

jenseits von Riemann-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit dem Differenzieren. Dies wird *ultimativ* vom *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (HsDI) erledigt, den wir gleich kennenlernen werden.

Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

### Definition 4.2.2 (Stammfunktion).

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  auf  $I$ , falls

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt.}$$

**Beispiel 4.2.3 (Stammfunktion).**

$F(x) = \frac{x^2}{2}$  ist Stammfunktion von  $f(x) = x$  auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

**Motivation 4.2.4 (2 Fragen zu Stammfunktionen).**

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar und in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

- (1) Gibt es immer eine Stammfunktion und wenn ja, wie viele Stammfunktionen gibt es?

*genauer:* Welche  $f$ 's haben Stammfunktion  
abseits von einfachen Beispielen wie z.B. 4.2.3

- (2) Wie kann man Stammfunktionen systematisch beschreiben/berechnen?

Wir beantworten den „Eindeigkeitsteil“ in (1) in der nächsten Proposition und den Rest von (1) und (2) im darauffolgenden Theorem, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Proposition 4.2.5 (Differenz von Stammfunktionen).**

Sei  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$G \text{ ist (ebenfalls) eine Stammfunktion von } f \iff F - G \text{ ist konstant.}$$

*Beweis.* (Einfache Anwendung der Differentialrechnung.)

$\Rightarrow$ : Sei  $G$  Stammfunktion von  $f$  dann gilt

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \forall x \in I.$$

Daher folgt aus 3.2.14(ii), dass  $F - G$  konstant ist.

$\Leftarrow$ : Sei  $G(x) = F(x) + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $G$  differenzierbar (siehe 3.1.17(i), 3.1.10(i)) und es gilt

$$G' = (F + c)' = F' = f. \quad \square$$

**Motivation 4.2.6 (Zum Programm aus 4.2.4).**

Proposition 4.2.5 sagt uns, wie wir *alle* Stammfunktionen einer gegebenen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen, falls wir *eine einzige* Stammfunktion haben (nämlich durch Addieren einer Konstante). Wie wir aber *überhaupt* eine solche Stammfunktion erhalten, falls  $f$  stetig ist, sagt uns neben anderen Dingen der HsDI.

**Theorem 4.2.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und seien  $a, b$  beliebige Punkte im Intervall  $I$ .

- (i) Die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (4.7)$$

ist stetig differenzierbar (d.h.  $F \in C^1(I)$ ) und es gilt  $F' = f$  auf  $I$ . Insbesondere ist  $F$  also eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ .

(ii) Sei  $F$  eine (beliebige) Stammfunktion von  $f$ , dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

*Beweis.* (Für so ein zentrales Resultat erfreulich einfach. Wir verwenden direkt die jeweiligen Definitionen und einmal den MWS der Integralrechnung.)

- (i) Da  $f$  stetig ist, ist es auch nach 4.1.12(i) auch Riemann-integrierbar. Daher ist (4.7) sinnvoll und  $F$  ist definiert. Wir berechnen den Differenzenquotienten von  $F$  in einem beliebigen  $x \in I$ . Sei  $0 \neq h$ , sodass  $x+h \in I$  und o.B.d.A.  $h > 0$  (für  $h < 0$  ist alles analog). Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \stackrel{4.1.15(ii)}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (4.8)$$

Nach dem MWS der Integralrechnung 4.1.22 gibt es ein  $\xi_h \in [x, x+h]$  mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) h. \quad (4.9)$$

Nun gilt  $\xi_h \rightarrow x$ , falls  $h \rightarrow 0$  (denn  $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h| \rightarrow 0$ ) und wir erhalten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(4.8), (4.9)}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\text{stetig}]{f} f(x) \quad (h \rightarrow 0). \quad (4.10)$$

Also ist  $F$  differenzierbar mit  $F' = f$ . Damit ist  $F'$  auch stetig und daher  $F$  stetig differenzierbar.

- (ii) Wir definieren  $G$  wie in (4.7), also  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Dann ist  $G$  nach (i) Stammfunktion von  $f$ . Sei  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , dann gilt mit 4.2.5  $F = G + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f \stackrel{4.1.15(ii)}{=} \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

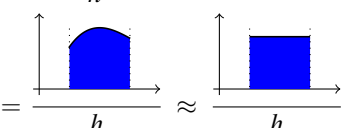
#### Bemerkung 4.2.8 (Zum Beweis des HsDI).

Der entscheidende Schritt im entscheidenden Beweisteil (i) des HsDI, ist es zu sehen, dass

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \approx \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

gilt. Das „ungefähr gleich“ hier entspricht dem in Gleichung (4.10) formal mit Hilfe des MWS der Integralrechnung durchgeführten Limes. Genauer, das „ $\approx$ “ ist in dem Sinn gemeint, dass für kleine  $h$  die linke Seite der rechten beliebig nahe kommt.

Dieser Schritt lässt sich auch sehr gut intuitiv erfassen und zeigt, warum das Differenzieren das Integrieren „umkehrt“. Um das zu verdeutlichen, schreiben bzw. skizzieren wir in intuitiv leicht verständlicher Symbolik

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$


$$= \frac{f(x)h}{h} = f(x).$$

Im entscheidenden Schritt wird also die Fläche unter der Kurve durch die Rechteckfläche  $A = f(x)h$  angenähert, was eben formal genau dem Anwenden des MWS der Integralrechnung mit nachfolgendem Ausführen des Limes  $h$  gegen 0 entspricht.

**Bemerkung 4.2.9 (Die Bedeutung des HsDI).**

- (i) Für die Punkte (i) und (ii) im HsDI bieten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

„Diff von Int. = Id“      „Int. von Diff = Id bis auf eine Konstante“

Spätestens jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren *im Wesentlichen* „inverse Operationen“ sind!

- (ii) Präzise können wir die Situation untersuchen, indem wir explizit die Abbildung, die einer Funktion ihre Ableitungsfunktion bzw. ihre Integralfunktion zuordnet anschreiben und mit *Diff* bzw. *Int* bezeichnen. Dabei wird es möglich auch genau die Menge (eigentlich Vektorräume) von Funktionen anzugeben, für die Diff bzw. Int definiert sind (also Definitionsmengen für die Abbildungen<sup>1</sup> Diff bzw. Int) und ebenso die entsprechenden Zielmengen. Auf diese Art ergibt sich zunächst (mit der Bezeichnung  $C^0$  für die Menge (den Vektorraum) der stetigen Funktionen) für die Zusammensetzung von Integration mit Differentiation

$$f \in C^0(I) \xrightarrow{\text{Int}} \left( F(x) = \int_a^x f(t) dt \right) \xrightarrow{\text{Diff}} F' = f. \quad (4.11)$$

d.h.  $f$  stetig auf  $I \stackrel{4.1.13}{\Rightarrow}$  intbar      diffbar. wegen 4.2.7(i)      wegen 4.2.7(i)

<sup>1</sup> Beachte, dass hier gewissermaßen im „1. Stock“ operiert wird: Diff bzw. Int sind Abbildungen die aus Funktionen neue Funktionen machen und werden daher oft als Ableitungsoperator bzw. Integraloperator bezeichnet, vgl. [7, graue Box, p. 165].

Diese Betrachtungsweise ist vielleicht zunächst ungewohnt, aber sehr praktisch, wie oben zu sehen ist. Wir können nämlich viel präziser darüber sprechen, was Differenzieren und Integrieren *strukturell* bedeutet.

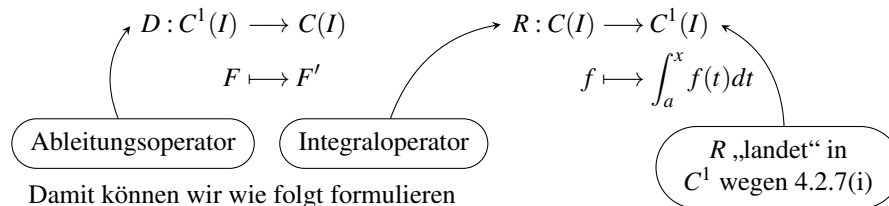


Beginnen wir umgekehrt mit dem Differenzieren, so erhalten wir

$$F \in C^1(I) \xrightarrow{\text{Diff}} F' \xrightarrow{\text{Int}} \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a). \quad (4.12)$$

d.h.  $F$  stetig diffb.
 $F'$  stetig  $\xrightarrow{4.1.12(i)} \text{R-intb.}$ 
4.2.7(ii)

(iii) Nun definieren wir im Sinne der oben begonnen Vorgehensweise (noch etwas formaler) die folgenden Abbildungen:



Damit können wir wie folgt formulieren

$$D \circ R = \text{id} : C(I) \rightarrow C(I) \text{ wegen (4.11),}$$

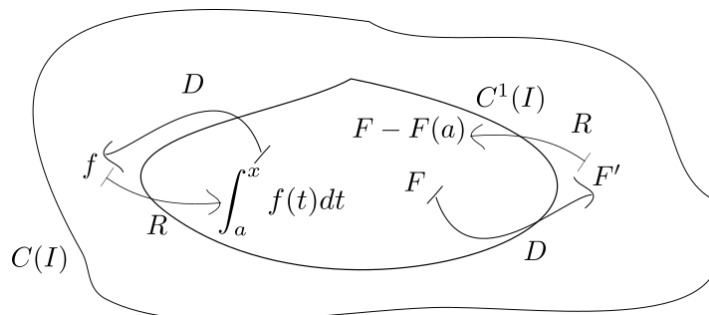
bzw.

nur fast die  $\text{Id}$

$$R \circ D : C^1(I) \rightarrow C^1(I) \text{ erfüllt } R \circ D(F) = F - F(a) \text{ wegen (4.12).}$$

(iv) Neben der Tatsache, dass  $R \circ D$  nicht ganz die Identität ergibt ( $R \circ D = \text{id} + \text{Konstante}$ ) haben  $D$  und  $R$  unterschiedliche Definitions- und Zielbereiche. Daher sind  $D$  und  $R$  eben *doch nicht genau invers zueinander – die Details des Slogans aus (i) sind essentiell!*

Eine Veranschaulichung der gesamten Situation ist:



**Abb. 4.11** Linke Seite: Das Integral einer  $C^0$ -Funktion  $f$  ist  $C^1$  und die Ableitung des Integrals gibt  $f$  zurück. Rechte Seite: Differenzieren einer  $C^1$ -Funktion  $F$  liefert eine integrierbare Ableitung  $F'$ . Ihr Integral gibt  $F$  bis auf eine Konstante zurück.

**Motivation 4.2.10 (Konkretes Integrieren).**

Der HsDI hat nicht nur, wie oben diskutiert, eine enorme theoretische Bedeutung, sondern eine ebenso große praktische: Er besagt, wie wir konkret Integrale berechnen können. Diesen Aspekt diskutieren wir nun im Detail.

- (i) Der HsDI, insbesondere Theorem 4.2.7(ii), d.h.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) =: F(t)\Big|_a^b \quad \text{praktische Schreibweise}$$

erlaubt es nun, praktisch konkrete Integrale zu berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte einer (beliebigen) Stammfunktion an der Ober- und Untergrenze bilden.

- (ii) Ok, aber wie erhalten wir eine Stammfunktion? Ganz klar durch unsere Ergebnisse aus Kapitel 3, d.h. über das konkrete Differenzieren!
- (iii) Als einfaches Beispiel berechnen wir  $\int_a^b x^n dx$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ). Wegen  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , siehe 3.1.10(ii) gilt

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b.$$

Bevor wir weitere einfache Beispiele betrachten, ein begründetes Pamphlet!

**Bemerkung 4.2.11 (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral).**

- (i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise  $F(x) = \int f(x)dx$  womit eine oder auch alle Stammfunktionen von  $f$  gemeint sind. Der Ausdruck

$$\int f(x)dx \tag{4.13}$$

wird dabei als „unbestimmtes Integral“ bezeichnet.

- (ii) Diese traditionell leider übliche Bezeichnung führt aber in eine echte *terminologische Katastrophe*! Genauer, betrachten wir die folgenden Bezeichnungsvarianten:

	gute Terminologie	leider auch üblich
$\int_a^b f(t)dt$	Integral von $f$ zwischen $a$ und $b$	bestimmtes Integral von $f$
$F$ mit $F' = f$	Stammfunktionen von $f$	unbestimmtes Integral von $f$

Die hochgradig nicht-triviale Aussage (ii) im HsDI, die das praktische Integrieren erst ermöglicht, lautet „in guter Terminologie“, vgl. 4.2.10(i):

„Das Integral von  $f$  zwischen  $a$  und  $b$  ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfunktion von  $f$  an Ober- bzw. Untergrenze.“

Die schlechte (aber leider oft auch übliche) Terminologie versteckt diese zentrale Aussage in der winzigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts: „Das bestimmte Integral von  $f$  ist gleich der Differenz der Werte eines unbestimmten Integrals von  $f$  an der Ober- bzw. Untergrenze.“

- (iii) Wir vermeiden hier daher die Bezeichnung „unbestimmtes Integral“ und verwenden (4.13) ausschließlich im folgenden Sinn:

„Bestimme  $\int f(t)dt$ “ bedeutet „finde eine Stammfunktion von  $f$ “.

**Beispiel 4.2.12 (Höchste Zeit: konkretes Integrieren).**

- (i) Wir verallgemeinern 4.2.10(iii) von  $n \in \mathbb{N}$  auf  $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$  für  $a, b > 0$ . Es gilt  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , vgl. 3.1.31(i) und daher

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b. \quad (4.14)$$

Für  $\alpha \in \mathbb{N}$  gilt (4.14) sogar für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (ii) Der Fall  $\alpha = -1$  in (i) führt für  $a, b > 0$  wegen 3.1.30(i) zu

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_a^b.$$

- (iii) Mit 3.1.10(v) erhalten wir (beachte 4.2.11(iii)!)

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) \quad \text{und} \quad \int \cos(x) dx = \sin(x).$$

- (iv) Mit 3.1.10(iv) erhalten wir

$$\int e^x dx = e^x.$$

- (v) Aus 3.1.31(iv) ergibt sich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x).$$

**Motivation 4.2.13 (Mehr Werkzeuge!).**

Um auch komplizierte Funktionen integrieren zu können – deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnisse aus 3 „sehen“ – lernen wir nun zwei wichtige „Integrationsmethoden“ kennen: die *partielle Integration* und die *Substitutionsregel*. Sie sind die „Umkehrung“ der Produktregel bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus der entsprechenden Regel und dem HsDI hergeleitet werden.

**Proposition 4.2.14 (Partielle Integration).**

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \left(f(t)g(t)\right)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

*Beweis.* (Einfaches Verwenden der Produktregel und natürlich des HsDI, Teil (ii).)

Wir setzen  $F = fg$ . Dann gilt mit der Produktregel 3.1.6(ii)  $F' = f'g + fg'$  und daher wegen 4.2.7(ii)

$$\left(f(t)g(t)\right)\Big|_a^b = F(t)\Big|_a^b = \int_a^b F'(t)dt = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt. \quad \square$$

**Beispiel 4.2.15 (Partielle Integration).**

(i) Es gilt  $\int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \underbrace{\cos(x)}_g dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x)\sin(x)$  und daher

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x).$$

(ii) Wir berechnen  $\int \log(x)dx$  mit einem Trick, der es uns erlaubt, partiell zu integrieren. Es gilt

$$\int \log(x)dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log(x)}_g dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\log(x) - x.$$

**Proposition 4.2.16 (Substitutionsregel).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\varphi([a, b]) \subseteq I$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

damit ist  $f \circ \varphi$  definiert

**Bemerkung 4.2.17 (Zur Substitutionsregel).**

(i) Proposition 4.2.16 merkt man sich am einfachsten mit folgendem *Trick*: Betrachte  $x = \varphi(t)$  als „neue Variable“ für  $f$ , also  $f(x) = f(\varphi(t))$ . Dann gibt die folgende *formale* Rechnung die richtige Transformation

die auftretenden Symbole sind  
streng genommen nicht definiert

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \varphi'(t)dt. \quad (4.15)$$

Schließlich müssen die Integralgrenzen „mittransformiert“ werden, d.h.  $a \mapsto \varphi(a)$ ,  $b \mapsto \varphi(b)$ . So erhalten wir tatsächlich

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{=f(x)} \underbrace{\varphi'(t)dt}_{\stackrel{(4.15)}{=}dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

(ii) Die Formel in 4.2.16 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- „von rechts nach links“, falls wir einen komplizierten Integranden  $f(x)$  vorliegen haben und wir ein passendes  $\varphi$  finden können, sodass  $(f \circ \varphi)\varphi'$  leicht zu integrieren ist.
- „von links nach rechts“: Ein zunächst *hässlicher* Integrand kann die Struktur  $(f \circ \varphi)\varphi'$  haben (für passendes  $\varphi$ ) und dann leicht integrierbar sein.

**Beispiel 4.2.18 (Substitutionsmethode).**

(i) Unser erstes Beispiel verwendet die Substitutionsmethode „von links nach rechts“. Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1.$$

$x = \varphi(t) = 2t, \quad \frac{dx}{dt} = 2$

(ii) Etwas allgemeiner sei  $c \neq 0$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a < b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

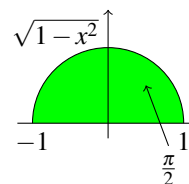
$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_a^b f(ct) c dt = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x) dx.$$

der besseren Sichtbarkeit wegen

$x = \varphi(t) = ct, \quad \frac{dx}{dt} = c$

(iii) Wir berechnen die Fläche des Halbkreises, vgl. Abb.4.12:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \leftarrow \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \sin(t), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \\ -1 \leq x = \sin(t) \leq 1 \\ \arcsin(-1) \leq \arcsin(x) \leq \arcsin(1) \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ vgl. 2.3.27(ii)} \end{array} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \leftarrow \begin{array}{l} \cos^2(t) = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1), \text{ vgl. 2.3.15(iv)} \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &\stackrel{(ii), c=2}{=} \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt + \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \sin(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(\sin(\pi) - \sin(-\pi)) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



**Abb. 4.12** Fläche des Halbkreises

**Hinweis:** Damit haben wir nun im Rahmen unseres axiomatischen Zugangs gezeigt, dass die Fläche des Einheitskreises (d.h. des Kreises mit Radius 1) genau die Kreiszahl  $\pi$  ist. Genauer haben wir aus der etwas „seltsamen“ Definition von  $\pi$  in 2.3.19, vgl. auch 2.3.16, die aus der Schule bekannt & gewohnte Formel für die Kreisfläche (wider)gewonnen!

*Beweis von 4.2.16.* (Ganz wie bei der partiellen Integration: Wir verwenden die zugehörige Differentiationsregel, also diesmal die Kettenregel und kombinieren sie mit dem HsDI, Teil (ii).)

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist  $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und mit der Kettenregel 3.1.25 gilt

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi \cdot \varphi'.$$

Daher folgt mit 4.2.7(ii)

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx. \quad \square$$

### 4.3 Der Satz von Taylor

#### Motivation 4.3.1 (Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Ableitungen an einem Punkt).

In diesem vorletzten Abschnitt, können wir endlich eines der Hauptthemen der Analysis, das wir bereits mehrfach diskutiert haben, zu einem Abschluss bringen. Wie in 3.1.1 und davor in 0.0.2 betont, geht es in der Analysis vielfach darum, das *lokale* Änderungsverhalten von Funktionen zu studieren und dadurch ihr Verhalten „*im Großen*“ abzuleiten. Wir haben nun genügend Werkzeuge der Differentialrechnung gesammelt, um aus der Kenntnis der (höheren) Ableitungen einer Funktion in einem einzigen Punkt Erkenntnisse über die Gesamtfunktion herzuleiten.

Wir beginnen mit einer motivierenden Rechnung. Dazu sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend oft differenzierbar und  $x_0$  sei ein Punkt im Intervall  $I$ . Wir ziehen den HsDI als Werkzeug heran.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{f'(t)}_{= -\left(\frac{d}{dt}(x-t)\right)f'(t) \text{ Achtung: Trick!}} dt \\ &= f(x_0) - \int_{x_0}^x \left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t) dt \\ \text{part. Int.} \quad &\Rightarrow f(x_0) - (x-t)f'(t)|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Tangente in } (x_0, f(x_0)) \\ = \text{Polynom vom Grad 1}}} + \underbrace{\int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt}_{\substack{\text{„Rest“ als Integral wegen lin. Best-} \\ \text{approx. hoffentlich gut abschätzbar}}} . \end{aligned}$$

Das ist also eine „schöne“ Darstellung der Form

$f = \text{Polynom vom Grad 1} + \text{Rest.}$

Wir können nun aber noch weitermachen und im Restterm nochmals partiell integrieren. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x (x-t) f''(t) dt &\stackrel{\text{Trick zum Zweiten}}{=} -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left( \frac{d}{dt} (x-t)^2 \right) f''(t) dt \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} -\frac{1}{2} (x-t)^2 f''(t) \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt. \\
 &= \frac{1}{2} f''(t) (x-x_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt
 \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt}_{\text{Rest in Integralform}}.$$

Das ist offensichtlich eine Darstellung der Form

$f = \text{Polynom vom Grad 2} + \text{Rest.}$

Natürlich können wir nun induktiv weitermachen und erhalten die sog. Taylorformel.

**Proposition 4.3.2 (Taylorformel – zum Ersten).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{n+1}$ -Funktion und sei  $x_0$  im Intervall  $I$  beliebig. Dann gilt für alle  $x \in I$  die Taylor-Formel

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x),
 \end{aligned}$$

← Restterm  
← Polynom von Grad  $n$  mit Koeff. gegeben durch die Ableitungen von  $f$  in  $x_0$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

*Beweis.* (Genaueres Aufschreiben der Rechnung aus der Motivation.)

Wir verwenden die Notation  $T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ . Damit ist zu zeigen, dass für  $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x).$$

Induktion nach  $n$ : Den Induktionsanfang für  $n = 0$  bzw.  $n = 1, 2$  erledigt 4.3.1.

$n - 1 \mapsto n$ : Wir nehmen an, dass  $f(x) = T_{n-1}[f, x_0](x) + R_n(x)$  gilt. Wir integrieren den Restterm  $R_n(x)$  partiell. Es gilt

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^{n-1}}_{= -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} (x-t)^n} f^{(n)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n)}(t) (x-t)^n \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

Trick zum Dritten bzw.  $n$ -ten

was die Behauptung zeigt.  $\square$

**Definition 4.3.3 (Taylor-Polynom und Taylor-Reihe).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{n+1}$ -Funktion und sei  $x_0 \in I$  beliebig.

- (i) Für  $m \leq n$  definieren wir das *Taylor-Polynom* der Ordnung  $m$  von  $f$  im Punkt  $x_0$  als

$$T_m[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- (ii) Falls  $f$  glatt ist, definieren wir die *Taylor-Reihe* von  $f$  im Punkt  $x_0$  als

$$T[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und zwar unabhängig davon, ob  $T[f, x_0](x)$  konvergiert oder nicht.

**Beispiel 4.3.4 (Die Taylor-Reihe für  $\exp$ ).**

- (i) Wir betrachten  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Es gilt  $f^{(k)}(x) = e^x$  und daher

$$\begin{aligned} T_n[\exp, 0](x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^0 (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\ T[\exp, 0](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe für  $\exp$  in  $x = 0$  ist also gerade die Exponentialreihe, vgl. 1.4.37. Wegen 1.4.36 gilt

$$T_n[f, 0](x) \rightarrow \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$



d.h.  $T_n[f, 0]$  konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$  gegen  $\exp$ .

- (ii) Wir erhalten also folgendes Bild: Die Taylorpolynome approximieren mit steigender Ordnung und für alle  $x \in \mathbb{R}$  immer besser die Funktion. Zusätzlich wissen wir, wie die approximierenden Polynome aus  $f$  berechnet werden können. Explizit gilt hier

$$\begin{aligned} T_0[\exp, 0](x) &= 1, & T_1[\exp, 0](x) &= 1 + x, \\ T_2[\exp, 0](x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, & T_3[\exp, 0](x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \text{ usw.} \end{aligned}$$

Graphisch sieht die Approximation wie in Abb.4.13 dargestellt aus:

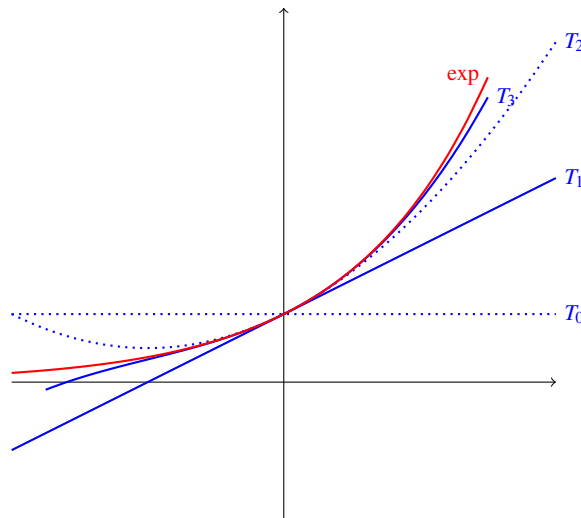


Abb. 4.13 Die Exponentialfunktion und ihre approximierenden Taylorpolynome

#### Motivation 4.3.5 (Konvergenz der Taylor-Reihe).

- (i) Im obigen Beispiel ist die Taylorreihe eine *gute Approximation* für die ursprüngliche Funktion  $f = \exp$  und zwar auf ganz  $\mathbb{R}$ . Ihre Vorzüge sind, dass
- die approximierenden Funktionen  $T_n[f, x_0]$  Polynome — also sehr einfache Funktionen sind.
  - die approximierenden Funktionen  $T_n[f, x_0]$  ganz leicht und explizit aus  $f$  berechnet werden können — mittels der Ableitungen von  $f$  an dem einzigen Punkt  $x_0$ .
- (ii) Damit sind aber noch wichtige Fragen bezüglich der Konvergenz von Taylorreihen im Allgemeinen offen, nämlich
- Für welche  $x$  konvergiert die Taylorreihe einer gegebenen Funktion. Natürlich konvergiert sie in  $x_0$ , aber wie sieht es darüber hinaus aus?

- Falls die Taylorreihe  $T_n[f, x_0]$  überhaupt konvergiert, konvergiert sie dann auch gegen  $f$ ? Diese Frage ist (offensichtlich vgl. 4.3.2) äquivalent zur Frage, ob das Restglied  $R_n$  gegen 0 konvergiert.

Um diese Fragen besser untersuchen zu können, geben wir eine alternative Form des Restglieds an.

**Korollar 4.3.6 (Lagrange-Form des Restglieds).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{n+1}$ -Funktion auf dem Intervall  $I$  und sei  $x_0 \in I$ . Dann gibt es ein  $\xi \in I$  sodass gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x) \quad \text{und} \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

*Beweis (Anwenden des MWS der Integralrechnung auf die Integralform des Restglieds  $R_{n+1}(x)$  in 4.3.2).*

Wegen 4.1.22  $\exists \xi \in [x_0, x]$  mit

$(x - t) \geq 0$ , daher 4.1.22 anwendbar

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &\stackrel{4.3.2}{=} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \stackrel{4.1.22}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \\ &\stackrel{\text{Int}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Nun fällt uns dann das Hauptresultat des Abschnitts ohne weitere Arbeit in den Schoß!

**Theorem 4.3.7 (Satz von Taylor).**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und sei  $x$  ein Punkt im Intervall  $I$ .

(i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in I$  gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei für das Restglied gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein  $\xi \in [x_0, x]$ .

(ii) Für  $x \in I$  konvergiert die Taylor-Reihe  $T[f, x_0](x)$  gegen  $f(x)$ , genau dann wenn das Restglied  $R_n(x)$  gegen 0 geht, d.h.

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ gilt.}$$

**Beispiel 4.3.8 (Exponentialreihe — Restgliedabschätzung).**

Wir wissen schon aus 4.3.4, dass  $T_n[\exp, 0](x) \rightarrow \exp(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Daher gilt nach

dem Satz von Taylor  $R_n(x) \rightarrow 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Das lässt sich aber auch direkt verifizieren, denn

$$R_n(x) = \exp(\xi) \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Beispiel 4.3.9 (Reihenentwicklung des Logarithmus).**

Wir betrachten

$$f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(1+x)$$

und entwickeln  $f$  um  $x_0 = 0^2$ . Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots,$$

induktiv ergibt sich

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1)$$

Damit erhalten wir  $f(0) = 0$ ,  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  und daher

$$T[f, 0](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Um zu überprüfen, ob  $T[f, 0](x)$  auch gegen  $f(x) = \log(1+x)$  konvergiert, müssen wir das Restglied abschätzen.

Zunächst betrachten wir den Fall  $0 < x \leq 1$  und somit  $0 \leq \xi < x$ . Es gilt

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\xi)^n} x^n \right| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für  $-1 < x < 0$  und somit  $-1 < x \leq \xi \leq 0$  gilt

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{x}{1+\xi} \right)^n \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

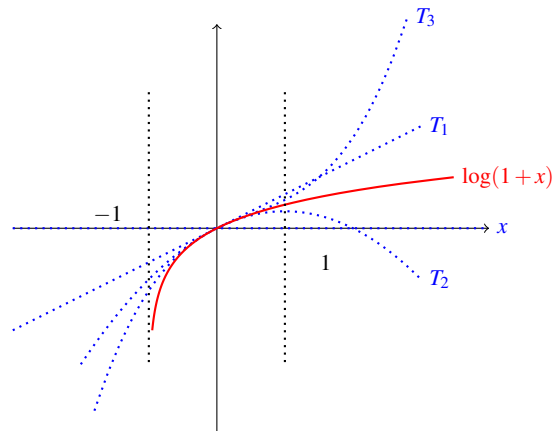
Insgesamt erhalten wir also für  $-1 < x \leq 1$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Graphisch sieht die Situation wie in Abb. 4.14 dargestellt aus. Speziell für  $x = 1$  ergibt sich die wichtige Darstellung

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

<sup>2</sup> Die Funktion  $\log(x)$  um  $x_0 = 0$  zu entwickeln ist offensichtlich keine gute Idee — daher entwickeln wir  $\log(1+x)$  um  $x_0 = 0$ .



**Abb. 4.14** Die Taylorreihe von  $\log(1+x)$  konvergiert für alle  $-1 < x \leq 1$ .

Schließlich können wir auf diese Weise auch  $\log(y)$  für  $y > 2$  berechnen. Dazu wähle  $0 < x < 1$  und  $r > 1$ , sodass  $y = (1+x)^r$ . Dann gilt  $\log(y) = r \log(1+x)$ .

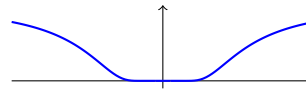
**Warnung 4.3.10 (Fehlverhalten der Taylorreihe).**

- (i) Eine Taylorreihe muss außer im Entwicklungspunkt  $x_0$  gar nicht konvergieren.
- (ii) Selbst falls die Taylorreihe konvergiert, muss sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.3.11 (Zu flach für Taylor).**

Wir betrachten die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



**Abb. 4.15** Der Graph von  $f$  ist zu flach um 0

- (i) Wir zeigen zunächst  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ .  
Dazu zeigen wir mittels Induktion, dass  $f \in C^n(\mathbb{R}) \ \forall n \in \mathbb{N}$  und  $f^{(n)}(0) = 0$ .  
Dazu behaupten wir

$$\exists \text{ Polynom } p_n, \text{ sodass } f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Daraus folgt dann die Aussage, denn

$$p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{y:=\frac{1}{x}}{=} \frac{p_n(y)}{e^{y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{nach 2.3.7(ii).}$$

Wir beweisen also (4.16) mittels vollständiger Induktion:

Für  $n=0$  ist (4.16) erfüllt mit  $p_0 = 1$ .

$n \mapsto n+1$ : Sei  $x \neq 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &\stackrel{\text{i.V.}}{=} \left( p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \\ &\stackrel{\text{K.R.}}{=} p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left( p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} =: p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

- (ii) Damit gilt nun

$$T[f, 0](x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

was natürlich  $\forall x \in \mathbb{R}$  konvergent ist, also gilt

$T[f, 0](x) \neq f(x) \text{ für } x \neq 0.$

Das Fazit dieses Beispiels ist, dass  $f$  bei 0 „so flach“ ist (vgl. Abb. 4.15), dass  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k$  gilt und daher die Taylorreihe verschwindet — nicht aber die gesamte Funktion.

**Beispiel 4.3.12 (Binomialreihe).**

Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . Wir betrachten

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha$$

und entwickeln nach Taylor in  $x_0 = 0$ .

- (i) Es gilt  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), daher gilt  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$  und somit für die Taylorreihe

$$T[f, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

- (ii) Die Reihe konvergiert  $\forall |x| < 1$  absolut wegen dem Quotientenkriterium, denn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| |x| \rightarrow |x| < 1.$$

- (iii) Die Taylorreihe konvergiert auch gegen  $f$ , falls  $|x| < 1$ , denn

- für  $0 \leq x < 1$  gilt mit  $\xi \in [0, x]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = \binom{\alpha}{n} (1+\xi)^{\alpha-n} x^n$$

Falls nun  $n$  so groß ist, dass  $\alpha - n < 0$  gilt, ist  $(1+\xi)^{\alpha-n} < 1$ . Weil  $T[f, 0](x)$  absolut konvergiert gilt außerdem  $\left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \rightarrow 0$  und daher

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \rightarrow 0.$$

- Für  $-1 < x < 0$  verwenden wir die Integralform von  $R_n$  und erhalten (substituiere  $t \mapsto -t$ )

$$R_n(x) = n \binom{\alpha}{n} \int_0^{|x|} (x+t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n} dt$$

Nun gilt für  $0 < x$ ,  $0 \leq t \leq |x| < 1$ ,

$$|x+t| = |x| - t \leq |x| - |x|t = |x|(1-t) \quad (4.17)$$

und

$$n \binom{\alpha}{n} = n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\dots 2} = \alpha \binom{\alpha-1}{n-1}. \quad (4.18)$$

Damit also

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\stackrel{(4.17)}{\leq} \left| n \binom{\alpha}{n} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n} dt \\
&\stackrel{(4.18)}{=} \left| \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt \\
&= \underbrace{|\alpha| \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt}_{\text{unabhängig von } n} \underbrace{\left| \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty)} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(1-x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für } |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

**Motivation 4.3.13 (Taylor und Theorie).**

Nach diesen praktischen und praktisch wichtigen Beispielen verwenden wir den Satz von Taylor auch als Werkzeug, um die Theorie weiter zu entwickeln. Konkreter beweisen wir ein einfaches Werkzeug, um *Polynome zu entlarven*.

**Bemerkung 4.3.14 (Polynome und verschwindende Ableitungen).**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom vom Grad  $n$ , d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Dann gilt  $f^{(n+1)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Tatsächlich folgt leicht mittels Induktion, dass

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} \quad \text{für } n \leq k,$$

also insbesondere  $(x^n)^{(n)} = n!$  und  $(x^n)^{(n+1)} = 0$  gilt.

Polynome haben also die Eigenschaft, dass eine und damit alle Ableitungen ab einer gewissen Ordnung verschwinden. Umgekehrt, falls eine Funktion  $f \in C^\infty$  diese Eigenschaft besitzt, dann muss  $f$  schon ein Polynom gewesen sein — das ist eine Konsequenz des Satzes von Taylor, wie wir gleich sehen werden.

Zusammengefasst gilt also für  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f \text{ Polynom} \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } f^{(k)}(x) = 0 \forall x$$

**Korollar 4.3.15 (Funktion mit verschwindenden Ableitungen sind Polynome).**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion. Falls  $f^{(n+1)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .

*Beweis (Einfach den Satz von Taylor verwenden!).*

Es gilt  $f^{(n+1)} = 0$  also ist  $f^{(n+1)}$  stetig, also  $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$  und wir können 4.3.2

verwenden. Wegen  $f^{(n+1)} = 0$  gilt aber  $R_{n+1} = 0$  und daher  $f(x) = T_n[f, 0](x)$ . Also ist  $f$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .  $\square$

## 4.4 Uneigentliche Integrale

**Motivation 4.4.1.** Der im Abschnitt 4.1 entwickelte und seither (erfolgreich) verwendete Integralbegriff ist für manche Anwendungen allerdings zu eng gefasst. Seine beiden diesbezüglichen „Schönheitsfehler“ sind:

- Wir haben nur über *komakte Intervalle* integriert.
- Riemann-integrierbare Funktionen sind notwendigerweise *beschränkt*.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren, lernen wir nun die sogenannten *uneigentlichen Integrale* kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwert von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten drei Fälle.

**Definition 4.4.2 (Uneig. Int., Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze).**

Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft, dass  $f$  Riemann-integrierbar auf jedem Intervall  $[a, R]$  mit  $a < R < \infty$  ist. Falls

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt \text{ existiert und endlich ist,}$$

Limes der Fkt.  
 $R \mapsto \int_a^R f$

so heißt das Integral  $\int_a^\infty f(t) dt$  konvergent (wir schreiben auch  $\int_a^\infty f(t) dt < \infty$ ) und setzen

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt.$$

Analog definieren wir für  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ .



**Beispiel 4.4.3 (Uneigentliches Integral Fall 1).**

(i) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{ für } s > 1.$$

Tatsächlich ist  $\frac{1}{x^s}$  stetig und daher Riemann-integrierbar auf jedem Intervall  $[1, R]$  und es gilt

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left( 1 - \underbrace{\frac{1}{R^{s-1}}}_{\rightarrow 0 \text{ (} s > 1)} \right) \rightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R \rightarrow \infty). \quad (4.19)$$

(ii) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert für } s \leq 1,$$

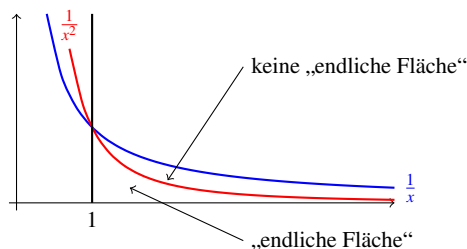
denn für  $s \neq 1$  können wir die Rechnung in (4.19) verwenden und sehen  $\frac{1}{s-1} \left( 1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) \rightarrow \infty$ . Für  $s = 1$  gilt mit 2.3.7(iv)

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_1^R = \log(R) \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Insgesamt gilt also

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1}$$

und wir können die Situation wie in Abb.4.16 veranschaulichen.



**Abb. 4.16** Konvergenzverhalten der Integrale von  $\frac{1}{x}$  und  $\frac{1}{x^2}$  in  $[1, \infty)$

**Definition 4.4.4 (Uneig. Int., Fall 2: Integrand an einer Integrationsgrenze unbeschränkt/undefiniert).**

Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft, dass  $f$  auf jedem Intervall  $[a + \varepsilon, b]$  ( $\varepsilon > 0$ ) Riemann-integrierbar ist. Falls

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt \text{ existiert und endlich ist,}$$

so heißt das Integral  $\int_a^b f(t) dt$  konvergent ( $\int_a^b f < \infty$ ) und wir setzen

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt.$$

Analog definieren wir für  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(t) dt$ .

**Beispiel 4.4.5 (Uneig. Integral, Fall 2).**

Es gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \iff s < 1.$$

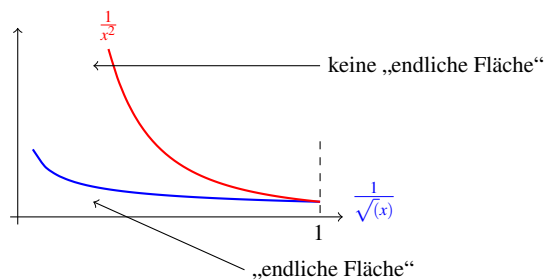
Bemerke zunächst, dass  $\frac{1}{x^s}$  undefiniert in  $x = 0$  ist, falls  $s > 0$  gilt. Tatsächlich gilt für  $s \neq 1$  und  $1 > \varepsilon > 0$ .

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1-s} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \infty & s > 1 \end{cases}$$

Falls  $s = 1$  und  $1 > \varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{2.3.7(iv)} \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Schließlich illustrieren wir die Situation wieder wie in Abb.4.17 gezeigt:



**Abb. 4.17** Konvergenzverhalten der Integrale von  $\frac{1}{x^2}$  und  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  in  $(0, 1]$

**Definition 4.4.6 (Uneig. Int., Fall 3: Kombierter Fall — beide Integrationsgrenzen kritisch).**

Sei  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den Eigenschaften, dass

$f$  Riemann-integrierbar auf jedem Intervall  $[\alpha, \beta]$  mit  $a < \alpha < \beta < b$  ist. Falls für ein beliebiges  $c \in (a, b)$

die uneigentlichen Integrale  $\int_a^c f(t)dt$  und  $\int_c^b f(t)dt$  konvergieren,

so heißt das Integral  $\int_a^b f(t)dt$  konvergent ( $\int_a^b f < \infty$ ) und wir setzen

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Diese Def. ist unabhängig von der Wahl von  $c$  — ohne Beweis

**Beispiel 4.4.7 (Uneigentliche Integrale, Fall 3).**

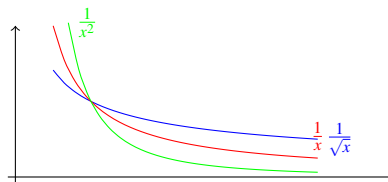
(i) Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Tatsächlich setze  $c = 1$ , dann gilt

$$4.4.3 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \text{ divergiert } \forall s \leq 1, \quad 4.4.5 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx \text{ divergiert } \forall s \geq 1$$

Wir veranschaulichen die Funktionen nochmals in Abb. 4.18:



**Abb. 4.18** Konvergenzverhalten der Integrale von  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$  und  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  in  $(0, \infty)$

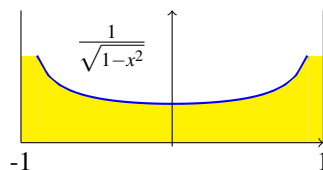
(ii) Es gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

(vgl. Abb. 4.19), denn mit  $c = 0$  haben wir

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{3.1.31(\text{iii})}{=} -\arcsin(-1+\varepsilon) \\ &\rightarrow -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(1-\varepsilon) \\ &\rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$



**Abb. 4.19** Fläche unter dem Graphen von  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(vgl. den Graph von  $\arcsin$  in Abb. 4.20)

Daher gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(iii) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

vgl. Abb. 4.21. Sei  $R > 0$ , dann gilt nämlich

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan(-R) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (R \rightarrow \infty),$$

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(R) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (R \rightarrow \infty),$$

(vgl. den Graph von  $\arctan$  in Abb. 4.22) und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

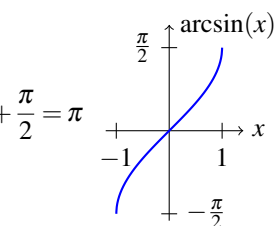


Abb. 4.20 Graph des Arcussinus

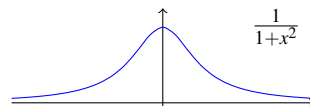


Abb. 4.21 Graph von  $\frac{1}{1+x^2}$

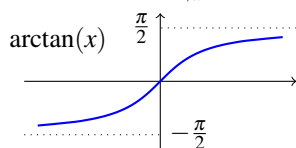


Abb. 4.22 Graph des Arcustangens

#### Motivation 4.4.8 (Konvergenztests für uneig. Int.).

Ganz ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen, siehe Abschnitt 1.4, lassen sich Konvergenztests für uneig. Integrale formulieren, die es einem ersparen, die oft umständlichen Integrale, die in den Definitionen gefragt sind, zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 und 3 ist reine Routine-Arbeit, die wir hier unterlassen.

#### Proposition 4.4.9 (Konvergenztests für uneig. Int.).

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Definition 4.4.2, d.h.  $f$  Riemann-integrierbar für jedes Intervall  $[a, R]$  mit  $a < R < \infty$ . Dann gilt:

(i) Cauchy-Prinzip:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R > a \forall r, s > R : \left| \int_r^s f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

(ii) Majorantenkriterium: Sei  $h : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \geq 0$  und  $\int_a^{\infty} h(t) dt$  konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^{\infty} f(t) dt \text{ konvergiert}.$$

(iii) Minorantenkriterium: Sei  $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \geq 0$  und  $\int_a^{\infty} g(t) dt$  divergent. Falls

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^{\infty} f(t) dt \text{ divergiert}.$$

*Beweis.* (i)  $\Leftarrow$ : Sei  $(R_n)$  eine Folge mit  $R_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0$  und wähle  $R > a$  wie in der Bedingung.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : R_n > R \quad \forall n \geq N \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \left| \int_{R_m}^{R_n} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \left( a_n = \int_a^{R_n} f, \quad |a_n - a_m| = \left| \int_a^{R_n} f - \int_a^{R_m} f \right| = \left| \int_{R_m}^{R_n} f \right| \right) \\ &\stackrel{1.3.16}{\Rightarrow} \left( \int_a^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\ &\stackrel{1.3.18}{\Rightarrow} \left( \int_a^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.2}{\Rightarrow} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt \text{ existiert.} \end{aligned}$$

(i)  $\Rightarrow$ : Indirekt angenommen,  $\int_a^\infty f(t) dt$  konvergiert, aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists r_n, s_n > n : \left| \int_{r_n}^{s_n} f(t) dt \right| \geq \varepsilon. \quad (4.20)$$

Nun gilt aber  $r_n \rightarrow \infty$ ,  $s_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und wir definieren eine neue Folge  $R_n$  durch Mischung von  $r_n, s_n$ , d.h.

$$R_{2k} = r_k, \quad R_{2k+1} = s_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Dann gilt  $R_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und weil  $\int_a^\infty f(t) dt$  konvergiert

$$\begin{aligned} &\stackrel{4.4.2}{\Rightarrow} \left( \int_a^{R_m} f(t) dt \right)_m \text{ konvergiert} \\ &\stackrel{1.3.18}{\Rightarrow} \left( \int_a^{R_m} f(d) dt \right)_m \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch zu (4.20)} \end{aligned}$$

(ii) Folgt aus (i): Sei  $\varepsilon > 0$  und  $R$  wie in (i) für  $h$  und  $r, s > R$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left| \int_r^s f(t) dt \right| \stackrel{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} \int_r^s |f(t)| dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_r^s h(t) dt < \varepsilon \\ &\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \int_a^\infty f < \infty. \quad \left( (i) \text{ für } h \Rightarrow (i) \text{ für } f \right) \end{aligned}$$

(iii) Folgt sofort aus (ii): Indirekt angenommen  $\int_a^\infty f < \infty \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \int_a^\infty g < \infty$  im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Beispiel 4.4.10 (Konvergenztests).**

(i)  $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$  konvergiert wegen 4.4.9(ii), denn

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ konvergiert.}$$

Majorantenkriterium funktioniert hier nicht!

(ii)  $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$  konvergiert, vgl. Abb.4.23

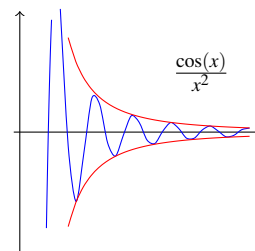
Wir wenden das Cauchy-Prinzip an:

Seien  $1 < r < s$ , dann gilt

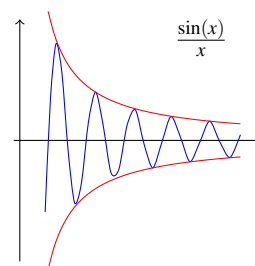
$$\begin{aligned} \left| \int_r^s \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &\stackrel{\text{PL}}{=} \left| -\frac{\cos(x)}{x} \right|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left| \frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s} \right| + \left| \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für  $r, s$  groß ( $\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \rightarrow 0$  und  $\left| \int_r^s \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$  laut Cauchy-Prinzip, vgl. Abb.4.24.)

Bemerkung: Wir sind hier hart an der Grenze des möglichen, denn  $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$  divergiert und auch  $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ !



**Abb. 4.23** Die Funktion  $\frac{\cos(x)}{x^2}$  lässt sich durch die Majorante  $\frac{1}{x^2}$  beschränken.



**Abb. 4.24** Konvergenz des Integrals  $\frac{\sin(x)}{x}$  mittels Cauchy-Prinzip.

**Motivation 4.4.11 (Integraltest für Reihen).**

Die Analogie zwischen Konvergenztests für uneigentliche Integrale und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, den sog. Integraltest für Reihen, der die bisherigen Tests ergänzt.

**Proposition 4.4.12 (Integraltest für Reihen).**

Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(t) dt \text{ konvergiert.}$$

*Beweis.* Wir definieren Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi(x) := f(n), \quad \psi(x) := f(n+1) \quad (n \leq x < n+1)$$

$f$  monoton fallend  $\Rightarrow \psi \leq f \leq \varphi$ . Integration über  $[1, N]$  liefert

$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N \varphi(t) dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_1^N f(t) dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_1^N \psi(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$$\int_1^\infty f < \infty \Rightarrow s_N = \sum_{n=1}^N f(n) \text{ beschränkt} \stackrel{1.4.6}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^\infty f(n) < \infty$$

und umgekehrt

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty \Rightarrow \forall \text{ monoton wachsende Folgen } R_n \text{ mit } R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} & \left( \int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ monoton wachsend und beschränkt} \\ & \stackrel{1.3.25}{\Rightarrow} \left( \int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f < \infty. \square \end{aligned}$$

**Beispiel 4.4.13** ( $\sum \frac{1}{n^s}$  zum Zweiten, vgl. 1.4.9).

Für  $s > 0$  gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.12}{\Leftrightarrow} \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.3(\text{iii})}{\Leftrightarrow} s > 1.$$

## Literaturverzeichnis

1. Amann, H., Escher, J.: Analysis I. Birkhäuser, 3. Auflage, Basel (2006)
2. Barner, M., Flohr F.: Analysis I. de Gruyter, 5. Auflage, Berlin (2000)
3. Behrends, E.: Analysis Band 1 (Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni). Springer-Spektrum, 6. Auflage, Berlin, Heidelberg (2014)
4. Deiser, O.: Analysis 1 (Mathematik für das Lehramt), Springer-Spektrum, 2. Auflage, Berlin, Heidelberg (2013)
5. Forster, O.: Analysis 1, Springer-Spektrum, 12. Auflage, Berlin, Heidelberg (2016)
6. Kuba, G., Götz, S.: Zahlen. S. Fischer, Frankfurt am Main (2004)
7. Schichl, H., Steinbauer, R.: Einführung in das mathematische Arbeiten. Springer-Spektrum, Berlin, 3. Auflage (2018)
8. Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 17. Auflage (2009)
9. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zu „Einführung in die Analysis“, Universität Wien, online unter [www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/08einan/einfanalysis.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/08einan/einfanalysis.pdf), 2010.
10. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zum „Modul Analysis“, Universität Wien, online unter [www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/0809an/modul\\_analysis.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/0809an/modul_analysis.pdf), 2009.



# Sachverzeichnis

- $b$ -adische Entwicklung, 69
- überabzählbar, 9
- Ableitung, 146
  - einseitig, 147
  - höhere, 163
- Absolutbetrag, 8, 83, 149
  - komplexer, 123
- abzählbar, 9
- allgemeine Potenz, 119
- allgemeine Potenzfunktion, 119, 162
- archimedische Eigenschaft, 12
- Arcuscosinus, 137
- Arcussinus, 138, 163
- Arcustangens, 138, 163
- Berührungspunkt, 52
- Bernoulli-Ungleichung, 17
- beschränkt, 10
- bijektiv, 82
- Binomialreihe, 218
- Bolzano-Weierstraß, 45
- Cauchy-Folge, 47
- Cauchy-Prinzip
  - für Folgen, 48
  - für Reihen, 57
- Cauchy-Produkt für Reihen, 74
- Cosinus, 130, 131, 148, 207
- Cosinus hyperbolicus, 97
- Cotangens, 136
- De L'Hospital, 181
- dehnungsbeschränkt, 172
- Dehnungsschranke, 172
- Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , 12, 53, 71
- Differentialquotient, 146
- Differenzenquotient, 145
- Differenzierbarkeit, 146
  - der Umkehrfunktion, 161
  - als lineare Approximation, 156
  - Kettenregel, 159
  - Produktregel, 154
  - Quotientenregel, 154
- Dirichlet-Funktion, 85, 191
- Dreiecksungleichung, 9
  - für Riemann-Integrale, 196
  - verkehrte, 9
- eulersche Zahl, 76
- Exponential
  - funktion, 76, 83, 120, 148, 179, 207, 212
  - funktion, komplexe, 128
  - reihe, 76, 214
  - reihe, komplexe, 128
- Extremwert, 165
  - hinreichende Bedingung, 175
  - notwendige Bedingung, 166
- Fehlerabschätzung für exp, 78
  - komplexe, 128
- Fixpunktsatz, 107
- Folge, 19
  - (streng) monoton fallende, 49
  - (streng) monoton wachsende, 49
  - beschränkt, 27
  - bestimmt divergent, 38
  - divergente, 24
  - Fibonacci, 22
  - geometrische, 23
  - komplexe, 19, 124
  - konstante, 20
  - konvergente, 23
  - reelle, 19

- uneigentlich konvergent, 38
- Folgenstetigkeit, 91
- Funktion, 82
  - beschränkte, 109
  - charakteristische, 85
  - konkave, 177
  - konstante, 82, 147
  - konvexe, 177
  - lineare, 83
  - negativer Teil, 196
  - positiver Teil, 196
  - rationale, 84, 155
- Funktionalgleichung
  - komplexe, 128
  - der Exponentialfunktion, 76
  - des Logarithmus, 117
- Gauß-Klammer, 71, 83
- Gaußglocke, 97
- geometrische Reihe, 23
- geometrische Summe, 18
- Grenzwert, 23
  - einer Funktion, 98
  - einseitig, 99
  - uneigentlich, 39, 99
- Häufungspunkt, 52
- Häufungswert einer Folge, 42
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 202
- identische Abbildung, 82
- imaginäre Einheit, 5, 6
- Induktionsprinzip, 16
- Infimum, 10
- injektiv, 82
- Integrabilitätskriterium, 192
- Integral für Treppenfunktionen, 188
- Integraltest für Reihen, 226
- Intervall, 8
  - Durchmesser, 54
  - innerer Punkt, 165
  - kompakt, 102
  - Randpunkt, 165
- Intervallschachtelungsprinzip, 54
- komplexen Konjugation, 6
- Konvergenzprinzipien, 47
- Konvergenztests für uneigentliche Integrale, 224
- Kreiszahl  $\pi$ , 134
- Lagrange-Form des Taylorrestglieds, 214
- Leibnitz-Kriterium, 60
- Limes superior, inferior, 46
- Lipschitz-Konstante, 172
- Lipschitz-stetig, 172
- Logarithmus, 117, 162, 179, 215
- lokales Maximum, 165
- lokales Minimum, 165
  - striktes, 165
- Majorantenkriterium, 65
- Minorantenkriterium, 65
- Mittelwertsatz
  - der Differentialrechnung, 169
  - der Differentialrechnung, verallgemeinerter, 181
  - Integralrechnung, 198
- Momentangeschwindigkeit, 152
- Monotonie und Ableitung, 173
- Nullfolge, 24
- Nullstellensatz, 103
- Oberintegral, 191
- Ordnung
  - natürliche, 7
- Ordnungsrelation, 7
- ordnungsvollständig, 11
- Ordnungsvollständigkeit, 10, 55
- Partialsumme, 34
- Partialsummen, 34
- Partielle Integration, 208
- Peano-Axiome, 15
- periodische Dezimalzahlen, 37
- Polarkoordinaten, 5
- Polynomfunktion, 83, 179
- Quotientenfunktion, 85
- Quotiententest, 67
- Reihe, 34
  - absolut konvergent, 63
  - alternierend, 60
  - alternierende harmonische, 61
  - geometrische, 36
  - harmonische, 58
  - komplexe, 126
  - konvergente, 34
- Riemann-Integral, 191
  - Linearität, 194
  - Monotonie, 194
- Riemannsummen, 199
- Sandwich-Lemma, 33
- Satz von Dedekind, 11

- Satz von Minimum und Maximum, 109
- Satz von Rolle, 170
- Satz von Taylor, 214
- Schmiegegerade, 150
- Schranke
  - obere, 10
  - untere, 10
- Sinus, 130, 131, 148, 158, 164, 173, 175, 207
- Sinus hyperbolicus, 97
- Stützstelle, 199
- Stammfunktion, 201
- Stetigkeit, 87
  - gleichmäßige, 112
  - komplexe, 126
- striktes lokales Maximum, 165
- Substitutionsregel der Integralrechnung, 208
- Supremum, 10
- Supremumseigenschaft, 10
- surjektiv, 82
  
- Tangens, 136, 155
- Tangente, 146
- Tangentenproblem, 150
- Taylor-Polynom, 212
- Taylor-Reihe, 212
- Taylorformel, 211
- Teilfolge, 41
  
- Totalordnung, 7
- Treppenfunktion, 84, 187, 191
- Trichotomie, 7
  
- Umkehrfunktion, 161
- Umkehrsatz, 114
- Umordnung von Reihen, 62
- Umordnungssatz, 64
- unbeschränkt, 10
- Uneigentliche Integrale, 220–222
- Unstetigkeit, 89
- Unterintegral, 191
  
- Verknüpfung von Funktionen, 85
- Vollständigkeit  $\mathbb{C}$ , 125
  
- Wachstumsschranke, 171
- Wendestellen, 179
- Wohlordnung der natürlichen Zahlen, 16
- Wurzel, 13, 83
- Wurzeltest, 66
  
- Zahlen
  - komplexe, 5
  - natürliche, 15
  - reelle, 4, 7, 11
- Zwischenwertsatz, 105