Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2018/19

Version 3. Oktober 2018

Roland Steinbauer
Universität Wien, Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien

Evelyn Süss-Stepancik
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67
A-2500 Baden

Kapitel A

Einleitung

Am Anfang dieser Vorlesung nehmen wir eine Begriffsbestimmung vor: Was ist die Analysis als mathematische Disziplin? Was ist ihr Wesen und was sind ihre zentralen Begriffe und Methoden? Warum ist das so (und nicht anders)? Dabei blicken wir in strukturierte Weise auf die Fachvorlesung „Analysis" aus dem vergangenen Semester zurück.

Darauf aufbauend nehmen wir eine weitere Begriffsbestimmung vor: Was ist die „Schulanalysis"? Welchen Platz hat die Analysis im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe? Warum ist das so (und nicht anders)? Dabei geben wir einen Ausblick auf die kommende Vorlesung.

§1 Analysis zwischen Schule und Universität

§1.1 Was soll und was will die Analysis[1]

1.1.1. Analysis - Eine erste Begriffsbestimmung. Ein Enzyklopädieeintrag für *(mathematische) Analysis* könnte in etwa wie folgt lauten[2]:

> Die Analysis ist jenes Teilgebiet der Mathematik, in dem Funktionen (und ihre Verallgemeinerungen) mit den Methoden des Grenzwertbegriffs studiert werden.
>
> Ihre Grundlagen wurden von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1643–1726) als Infinitesimalrechnung unabhängig voneinander entwickelt. Als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik neben den klassischen Teilgebieten der Geometrie und der Algebra existiert die Analysis seit Leonhard Euler (1707–83).
>
> Grundlegend für die gesamte Analysis ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (und auch der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen) mitsamt seinen geometrischen, arithmetischen, algebraischen und topologischen Eigenschaften. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und

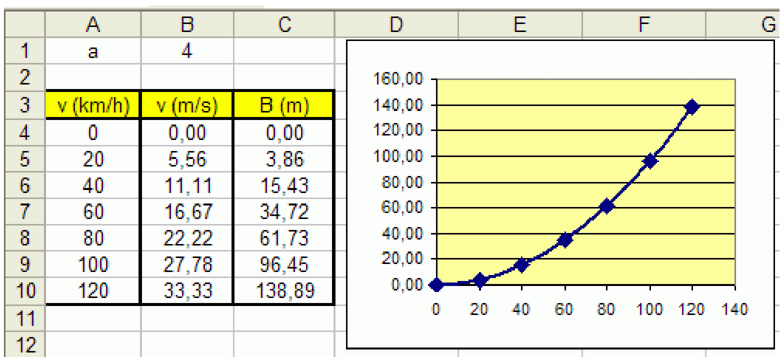
[1] Dieser Text stammt weitgehend aus der Vorlesung „Einführung in die Analysis" von R.S. im Sommersemester 2012 und nimmt starke Anleihen bei einem gleichnamigen Text von Michael Grosser, der anläßlich seines Analysiszyklus 1990–91 entstanden ist sowie dem Vorwort von (Heuser, 2003) und der Einleitung in (Behrends, 2003).

[2] vgl. z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Analysis`

> Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

Wir wollen im Folgenden aber etwas mehr in die Breite und Tiefe gehen.

1.1.2. Analysis - Eine Inhaltsbestimmung. Inhaltlich beschäftigt sich die Analysis vor allem mit Funktionen, und zwar zunächst mit solchen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ganz allgemein dienen Funktionen dazu, den Zusammenhang zwischen verschiedenen Größen zu beschreiben. Hier meint „beschreiben” nicht „erklären” - das Wort Zusammenhang ist also nicht kausal zu verstehen, sondern es geht darum, welche Werte einer Größe zusammen mit welchen Werten einer anderen Größe auftreten. Alltägliche Beispiele sind etwa Verzinsung (Höhe eines Guthabens oder auch eines Schuldenstands zum einem bestimmten Zeitpunkt), Bremsweg (Läge des Bremswegs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit), Radiokativität (Anzahl der strahlenden Isotope zu einem bestimmten Zeitpunkt) etc, siehe AbbildungA.1.



	A	B	C
1	a	4	
2			
3	v (km/h)	v (m/s)	B (m)
4	0	0,00	0,00
5	20	5,56	3,86
6	40	11,11	15,43
7	60	16,67	34,72
8	80	22,22	61,73
9	100	27,78	96,45
10	120	33,33	138,89
11			
12			

Abbildung A.1: Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Ein wichtiger Kunstgriff der Mathematik ist die Abstraktion: Es wird von der konkreten Situation bewusst abgesehen und statt mit Bremsweg, Zeit, Energieverbrauch, etc. beschäftigen wir uns mit „anonymen”, universell verwendbaren Größen, den Variablen. Alles was wir über Funktionen herausfinden, ist also universell (in jedem Beispiel) gültig, wobei natürlich eine exakte mathematische Erklärung (sprich Definition), was eine Funktion sein soll, zugrunde gelegt werden muss.
Darauf und auf der Definition der reellen Zahlen aufbauend ist es der rote Faden der Analysis, das Änderungsverhalten von Funktionen zu verstehen, zu beschreiben und zu beherrschen.
Etwas technischer formuliert sind die zentralen Fragestellungen beim Studium des *Änderungsverhalten von Funktionen*:

- Welche Begriffe eignen sich am besten dazu das Verhalten von Funktionen „im Kleinen” zu erfassen?
- Wie kann man aus dieser Kenntnis einer Funktion „im kleinen” Aussagen über die Funktion im Ganzen gewinnen?

1.1.3. Beispiel (Radfahren). Wie kann aus der Kenntnis der Momentangeschwindigkeit (der Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der Gesamtverlauf der Fahrt (zurückgelegte Strecke, die Funktion im Großen) rekonstruiert werden?
Bei einem Fahrrad werden diese Größen durch den Tachometer bzw Tageskilometerzähler angezeigt, aber was bedeuten diese Begriffe wirklich und wie kann obige Frage systematisch

beantwortet werden. Solche Frage zu beantworten, benötigen wir einen geeigneten Begriffsapparat.

1.1.4. Der analytische Begriffsapparat. Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den Begriff des *Grenzwerts (Limes)*. Dieser Grenzwertbegriff in seinen zahlreichen Erscheinungsform ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- und der Integralrechnung zugrunde.
Die Analysis ist jedoch weit mehr als ein Lehrsystem indem diese abstrakten Begriffe zu abstrakten Resultaten verwoben werden. Sie bringt in schier unglaublicher Methodenvielfalt eine Fülle konkreter mathematischer Resultate hervor. Dabei steht oft der Gedanke der Approximation im Zentrum, es ergeben sich eine Unzahl „schöner" Formeln und Identitäten und immer wieder können überraschende Beziehungen zwischen Begriffen hergestellt werden, die zunächst (scheinbar) nichts miteinander zu tun haben.

1.1.5. Und wozu das Ganze?
Was hat diese zunächst vielleicht etwas trocken erscheinende Materie mit der echten Welt zu tun? Sehr viel!
Das Studium von funktionellem Änderungsverhalten ist, wie schon oben angedeutet, keineswegs ein rein „akademisches Vergnügen", sondern ist eng verbunden mit dem Bestreben der Menschen, die uns umgebende Welt zu verstehen und zu gestalten. Das zeigt insbesondere die Geschichte der Analysis, deren Entstehen und Meilensteine Hand in Hand gehen mit der Entwicklung der neuzeitlichen Physik durch Newton (1643–1726), Euler (1707–83), Lagrange (1736–1813) und Laplace (1749–1827), um nur die großen Denker des Anfangs zu nennen.
Damit steht die Analysis im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt und Gesellschaft in den letzten vier Jahrhunderten so tiefgreifend und beispiellos verändert hat. Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik sowie die Schrift und nimmt meines Erachtens (R.S.) ganz zu recht viel Platz in der Schulmathematik ein.

1.1.6. Ja schön aber wie? Methodik & Axiomatik.
Sie hatten in der Fachausbildung das Glück, die Grundbegriffe der Analysis in einer vergleichsweise verständlichen Form kennen lernen zu können. Das war nicht immer so, denn bis weit ins 19. Jahrhundert waren die Mathematiker/innen auf eine mehr oder weniger gut funktionierende Intuition beim Umgang mit „unendlich kleinen Größen" angewiesen. Die historische Entwicklung hat jedoch gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist - und es ist in der Mathematik als Wissenschaft selbstverständlich - dass die Analysis wie jedes andere mathematische Gebiet nach der axiomatische Methode (Vorgehen nach dem Definition-Satz-Beweis Schema) gelehrt wird. Das trifft weitgehend auch für die Fachausbildung im Lehramt zu.
Die ganze Theorie und alle ihre Aussagen müssen in streng logischem Aufbau aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen aufgebaut werden. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit aber oft auch ihre Schönheit dieser Methode. Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

> Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Warum ist das so?

(1) Nur so erreicht die Mathematik eine Sicherheit, die von ihr erwartet wird.
(2) Sie macht sie das Erlernen eines Gebietes leichter!

Punkt (2) ist kein Witz! Statt in „druidischer” Weise von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantieren mit unendlich kleinen Größen unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg.
Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt definiert, allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert, diese werden durch logische Schlussfolgerungen bewiesen.
Ja, aber natürlich bereitet diese Herangehensweise am Anfang große Schwierigkeiten! Es ist eine große Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen der Fantasie und Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen.
Von den damit verbundenen Schwierigkeiten beim Lernen und Lehren der Analysis wird in dieser Vorlesung noch ausführlich die Rede sein.

1.1.7. Eine persönliche Bemerkung (R.S.).
Zu sehen, wie aus den wenigen Axiome der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen und die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen und wird nicht ganz ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können). Ähnliches gilt für die Kraft der Anwendungen: Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft.

Übungsaufgaben.

$\boxed{1}$ **Analysis' Top-Three[3].** Ziel dieser Aufgabe ist es, in den folgenden Kategorien Ranglisten (Platz 1–3) in Bezug auf die Inhalte Ihrer Fachvorlesung „Analysis” zu erstellen und zu begründen. Dabei können inhaltliche und ästhetische Argumente oder auch Argumente aus der individuellen Lerngeschichte gewählt werden.

a) Wichtige Begriffe/Definitionen
b) Wichtige Resultate/Beweise
c) Unsympathische Begriffe/Definitionen
d) Unsympathische Resultate/Beweise
e) Überraschungen

In den Übungen soll dann versucht werden in einer „Plenardiskussion” auf eine konsensuale Gesamtwertung zu kommen.

$\boxed{2}$ **Schulanalysis.** Reflektieren Sie Ihre schulischen Erfahrungen mit der Analysis und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Welche analytischen Begriffe standen im Zentrum?
b) Welche Ziele verfolgte Ihre Schulanalysis? Wurden diese transparent gemacht?

$\boxed{3}$ **Schulanalysis vs. Fachvorlesung.** Reflektieren Sie Ihre Schulerfahrungen und die aus Ihrer Fachvorlesung „Analysis” und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Welche begrifflichen Unterschiede haben Sie am stärksten erlebt?
b) Welche methodischen Unterschiede haben Sie am stärksten erlebt?

[3] In Anlehnung an Rob's Top-Five Split-Ups, ect. in „High Fidelity“ von Nick Hornby.

$\boxed{4}$ **Was ist Analysis?** Reflektieren Sie Ihre schulischen Erfahrungen und die aus Ihrer Fachvorlesung „Analysis" und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Wie hätten Sie nach der Matura auf die Frage „Was ist Analysis?" geantwortet?
b) Wie hätten Sie nach ihrer Fachvorlesung bzw. nach der Prüfungsvorbereitung auf die Frage „Was ist Analysis?" geantwortet?
c) Enthält die Diskussion in der Vorlesung A§1 für Sie neue bzw. überraschende Aspekte? Welche?

§1.2 Was soll und was will die Schulanalysis?

Um eine Antwort auf diese – zugegebenermaßen nicht ganz einfache – Frage zu geben, lohnt es sich, einen (intensiven) Blick in die verschiedenen Bereiche zu tun, die regeln und erläutern, was die Schulmathematik an sich soll und will. Das wären zum einen der Lehrplan mitsamt dem Konzept der Reifeprüfung und zum anderen die fachdidaktische Literatur mit ihren aktuellen Forschungsergebnissen.

1.2.1. (Schul-)Analysis im Lehrplan und im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung. Es mag erstaunen, aber es ist eine Tatsache, dass im österreichischen *Mathematiklehrplan der AHS-Oberstufe* das Wort „Analysis“ selbst nicht zu finden ist. Dennoch sind typische Themenbereiche der Analysis fest im Lehrplan verankert.
Nach dem Lehrplantext der *7. Klasse (AHS)* werden im ersten Semester die Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen erarbeitet (Differenzen-, Differentialquotient, mittlere/momentane Änderungsrate, Sekanten-/Tangentensteigung, Ableitungsfunktion, Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktion, Monotonie, Krümmung, ... Untersuchung von Polynomfunktionen in inner-/außermathematischen Bereichen) und im zweiten Semester eine Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung vorgenommen (Ableitungsregeln für Exponential- und Winkelfunktionen, Kettenregel, weitere Anwendungen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit).
In der *8. Klasse (AHS)* wird ebenso zweischrittig vorgegangen, zuerst werden wieder die Grundlagen der Integralrechnung erarbeitet (Ober-, Untersumme, bestimmtes Integral, Stammfunktion, elementare Integrationsregeln), später dann die Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung vorgenommen (das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, das unbestimmte Integral).

Das allein gibt aber noch keine Antwort auf die eingangs gestellt Frage, was die Schulanalysis soll und will.
Nun hält der Lehrplan neben der Auflistung der Inhalte auch einen allgemeineren Teil bereit und spricht dort die *Bildungs- und Lehraufgaben des gesamten Faches Mathematik* an. Diese sind zwar nicht explizit für die Analysis ausformuliert, geben aber einen Hinweis darauf, was die Schulmathematik an sich will. So sollen die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel erfahren, dass die Mathematik eine spezifische Art ist, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Im Zusammenhang mit der Schulanalysis werden wir in dieser Lehrveranstaltung noch klären, ob und wie diese Bildungsaufgabe erfüllt werden kann.

Nachdem der allgemeine Teil des Lernplans und die Auflistung der Lehrplaninhalte bisher keine befriedigende Antwort auf die oben gestellte Frage geben, kann die *Handreichung zum Lehrplan* herangezogen werden. Endlich — dort findet sich erstmals der Terminus Analysis.

In Teil B: *Erweiterter Grundkompetenzkatalog*, der die Grundkompetenzen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (SRP) und jene Lehrplankompetenzen, die neben Reifeprüfungskompetenzen noch wesentlich sind, zusammenfasst, ist dann nämlich vom Inhaltsbereich Analysis die Rede. Dort wird auch die sogenannte „Bildungstheoretische Orientierung" aus dem SRP-Konzept angeführt. Diese hält fest, dass die Analysis *Begriffe und Konzepte zur Beschreibung von diskreten und stetigen Änderungsverhalten* bereitstellt, die sowohl in der Mathematik als auch in vielen Anwendungen sehr bedeutend sind. Für die Schulanalysis bedeutet dies: Dass die Schülerinnen und Schüler

- diese mathematischen Begriffe erwerben müssen,
- sie in diversen Anwendungsfällen nutzen und deuten sollen sowie
- die Zusammenhänge der Fachbegriffe erkennen sollen.

Zusätzlich zu den damit verbundenen Kompetenzen werden in der bildungstheoretischen Orientierung noch die unterschiedlichen *mathematischen Darstellungsarten sowie die symbolischen Schreibweisen und Formalismen der Analysis erwähnt* — auch diese sollen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig genutzt werden können. Dem „Rechnen" an sich wird in der bildungstheoretischen Orientierung weniger Bedeutung beigemessen, es genügt, sich im Rahmen der SRP auf die einfachsten Regeln (z. B. des Differenzierens) zu beschränken.
Da die SRP aber nur eine Teilmenge des gesamten Lehrplans abprüft, sind im Lehrplan gelegentlich noch weitere Kompetenzen (z. B. die Kettenregel kennen und anwenden können) aufgelistet.
Um den Zusammenhang zwischen Lehrplan und SRP-Konzept deutlich zu machen, enthält der Lehrplan noch einen dritten Teil. In Teil C: *Lehrplan mit Hinweisen auf Grundkompetenzen* werden die Lehrplanformulierungen dann mit den Grundkompetenzen der SRP vernetzt, konkretisiert und durch Hinweise ergänzt (s. Tabelle A.1). Auch dort findet sich der Terminus Analysis wieder.

Zusammenfassend lässt sich an dieser Stelle also resümieren, dass der Lehrplan vorgibt, welche Inhalte und Kompetenzen die Schulanalysis vermitteln und erreichen will.

1.2.2. Schulanalysis im fachdidaktischen Diskurs. Eine Diskussion der Frage, was soll und will die Schulanalysis aus Sicht der Mathematikdidaktik, kann hier in der ihr gebührenden Breite nicht erfolgen. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf zentrale Grundpositionen dieses Diskurses und räumen gleich zu Beginn ein, dass es keine einfache Aufgabe ist, die Schulanalysis befriedigend zu unterrichten. In der fachdidaktischen Diskussion zur Schulanalysis kristallisieren sich im Wesentlich zwei unterschiedliche Positionen und Ansätze heraus.
Vertreterinnen und Vertreter des einen Ansatzes plädieren dafür, die *Anwendungen der Analysis im Unterricht in den Vordergrund* zu stellen und auf einen kanonischen Aufbau der Analysis zu verzichten. Dabei stehen echte Anwendungsbeispiele im Zentrum des Unterrichts und es werden nur die dafür nötigen Begriffe entwickelt.
Dem gegenüber steht die Position, dass die *Begriffe, Zusammenhänge und Beweise den Kern eines verständnisvollen Umgangs* mit Mathematik ausmachen und daher in der Schulanalysis nicht als lästiges und gegebenenfalls zu vernachlässigendes Übel zu betrachten sind.

Zum Einsatz des Computers meinen die jeweiligen Vertreterinnen und Vertreter:

- Gut, dass es ihn gibt! Er erleichtert einen anwendungsbezogenen Unterricht.
- Der Computer vermag zwar gedankliche Prozesse sichtbar zu machen, damit werden sie möglicherweise leichter verstehbar. Hüten wir uns aber davor, die Gedanken dabei selbst zu vergessen!

Kompetenzbereich	Lehrplanformulierung	Konkretisierung und Hinweise auf Grundkompetenzen
	Funktionale Abhängigkeiten, Analysis	
Folgen	Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können	□ Zahlenfolgen (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können (FA-L 7.1) □ Zahlenfolgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen (FA-L 7.2) □ Folgen zur Beschreibung von Prozessen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können (FA-L 8.4); (z. B. Kapitalentwicklungen durch geometrische Folgen darstellen können) □ Diskrete und kontinuierliche Modelle vergleichen können (z. B. anhand von Wachstumsmodellen)

Tabelle A.1: Ausschnitt aus dem Lehrplan, Teil C, S. 32

Für den Unterricht im Bereich der Schulanalysis steht man also vor dem Dilemma *„Anschaulichkeit versus Strenge"*. D.h. ein Mehr an Anschaulichkeit kann oft auf Kosten der Strenge gehen und umgekehrt. Zusätzlich zu diesem Dilemma zeigt sich in der schulischen Praxis, die dem deduktiven Aufbau der Analysis gerecht will, ein enormer Mangel an heuristischen Denk- und Arbeitsweisen. D.h. den Schülerinnen und Schülern wird selten Gelegenheit gegeben Lösungen, Begriffe o. Ä. in der Schulanalysis selbst zu entdecken bzw. selbst zu entwickeln. Zu guter Letzt ist die Schulanalysis oft auch von einer sehr einseitigen Kalkülorientierung geprägt und vernachlässigt dabei eine Verständnisorientierung. Und gerade diese Kalkülorientierung in der Analysis lässt Schülerinnen und Schüler straucheln, wenn ihre algebraischen Fertigkeiten aus den Jahren davor mangelhaft sind.

1.2.3. Nun — was also soll und will die Schulanalysis wirklich?

(1) Sie soll und will die für Analysis fundamentalen Ideen und deren Bedeutung verständnisorientiert vermitteln. Dazu zählen die reellen Zahlen, der Ableitungs- und Integralbegriff, der funktionale Zusammenhang, die Idee der Änderungsrate, die Idee des Ap-

proximierens und die Idee des Optimierens.

(2) Sie soll und will inhaltliche Vernetzungen anbieten. Dafür bietet sich besonders die Idee der Änderung an. Sie ist den Schülerinnen und Schülern als absolute und relative Änderung seit der Bruch- und Prozentrechnung vertraut, setzt sich über die mittlere und momentane Änderungsrate bis zum Ableitungsbegriff fort. Darüberhinaus bietet sich aber auch die Vernetzung zu anderen Teilgebieten der Mathematik an. Ein Beispiel hierfür ergibt sich bei der Stochastik, sobald die Normalverteilung behandelt wird.

(3) Sie soll und will anwendungsorientiert sein. D.h. sie soll Problemstellungen aus unterschiedlichsten Kontexten (Wirtschaft, Physik, Kinematik, ...) aufgreifen und bei der Modellbildung besonders sorgfältig mit der Interpretation und Validierung der Ergebnisse umgehen.

§2 Ausblick auf die Vorlesung

In diesem Abschnitt geben wir nun einen Ausblick auf die Inhalte und die Methodik der Vorlesung. Zuerst definieren wir aber die Ziele der Schulmathematik-Lehrveranstaltungen Analysis.

2.0.1. Ziele der Schulmathematik-Lehrveranstaltungen Analysis. Als Ziel der Vorlesung und der zugehörigen Übungen formuliert das Curriculum (Universität Wien, 2016):

> Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. Sie kennen verschiedene Möglichkeiten für Zugänge zu grundlegenden Themen des Analysis-Schulunterrichts (und ihrer Anwendungen) und können diese bewerten. Die Studierenden können in diesem Gebiet fachdidaktische Konzepte anwenden und Computer in angemessener Weise einsetzen, sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten.

2.0.2. Schulanalysis vom Höheren Standpunkt. Um diese Ziele zu erreichen, werden wir in der Vorlesung die *Schulanalysis von einem höheren Standpunkt* aus betrachten. Das bedeutet, dass der Hauptstrang der Vorlesung die zentralen Inhalte der Schulanalysis behandelt, aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und ein umfassendes Verständnis der analytischen Kernbegriffe und ihrer Zusammenhänge herstellt.
Diese Kerninhalte sind wenig überraschend ident mit dem Kanon sowohl der Fachvorlesung „Analysis“ als auch der Schulanalysis:

- Funktionsbegriff
- Folgen, Grenzwert und Vollständigkeit der reellen Zahlen
- Differentialrechnung & Integralrechung plus Anwendungen
- Spezielle Funktionen

2.0.3. Unsere zwei Anknüpfungs- und Bezugspunkte.
Der Hauptstrang der Vorlesung also „unsere“Schulanalysis von einem höheren Standpunkt hat zwei Anknüpfungs- bzw. Bezugspunkte, nämlich

(1) einerseits die Inhalte und (mathematischen) Methoden der Fachvorlesung ,,Analysis in einer Variable für das Lehramt” an die wir direkt anknüpfen und

(2) andererseits ausführlich Bezüge zur Unterrichtspraxis herstellen.

Um letzteres bewerkstellugen zu können, stellen wir in Kapitel **??** einen *fachdidaktischen Begriffsrahmen* zur Verfügung, der es erlaubt, das mathematisches Fachwissen zu reflektieren und *mathematikdidaktisches Professionswissen* aufzubauen. Damit sollen die Hörer/innen befähigt, werden einen qualitätsvollen Analysis-Unterricht zu gestalten, der fachlich und fachdidaktisch fundiert ist und sich durch eine reflektierte Unterrichtspraxis ausgezeichnet.

Um diese beiden Bezugspunkte auch fest in diesem Skriptum zu verankern, wird er Haupttext von zwei Sorten von Boxen unterbrochen: *mathematischen Faktenboxen* und Boxen zum *Fachdidaktischen Professionswissen*, die sowohl wichtige fachdidaktische Begriffsbildungen und Inhalte erklären, wie auch unterrichtspraktische Hinweise geben.

2.0.4. Hochschuldidaktischer Hintergrund. : Es gibt eine umfangreiche Literatur zum sog. Lehrerprofessionswissen (siehe etwa Baumert and Kunter (2006); Krauss et al. (2008)). Durch große empirische Studien ist belegt, dass sich das mathematische Lehrerwissen valide in die beiden Teilbereiche mathematical content knowledge (MCK) und paedagogical context knowledge (PCK) unterteilen lässt. Letzteres könnte man auch kurz „fachdidaktisches Handlungswissen“ nennen und ist Hauptprädiktor für den Lernerfolg von Schülern/innen. MCK der Lehrkraft hat zwar auch einen positiven Einfluss auf die Unterrichtsqualität, reicht aber alleine nicht aus. Allerdings beruht PCK immer auf einer soliden Basis von MCK.

Darüber hinaus sind typische unterrichtliche Handlungsanforderungen an Lehrkräfte ebenfalls gut empirisch erforscht (Bass and Ball (2004); Prediger (2013). Es ergeben sich z.B. folgende mathematischen Kernaufgaben, die Lehrer/innen in ihrer täglichen Praxis zu bewältigen haben:

- Anforderungen an Schüler/innen (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können
- Lernziele setzen und ausschärfen
- Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten
- Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren
- Tests entwickeln und re-skalieren
- geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln
- Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren
- Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren
- zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache,Symbolsprache) flexibel hin-und herwechseln
- Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen
- Begriffe und Konzepte erklären und Bezüge herstellen

Ebenso wird in der Literatur darauf hingewiesen, dass fachliche Inhalte im Bewusstsein der Lehrkräfte geeignet repräsentiert sein müssen, damit diese fähig sind, Aufgaben des obigen Anforderungskatalogs effektiv zu bewältigen.

Die Orientierung an obigen Punkten liefert uns ein leitendes Prinzip, um die Inhalte und ihre konkrete Ausgestaltung, die Methoden und den Geist der Vorlesung praxisnahe zu gestalten. In der Vorlesung aber vor allem in den Übungen werden wir diese Kernaufgaben trainieren und ein Bewusstsein für die mathematischen Tätigkeiten schaffen, die die Unterrichtspraxis bestimmen.

Literaturverzeichnis

H Bass and DL Ball. A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. *Trends and challenges in mathematics education*, pages 107–123, 2004.

Jürgen Baumert and Mareike Kunter. Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4):469–520, 2006.

E. Behrends. *Analysis 1*. Vieweg, Braunschweig, 2003.

H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

Stefan Krauss, Michael Neubrand, Werner Blum, Jürgen Baumert, Martin Brunner, Mareike Kunter, and Alexander Jordan. Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4):233–258, 2008.

Susanne Prediger. Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer, 2013.

Universität Wien. Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula., 2016. URL `http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf`. (Online; Gesehen 4. Oktober 2017.).