

<b>NAME:</b>		<b>MAT.NR.</b>	
--------------	--	----------------	--

## Prüfung zu

# Schulmathematik Analysis

**Wintersemester 2024/25**

**4. Termin, 29.9.2025**

**GRUPPE A**

**Sonja Kramer, Roland Steinbauer**

**Erläuterungen zum Multiple Choice Teil:** Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die „**Bepunktung**“ ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie  $1/(\text{Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage})$  Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten  $1/2$  Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird  $1/(\text{Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage})$  Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

**Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen.** Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

**Bitte nicht ausfüllen!**

MC	1	2	3	4	5	OT	$\sum$	Note
(18)	(3)	(3)	(4)	(4)	(4)	(18)	(36)	

# Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

## 1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
  - (a) Eine Grundvorstellung ist eine sinnstiftende inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs.
  - (b) Aspekte zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachmathematische Analyse gewonnen.
  - (c) Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.
  - (d) Primäre Grundvorstellungen sind immer normativ.
2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.
  - (a) Im Rahmen der Zuordnungsvorstellung wird  $f$  als ein einziges Objekt gesehen, das die Zuordnung von Elementen in  $A$  zu Elementen von  $B$  als Ganzes beschreibt.
  - (b) Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass  $f$  jedem  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  zuordnet.
  - (c) Die Objektvorstellung ermöglicht es besonders gut, Eigenschaften der gesamten Funktion, wie etwa ihr Wachstumsverhalten zu erfassen.
  - (d) Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch ihren Graphen beschrieben werden kann.
3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind sinnvolle und korrekte Be- und Umschreibungen der jeweiligen Eigenschaften?
  - (a) Nach oben beschränkte Folgen besitzen ein größtes Folgenglied.
  - (b) Streng monoton wachsende Folgen respektieren die  $<$ -Relation.
  - (c) Nach oben unbeschränkte Folgen gehen immer gegen  $+\infty$ .
  - (d) Ein Häufungswert ist ein Punkt in  $\mathbb{R}$  bei dem die Folge „egal wie spät, immer wieder (beliebig nahe) vorbeischaut“.

4. (*Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 1)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

$$\lim x_n = a \quad \text{falls, } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

sind primär mit der Umgebungsvorstellung verbunden?

- (a) Die Folge nähert sich dem Grenzwert schließlich beliebig nahe an.
  - (b) In jeder Umgebung des Grenzwerts liegen fast alle Folgenglieder.
  - (c) Der Grenzwert ist eine Zahl, die durch die Folge konstruiert bzw. definiert wird.
  - (d) Die Folge bleibt schließlich in jeder beliebig kleinen Umgebung um den Grenzwert.
5. (*Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 2)* Welche der folgenden (tw. ungenauen bzw. inkorrekt) Studierendenaussagen zum Grenzwertbegriff für reelle Folgen korrelieren mit der Annäherungsvorstellung?
- (a) Ab einem bestimmten Index liegen alle weiteren Folgenglieder in einer beliebigen Epsilonumgebung um den Grenzwert.
  - (b) Der Grenzwert ist, wohin die Folge will, wenn man sie endlos weiterspinnt.
  - (c) Fast alle Folgenglieder liegen  $\varepsilon$ -nahe am Grenzwert.
  - (d) Die Folge nähert sich dem Grenzwert im Unendlichen an.
6. (*Zur Differenzierbarkeit.*) Welche der folgenden Aussagen zum Begriff der Differenzierbarkeit reeller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
- (a) Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten“ ist der fachmathematisch wichtigste.
  - (b) Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten“ hängt primär mit den Grundvorstellungen „Lokale Änderungsrate“ und „Tangentensteigung“ zusammen.
  - (c) Die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ wird von beiden Aspekten des Differenzierbarkeitsbegriffs bedient.
  - (d) Im Kontext der Schulanalysis sind die Grundvorstellungen von der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung dominant.

## 2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind korrekt?
  - (a) Ist  $(x_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist  $(x_n)$  schon konvergent.
  - (b) Wenn  $(x_n)$  konvergiert, dann gibt es genau einen Grenzwert (d.h. dieser ist eindeutig).
  - (c) Wenn  $(x_n)$  beschränkt ist, dann ist  $(x_n)$  auch konvergent.
  - (d) Wenn  $(x_n)$  monoton wachsend und nach unten beschränkt ist, dann ist  $(x_n)$  schon beschränkt.
8. (*Rund um die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
  - (a) Für das Intervallschachtelungsprinzip ist es egal, ob die Intervalle offen oder abgeschlossen sind.
  - (b) Der Satz von Dedekind stellt sicher, dass der axiomatische Zugang zu den reellen Zahlen äquivalent zum konstruktiven ist.
  - (c) Der Zwischenwertsatz beruht wesentlich auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .
  - (d) Nach dem Cauchy-Prinzip konvergiert jede Cauchy-Folge.
9. (*Resultate über Folgenkonvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind korrekt?
  - (a) Die Konvergenz respektiert die  $>$ -Relation im folgenden Sinn: Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$  und  $(y_n)$  gegen  $y$  und gilt  $x_n > y_n$  für alle  $n$ , dann auch  $x > y$ .
  - (b) Der Quotient konvergenter Folgen konvergiert gegen den Quotienten der Grenzwerte, falls nur die Folge im Nenner keine Nullfolge ist.
  - (c) Ist  $(x_n)$  konvergent, dann ist  $(x_n)$  auch beschränkt.
  - (d) Die Konvergenz respektiert Linearkombinationen im folgenden Sinn: Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$  und  $(y_n)$  gegen  $y$ , dann auch  $(ax_n + by_n)$  und zwar gegen  $ax + by$  (für beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$ ).
10. (*Funktionen & ihre Eigenschaften.*) Welche anschaulichen Aussagen über reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
  - (a) Knicke des Graphen von  $f$  markieren Stellen der Nichtdifferenzierbarkeit.
  - (b) Ist  $f$  stetig, dann hat ihr Graph keinen Sprung.
  - (c) Ist  $f$  stetig, so hat der Graph von  $f$  keine Knicke.
  - (d) Ist  $f$  stetig, dann auch differenzierbar.

11. (*Differenzial- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen über reelle Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
- Ist  $f$  stetig, dann auch beschränkt.
  - Ist  $f$  stetig, dann auch integrierbar.
  - Ist  $f$  differenzierbar, dann auch integrierbar.
  - Ist  $f$  beschränkt, dann ist  $F(s) := \int_a^s f(x) dx$  eine Stammfunktion von  $f$ .
12. (*Rund um den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.*) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- $F(x) := \int_a^x f(s) ds$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .
  - Stammfunktionen sind immer eindeutig, also hat  $f$  genau eine Stammfunktion, nämlich  $F$  aus (a).
  - Stammfunktionen von  $f$  sind immer (sogar) stetig differenzierbar.
  - Falls  $G$  (beliebige) Stammfunktion von  $f$  ist, gilt  $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$ .

### 3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. (*Grenzwerte für Folgen & Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind für  $n \rightarrow \infty$  korrekt?
- $\frac{n^n}{2n!} \rightarrow \infty$ .
  - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}$ .
  - $\frac{4n + 4n^2 - 4n^3}{-4n^3 + 4n^2 - 4} \rightarrow 1$ .
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \infty$  ( $a > 0$ ).
14. (*Rund um die geometrische Reihe.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert für alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ .
  - Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form
- $$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$
- mit  $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ) konvergieren.
- $0.\bar{3} = 0.3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$ .
  - $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2$ .

15. (*Folgengrenzwert konkret.*) Welche der folgenden Aussagen über die Folge

$$x_n = -1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

sind korrekt?

- (a) In jeder Umgebung von  $x = -1$  liegen unendlich viele Folgenglieder.
  - (b) In jeder Umgebung von  $x = 1$  liegen fast alle Folgenglieder.
  - (c) In jeder Umgebung von  $x = 0$  liegen unendlich viele Folgenglieder.
  - (d) In jeder Umgebung von  $x = -1$  liegen fast alle Folgenglieder.
16. (*Kurvendiskussion.*) Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ ) sind korrekt?
- (a)  $f(x) = x^3$  hat in  $x = 0$  ein Extremum, weil dort die Ableitung verschwindet.
  - (b)  $f(x) = x^6$  hat in  $x = 0$  ein Minimum, obwohl  $f''(0) = 0$  gilt.
  - (c) Weil  $f(x) = x^3$  streng monoton wachsend ist, gilt  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x$  also auch in  $x = 0$ .
  - (d) Weil  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$  gilt, ist die Tangente der Sinusfunktion in  $x_0 = 0$  die erste Mediane.
17. (*Funktionseigenschaften explizit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a)  $g(x) = \frac{3x^3+x^2+6}{7x^2+5}$  ist als rationale Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich stetig.
  - (b)  $h(x) = \sin(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist als Polynomfunktion differenzierbar.
  - (c)  $j(x) = e^{3x^2}$  ist nach der Kettenregel differenzierbar mit  $j'(x) = 3x^2 e^{3x^2}$ .
  - (d)  $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 5/2$  ist als Polynomfunktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  stetig.
18. (*Stückweise definierte Funktion.*) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a)  $f$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  weil  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert und gleich  $f(0) = 0$  ist.
- (b)  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber nicht in  $x_0 = 0$ , weil dort die Grenzwerte nicht übereinstimmen.
- (c)  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber nicht in  $x_0 = 0$ , weil der Differenzenquotient in  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$  (bzw.  $h \rightarrow 0$ ) hat.
- (d) Es gilt  $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} 1 = 1$  und  $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0$  und daher ist  $f$  in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

# Teil 2: Offene Aufgaben

## 4 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Rekursive versus explizite Darstellung.*

Zeigen Sie, wie man aus der rekursiven Darstellung einer Folge  $(m_n)$  mit

$$m_{n+1} = r \cdot m_n + d \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

eine explizite Darstellung herleitet. Setzen sie dabei  $r \neq 1$  voraus. (3 Pkte)

2. *Konvergenz von Reihen.*

Gegeben ist eine Nullfolge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Konvergiert diese Reihe, warum bzw. warum nicht? Begründen Sie und geben sie Beispiele bzw. Gegenbeispiele oder gegebenenfalls ein Argument (keinen strengen Beweis) an. (3 Pkte)

## 5 Aufgaben zur fachdidaktischen Reflexion und zur Unterrichtspraxis

3. *Unterrichtssequenz Kurvendiskussion.*

Betrachten Sie die folgende Unterrichtssequenz:

**Lehrer:** Heute schauen wir uns die Polynomfunktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$  an.  
Kannst du mir die Extremstellen dieser Funktion bestimmen, Tim?

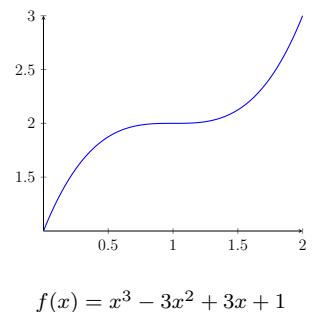
**Tim:** rechnet  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ . Ich setze  $3x^2 - 6x + 3 = 0$ . Da gibt es nur eine Lösung bei  $x = 1$ . Da  $f'(1) = 0$  ist, muss bei  $x = 1$  eine Extremstelle liegen – das sagt die NEW-Regel ja eindeutig.

**Lehrer:** Interessant, Tim. Ich schlage vor, wir lassen uns den Graphen dieser Funktion in GeoGebra anzeigen und schauen, ob das mit deiner Aussage übereinstimmt.

[Die Klasse öffnet GeoGebra und gibt die Funktion ein]

**Tim:** völlig verblüfft Was ist das denn? Der Graph steigt die ganze Zeit an. Da ist überhaupt keine Extremstelle bei  $x = 1$  sondern einen Sattelpunkt! Wie kann das sein, wenn doch  $f'(1) = 0$  ist?

**Lena:** meldet sich Ich glaube, ich verstehe das! Das bedeutet wohl, dass jede Funktion dritten Grades, die keine Extremstellen hat, dann immer einen Sattelpunkt hat, oder?



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

Das obige Gespräch endet mit zwei Äußerungen von Schüler/innen:

- Tim ist völlig verblüfft, dass trotz  $f'(1) = 0$  an der Stelle  $x = 1$  keine Extremstelle vorliegt. Für ihn ist das ein Widerspruch zur NEW-Regel.
- Lena vermutet, dass Funktionen dritten Grades ohne Extremstellen immer eine Sattelpunktsstelle haben.

Gehen Sie auf beide Meldungen ein, indem Sie auf mögliche Fehlvorstellungen hinweisen und die Sachlage fachlich korrekt und fachdidaktisch angemessen erklären. (4 Pkte)

#### 4. Das Tangentenproblem.

Im Schulbuch *Mathematik verstehen 7* findet sich folgende Erarbeitung des Tangentenbegriffs an einem Funktionsgraphen in einem Punkt:

Im Folgenden erarbeiten wir einen Tangentenbegriff, der auf Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) zurückgeht und auch auf Funktionsgraphen anwendbar ist.

Wir betrachten eine Funktion  $f$ , die nicht unbedingt linear sein muss (siehe nebenstehende Abbildung). Im Intervall  $[x; z]$  gilt:

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Wir lassen  $z$  gegen  $x$  streben. Nähert sich  $z$  unbegrenzt der Stelle  $x$ , so nähert sich der Punkt  $Z$  unbegrenzt dem Punkt  $X$  und die Sekante nähert sich unbegrenzt einer „Grenzgeraden“  $t$ . Die Steigung dieser „Grenzgeraden“ ist der Grenzwert der Sekantensteigungen. Es gilt also:

$$\text{Steigung der „Grenzgeraden“} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(x)$$

Diese „Grenzgerade“ bezeichnet man als **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkt  $X$ .

Vergleichen Sie die beiden in der Schulanalyse verbreiteten Zugänge zum Ableitungsbegriff, indem Sie die Spannungsfelder, die der in der Abbildung dargestellte Zugang birgt, aufzählen und dem anderen Zugang gegenüberstellen. (4 Pkte)

#### 5. Grenzwert.

Im Folgenden finden Sie aus der Aufgabe *Garten* aus dem Teil 2 der SRP (AHS) vom 08.05.2025 die Aufgabenstellung 1b.

In einem Garten wurde eine Fichte gepflanzt. Die Höhe dieser Fichte in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  kann durch die Funktion  $h$  modelliert werden.

$$h(t) = \frac{35}{1 + 7 \cdot e^{-0.06 \cdot t}} - 4$$

$t$  ... Zeit in Jahren mit  $t = 0$  für den Zeitpunkt der Pflanzung

$h(t)$  ... Höhe der Fichte zum Zeitpunkt  $t$  in m

Die Höhe der Fichte nähert sich gemäß diesem Modell für unbeschränkt größer werdende  $t$  beliebig nahe dem Wert  $G$  an.

$$\text{Es gilt: } G = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$$

- 1) Geben Sie  $G$  an.

$$G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$$

[0/1 P.]

Bearbeiten Sie nun die folgenden Aufgaben:

- Lösen Sie die Aufgabe und formulieren Sie eine Erläuterung für Ihre Schüler:innen, welche Überlegungen zur richtigen Lösung führen. (3 Pkte)
- Geben Sie an, welcher der beiden Aspekte zum Grenzwertbegriff in der gegebenen Aufgabenstellung vorrangig angesprochen wird, und welche Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff hauptsächlich mit diesem Aspekt verbunden sind. (1 Pkt)