Die Entzauberung des Unendlichen

ROLAND STEINBAUER (UNIV. WIEN)

FÜR REINHARD WINKLER, 5.7.1964 – 13.10.2021

Dieser Beitrag dreht sich um die Mathematik sowie das Lernen und Lehren des Grenzwertbegriffs für reelle Zahlenfolgen. Ausgehend von der Dichotomie des potentiell und des aktual Unendlichen werfen wir einen informierten Blick auf dynamische und statische Vorstellungen zum Grenzwertbegriff. Wir betonen die zentrale Rolle statischer Vorstellungen für ein vertieftes Verständnis der Grenzwertdefinition und identifizieren dynamische Formulierungen als Ursachen von Fehlvorstellungen. Zum Abschluss skizzieren wir ein Panorama der fachdidaktischen Forschung zum Lernen und Lehren des Grenzwertbegriffs, in das wir auch eigene Resultate zur Ausbildung von Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff bei Lehramtsstudierenden einbinden.

1. Einleitung

Das Unendliche ist weit, vor allem gegen Ende. ALPHONSE ALLAIS (Franz. Humorist)

Der Begriff des Unendlichen hat die Menschen von jeher fasziniert und Spuren des Unendlichen durchziehen viele menschliche Unternehmungen. Von der Philosophie über die bildende Kunst, die Literatur und die Theologie bis hin zu so profanen Aktivitäten wie Werbung[1] spielt das Unendliche eine Rolle und ganz besonders natürlich in den Naturwissenschaften und in der Mathematik. Daher ist der Begriff des Unendlichen und seine Bedeutung für die Geistes- und Kulturgeschichte des Menschen ein sehr großes Thema, viel zu groß um es hier auch nur annähernd zu skizzieren. In diesem Beitrag will ich viel mehr einen wichtigen Aspekt des Unendlichen in der Mathematik genauer betrachten, und zwar den Grenzwertbegriff. Er ist sicher *der* zentrale Begriff der (mathematischen) Analysis und ich möchte ihn hier — weiter eingeschränkt — in der Form des Grenzwertbegriffs für reelle Folgen diskutieren.

Dabei möchte ich detailliert herausarbeiten, welche Vorstellungen über das Unendliche hier eine tragende Rolle spielen und wie es die Mathematik durch einen formalen Kraftakt schafft, dem Grenzwertbegriff eine exakte Form zu geben, die erst die praktische Handhabung des Begriffs ermöglicht. Dabei tritt der Formalismus naturgemäß in den Vordergrund und das ist zentral für die mathematische Praxis, das unzweideutige und praktische Hantieren mit dem Grenzwert (von Folgen), sowie das konkrete Rechnen mit Grenzwerten. Für das Erlernen und das Lehren der Begrifflichkeit stellt aber genau diese mathematische Stärke und Notwendigkeit eine veritable Hürde dar. Lernende verfügen in der Regel über eine Vielzahl von teilweise inkohärenten Vorstellungen vor allem über „unendliche Prozesse” und deren mögliche Ergebnisse, die stark von ihren jeweils individuellen Vorerfahrungen und ihrer Vorbildung beeinflusst sind. Die Aufgabe der Lehrenden lässt sich dann in fachdidaktischer Sprache so ausdrücken: Es gilt die individuellen Grundvorstellungen[2] der Lernenden aufzugreifen und in Richtung normativer Grundvorstellungen weiter zu entwickeln, die ein umfassendes Verständnis des Begriffs ermöglichen. In diesem Zusammenhang werden wir auch die einschlägige fachdidaktische Literatur konsultieren und schließlich über eigene Forschungsergebnisse berichten.

Bevor wir aber zu unserer Reise zum Unendlichen aufbrechen, möchte ich ein bekanntes Zitat von DAVID HILBERT (1862–1943) als Motto voranstellen:

> Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. (Hilbert , 1926, S. 163)

[1] Mir ist ein aus heutiger Sicht anachronistisches ein Werbesujet einer bekannten amerikanischen Zigarettenmarke in Erinnerung, in dem der lässig an ein Propellerflugzeug gelehnte Held einen Rauchring in die Luft bläst, der die Form eines Unendlich-Symbols annimmt. Wie erfolgreich die intendierte Assoziation bei der Mehrheit der Betrachter*innen ausgelöst wurde, entzieht sich meiner Kenntnis.

[2] Zur Terminologie der Grundvorstellungen siehe Abschnitt 7.

2. Ein Anfang: Bewegungsparadoxien

Wenn wir nun zu einer kurzweiligen Reise zum Unendlichen aufbrechen, ist natürlich gerade der Anfang von zentraler Bedeutung. Ein besonders schöner Beginn findet sich in der Griechischen Antike und zwar mit den berühmten Bewegungsparadoxien des ZENON VON ELEA (490–430 v.u.Z.). Diese Sammlung philosophischer Probleme steht an der Wiege der dialektischen Methode des Sokrates und des Beweises durch Widerspruch. Bevor wir auch ihren philosophischen Kontext beleuchten, stellen wir zwei der Paradoxien in moderner Sprache vor. Der Kern des ersten Paradoxon ist eine Betrachtung unendlich oft wiederholter Handlungen, die auf Widersprüchlichkeiten zu führen scheint.

Beispiel 2.1 (Achill und die Schildkröte) *Achill, der stärkste der griechischen Helden vor Troja läuft mit einer Schildkröte um die Wette. Als großmütiger Held gewährt er dem viel langsameren Reptil einen Vorsprung von, sagen wir,* 100m*, siehe auch Abbildung 1. Nun läuft Achill, sagen wir, doppelt so schnell wie die Schildkröte und trotzdem fragen wir uns, ob der Held das Kriechtier jemals einholen kann. Dazu stellen wir die folgende Überlegung an: Bevor Achill die Schildkröte einholen kann, muss er erst ihren Startpunkt erreichen. In der Zeit, die er dafür benötigt, legt die Schildkröte aber ihrerseits einen Weg von* 50m *zurück. Nun muss Achill, um die Schildkröte einzuholen diese* 50m *zurücklegen. In dieser Zeit ist sie aber wiederum um* 25m *weitergekommen. Um die Schildkröte einzuholen, muss Achill nun diese* 25m *zurücklegen und so weiter, und so fort. Daraus ergibt sich, dass jedesmal wenn Achill den früheren Standpunkt der Schildkröte erreicht, diese ein weiteres Stück Weg zurückgelegt hat und so kann Achill die Schildkröte niemals einholen.*

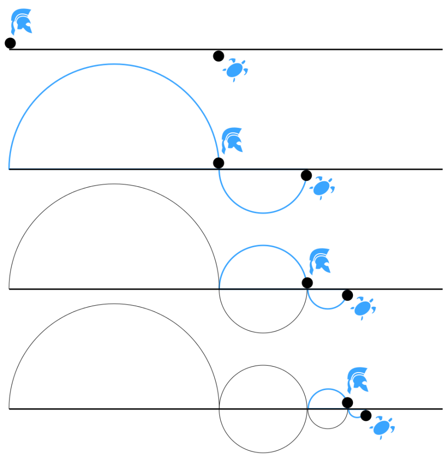

Abbildung 1: Achill und die Schildkröte

Auch im zweiten Paradoxon geht es um Bewegung, wobei Zenon hier schlichtweg die pure Möglichkeit von Bewegung an sich in Zweifel zieht.

Beispiel 2.2 (Pfeilparadoxon) *Wir betrachten einen Pfeil in seinem Flug. Sicher nimmt der fliegender Pfeil zu jedem Zeitpunkt seiner Flugbahn einen bestimmten Ort ein, siehe Abbildung 2. An diesem Ort aber befindet er sich in Ruhe. Daher befindet sich der Pfeil in jedem Moment in Ruhe, ergo kann er sich gar nicht bewegen.*

*Eine moderne Variante des Pfeilparadoxons, die so oder so ähnlich manchmal auch als anekdotische Schüler*innenäußerung genannt wird, ergibt sich, wenn man Fotos vom fliegenden Pfeil macht. Analog zu oben ist der Pfeil auf jedem Foto in Ruhe und so kann er sich gar nicht bewegen.*

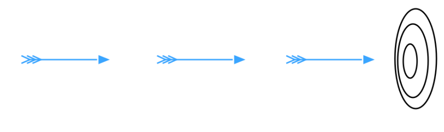

Abbildung 2: Zenons Pfeilparadoxon

Wir werden diese Paradoxien im weiteren Verlauf mathematisch „auflösen", hier möchte ich aber noch ein paar Worte über ihren philosophischen Kontext verlieren. Ein guter Ausgangspunkt mehr darüber zu erfahren, ist etwa der Podcast Bragg (2016), sowie die Beschreibung der Vorsokratiker in (Russell, 1950, Teil I). Zenon entwickelte seine Paradoxien, um den Standpunkt seines Lehrers PARMENIDES VON ELEA (ca. 520–460 v.u.Z.) zu verteidigen. Dieser vertrat einen radikalen Monismus und lehrte, dass Veränderung und Bewegung gar nicht möglich sei und vertrat die Ansicht, dass das Universum und alles Sein statisch wäre. Die Paradoxien des Zenon sollen die Fehlschlüsse voreiliger Kritiker des Parmenides aufdecken, indem sie zeigen, dass unsere Beschreibungen und Auffassungen von Bewegungsund Veränderungsprozessen leicht mit dem Hausverstand in Konflikt geraten. Parmenides, der gemeinhin als Begründer der Metaphysik angesehen wird entwickelte seine Ideen wiederum im Gegensatz zu HERAKLIT VON EPHESOS (ca. 520–460 v.u.Z.), der für seinen Ausspruch des „panta rhei" (Alles fließt) bekannt ist. Er war der Ansicht, dass alles Seiende in permanentem Fluss sei und der Wandel das einzig Beständige. Diese fundamentalen Gegensätze verdeutlichen schön die Radikalität und Buntheit vorsokratischen Denkens und Philosophierens.

In der philosophischen Tradition werden die Paradoxien des Zenon über ihre mathematische Lösung hinaus noch viel tiefer gehend aufgefasst und in ihrem philosophischen Gehalt z. B. von Bertrand Russell als „unermesslich subtil und tiefgründig" eingeschätzt. Dabei geht es etwa um die Frage, ob Strecken oder Zeitintervalle in beliebig kleine Teil zerlegt werden können — nicht im Rahmen einer mathematischen Beschreibung, wie wir es gleich tun werden, sondern auf einem fundamentalem Niveau. Während dieses Vorgehen nämlich im Rahmen der klassischen Physik eine erfolgreiche Modellierung liefert, nährt die Quantenmechanik daran grundlegende Zweifel, etwa im Rahmen des Quanten-Zeno-Effekts (siehe z. B. Misra/Sudarshan (1977)), der wiederum in engem Zusammenhang mit *dem* grundlegenden Problem der Interpretation der Quantenmechanik steht, dem Problem des Messprozesses (siehe dazu das vergnügliche Panorama in Becker (2018)).

3. Zwei Sichtweisen auf das Unendliche

Wir bleiben noch eine Weile in der Griechischen Antike, deren Philosophie und Mathematik sich in vielfältiger Weise mit dem Unendlichkeitsbegriff auseinandergesetzt und dabei maßgeblich auch unsere heutigen Anschauungen grundgelegt hat. So unterscheidet ARISTOTELES (384–322 v.u.Z.) erstmals zwei Sichtweisen auf das Unendliche. *Das potentiell Unendliche* ist die in der Vorstellung vorhandene Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses, z. B. das fortlaufende Ticken einer Uhr und damit das Verstreichen der Zeit oder das fortlaufende Teilen einer Strecke. Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen" werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden". Im Gegensatz dazu steht das *aktual Unendliche*, bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt, z. B. eine Fläche, die durch das Zusammenfügen unendlich vieler Stücke entstanden ist. Aristoteles lehnt allerdings die Idee vom aktual Unendlichen ab und sieht in der Möglichkeit des potentiell unendlichen Prozesses die zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff. In moderner mathematischer Sprache entspricht das der Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge, was uns zu unserer ersten mathematischen Definition führt.

Definition 3.1 (Folge) *Eine* Folge *ist eine Auflistung von unendlich vielen, fortlaufend durchnummerierten*[3] *Zahlen.*

Wir bezeichnen Folgen wie in der Schulbuchliteratur üblich mit Spitzklammern, d. h. wir schreiben $\langle a_n \rangle$ für die Folge mit den *Folgengliedern* a_n. Einfache Beispiele von Folgen sind etwa

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle \quad \text{und} \quad \langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle . \tag{1}$$

Wir sprechen hier auch vom *dynamischer Aspekt* von Folgen bzw. des Unendlichen: Eine Folge bzw. das Unendliche, wird als im fortwährenden Aufbau begriffenes Objekt gesehen.

Im Gegensatz zu Aristoteles lässt PLATON (ca. 427–348 v.u.Z.) im Rahmen seiner Ideenlehre das aktual Unendliche zu. Die Ideenlehre besagt ganz grob gesprochen, dass Ideen eine eigenständige Existenz zukommt, die der Existenz der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet ist. Beispiele solcher *Platonischer Ideen* sind etwa das Gerechte an sich, oder der Kreis an sich. Obwohl wir auch mit einem noch so genauen Zirkel, keinen perfekten Kreis zeichnen können, gibt es doch die Idee des Kreises[4]. Diese Idee ist allen ihren notwendiger Weise ungenauen Realisierungen auf Papier oder im Sand

[3] Etwas präziser bedeutet dies, dass jeder natürlichen Zahl n, genannt Index, genau eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Technisch ausgedrückt ist eine Folge also eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

[4] Diese wird z. B. in der mathematischen Definition als die Menge aller Punkte, die von einem (Mittel-)Punkt den gleichen Abstand haben, formalisiert.

gemeinsam, diesen aber übergeordnet. Analog verhält es sich auch mit der sprichwörtlichen Platonische Liebe. Natürlich ist das nur eine sehr oberflächliche Beschreibung der wesentlich komplexeren Ideenlehre, aber für unsere Zwecke ausreichend. Eine sehr unterhaltsame Begegnung mit der in die Gegenwart transferierten Person und Philosophie Platons ermöglicht das Buch von Rebecca Goldstein (2015).

Die Vorstellung des aktual Unendlichen liegt dem zweiten, dem *statischen Aspekt* des Unendlichen zugrunde. Die Möglichkeit eines *endlichen Ergebnisses* eines unendlichen Prozesses wir akzeptiert. Dadurch gewinnen wir insbesondere die Möglichkeit über die Eigenschaften eines solchen Ergebnisses zu sprechen.

4. Im historischen Schweinsgalopp zur Grenzwertdefinition

Ausgestattet mit einem Grundwissen über die verschiedenen Vorstellungen zum Unendlichkeitsbegriff unternehmen wir nun einen sehr kurzen Abstecher in die Geschichte des Grenzwertbegriffs. Natürlich gibt es zu diesem Thema eine unüberschaubare Fülle an Literatur. Ein Ausgangspunkt, an dem auch wir uns hier orientieren, ist (Greefrath et al., 2016, Absch. 3.1) und die dort zitierten Quellen. In dieser Geschichte traten in wechselnder Abfolge und auch ineinander verschränkt *dynamische* und *statische*, sowie *intuitive* und *formale* Sichtweisen und Vorstellungen des Grenzwerts und des Unendlichen auf. Wir besprechen nur die wesentlichsten Schritte dieser Entwicklung.

Die Entstehung, Entwicklung und Abgrenzung des Grenzwertbegriffs in der Mathematik der Neuzeit ist eng mit der Entwicklung der Begriffe Folge und Reihe verbunden. Darüber hinaus spielten konkrete Vorstellungen vom Aufzählen und Aneinanderreihen von Folgengliedern eine große Rolle, ebenso wie Bewegungsvorstellungen.

Schon zu Beginn der Neuzeit im 16. und 17. Jahrhundert wird etwa die unendliche Summation der geometrischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \tag{2}$$

wie in Abbildung 3 mit Flächeninhalten dargestellt. Aus dieser auch heute noch im Unterricht verwendeten Darstellung ist unmittelbar einsichtig, dass die Summe durch 2 beschränkt ist, also endlich bleibt. Dieses Bild ist prototypisch für einen unendlichen Prozesses, der ein endliches Ergebnis hat.

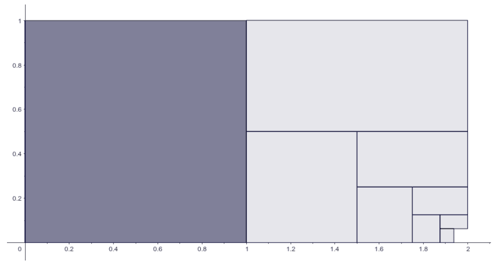

Abbildung 3: Graphische Summation der geometrischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\dots$

ISAAC NEWTON (1643–1727), einer der Ko-Erfinder der Differentialrechnung und auch JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783) bedienten sich hauptsächlich dynamischer Vorstellungen. Hingegen verwendete der zweite Ko-Erfinder der Differentialrechnung GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) ebenso wie LEONHARD EULER (1707–1783) „unendlich kleine Größen“ bei der Berechnung des Differentialquotienten und verbinden damit eher *statische* Vorstellungen. Letzteres kann in der Terminologie des vorigen Abschnitts so formuliert werden, dass mit aktual unendlichen Größen als „realen Objekten“ hantiert wird.

Mit AUGUSTIN-LOUIS CAUCHYS (1789–1857) Lehrbuch „Cours d'Analyse“ von 1821 wird der Grenzwertbegriff auch formal zu einem Grundbegriff der Analysis. In einer vielzitierten Stelle definiert Cauchy den Grenzwert (er spricht von der „Grenze“) einer Folge mit den Worten (zitiert nach (Weigand, 2016, S. 139)):

> Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.

Diese der modernen Definition schon recht nahe Formulierung verwendet eindeutig eine dynamische Vorstellung des sich schrittweisen beliebig guten Annäherns an den Grenzwert.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzt sich in der Mathematik und auch in Lehrbüchern immer stärker eine strenge und formale Sichtweise durch. Vor allem unter dem Einfluss von KARL WEIERSTRAß (1815–1897) werden die naiven und intuitiv geprägten Vorstellungen von „unendlich kleinen“ und „unendlich großen Größen“ aus der Mathematik verbannt[5]. Diese werden durch Prozesse ersetzt, die *mit dem Operieren im Endlichen auskommen*. Besonders deutlich wird dieser Zugang (fast Auftrag) in folgendem Hilbert-Zitat:

> Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig [...]. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden [...]. (Hilbert 1926, S. 190)

In diesem Sinne formuliert auch Weierstraß zur Summation der geometrischen Reihe (zitiert nach (Greefrath et al. , 2016, S. 77)):

> Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann.

Konsequenter Weise führt dieser Zugang auf die ε-N-Definition des Grenzwerts für Folgen.

Definition 4.1 (Folgengrenzwert) *Eine Zahl a heißt* Grenzwert *oder* Limes *der Folge $\langle a_n \rangle$, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \tag{3}$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ ($n \to \infty$) und sagen die Folge $\langle a_n \rangle$ geht gegen a bzw. konvergiert gegen a.

Verbal können wir diese Definition umformulieren zu: Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls es für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex N gibt, sodass alle späteren Folgenglieder, d. h. alle a_n mit $n \geq N$, schon ε-nahe bei a liegen, d. h. der Abstand $|a - a_n| < \varepsilon$ ist.

Bevor wir im übernächsten Abschnitt diskutieren, *was genau* hier passiert ist, werden wir uns zunächst mit der praktischen Seite der Grenzwertdefinition befassen und explizite Berechnungen vornehmen. Zu Beginn geben wir zwei einfache Beispiele von Folgen an, die gegen 0 konvergieren, sogenannte *Nullfolgen*.

Beispiel 4.2 *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle = 0 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rangle = 0. \tag{4}$$

5. Von der Effizienz der Grenzwertdefinition

Wie angekündigt ziehen wir in diesem Abschnitt den gerade definierten Grenzwertbegriff heran, um konkrete Berechnungen durchzuführen. Dabei werden wir die Paradoxien aus Abschnitt 2 mathematisch klären und damit sehen, dass die Definition effizient ist.

Beispiel 5.1 (Achill und die Schildkröte, Teil 2) *Kehren wir zur Abbildung 1 zurück, so sehen wir, dass die zurückgelegten Strecken in jedem Schritt kürzer werden. Genauer, sie halbieren sich in jedem Schritt. Daher legt unser mathematisch geschulter Blick nahe, dass die Strecke bis zum Einholen endlich ist — trotz der nicht endlichen Anzahl der Wiederholungen! Wir fokussieren also auf das endliche Ergebnis des unendlichen Prozesses.*

Tatsächlich lässt sich die Strecke L, die insgesamt während des geschilderten Prozesses zurückgelegt wird, mittels der Summenformel für die unendliche geometrischer Reihe*, also*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} q^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \;=\; \frac{1}{1-q} \qquad \textit{für} \quad |q| < 1 \tag{5}$$

[5] Diese erlebten ab Mitte des 20. Jahrhunderts im Rahmen der (allerdings axiomatisch fundierten) *Nichtstandard-Analysis* eine Wiederbelebung. Die Nichtstandard-Analysis ist heute ein kleines aber nach wie vor aktives Forschungsgebiet der Mathematik.

relativ einfach berechnen. Es gilt

$$L = 100+50+25+\ldots = 100\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)$$
$$= 100\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 100\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 200. \tag{6}$$

Achill holt die Schildkröte also ein und zwar nach 200m.

Zu Klärung des Pfeilparadoxons müssen wir etwas ausholen und uns mit einer weiteren Begriffsbildung auseinandersetzten, die eng mit dem oben diskutierten Grenzwertbegriff verwandt ist: der Momentangeschwindigkeit. Dazu springen wir an einen der beiden Ursprünge der Differentialrechnung und skizzieren kurz den Zugang von ISAAC NEWTON (1643–1727). Eine viel ausführlichere Diskussion findet sich z. B. in (Greefrath et al. , 2016, Absch. 4.3). In seinem Hauptwerk der „Principia[6]“ gelang es Newton zu zeigen, dass wesentliche Phänomene in der Natur durch mathematische Modelle beschrieben werden können. So formulierte er nicht nur das universelle Gravitationsgesetz, sondern auch die Bewegungsgesetze, womit er den Grundstein für die klassische Mechanik legte, die deswegen oft auch *Newtonsche Mechanik* genannt wird.

Die Begriffsbildung zur Momentangeschwindigkeit skizzieren wir hier in einem einfachen Spezialfall und in moderner Sprache. Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt t beschreiben wir mit der Wegfunktion

$$s:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto s(t)\,. \tag{7}$$

Unsere Anschauung und Erfahrung drängt uns dazu zu glauben, dass P zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat, ähnlich wie der Pfeil in Beispiel 2.2. Wir gehen nun aber in systematischer Weise weiter und sehen: Einfach zu konzeptionalisieren und auch praktisch bestimmbar sind zunächst die *Durchschnittsgeschwindigkeiten* zwischen zwei Zeitpunkten, sagen wir, t_0 und t, also

$$\bar{v} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}. \tag{8}$$

Nun definieren wir die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten, wenn t gegen t_0 geht — falls er existiert, d. h. falls die Durchschnittsgeschwindigkeiten genügend „stabil“ sind, wenn t nahe von t_0 variiert[7]. Genauer definieren wir also

$$v(t_0) := \lim_{t_0\neq t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}\qquad\text{(falls der Grenzwert existiert).} \tag{9}$$

Hier handelt es sich anders als in Definition 4.1 nicht um einen Grenzwert einer Folge, sondern um den einer reellen Funktion. Dieser ist aber in völliger Analogie definiert.

Definition 5.2 (Funktionsgrenzwert) *Eine Zahl c heißt* Grenzwert *der Funktion f für t gegen t_0, falls*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad |c-f(t)|<\varepsilon\quad\forall\,|t_0-t|<\delta. \tag{10}$$

Wir schreiben dann $\lim_{t\to t_0} f(t) = c$ *oder* $f(t)\to c$ $(t\to t_0)$.

Tatsächlich können wir hier eine genaue Entsprechung zur Definition 4.1 feststellen: Der Grenzwert ist ebenfalls eine (reelle) Zahl, die allerdings hier c statt a heißt. Das ε spielt genau die gleiche Rolle wie zuvor und ist ein Maß für die Nähe zum Grenzwert, hier von Funktionswerten, dort von Folgengliedern,

6 Erstmals 1686 erschienen ist Newtons „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” eines der einflussreichsten Bücher überhaupt.

7 Die Parallelen zur Definition der Tangente als Schmiegegeraden, die auf Leibniz, den zweiten Ko-Erfinder der Infinitesimalrechnung zurückgeht, sind unübersehbar.

die jeweils in Termen des Absolutbetrags gemessen wird (hier $|c - f(t)|$, dort $|a - a_n|$). Den „späten” Folgengliedern a_n für $n \geq N$ entsprechen hier Argumente, die der Argumentstelle des Interesses t_0 nahe sind, d. h. $|t_0 - t| < \delta$ erfüllen. Die (kleine) Zahl δ spielt hier also genau die Rolle des (großen) Index N dort.

Beispiel 5.3 (Pfeilparadoxon, Teil 2) *Mit der obigen Begriffsbildung, nämlich der*

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert von Durchschnittsgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen, können wir sagen: Der Pfeil hat zu jedem Zeitpunkt eine (Momentan-)Geschwindigkeit und bewegt sich also doch! Auch in der „modernen” Version, lässt sich das Paradoxon so auflösen: Obwohl der Pfeil zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit hat, ist diese auf dem Foto natürlich nicht erkennbar.

6. Die Entzauberung des Unendlichen

In diesem Abschnitt halten wir eine informierte Rückschau auf das, was wir gerade getan haben, und beleuchten in der Terminologie von Abschnitt 3 die Grenzwertdefinition.

Um den *statischen* und den *dynamischen Aspekt* des Folgengrenzwerts genauer diskutieren zu können, betrachten wir die *Darstellung* von Folgen. Eine Folge $\langle a_n \rangle$ kann

(1) am *Zahlenstrahl*, also durch ihr Bild dargestellt werden, also durch die Menge

$$\mathrm{im}(a_n) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \tag{11}$$

(2) aber auch durch ihren *Graphen*, also die Menge von Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$

$$G(a_n) = \{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\} = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots\}. \tag{12}$$

Beide Darstellungen sind natürlich gleichwertig, jede Darstellung erlaubt aber, gewisse Aspekte hervorzuheben. Besonders für unsere Zwecke wird sich die erste Darstellung eigenen. Wir geben zuerst aber ein Beispiel für beide Darstellungsarten.

Beispiel 6.1 (Darstellung von Folgen) *Wir stellen die zwei Folgen aus Gleichung* (1) *auf den folgenden Abbildungen auf beide Arten dar.*

Abbildung 4: Die Bilder der Folgen $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$ (links) und $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$ (rechts).

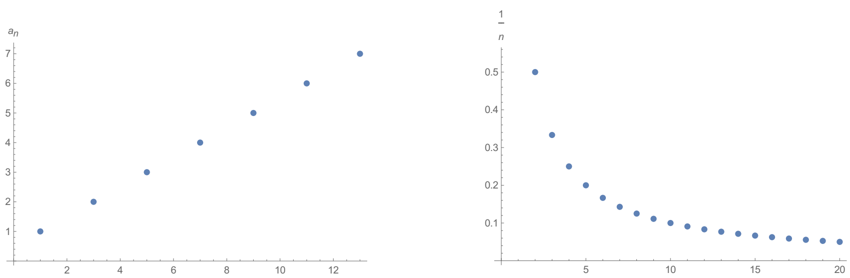

Abbildung 5: Die Graphen der Folgen $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$ (links) und $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$ (rechts).

Um nun die *dynamische Sichtweise* auf Folgen aus Abschnitt 3 zu illustrieren, stellen wir uns vor, dass wir mit der Folge am Zahlenstrahl entlang spazieren, d. h. *„mit der Folge mitlaufen”*. Dabei entspricht jeder Fußabdruck, den wir bei einem Schritt hinterlassen, einem Eintrag a_n im Bild der Folge. Wir starten also, sagen wir, mit dem linken Fuß in a_1 und setzen den rechten Fuß auf a_2, dann den linken auf a_3, und so weiter, und so fort, siehe Abbildung 6. Dieses Bild korreliert mit der Vorstellung des potentiell Unendlichen, bei dem die Folge schrittweise erzeugt wird. Wie würden wir nun in diesem Bild beschreiben, dass etwa die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ eine Nullfolge ist? Wir würden versuchen zu erkennen, ob sich die Folge gegen den Wert 0 hin stabilisiert. Allerdings erschwert der hier manifest vorliegende unendliche Prozess das Verständnis des Grenzwertbegriffs, denn „die Unendlichkeit legt einen Schleier über den Prozessausgang” (Marx , 2013, S. 84). Ein Fokussieren auf den unendlichen Prozess des Durchlaufens der Folge verstellt den Blick auf die Tatsache, dass ein endlicher Grenzwert vorliegt.

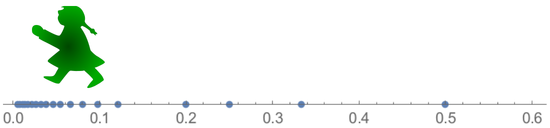

Abbildung 6: Folge in dynamischer Sichtweise

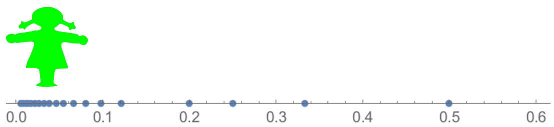

Abbildung 7: Grenzwert in statischer Sichtweise

Anders funktioniert die *statische Sichtweise* auf den Grenzwert. Hier gehen wir mit der Definition 4.1 von einem fixen Wert aus und überprüfen, ob er die geforderten Eigenschaften in Bezug auf die Folge hat. Bildlich gesprochen, anstatt mit der Folge mitzugehen, stellen wir uns an einen möglichen oder vermuteten Grenzwert und prüfen die erforderlichen Eigenschaften nach, siehe Abbildung 7. Dazu suchen wir uns eine beliebig kleine Umgebung um den vermuteten Grenzwert aus und lassen dann alle Folgenglieder gleichzeitig auf die x-Achse fallen. Dann müssen wir nur nachprüfen, wie viele der Folgenglieder *außerhalb* dieser Umgebung zu liegen kommen. Sind es nur endlich viele, genauer alle vor einem gewissen N, das von der Größe der Umgebung, also von ε abhängen kann, dann haben wir gewonnen — wenn wir dieses Spiel auch für jedes noch so kleine ε wiederholen können. Genauer gesagt müssen wir schauen, ob die späten Folgenglieder schließlich in jeder Umgebung[8] um den (vermuteten) Grenzwert bleiben.

Was wir hier bzw. mit der Definition 4.1 des Grenzwerts getan haben, ist, die dynamische Vorstellungen zu unendlichen Prozessen zu ersetzen durch statische Vorstellungen und ein Operieren im Endlichen. Damit sind intuitive Vorstellungen vom Unendlichen nicht (mehr) nötig um den Grenzwertbegriff zu fassen. Der Grenzwert tritt in der Definition von Anfang an als „real existierendes“ Objekt (genauer eine Zahl) auf, dem eine bestimmte Eigenschaft zukommt. Nämlich die, dass die Folge schließlich in jeder seiner Umgebungen bleibt. Man könnte im Zusammenhang mit dieser Definition etwas pathetisch von der „Verbannung“ oder der „Abschaffung des Unendlichen“ sprechen. Denn die Definition umgeht alle Probleme im Zusammenhang mit dem Begriff des Unendlichen indem sie ihn erst gar nicht erwähnt (mit der einzigen Ausnahme des Symbols ∞ als genau definierte Schreibweise). Stattdessen wird eine Operationalisierung bereitgestellt, die den Grenzwertbegriff *handhabbar* macht, und damit ist der „Auftrag” Hilberts aus Abschnitt 4 erfüllt. Das gesamte Manöver möchte ich daher als „Entzauberung“ des Grenzwertbegriffs bzw. des Unendlichen bezeichnen: Glasklare Begrifflichkeit und handfeste Berechenbarkeit statt vager Anschauung und unbestimmter Aussagen.

Schließlich ist diese Tatsache, dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom Unendlichen formuliert werden kann, einer der Ecksteine und Stärken der modernen Analysis. Aber, so unverzichtbar und typisch der hier beschriebene Zugang für die Mathematik ist, so sehr ergeben sich daraus beim Lernen und Lehren des Grenzwertbegriffs in natürlicher Weise Schwierigkeiten, die wir in den folgenden Abschnitten näher beleuchten wollen.

[8] Diese Terminologie werden wir in Abschnitt 9 noch genauer besprechen.

7. Grundvorstellungen und Aspekte zum Grenzwertbegriff

Die Definition 4.1 des Folgengrenzwerts stellt den Endpunkt einer langen historischen Entwicklung dar und enthält in hochkomprimierter Form nur das minimal logisch notwendige Skelett des Begriffs. Die für den Lernprozess entscheidende Frage ist nun, wie diese hochformale Begrifflichkeit, bei gegebenen konkreten Vorkenntnissen und Vorerfahrungen am besten verstanden werden kann. Zunächst streichen wir heraus, welche zentrale Rolle dabei diese vorhandenen intuitiven Vorstellungen spielen, denn die fachdidaktische Literatur äußert sich hier ganz eindeutig. Z. B. formuliert (Cornu , 2002, S. 154):

> „For most mathematical concepts, teaching does not begin on virgin territory. In the case of limits, before any teaching on this subject the student already has a certain number of ideas, intuitions, images, knowledge, which come from daily experience, such as the colloquial meaning of the terms being used.
>
> When a student participates in a mathematics lesson, these ideas do not disappear—contrary to what may be imagined by most teachers. These spontaneous ideas mix with newly acquired knowledge, modified and adapted to form the students personal conceptions."

Wir können also vom Primat der Vorstellungen im Lernprozess sprechen. Um Vorstellungen zu mathematischen Begriffen präzise zu diskutieren, stellt die fachdidaktische Literatur das Konzept der *Grundvorstellungen* zur Verfügung. Dieses didaktische Modell macht das mathematische Verständnis eines Begriffs an inhaltlichen Vorstellungen fest, siehe vom Hofe (1995). Formaler können wir sagen:

Definition 7.1 (Grundvorstellung) *Eine* Grundvorstellung *zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.*

Der Begriff der Grundvorstellung kann sowohl in einem *normativen* Kontext, wie auch in einem *individuellen* Kontext verwendet werden. Genauer unterscheiden wir zwischen *universellen* und *individuellen* Grundvorstellungen. Erstere haben normativen Charakter. Sie sind das Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und geben Antwort auf die Frage, was sich Lernende generell bzw. idealerweise unter einem mathematischen Begriff vorstellen soll(t)en. Das Ausbilden bestimmter universeller Grundvorstellungen ist also ein Ziel des Mathematikunterrichts, das Lehrer*innen Orientierungshilfen zu Gestaltung des Unterrichts bietet. Individuelle Grundvorstellungen sind im Gegensatz dazu Grundvorstellungen, die Lernende zu einem bestimmten Begriff tatsächlich entwickelt haben. Sie sind ebenfalls Ergebnis einer fachdidaktischen Reflexion und/oder von Beobachtungen und beschreiben, was sich Lernende unter einem bestimmten Begriff tatsächlich vorstellen. Sie haben einen deskriptiven Charakter und geben somit ebenfalls Orientierung für den Mathematikunterricht, indem sie Ausgangspunkt für eine Unterrichtsplanung bzw. Fördermaßnahme sein können, die zum Ziel hat, die Lernenden in Richtung universeller Grundvorstellungen zu führen.

Was sind nun die universellen Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff? Greefrath et al. (2016) formulieren die folgenden drei Vorstellungen:

Annäherungsvorstellung (AV): Das Zustreben/Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Umgebungsvorstellung (UV): Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Index alle weiteren Folgenglieder in dieser Umgebung.

Objektvorstellung (OV): Ein Grenzwert wird als mathematisches Objekte angesehen, das etwa durch eine Folge konstruiert oder definiert wird.

Um vor diesem Hintergrund einen informierten Blick zurück auf unsere bisherige Reise zum Grenzwertbegriff machen zu können, präzisieren wir noch die fachdidaktische Terminologie der *Aspekte* eines mathematischen Begriffs, vgl. (Greefrath et al. , 2016, Absch. 1.1.5)

Definition 7.2 (Aspekt) *Ein* Aspekt *eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben werden kann.*

Mit dieser Terminologie können wir nun sagen, dass der dynamische Aspekt des Grenzwerts, der nach unserer obigen Diskussion eng mit dem Begriff des potentiell Unendlichen verknüpft ist, am stärksten mit der Annäherungsvorstellung korreliert, aber auch eine gewisse Verbindung zur Umgebungsvorstellung auftritt. Der statische Aspekt, der wie wir oben gesehen haben, eng mit dem Begriff des aktual Unendlich verbunden ist, korreliert primär mit der Umgebungsvorstellung, wie auch in Definition 4.1 ganz klar zum Ausdruck kommt. Weiters ermöglicht erst die Akzeptanz des aktual Unendlichen vom Grenzwert als einer Zahl zu sprechen, die durch ihre Eigenschaften definiert ist — die Grundlage der Objektvorstellung. Schließlich besteht auch eine schwächere und indirekte Verbindung des statischen Aspekts zur Annäherungsvorstellung, da Definition 4.1 natürlich die Annäherung der Folge an den Grenzwert explizit macht. Schematisch sind diese Verbindungen zwischen den Aspekten und den Grundvorstellungen zum Grenzwerbegriff in Abbildung 8 dargestellt, für weitere Details siehe etwa (Greefrath et al. , 2016, Absch. 3.5).

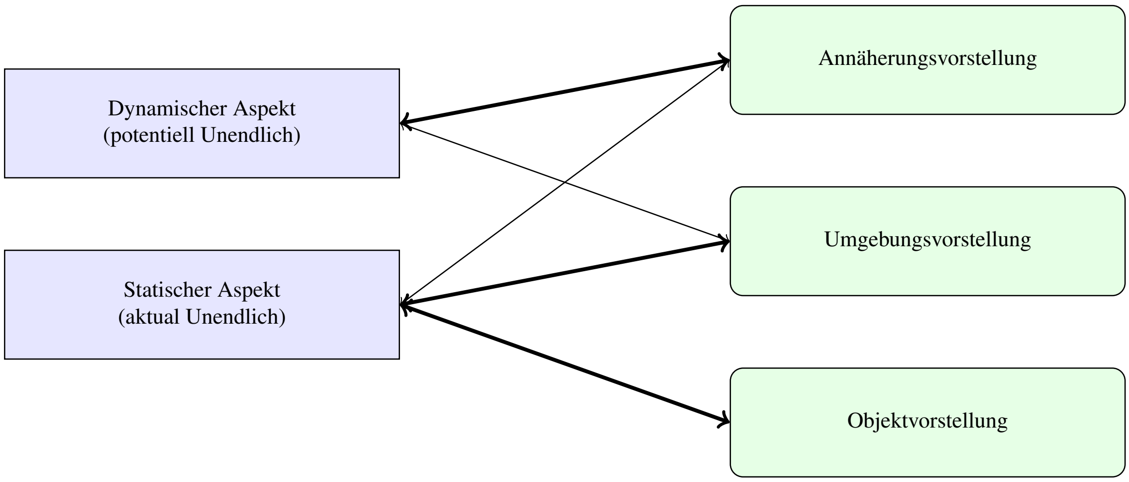

Abbildung 8: Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff und ihre wechselseitigen Beziehungen (nach (Greefrath et al. , 2016, S. 107))

8. Vom Lehren & Lernen des Grenzwertbegriffs, Teil 1

Mit der differenzierten Terminologie von Aspekten und Grundvorstellungen stelle ich nun zum Abschluss unserer Reise aus (theoretischen und empirischen) fachdidaktischen Arbeiten ein kleines Panorama zum Thema Verständnis, Lernen und Lehren des Grenzwertbegriffs zusammen, das ich durch ein Intermezzo mit nützlichen (Um-)Formulierungen der Grenzwertbedingung ergänze.

Schon in einer frühen Pionierarbeit betont Fischbein (1978), dass Lernende oft widersprüchlichen Konzeptionen mit dem Begriff des Unendlichen verbinden. Empirische konnte er nachweisen, dass intuitive Konzeptionen von Schüler*innen zum Grenzprozess stärker auf die Unendlichkeit des Prozesses fokussieren, als auf die Endlichkeit des Grenzwerts, vgl. auch Abschnitt 6. Monaghan (2001) stellt dazu fest, dass die inhärent inkonsistenten und instabilen Konzeptionen zum Unendlichen von Schüler*innen durch die im anglikanischen Raum üblichen first-year Calculus-Kurse kaum verändert werden (können). Damit übereinstimmend konstatiert (Cornu , 2002, S. 154) „Different investigations which have been carried out show only too clearly that the majority of students do not master the idea of a limit, even at a more advanced stage of their studies. This does not prevent them from working out exercises, solving problems and succeeding in their examinations!” In diesem Zusammenhang wird wiederholt festgestellt, dass Schüler*innen und Studierende bei Problembearbeitungen nicht alleine auf die formale Definition zurückgreifen, sondern auch intuitive Vorstellungen und (Alltags-)Assoziationen eine Rolle spielen (siehe auch: Primat der Vorstellung, Abschnitt 7). Ähnlich äußert sich Bender (1991) in einer theoretischen Arbeit, die sich auch als Streitschrift wider dynamische Vorstellungen lesen lässt, die er als eine wesentliche Ursache von Fehlvorstellungen identifiziert. Sie führten nämlich zu einer Überbetonung des unendlichen Grenzprozesses auf Kosten der Endlichkeit des Grenzwertes (vgl. Fischbein (1978) und oben). Insbesondere konstatiert er ein Scheitern beim Bemühen „die dynamischen Vorstellungen in den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung auszuschalten und sie dann wieder zuzulassen” (Bender, 1991, S. 239). Weiterhin stellt er die Tragweite dynamischer Sichtweisen auch aus fachlicher Perspektive in Frage, da Permutationen konvergenter Folgen denselben Grenzwert besitzen. Um diesbezügliche Fehlvorstellungen zu vermeiden, propagiert er die Verwendung des Begriffs bzw. der Vorstellung „Wesentliches einer Folge”, womit die gemeinsame Eigenschaft aller *Hauptstücke*[9] einer Folge gemeint ist (Bender, 1991, Absch. 3). Diese Anregung aufgreifend möchte ich nun in einem Intermezzo die — meiner Ansicht nach einfacheren — Sprechweisen „fast alle” und „bleibt schließlich” diskutieren, die besonders griffige bzw. anschauliche Formulierungen der Grenzwertbedingung 4.1 in diesem Sinne ermöglichen.

9. Intermezzo: „fast alle” und „bleibt schließlich”

Wir beginnen mit den folgenden Vereinbarungen:

Definition 9.1 (ε-Umgebung, „fast alle”)

1. *Für eine reelle Zahl a und jedes (kleine) $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir das offene Intervall $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ als* ε-Umgebung *von a (siehe auch Abbildungen 10, 11).*
2. *Wir sagen, dass* fast alle *Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ in einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen, wenn $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle Indizes n mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gilt, d. h. wenn $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ für höchstens endlich viele n gilt.*

Wenn es also nur endlich viele solcher „Ausnahme-Folgenglieder“ gibt, die nicht in $U_\varepsilon(a)$ liegen, dann gibt es auch ein letztes (d. h. mit höchstem Index) unter ihnen, sagen wir a_{N-1}. Alle „späteren“ Folgenglieder, d. h. alle a_n mit $n \geq N$ liegen dann in $U_\varepsilon(a)$. Wenn wir diese beiden Sprechweisen kombinieren, können wir die Konvergenzbedingung 4.1 wie folgt umformulieren:

(F1) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder von $\langle a_n \rangle$ liegen.

Mit dieser Formulierung ist das Bild des „Hineinzoomens“ verbunden: Egal wir stark man in die Nähe von a (etwa mit einem Mikroskop) hineinzoomt, man sieht immer fast alle Folgenglieder (d. h. nur endlich viele liegen außerhalb des Bildausschnitts des Mikroskops).

An dieser Stelle ist die folgenden **Warnung** angebracht: Fast alle Folgenglieder sind „mehr” als nur unendlich viele. Unendlich viele Folgenglieder erlauben nicht nur endlich viele „Ausnahmen”, sondern sogar uendlich viele. Das Erzbeispiel dazu ist die *„Vorzeichenmaschine”*, d. h. die Folge

$$\langle -1^n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \rangle, \tag{13}$$

Abbildung 9: $\langle (-1)^n \rangle$ am Zahlenstrahl

siehe Abbildung 9. Hier liegen unendlich viele Folgenglieder in jeder Umgebung von 1 (nämlich alle mit geradem Index, sie treffen ja genau 1 und liegen daher in jeder noch so kleinen ε-Umgebung $U_\varepsilon(1)$), aber auch unendlich viele in jeder Umgebung von -1 (nämlich alle mit ungeradem Index). Daher ist weder 1 noch -1 Grenzwert der Folge, da es ja jeweils *unendlich viele* „Ausnahmeglieder” gibt: Wählen wir etwa $\varepsilon = \frac{1}{2}$ so liegen zwar unendlich viele a_n (nämlich alle mit geradem n) in $U_{1/2}(1) = (1/2, 3/2)$ aber — und das ist der Punkt — ebenso unendlich viele a_n (nämlich alle mit ungeradem n) außerhalb, denn sie haben ja den Wert -1. Werte mit der Eigenschaft, dass unendlich viele Folgenglieder in jeder ε-Umgebung liegen, wie ± 1 in unseren Beispiel, werden als *Häufungswerte* bezeichnet. Grenzwerte sind also auch immer Häufungswerte, aber eben nicht umgekehrt.

[9] Für jedes $N \in \mathbb{N}$ heißt $\langle x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots \rangle$ ein *Hauptstück* der Folge $\langle a_n \rangle$.

Eine weitere gute und anschauliche Formulierung der Grenzwertbedingung macht sich die Sprechweise des „Bleibt schließlich" zu Nutze. Sie erlaubt eine Umformulierung des „fast alle" von oben.

Definition 9.2 („Bleibt schließlich") *Wir sagen eine Folge $\langle a_n \rangle$* bleibt schließlich *in einer ε-Umgebung von a, wenn alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index in $U_\varepsilon(a)$ liegen, also wiederum ein N existiert, sodass $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt.*

Damit ergibt sich nun klarerweise die Formulierung:

(F2) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen a, falls sie schließlich in jeder ε-Umgebung von a bleibt.

Zu den Formulierung (F1) und (F2) passen die folgenden unmittelbaren Veranschaulichungen in beiden Darstellungsformen für Folgen aus Abschnitt 6, nämlich am Zahlenstrahl und als Graph.

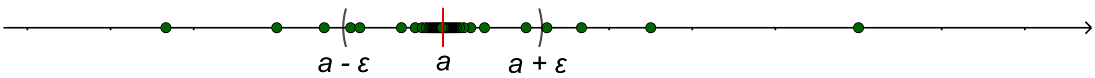

Abbildung 10: Eine ε-Umgebung um den Grenzwert: Darstellung am Zahlenstrahl

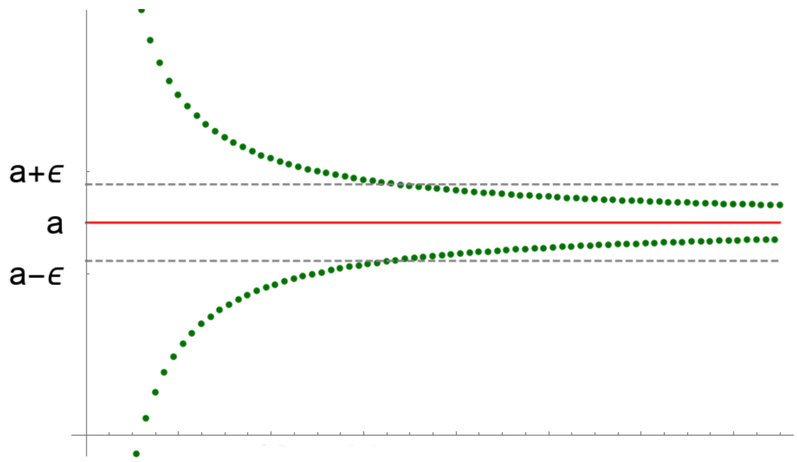

Abbildung 11: Eine ε-Umgebung um den Grenzwert: Darstellung am Graphen

Zu diesen Veranschaulichungen ist natürlich noch folgende **Warnung** angebracht: Ein wesentlicher Teil der Definition ist in ihnen nämlich nicht unmittelbar ersichtlich. Es muss ja *für alle* (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein entsprechender Folgenindex N existieren, sodass alle späteren Folgenglieder in der ε-Umgebung liegen. Dieser wichtige Punkt ist in den Abbildungen 10 und 11 nicht dargestellt, kann aber besonders anschaulich z. B. in Form eines Spiels ausgedrückt werden: Die erste Spielerin gibt beliebig ein ε bzw. eine ε-Umgebung um den vermuteten Grenzwert a vor. Beliebig, also beliebig klein, kann in diesem Kontext als „möglichst gemein" verstanden werden, um es der zweiten Spielerin möglichst schwer zu machen. Diese soll nämlich die Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ gegen a zeigen, d. h. sie muss zu jeder noch so „gemeinen" ε-Vorgabe *immer noch* ein N finden, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe am Grenzwert liegen. Natürlich kann ein solches Spiel nicht in alle Ewigkeit durchgeführt werden, um wirklich *für alle* ε ein geeignetes N zu finden — hier ist dann im „wirklichen Leben" ein mathematischer Beweis von Nöten!

Die Formulierung (F1) und (F2) referenzieren beide direkt auf die Umgebungsvorstellung und sind gute Formulierungen dieser Grundvorstellung. Zum Abschluss des Intermezzos möchte ich nicht weiter Verheimlichen, dass es auch für die Annäherungsvorstellung gute Formulierungen gibt — obwohl sie aus vielen diskutierten Gründen im Lernprozess als „Problembär" angesehen werden muss. In Analogie zur „Bleibt schließlich"-Formulierung können wir sagen:

(F3) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen a, falls sie a schließlich beliebig nahekommt.

Das „beliebig nahe" ist natürlich wieder im folgenden Sinn zu verstehen: für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex N, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe an a liegen, d. h. $|a - a_n| < \varepsilon$ gilt. Um die Annäherungsvorstellung zu bedienen, drückt sich diese Formulierung in gewisser Weise um die Verwendung des Begriffs der ε-Umgebung herum. Sie ist dafür ziemlich nahe an der Formulierung Cauchys aus Abschnitt 4. Korrekte Formulierungen der Annäherungsvorstellung scheinen Lernenden schwer zu fallen (siehe Abschnitt 10) und es gibt auch „beliebte" Fallgruben, etwa die Formulierung: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen a, falls sie a immer näher kommt. Das ist insofern falsch, als die Nullfolge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ natürlich auch dem Wert -17 immer näher kommt. Dieser ist aber natürlich nicht der Grenzwert, da $\langle \frac{1}{n} \rangle$ dem Wert -17 eben nicht *beliebig* nahekommt.

10. Vom Lehren & Lernen des Grenzwertbegriffs, Teil 2

Wir kehren nun zu unserem Panorama zurück und schließen es ab. Eine reiche Quelle für Fehlvorstellungen besteht in der Doppelnatur der Schreibweise „lim", die sowohl als Aufforderung gelesen wird, einen Grenzprozess durchzuführen, als auch dessen Ergebnis bezeichnet, vgl. (Bender, 1991, S. 240). Wenn die Akzeptanz der Lernenden für die Existenz des Ergebnisses unendlicher Prozesse (im Sinne des aktual Unendlichen) fehlt, kommt es hier zwangsläufig zu Missverständnissen. Die „Rede vom Grenzübergang unterstützt Fehlvorstellungen, wenn man dabei an das Ergebnis des Durchlaufens der Folge denkt; sie ist nur treffend als Bezeichnung für den Übergang von der Menge der konvergenten Folgen (Definitionsbereich) in die Menge der Grenzwerte (Wertebereich)." (Bender, 1991, S. 242).

In dasselbe Horn stößt Marx (2013) mit seiner qualitative Studie unter Schüler*innen der zehnten Schulstufe, d. h. in einer Population, in deren Unterricht der Grenzwertbegriff nicht explizit gemacht wurde. In seiner Untersuchung zu Vorstellungen zu unendlichen Prozessen und deren möglichen Ergebnissen identifiziert er zwei zusammenhängende Grundfragen von Schüler*innen bei der Konzeptualisierung unendlicher Prozesse.

(1) In welcher Relation stehen unendliche Prozesse zu Erfahrungen im Kontext konkreter physischer Handlungen?
(2) Was soll unter dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses verstanden werden?

Frage (1) verweist wieder auf das Primat der Vorstellungen und insbesondere auf die Bedeutung von Alltagsvorstellungen und -erfahrungen. Frage (2) führt im Kontext von Folgen, die ja einen unendlichen Prozess modellieren auf die Fragen „Hat die Folge einen Grenzwert? Und falls ja, welchen?", was uns wieder zu Bender (1991) und seinen Warnungen führt. Deren Relevanz wird noch unterstrichen durch eine Studie unter Studierenden von Roh (2008), die zeigen konnte, dass das Verstehen der formalen Grenzwertdefinition davon abhängt, ob die davor erworbenen Vorstellungen zum Grenzwert mit der Definition kompatibel sind. Dieses Verhältnis zwischen Vorstellungen und formaler Definition beim Bearbeiten von Übungsaufgaben durch Lehramtsstudierende untersuchen gegenwärtig Utsch/Lengnink (2020). Mittels Prozessgraphen ermitteln die Autorinnen, wann bei der Bearbeitung von Aufgaben Studierende auf ihre Vorstellungen[10] und wann auf die Grenzwertdefinition zurückgreifen.

Zum Abschluss möchte ich nun von den Ergebnissen einer Studie berichten, die an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien im Rahmen des Projekts *BELLA* (Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis) im Studienjahr 2018/19 durchgeführt wurde, für Details siehe Ableitinger et al. (2021). BELLA ist ein hochschuldidaktisches Projekt zur empirischen Erforschung von Beliefs[11] und Vorstellungen von Lehramtsstudierenden im Unterrichtsfach Mathematik zu Kernbegriffen der Analysis. Das Projektteam besteht aus den Didaktiker*innen und Mathematiker*innen des Verbunds Nord-Ost C. Ableitinger,

[10] Utsch/Lengnink (2020) verwenden allerdings nicht das Grundvorstellungskonzept sondern den Ansatz des conecpt images und der concept definition von Tall/Vinner (1981).

[11] Diesen sozialwissenschaftlichen Fachbegriff erklärt z. B. Törner (1998) kurz wie folgt: „beliefs are subjective cognitive constructs which are of some acceptance in the community" und „they may be loaded with some emotions [...] which may be ultimately associated with some behavioural dispositions."

A. Anger, S. Götz, R. Steinbauer und E. Süss-Stepancik. Hauptmotivation des Projekts ist es, Erkenntnisse zum Erreichen eines der zentralen Ziele des Lehramtsausbildung beizusteuern, nämlich dem Aufbau von belastbaren Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Mathematik. Mit einer empirischen Studie haben wir vor allem die folgenden Forschungsfragen untersucht:

(A) Welche Vorstellungen zum Grenzwertbegriff äußern Studierende nach der fachlichen[12] Ausbildung?
(B) Wie verändern sich diese durch den fachdidaktischen Teil[13] der Ausbildung?

Als Hauptinstrument diente uns die Auswertung des Schreibimpulses „Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor...", der den Studierenden ($n = 59$) zu zwei Zeitpunkten nämlich am Beginn und am Ende der fachdidaktischen Vorlesung vorgelegt wurde, siehe Abbildung 12. Die geäußerten Vorstellungen wurden dann mit den drei normativen Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (siehe Abschnitt 7) abgeglichen, wofür ein Kategoriensystem mit 4 Bewertungsstufen zur Ausprägungsqualität erstellt wurde. Folgende Erkenntnisse konnten wir dabei in Bezug auf Forschungsfrage (A) gewinnen:

- Am häufigsten trat die Annäherungsvorstellung auf, nämlich 79% bzw. 75% aller Äußerungen zum Zeitpunkt 1 bzw. 2. Das ist insofern bemerkenswert, da die Standarddefinition der Analysis (wie oben ausführlich dargestellt) eindeutig auf der Umgebungsvorstellung beruht.
- Die Annäherungsvorstellung wurde in geringerer Qualität geäußert als die Umgebungsvorstellung; Mittelwerte 1.81 vs. 2.5 auf der 4-Stufigen Skala zum Zeitpunkt 2.
- Etwa $1/3$ der Äußerungen deutet auf Fehlvorstellungen hin, die Schüler*innen-Fehlvorstellungen ähneln (wie etwa in Marx (2013) gefunden).

Zwei der „beliebtesten" Fehlvorstellungen möchte ich hier explizit thematisieren[14], nämlich jene,

(F1) dass der Grenzwert von der Folge nicht erreicht werden darf, und
(F2) dass der Grenzwert eine Schranke der Folge ist.

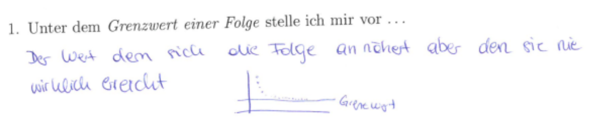

Abbildung 12: Schreibimpuls zum Folgengrenzwert

Die Vorstellung (F1) deutet ganz klar auf ein unvollständiges Verständnis der Annäherungsvorstellung hin, vgl. den Schleier aus Abschnitt 6, den die Unendlichkeit über den Prozessausgang breitet. Tatsächlich wird in der Grenzwertdefinition 4.1 weder gefordert, dass die Folge den Grenzwert annimmt, noch ist es ausgeschlossen! Eine Folge die den Grenzwert nicht annimmt, ist etwa das Erzbeispiel einer Nullfolge $\langle \frac{1}{n} \rangle$, die uns bisher schon über weite Strecken begleitet hat. Andererseits konvergieren konstante Folgen, wovon wir uns durch einen Blick auf die Definition leicht überzeugen können, z. B. gilt $\langle a_n \rangle = \langle 0, 0, 0, \dots \rangle \to 0$ $(n \to \infty)$. Ebenso schließt die Definition nicht aus, dass eine konvergente Folge $\langle a_n \rangle$ manchmal ihren Grenzwert a trifft (also $a_n = a$ für einige n) oder dass die Folge schließlich konstant a ist, d.h. $a_n = a$ für alle n größer einem gewissen Index N. Es ist also schlichtweg egal, ob oder „wie oft" eine Folge ihren Grenzwert trifft! In Äußerung wie in Abbildung 12 wird dem „Nichterreichen" (also einer irrelevanten Bedingung) eine wesentliche (wenn nicht sogar konstitutive) Bedeutung zugesprochen, was uns zum Schleier zurückführt. Auch die Verwendung des Wortes „wirklich" deutet auf genau diese Unsicherheit bzgl. des Prozessausganges hin.

Die Fehlvorstellung (F2) könnte man auch aus der graphischen Darstellung in Abbildung 12 herauslesen. Tatsächlich ist es wiederum gemäß Definition 4.1 irrelevant, ob der Grenzwert einer Folge auch obere oder untere Schranke der Folge ist, vgl. auch Abbildung 11. Diese Vorstellung ist wohl häufig dadurch bedingt, dass monotone beschränkte Folgen ein beliebtes Beispiel für konvergente Folgen darstellen.

[12] Laut dem derzeit gültigen Curriculum, siehe Universität Wien (2016): Vorlesung und Übungen „Analysis in einer Variable für das Lehramt" ($5+2$ Wochenstunden).
[13] Vorlesung und Übungen „Schulmathematik Analysis" ($2+1$ Wochenstunden).
[14] Ich mache das hier in der Hoffnung, ihre Verbreitung (weiter) zu reduzieren.

Tatsächlich ist es eine Konsequenz aus dem *Supremumsaxiom* also der Vollständigkeit der reellen Zahlen, dass jede monoton steigende (fallende) und nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert. Der Grenzwert ist dann das Supremum (Infimum) der Folge, siehe z. B. (Winkler , 2009, Absch. 3.1). Allerdings *muss* eine konvergente Folge eben nicht so aussehen und eine unzulässige Verallgemeinerung des Spezialfalls führt zur Fehlvorstellung, dass der Grenzwert *immer* eine Schranke sein muss.

Bezüglich der Forschungsfrage (B), also der Frage nach den Änderungen der Vorstellungen durch die fachdidaktische Intervention konnten wir folgende Beobachtungen machen:

- Die Qualität der geäußerten Annäherungsvorstellungen konnte durchwegs gesteigert werden und ging oft mit dem Verschwinden von Fehlvorstellungen einher. Allerdings ist einschränkend zu bedenken, dass von einer niedrigen Ausprägungsqualität im Prätest gestartet wurde und auch am Ende der Schulmathematik-Lehrveranstaltung nur eine schwach mittelmäßige Qualität festgestellt werden konnte.
- Häufig konnte eine Veränderung der Äußerungen von einer Annäherungsvorstellung niedriger Qualität hin zu einer Umgebungsvorstellung höherer Qualität beobachtet werden, für ein Beispiel siehe Abbildungen 13, 14.
- Die Qualität der Äußerungen korreliert im Prätest signifikant mit dem Fachwissen der Studierenden (gemessen an den Vorlesungsnoten zur Fachvorlesung). Diese Korrelation verschwindet im Posttest.

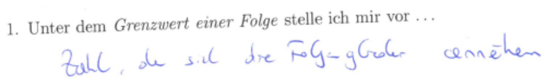

Abbildung 13: Proband*in IR0216: Prätest, Niedrige AV

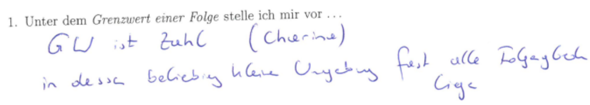

Abbildung 14: Proband*in IR0216: Posttest, Hohe UV

Insgesamt zeigen diese Befunde, dass gutes fachliches Vorwissen mit einer guten Ausprägung von Grundvorstellungen einhergeht. Das Ausbilden solcher Vorstellungen erfolgt nicht automatisch, kann aber durch entsprechende Interventionen unterstützt werden. Insofern sprechen diese Ergebnisse auch für eine möglichst enge Verknüpfung fachlicher und didaktischer Ausbildungsteile im Lehramtsstudium.

11. Schlussbemerkungen

Am Ende unserer Reise möchte ich unsere wesentlichen Stationen noch einmal kurz rekapitulieren und damit auch einige Anregungen für den Mathematikunterricht geben. Wir haben gesehen, dass der Unendlichkeitsbegriff und auch der Grenzwertbegriff sowohl einen dynamischen Aspekt, als auch einen statischen Aspekt besitzen. Diese sind in den Abbildungen 6 und 7 paradigmatisch dargestellt. Die beiden Aspekte sind, obwohl in ihrem Ansatz gegensätzlich, doch eng miteinander verknüpft. Essentiell beim Lernen und Lehren ist das *Hin- und Herschalten* zwischen den beiden Aspekten. Vorstellungen über das Unendliche können mittels des dynamischen Aspekts aufgebaut und im Folgenbegriff formalisiert werden. Der Grenzwertbegriff ist hingegen am einfachsten durch einen Wechsel zum statischen Aspekt zu verstehen. Hier ist es essentiell, dass der Grenzwert im Sinne des aktual Unendlichen als „real existierende" Zahl bestimmt werden kann, die gewisse Eigenschaften in Bezug auf die Folge besitzt. Der entscheidende Schritt, das Durchschlagen des Knotens, ist dabei das Lüften des Schleiers, den der unendliche Prozess des Annäherns über das Prozessergebnis legt. Dieses ist ja gerade der endliche Grenzwert! Und es ist genau diese Entzauberung des Unendlichen, die ein in die Tiefe gehendes Verstehen des Grenzwertbegriffs ermöglicht.

Literatur

Ableitinger, C., Götz, S., Steinbauer R. (2021): (Grund-)Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. Eingereicht.

Bragg, M. (2016): Zeno's Paradoxes. BBC Radio 4 Podcast In Our Time, Philosophy: Online https://www.bbc.co.uk/programmes/b07vs3v1 (Zugriff 13.3.2021).

Becker, A. (2018): *What Is Real?: The Unfinished Quest for the Meaning of Quantum Physics*. Basic Books. New York.

Bender, P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 44(4), 238–243.

Cornu, B. (2002): Limits. In Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Vol. 11, 153–166, Springer, Dordrecht.

Fischbein, E. (1978): Intuition and mathematical education. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, 1, 148–176.

Goldstein, R. (2015): *Plato at the Googleplex: Why Philosophy Won't Go Away.* Vintage Books (Random House). New York.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.

Hilbert, D. (1926): Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* 95, 161–190.

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum, Heidelberg.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik* 34, 73–97.

Monaghan, J. (2001): Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48, 239–257.

Misra, B., Sudarshan, E.C.G. (1977): The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics* 18, 756–763.

Roh, K.H. (2008): Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 69, 217–233.

Russell, B. (1950): *Philosophie des Abendlandes: Ihr Zusammenhang mit der politischen und sozialen Entwicklung.* Europa Verlag. Zürich.

Tall, D., Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.

Törner, G. (1998): Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics. In Pehkonen, E., Törner, G. (Eds.): *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research. Results of the MAVI activities*, 73–96, Research Report 195. Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Universität Wien (2016): Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula. http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf (Zugriff 13.3.2021).

Utsch, N., Lengnink, K. (2020): Prozesspfade zur Analyse des Zusammenspiels von Concept Image und Concept Definition in Studierendenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz. *Tagungsband des Hansekolloquiums.* Im Druck.

Weierstraß, K. (1874): *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen.* Nach den Vorlesungen im SS 1874. Hettner, G. (Hrsg.): Manuskript vom Mathematischen Institut Göttingen 1988.

Weigand, H.-G. (2016): Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte* 63, 135–154.

Winkler, R. (2009): Die reellen Zahlen sind anders. *Didaktikhefte der ÖMG* 41, 140–153.

Anschrift des Verfassers

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A – 1090 Wien
Österreich

roland.steinbauer@univie.ac.at