

# EINFÜHRUNG IN DIE ANALYSIS

ROLAND STEINBAUER

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

UNIVERSITÄT WIEN

SOMMERSEMESTER 2012

3454/5 ECTS

# 0 EINLEITUNG

In dieser Einleitung möchten wir einige inhaltliche & methodische Vorbemerkungen (§0) und legen down (§1) den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

## §0 WAS WILL UND WAS SOLL DIE ANALYSIS

- EINE ERSTE BEGRIFFSBESTIMMUNG

in diesem Skript  
hat jeder Absatz eine  
Nummer

## 0.1. MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN. Zu Beginn jedes

Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- LINEARE ALGEBRA & GEOMETRIE
- ANALYSIS

Lösen linearer Gleichungssysteme & des oberen entwickelten abstrakte Begriffsapparat

Grenzwerte, Differential- und Integralrechnung

Die Themen der Analysis sind also schon durchaus aus der Schulmathematik geläufig;

sie wird an der Uni allerdings axiomatisch abstrakt aufgebaut daher ist zu Beginn eher das WIE als das WAS ein Problem

[Für viele Studierende ist die 1. Analysis-Vo die relativ schwierigste Vo des gesamten Studiums.]

## 0.2 ANALYSIS - EINE ERSTE INHALTSBESTIMMUNG

3

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die Differential- und Integralrechnung (in einer & in mehreren Variablen).

Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?

für kleine Änderungen  
der unabhängigen Variablen

Gesamtverlauf  
der Fkt

## 0.3 BSP (Fahrradfahren)

(Wo, Wie) kann aus der Kenntnis der Momentanpositionsgeschwindigkeit (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der Gesamtverlauf der Fahrt (zurückgelegte Strecke; die Fkt im Großen) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden obige Größen durch den Tachometer bzw. Topo-Kilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe wirklich und wie kann obige Frage systematisch beantwortet werden?

Das führt uns auf:

## 0.4 DER ANALYTISCHE BEGRIFFSAPPARAT

4

Jede ernsthafteste Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen Erscheinungsformen - Er ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichsam an der Basis der Differential- & Integralrechnung zugrunde?

0.5 UND WOFÜR DAS GANZE? Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken schäbende)

Notorie mit der echten Welt zu tun? SEHR VIEL!

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Laplace, Laplace, ... ) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt & Gesellschaft in den letzten 3 $\frac{1}{2}$  Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. [Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik so wie die Schrift und nimmt m.E. ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein ... ]

0.6 JA SCHÖN - ABER WIE? ZUR METHODIK

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist - und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich - dass die Analysis [wie jedes math. Gebiet] nach der

axiomatischen Methode gelehrt wird. - WARUM?

5

abstraktes Vorzeichen nach dem  
Definition-Satz-Basis-Schema

(1) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

(2) Schmerzt das Erlernen eines Gebiets leichter?

Das ist kein Witz? Statt in „druidische Weise“ von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantierens mit „unerlässlich kleinen Größen“ unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt definiert. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert. Diese werden durch logische Schlußfolgerungen bewiesen.

JA, ABER .... natürlich bereitet diese Herangehensweise den AnfängerInnen große Schwierigkeiten!

Es ist eine große Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der Phantasie & Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache.

Daher ist es auch eines der Ziele der VdL diese methodische Herausforderung zu bereinigen ... Insofern nimmt die EIdA auch den methodischen roten Faden der EIdA auf und spinnt ihn weiter ...

## 0.7. AXIOMATIK IN DER ANALYSIS

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir im nächsten §. Dabei nehmen wir den inhaltlichen Faden aus der ETA auf und knüpfen daraus den Teppich der Analysis.

## 0.8 BEVOR ES WIRKLICH LOSGEHT – EINE LETZTE, AUCH

zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen & die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen & wird nicht nur ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können).

Ebenso die Kraft der Anwendungen (auf die wir in diese Vorlesung wenig eingehen können): Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie, etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft...