Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

1. Prüfungstermin (11.1.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe:
   (in einem Punkt) differenzierbare Funktion, Stammfunktion, Wendestelle einer Funktion, Riemann-integrierbare Funktion (inkl. Ober- und Unterintegral) (1+1+1+2 Punkte)
   (b) Formuliere die Regel zur partiellen Integration und beweise sie. (3 Punkte)
   (c) Formuliere den Satz von Rolle und beweise ihn.
   Wo und wie wird die Stetigkeit der Funktion verwendet? (6 Punkte)

2. *Grundideen.*
   (a) Diskutiere die Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (4 Punkte)
   (b) Diskutiere, was es anschaulich für eine Funktion bedeutet, an einer Stelle *nicht* differenzierbar zu sein. (2 Punkte)

3. *Vermischtes.*
   (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ und sei $f(\xi) \neq 0$. Zeige:
   $$\left(\frac{1}{f}\right)'(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} \qquad \text{(2 Punkte)}$$
   (b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $\exists C > 0$, sodass $|f'(\xi)| \leq C$ für alle $\xi \in I$. Zeige, dass dann für alle $x, y \in I$ gilt
   $$|f(x) - f(y)| \leq C\ |x - y|. \qquad \text{(2 Punkte)}$$
   (c) Beweise: Hat eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in einem inneren Punkt ξ von I, dann verschwindet $f'(\xi)$. (2 Punkte)
   (d) Zeige: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ (2 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Zeige: $|x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. (1 Punkt)
   (b) Berechne $\int \log(x)\,dx$. (1 Punkt)
   (c) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)
   (d) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar. Wo ist $g(x) := \sqrt{f(x)}$ differenzierbar? Berechne die Ableitung von g. (2 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)
   (a) Jede zweimal differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ konvergiert.
   (c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$ /40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

1. Prüfungstermin (11.1.2013)

Gruppe B

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe:
   Differenzenquotient, Lipschitz-stetige Funktion, konvexe Funktion, Riemann-integrierbare Funktion (inkl. Ober- und Unterintegral) (1+1+1+2 Punkte)
   (b) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (1 Punkt)
   (c) Formuliere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und beweise ihn. Wo und wie wird im ersten Teil die Stetigkeit der Funktion verwendet? (8 Punkte)

2. *Vermischtes.*
   (a) Beweise: Hat eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in einem inneren Punkt ξ von I, dann verschwindet $f'(\xi)$. (2 Punkte)
   (b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ und sei $f(\xi) \neq 0$. Zeige:
   $$\left(\frac{1}{f}\right)'(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} \qquad \text{(2 Punkte)}$$
   (c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$. Zeige, dass f in ξ auch stetig ist. (2 Punkte)
   (d) Zeige: $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2 Punkte)

3. *Grundideen.*
   (a) Diskutiere die anschauliche Bedeutung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. (2 Punkte)
   (b) Diskutiere notwendige und hinreichende Bedingungen für das Auftreten lokaler Extremstellen für (ausreichend oft) differenzierbare Funktionen. Ist die notwendige Bedingung hinreichend bzw. die hinreichende notwendig? (4 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)

   (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.

   (b) Jede zweimal differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.

   (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ konvergiert.

5. *Beispiele und Gegenbeispiele.*

   (a) Berechne $\int \log(x)\, dx$. (1 Punkt)

   (b) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar. Wo ist $g(x) := \sqrt{f(x)}$ differenzierbar? Berechne die Ableitung von g. (2 Punkte)

   (c) Zeige: $|x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. (1 Punkt)

   (d) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)

Prüfungsausarbeitung | 1. TERMIN, 11.1.2013

GRUPPE A

$\boxed{1}$ (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ im Folgenden ein Intervall.

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $\xi \in I$, falls

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$ existiert und endlich ist.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Eine Fkt $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f (auf I), falls $F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. $\xi \in I$ heißt Wendestelle von f, falls in ξ das Krümmungsverhalten ändert.

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ober- und Unterintegral von f sind definiert als

$$\int_a^{b*} f(t)\,dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\}$$

$$\int_{a*}^{b} f(t)\,dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)\,dt \mid \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \leq f \right\}.$$

f heißt R-intbar, falls $\int_a^{b*} f = \int_{a*}^{b} f$.

$\boxed{1}$ (b) Falls $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar sind, dann gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

[1] (b) Fortsetzung: Beweis: Wir definieren $F = f g \overset{\text{Kettenr.}}{\Longrightarrow}$
$F' = f' g + f g'$ und wegen dem HsDI gilt

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f' g + \int_a^b f g' . \quad \square$$

[1] (c) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$.
Dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis. Falls f konstant, dann ist der Satz evident. Sei also
f nicht konstant.

$\Longrightarrow \exists\, x \in (a,b)$ mit oBdA $\overline{f(x) > f(a) = f(b)}$ $(*)$

f stetig auf $[a,b] \overset{\text{Satz v. Max}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$

$(*) \Rightarrow \xi \neq a,\ \xi \neq b$ also $\xi \in (a,b) \underset{\text{für Max}}{\overset{\text{notw. Bed}}{\Longrightarrow}} f'(\xi) = 0.$ $\square$

Die Stetigkeit von f auf $[a,b]$ wird als Voraussetzung für den Satz vom Maximum verwendet: Stetige Fkt nehmen auf kp Mengen Max & Min an.

[2] (a) Der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren im Wesentlichen inverse Operationen sind. Genauer sei I ein Intervall und seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt für $f : I \to \mathbb{R}$ stetig

(i) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig diff'bar und es gilt
$F' = f$. (d.h. insbes. ist F eine Stammfkt. von f)

(ii) $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ für jede Stammfkt F von f.

Mit den Bezeichnungen wie oben gilt also

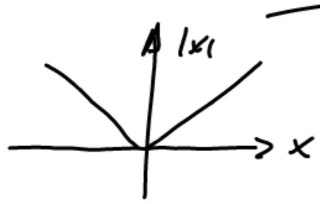
$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{bzw} \quad \int_0^x F'(t)\,dt = F(x)-F(0)$$

Also gilt für die Abbildungen

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I), \quad F \mapsto F' \qquad \text{und} \qquad R: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}^1(I), \quad f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

$$D \circ R = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(I)} \qquad \text{und} \qquad R \circ D(F) = F - F(0)$$

$\boxed{2}$ (b) Das prototypische Verhalten in einer Stelle der <u>nicht</u>-Differenzierbarkeit ist ein <u>Knick</u>, zB $|x|$ bei $x=0$.



Es gibt aber auch Fkt die überall stetig sind, aber in keiner Stelle differenzierbar.

$\boxed{3}$ (a) Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{1/f(\xi+h) - 1/f(\xi)}{h} = \frac{f(\xi)-f(\xi+h)}{h\, f(\xi) f(\xi+h)} = -\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\,\frac{1}{f(\xi)f(\xi+h)}$$

bemerke $f(\xi+h) \neq 0$ für h klein, weil f stetig in ξ und $f(\xi) \neq 0$

$$\longrightarrow -f'(\xi)\cdot\frac{1}{f^2(\xi)} \quad (h \to 0)$$

f diffbar in $\xi \Rightarrow$ stetig in ξ

$\boxed{3}$ (b) Seien $x,y \in I \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (x,y)$ mit

$$|f(x)-f(y)| = |f(\xi)|\,|x-y| \overset{\text{n. Voraus.}}{\leq} C\,|x-y|$$

$\boxed{3}$ (c) oBdA sei ξ ein lok. Maximum.

$$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$$

$$\overset{f \text{ diffb.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

$\boxed{3}$ (d) $$(x^\alpha)' = \left(\exp(\alpha \log(x))\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \exp(\alpha \log(x)) \cdot (\alpha \log(x))'$$

$$= x^\alpha (\alpha \, 1/x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$\boxed{4}$ (a) Der Differenzenquotient bei 0 hat keinen Limes, denn:

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \begin{cases} h/h = 1 & (h>0) \\ -h/h = -1 & (h<0) \end{cases}$$

(b) $$\int \log(x)dx = \int 1 \log(x) dx \overset{PI}{=} x \log(x) - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= \underline{x \log(x) - x}$$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diffbar in 0 mit $f'(0) = 0$ denn

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin 1/h \to 0 \quad (h \to 0)$$

14 (c) Fortsetzung: Aber für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin(1/x)}_{\to 0 \ (x \to 0)} - \cos(1/x) \quad \text{und} \quad f'(x) \not\to f'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \nexists$$

Also ist $x \mapsto f'(x)$ in 0 nicht stetig.

14 (d) Weil $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ und $\sqrt{\ }$ diffbar auf $(0,\infty)$ ist g auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar.

$$g'(x) = \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

15 (a) Richtig, denn $f'' = (f')' \ \exists \Rightarrow f'$ stetig

(b) Falsch, denn für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log(1) - \log(\varepsilon) = -\log(\varepsilon)$$

$$\longrightarrow \infty \quad (\varepsilon \to 0)$$

(c) Richtig, denn f diffbar $\Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$

($\Rightarrow f$ stetig auf jedem $[a,b]$)

$\Rightarrow f$ R-intbar auf jedem $[a,b]$.

Gruppe B

$\boxed{1}$ (a) Sei I im Folgenden ein Intervall.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi \in I$. Der Ausdruck

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \qquad (x \in I)$$

heißt <u>Differenzenquotient</u> <u>von f bei ξ</u>.

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u> (<u>dehnungsbeschränkt</u>), falls $\exists C>0$ sodass $\forall x, y \in I$ gilt

$$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$$

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, falls $\forall x, y \in I$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

(d.h. die Sekante liegt über dem Graphen)

Für R-intbare Fkt siehe <u>Gruppe A</u> $\boxed{1}$ (a)

$\boxed{1}$ (b) MWS: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Dann $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$\boxed{1}$ (c) <u>HSDI</u>: Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$. Dann gilt

[1] (c) Fortsetzung

(i) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig diff'bar und es gilt $F' = f$.

(ii) Sei F eine beliebige Stammfkt von f, dann gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Beweis. (i) f stetig $\Rightarrow$ f R-int'bar und F ist definiert. Weiters gilt ($0 \neq h$, $x+h \in I$)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

MWS Int.

$\Longrightarrow \exists\, \xi_h \in [x, x+h]$ (bzw $[x+h, x]$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h) \cdot h$$

Falls $h \to 0$, dann geht auch ξ_h gegen x, denn $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h|$ und somit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h) \xrightarrow[f \text{ stetig}]{} f(x) \implies F' = f \text{ und damit } F \in C^1$$

Die Stetigkeit wurde 2mal verwendet:

1.) um überhaupt zu sehen, dass f R-int'bar und somit F definiert ist und

Fortsetzung $\boxed{1}$ (c)

2) um zu sehen, dass $f(\xi_n) \to f(x)$ $(\xi_n \to x)$.

(ii) Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ wie in (i).

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ G ist Stammfunktion von f

$\Longrightarrow$ Jede Stammfkt von f ist von der Form
$F = G + c$ $(c \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

$\boxed{2}$ (a) siehe Gruppe A, $\boxed{3}$ (c)

(b) —— " —— $\boxed{3}$ (a)

(c) Sei $x \neq \xi$ und $x \in I$. Wir zeigen, dass $f(x) \to f(\xi)$ für $x \to \xi$ und damit ist f stetig in ξ. Tatsächlich:

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) \longrightarrow f'(\xi) \cdot 0 = 0$$

f diffb. in ξ

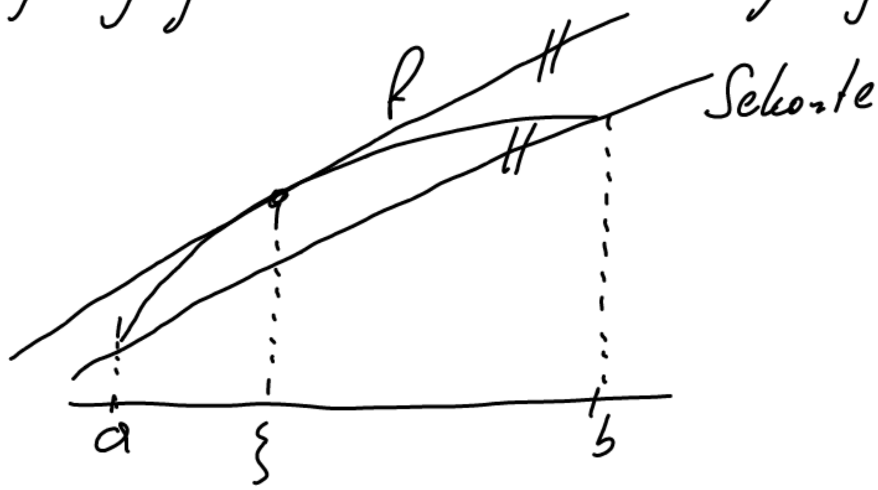
(d) $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Diff der Umkehrfkt

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

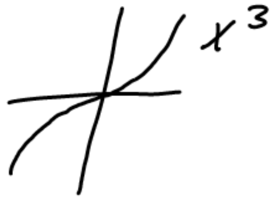
$\boxed{13}$ (a) Der MWS (Formulierung siehe $\boxed{11}$ (b)) besagt, dass es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ gibt wo die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung ist; graphisch



$\boxed{13}$ (b) Notwendig für das Auftreten von lok. Extrema ist das Verschwinden der Ableitung, also

$$\xi \text{ lok. Extr.} \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, denn $f(x) = x^3$ erfüllt $f'(0) = 0$ aber $x = 0$ ist kein Extremum



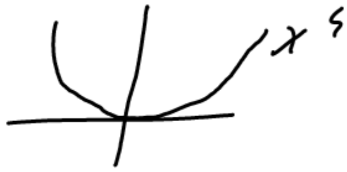
Für 2x diffbares f lautet eine hinreichende Bed. f. lok. Extrema

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{lok. Extr. in } \xi$$

Genauer gilt $f''(\xi) < 0$ (>0) $\Rightarrow$ ξ lok. Max (Min)

$\boxed{3}$ (b) Fortsetzung:

Diese Bedingung ist nicht notwendig, denn $f(x) = x^4$ hat in $x=0$ ein Min aber $f''(0) = 0$



$\boxed{4}$ (a) siehe Gruppe A $\boxed{5}$ (c)

(b) — " — $\boxed{5}$ (a)

(c) Falsch, denn $\forall a > 1$ gilt

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_1^a = \log(a) \longrightarrow \infty \quad (a \to \infty)$$

$\boxed{5}$ (a) siehe Gruppe A, $\boxed{4}$ (b)

(b) — " — $\boxed{4}$ (d)

(c) — " — $\boxed{4}$ (a)

(d) — " — $\boxed{4}$ (c)