§2 SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

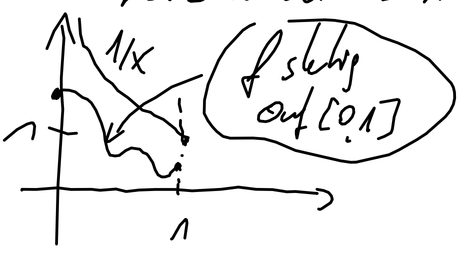
Nach den eher praktischen Ausführungen (zum Schluss) des §1 lernen wir nun die wesentlichen theoretischen Aussagen über stetige Funktionen (auf abg. beschr. Intervallen) kennen

- den Zwischenwertsatz
- die Annahme von Minimum & Maximum
- die gleichmäßige Stetigkeit
- Umkehrsatz f. stetige, streng mon. Fkt.

2.1. MOTIVATION (Die Sonderrolle abg. beschr. Intervalle)

Bisher haben wir stetige Fkt auf beliebigen TM $D \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den abgeschlossenen & beschränkten Intervallen $[a, b]$ eine Sonderrolle zukommt; solche Intervalle heißen auch KOMPAKT.

Ein einfacher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Fkt auf $[0,1]$ im Gegensatz zu solchen auf $(0,1)$ betrachten: Etwa nimmt $f(x) = 1/x$ auf $(0,1)$ beliebig große pos Werte an [1.27(iii)]. Für eine stetige Fkt auf $[0,1]$ ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar und wir werden zeigen, dass tatsächlich

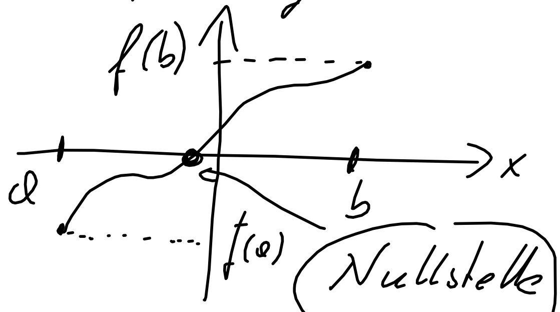


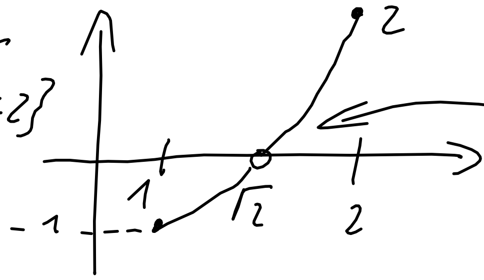
jede stetige Fkt auf $[0,1]$ nur beschränkte Werte annehmen kann

beschränkte Fkt

Wir beginnen mit einer anschaulich klaren Aussage, die – aber wieder einmal – essentiell die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet.

2.2 MOTIVATION (Der Zwischenwertsatz) Wir betrachten ein stetiges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(a)<0$ und $f(b)>0$. Es scheint dann klar zu sein, dass f eine Nullstelle haben muß. Tatsächlich ist das auf $\mathbb{R}$ richtig – wie wir gleich sehen werden – aber etwa auf $\mathbb{Q}$ falsch, denn mit $D=\{p\in\mathbb{Q}: 1\le p\le 2\}$, $f(x)=x^2-2$, $f(1)=-1$, $f(2)=2$





Nullstelle wäre $x_0=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\supseteq D$

2.3 THM (Zwischenwertsatz)

Ein Hauptresultat der VO

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0$, $f(b)>0$ (bzw. $f(a)>0$, $f(b)<0$). Dann $\exists x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=0$

d.h. f hat eine Nullstelle in D

Vor dem Beweis ein Bsp einer Anwendung

2.4 KOR (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad)

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mind. eine reelle Nullstelle.

Beweis. Sei $p(x)=b_{2n+1}x^{n+1}+\dots+b_0$ mit $b_{2n+1}\ne 0$. Klarerweise können wir schreiben
$$p(x)=b_{2n+1}\left(x^{2n+1}+\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}}x^{2n}+\dots+\frac{b_0}{b_{2n+1}}\right)=:b_{2n+1}q(x)$$
und q ist von der Form
$$q(x)=x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\dots+a_1x+a_0\quad\left(a_j=\frac{b_j}{b_{2n+1}}\ j=0,\dots,2n\right)$$
und damit wie p in 1.25(iii)
$$\overset{1.25(iii)}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\infty}p(x)=\infty\implies\exists x_+>0 \text{ mit } q(x_+)>0$$

Andererseits gilt

$$q(-x) = -x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} - \dots = -(x^{2n+1} - a_{2n}x^{2n} + \dots - a_0)$$

$$\xrightarrow{1.25(iii)} \lim_{x\to-\infty} q(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_- < 0 \text{ mit } q(x_-) < 0$$

$q|_{[x_-,x_+]} : [x_-, x_+] \to \mathbb{R}$ ist stetig

die Einschränkung von q auf $[x_-,x_+]$ – Vergiß den Rest außerhalb von $[x_-,x_+]$

$$\xRightarrow{\text{Thm 2.3}} \exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow p(x_0) = 0 \,. \quad \square$$

Beweis des ZWS. Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0 < f(b)$.
Wir benutzen die Intervallschachtelung [1] 3.34 um mittels Intervallhalbierung eine Nullstelle x_0 „zu fangen":

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von abg. Intervallen $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit den Eigenschaften

(a) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$ — Schachtelung d. Intervalle

(b) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ — Intervalllänge in jedem Schritt halbiert

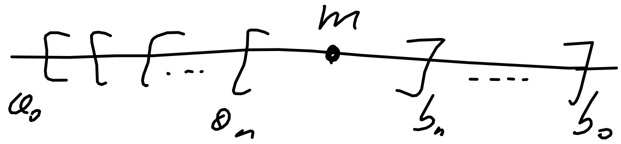
(c) $f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$ — „Fangen" der NST

Induktionsanfang: $n=0$: setze $a_0 = a$, $b_0 = b$, dann sind (a)–(c) offensichtlich erfüllt

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$: Angenommen wir haben $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$ bereits konstruiert, sodass (a)–(c) gelten. Wir müssen a_{n+1}, b_{n+1} finden, sodass (a)–(c) auch für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gelten.

Wir setzen $m = \frac{b_n - a_n}{2}$ ← Intervallhalbierung

und machen eine Fallunterscheidung:



Ist $f(m) \geq 0$ dann setze $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$ — NST links von m

Ist $f(m) < 0$ dann setze $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$ — NST rechts von m

Offensichtlich gelten (a)-(c) für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip [1] 3.34 impliziert

$$\exists!\, x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n] \text{ und } x_0 \in [a,b] \text{ mit } \lim a_n = x_0 = \lim b_n$$

(3) Weil f stetig auf $[a,b]$ ist gilt mit 1.12

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(b_n).$$

(4) Aus der Eigenschaft (c) in (1) folgt mit [1] 2.28

$$f(x_0) = \lim f(a_n) \leq 0 \leq \lim f(b_n) = f(x_0)$$

[1] 2.28

Damit also $f(x_0) = 0$ und wir haben eine NST gefunden $\square$

2.5 KOR (Zwischenwertsatz)

Manchmal wird 2.4 als Nullstellensatz bezeichnet und nur 2.5 als ZWS

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und liegt $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ [d.h. $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$].

Dann $\exists\, x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$

Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen

(Um c verschobener Graph)

Beweis. Wende 2.3 auf $g(x) := f(x) - c$ an. [Genauer: OBdA gelte $f(a) < c < f(b)$ [falls auch nur einmal $\leq$ statt $<$ ist nichts zu zeigen denn $x_0 = a$ oder $x_0 = b$; falls $>$ statt $<$ gilt verläuft der Beweis völlig analog.]
Setze $g(x) = f(x) - c$, dann ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(a) < 0 < g(b) \xRightarrow{2.3} \exists x_0 \in [a,b] : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$]. □

2.6 Kor (Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (nichtleeres, möglicherweise unbeschränktes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall oder enthält nur einen Punkt

Beweis. (1) Sei $A := \inf(f(I))$, $B := \sup(f(I))$, wobei $A = -\infty$, falls $f(I)$ nicht n.u.b und $B = \infty$, falls $f(I)$ nicht n.o.b.
Falls $A = B$ enthält $f(I)$ nur einen Punkt und wir sind fertig. Sei also $A < B$

(2) $\underline{(A,B) \subseteq f(I)}$, denn sei $y \in (A,B)$ dann $\exists r, s \in I$ mit $f(r) < y < f(s)$ [A, B sind inf, sup]
OBdA können wir annehmen, dass $r < s$ [$r = s$ ist nicht möglich und $r > s$ ist analog zu behandeln]
$\xRightarrow{2.5} \exists x_0 \in [r,s] \subseteq I$ mit $f(x_0) = y \Rightarrow y \in f(I)$

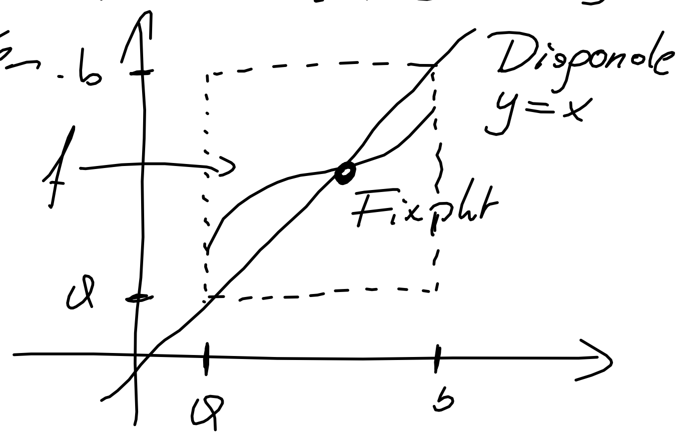
(3) Also gilt $(A,B) \subseteq f(I) \subseteq [A,B]$ (bzw $(-\infty,B]$ oder $[A,\infty)$)
Daher ist $f(I)$ eines der Intervalle
(A,B), $[A,B)$, $(A,B]$, $[A,B]$ (bzw $(-\infty,B)$, $(-\infty,B]$ oder (A,∞), $[A,\infty)$). □

2.7 KOR (Fixpunktsatz) Sei $f:[a,b]\to[a,b]$ eine stetige Fkt. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. $\exists x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=x_0$

2.8 BEM (zum Fixpktsatz)

NICHT VORGETRAGEN

(i) Die Aussage von 2.7. kann am Quadrat $[a,b]\times[a,b]$ in $\mathbb{R}^2$ veranschaulicht werden. Der Graph von f beginnt bei $x=a$ also an der linken Kante des Quadrats und endet bei $x=b$ an der rechten Kante; daher muß er die Diagonale schneiden & dort gilt dann $f(x_0)=x_0$.



(ii) Wozu das Ganze? Fixpunktsätze dienen ganz allgemein dazu Lösungen von Gleichungen zu finden (im Sinne von: die Existenz einer Lsg zu beweisen vor allem in dem Fall, dass man die Gleichung nicht explizit lösen kann!) — Und das ist einer der roten Fäden der Analysis: Existenzmaschinen)

findeNST

In diesem Sinne ist schon Thm 2.3 die Existenzmaschine und die Korollare 2.6, 2.7 Varianten davon.

[Wenig überraschend spielt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wiedereinmal die zentrale Rolle vgl. 2.2.]

Inwiefern ist nun insbesondere 2.7 nützlich?
Oft kann man das Lösen einer Gleichung z.B. $p(x)=a$

gewinnbringend in ein Fixpunktproblem verwandeln, etwa $f(x) = g(x) - a + x$; Dann gilt nämlich für einen Fixpkt x_0 von f $g(x_0) = f(x_0) - x_0 + a = a$.

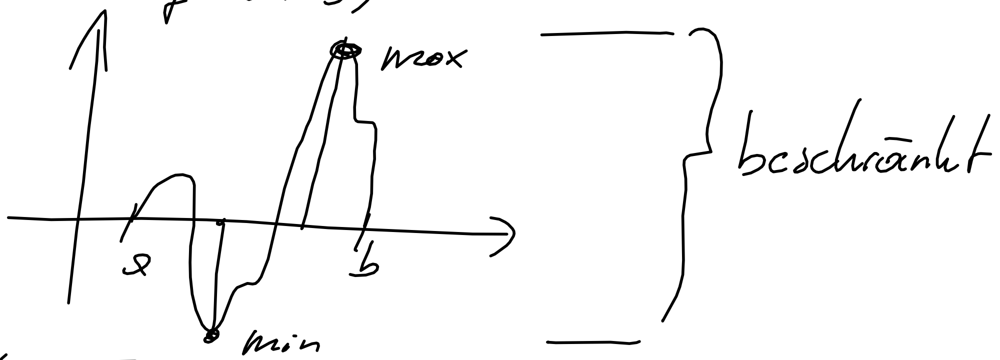
(iii) Die Tatsache, dass 2.7 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.3 ist sieht man auch daran, dass ein Kippen der Skizze in (i) um 90° genau die Skizze in 2.2 liefert.

Beweis (Fixpktsatz). Wende 2.3 auf die Fkt $g(x) = f(x) - x$ an. [UE] $\square$

2.9. MOTIVATION (Annahme von Max & Min)

Der ZwS lehrt uns, dass eine stetige Fkt auf dem kp Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt also der Graph von f keine Lücken lässt.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph auch nicht beliebig große oder kleine Werte beinhalten kann und außerdem $f([a,b])$ ein Max und ein Min hat, also:



Zunächst etwas Terminologie

2.10 DEF (Beschränkte Fkt) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Falls das Bild $f(D)$ von f beschränkt ist, d.h.

$$\exists M > 0 \ \forall x \in D \ |f(x)| \le M,$$

dann heißt f beschränkt.

2.11 THM (Stetige Fkt nehmen auf kp Intervallen Max & Min an.)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h.

$$\exists x_1\in[a,b]\quad f(x_1)=\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min f[a,b] \qquad = \inf f[a,b]$$

$$\exists x_2\in[a,b]\quad f(x_2)=\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max f[a,b] \qquad = \sup f[a,b]$$

natürlich auch

2.12 WARNUNG ($[a,b]$ beschr & abg!)

NICHT VORGETRAGEN

(i) Es ist essentiell, dass das Intervall in 2.11 auf dem stetig ist abg und beschränkt ist. Sonst muß f nicht beschränkt sein...

$f_1:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$

Intervall nicht abg, f nicht n.o.b.

$f_2:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$

Intervall unbeschränkt, f nicht n.o.b.

und auch weder Min noch Max annehmen:

$f_3:(0,1)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ ist zwar beschränkt hat aber weder Max noch Min

(ii) x_1, x_2 oben müssen keinesfalls eindeutig sein, z.B. wenn f konstant ist.

Beweis. Wir beweisen nur, dass f nach oben beschränkt ist ($\exists M: f(x)\le M\ \forall x$) und das Max angenommen wird. Der Beweis für n.u.b und Min ist analog (bzw kann durch Übergang zu $-f$ gezeigt werden)

(1) Sei $A := \sup f[a,b]$ (Es gilt $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

$\Longrightarrow \exists$ Folge (a_n) in $[a,b]$ mit $f(a_n) \to A$ $(n \to \infty)$

[Def sup]

(2) $a_n \in [a,b] \Rightarrow a_n$ beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}} \exists$ konvergente TF $(a_{n_k})_k$

Setze $x_2 := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ [1] 2.28

Wegen $a \le a_{n_k} \le b \Rightarrow a \le \lim a_{n_k} = x_2 \le b$

also $x_2 \in [a,b]$

(3) f stetig $\Longrightarrow$

$$f(x_2) = f(\lim_{k\to\infty} a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[a,b]$$

Also ist f durch $f(x_2) = \sup f[a,b]$ n.o.b und das Sup wird in x_2 angenommen, also ist $f(x_2) = \max f[a,b]$.

$\square$

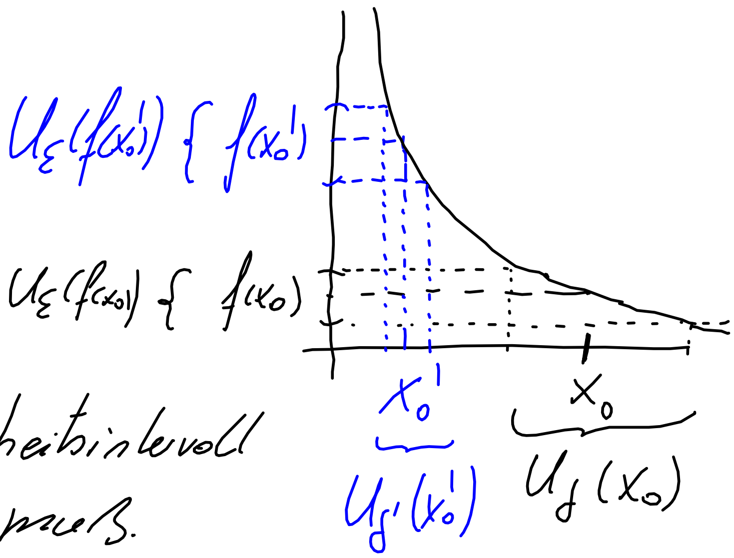
2.13 <u>MOTIVIERENDES BSP</u> (Die Abhängigkeit δ's von x_0)

Ist eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ auf ganz D stetig so gilt nach (1.1)

$$\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Das bedeutet, dass δ i.a. nicht nur (und klarerweise vgl. 1.7(ii)) von ε abhängt, sondern auch <u>von x</u>. Diese Abhängigkeit wollen wir nun in einem Bsp explizit machen.

Sei dazu $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1/x$



Nun fixieren wir $\varepsilon > 0$.
Dann ist anschaulich klar, dass für ein x_0 näher bei 0 das entsprechende Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ kleiner gewählt werden muß.

[Rechnerisch: Wir brauchen nur jeweil $x < x_0$ zu betrachten, da dort der Anstieg steiler und δ potentiell kleiner wird. Setze also $x_\delta = x_0 - \delta$ und betrachte

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{x_0} = \frac{x - x_\delta}{x_\delta x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)}$$

Soll nun $|f(x_\delta) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x_0 - x| < \delta$ sein, so muß gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)} < \varepsilon \iff \varepsilon x_0 - \varepsilon x_0 \delta > \delta$$
$$\iff \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$$

Also $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$ und das bedeutet, dass bei kleinerem x_0 auch δ kleiner werden muß.]

Wenn wir nun für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ fordern, dass δ unabhängig vom Pkt $x_0 \in D$ sein soll so erhalten wir eine stärkere Stetigkeitseigenschaft: Für je 2 Pkte $x, x' \in D$ soll wenn sie nur δ-nahe beieinander liegen (d.h. $|x - x'| < \delta$) — und zwar <u>egal wo die beiden liegen</u> — schon die Abschätzung $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gelten. <u>Offiziell:</u>

2.14 DEF (Gleichmäßige Stetigkeit) Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Achtung: wieder einmal Reihenfolge der Quantoren

2.15 BEM (Stetigkeit vs. glm Stetigkeit)

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für $f: D \to \mathbb{R}$

$$f \text{ glm. stetig} \Longrightarrow f \text{ stetig auf } D$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.13 zeigt, also

$$f \text{ glm stetig} \not\Longleftarrow f \text{ stetig in } D$$

[Ganz explizit: $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Falls $x_n = \frac{1}{n}$ und $x_n' = 1/2n$ $(n \geq 1)$ dann gilt

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{aber}$$

der Abstand der Pkte x_n, x_n' geht gegen 0 wenn die Pkte nach links rutschen

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 2n - n = n$$

ist unbeschränkt und daher sicher nicht unterhalb einer fixen ε-Toleranz.]

(iii) Essentiell am Gegenbsp ist, dass $D = (0,1]$ also bei 0 offenes Intervall ist. [Für jedes Intervall der Form $[\eta, 1]$ mit $0 < \eta < 1$ kann obiger Effekt nicht auftreten, denn $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$ könnten nie kleiner als η werden. Und tatsächlich sind auf abg. & beschr. Intervallen beide Begriffe äquivalent, wie das nächste Thm lehrt.]

ETA

noch links ausweichen ist unmöglich

2.16 THM (Glm Stetigkeit auf kp Intervallen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch glm. stetig (auf $[a,b]$).

Beweis. (1) Indir. ang. f ist nicht glm. stetig

$$\Longrightarrow \neg \left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \underset{|x-x'|<\delta}{x, x' \in [a,b]} \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \right)$$

$$= \exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists \underset{|x-x'|<\delta}{x, x' \in [a,b]} \quad \text{und } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

(2) Wir fixieren dieses ε und konstruieren Folgen (x_n), (x_n') indem wir sukzessive $\delta = 1/n$ $(n \geq 1)$ setzen. [vgl. Beweis 1.12 „$\Leftarrow$"] So erhalten wir

(*) $(x_n), (x_n')$ in $[a,b]$ mit $|x_n - x_n'| < 1/n$ aber $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$

(3) (x_n) ist beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstr.}}{\Longrightarrow}} \exists$ konvergente TF $(x_{n_k})_k$

Setze $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$

n_k sind die Indizes der TF $(x_{n_k})_k$ von x_n

(4) Die TF $(x'_{n_k})_k$ von (x_n') konvergiert auch gegen x_0, denn

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| \overset{(*)}{\leq} 1/n_k \longrightarrow 0$$

(5) Die Stetigkeit von f in x_0 liefert einen Widerspruch:

$$0 < \varepsilon \overset{(*)}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \longrightarrow 0 \quad \lightning$$

(4) + 1.12

$\square$

2.17 MOTIVATION (Stetige inverse Fkt) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f: A \to B$ bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: B \to A$, $f(x) \mapsto x$ [ETA, 4.3.29].

Die analoge Situation in Lineare Algebra funktioniert: $f: V \to W$ linear & bij $\Rightarrow$ $f^{-1}: W \to V$ linear

Falls f stetig ist, folgt dann auch f^{-1} stetig?
Im allgemeinen NEIN! Für ein Gegenbsp. siehe [UE]

Durch zwei zusätzliche Annahmen an f können wir aber ein $\boxed{\text{JA}}$ erreichen, nämlich

(1) f streng monoton [d.h $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$]
wachsend   fallend
Bemerke: str. monoton $\Rightarrow$ injektiv

(2) A ist ein Intervall

2.18 Thm (Umkehrsatz f str-mon & stetige Fkt)

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig & streng mon. wachsend [fallend]
Dann gilt (i) $J := f(I)$ ist ein Intervall
(ii) $f: I \to J$ ist bijektiv
(iii) $f^{-1}: J \to I$ ist stetig & streng mon wachsend [fallend]

2.19 BEM (zur Notation) Ganz streng genommen müssten wir für die Abb f mit eingeschränktem Zielbereich $f(I)$ eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B

$$\tilde{f}: I \to J := f(I)$$
$$x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müssten wir dann $\tilde{f}^{-1}$ schreiben.
Gemäß einem allg. üblichen Mißbrauch der Notation schreiben wir aber wiederum f und f^{-1} [vgl ETA, 2.Aufl. gr. Box? -]

NICHT VORGETRAGEN

Beweis von 2.18. Wir beweisen nur den Fall „streng monoton wachsend". Der fallende Fall ergibt sich, wenn man f durch $-f$ ersetzt.

Jede Abb ist surj. auf ihr Bild

(i) Kor 2.6 $\Longrightarrow$ $f(I) =: J$ ist ein Intervall
[der Fall einpunktig ist wegen der str. Monotonie unmöglich]

(ii) f str. mon wachsend $\Rightarrow$ f injektiv und daher $f: I \to J$ bijektiv

(iii) $f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$ [$=$ widerspricht Injektivität, $x > y$ der Mon.]
$\Longrightarrow$ f^{-1} streng mon wachsend

| Bleibt zz f^{-1} stetig

Fall 1: b ist kein Randpunkt von J

Sei $a := f^{-1}(b) \Longrightarrow a$ ist kein Randpunkt von I
[sonst wäre wegen der str. Monotonie b ein Randpkt von J]

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ sodass $a-\varepsilon, a+\varepsilon \in I$

$f \overset{\text{str.}}{\underset{\text{mon}}{\Longrightarrow}} f(a-\varepsilon) < f(a) = b < f(a+\varepsilon)$

Also $\exists \delta > 0$ mit $f(a-\varepsilon) < b-\delta < b+\delta < f(a+\varepsilon)$.

Das bedeutet aber $f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b))$

und damit ist f^{-1} stetig in b [vgl 1.7(i)]

Fall 2: b ist linker Randpkt von $J \overset{\text{Mon}}{\Longrightarrow} a = f^{-1}(b)$ ist linker Randpkt von I und wir können den Beweis wie in Fall 1 führen aber mit „einseitigen Umgebungen" $U_\delta(b) \cap J$, $U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$ und $f(a) = b < b+\delta < f(a+\varepsilon)$

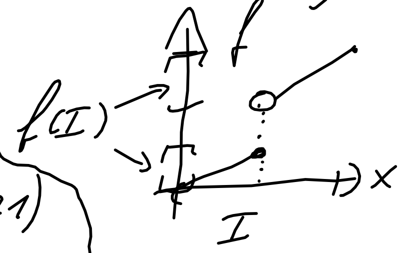
Fall 3 b ist rechter Randpkt von J: völlig analog zu Fall 2 $\square$

2.20 BEM (Umkehrsatz f. str. mon Fkt)

Im Beweis von 2.18 haben wir die Stetigkeit von f nur in (ii) verwendet. Daher gilt folgende Variante des Thms:

> I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton (nicht notwendigerweise stetig)
> $\Longrightarrow f^{-1}(I) \to I$ stetig & str. mon

Falls f unstetig ist, dann ist i.a. $f(I)$ aber kein Intervall, z.B.



2.21 BSP (Stetigkeit der Wurzel)

Als Anwendung von Thm 2.18 betrachten wir $(k \geq 1)$

$$f_{2k}: [0,\infty) \to [0,\infty), \quad x \mapsto x^{2k} \qquad\qquad f_{2k+1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{2k+1}$$

Beide Fkt sind auf einem Intervall definiert [$\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$] stetig [1.18] streng mon. wachsend und bijektiv [auf $[0,\infty)$ bzw $\mathbb{R}$]

$$\overset{2.18}{\Longrightarrow} \quad f_{2k}^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty) \qquad f_{2k+1}^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

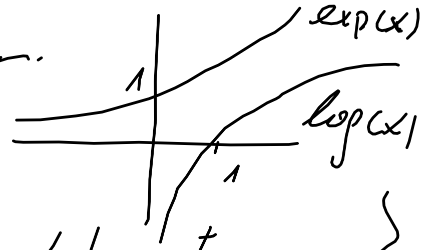
sind stetig & streng mon wachsend

Klarerweise sind f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1} gerade die Wurzelfunktionen $\sqrt[2k]{}$ bzw $\sqrt[2k+1]{}$ [vgl. $\boxed{O}$ 1.11(iii)].

§3 ELEMENTARE TRANSZENDENTE FUNKTIONEN

3.1 EINLEITUNG. In diesem § definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir allgemeine Potenzen x^α $(0<x, \alpha\in\mathbb{R})$ definieren.

Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$ – gerade soweit, dass wir die komplexe Exponentialfunktion $[\exp(z), z\in\mathbb{C}]$ analog zu $\mathbb{R}$ über die Reihendarstellung definieren können. Diese verwenden wir, um die Winkelfunktionen Sinus & Cosinus zu definieren. Deren Grundeigenschaften studieren wir gründlich, um schließlich die Tangensfunktion und die Arcus-Funktionen betrachten zu können.



3.2 PROP & DEF (Logarithmus)

(i) Die Exponentialfkt $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und $\exp(\mathbb{R})=(0,\infty)$.

(ii) Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit
$$\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$$
und nennen sie den (natürlichen) Logarithmus. log ist stetig und streng mon. wachsend.

d.h. $\exp(x)=a \iff x=\log(a)$

(iii) Die Logarithmusfkt erfüllt die folgende Funktionalgleichung $(x,y\in(0,\infty))$
$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

Beweis. (i) exp ist stetig nach 1.8(iii). Wir zeigen die Monotonie.
Sei $\xi > 0$, dann gilt

[xi]
$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 1 + \xi. \qquad (*)$$

Sei nun $x_1 < x_2$ und setze $\xi = x_2 - x_1 > 0$, dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \overset{[1]\,(4.2)}{=} \exp(x_1)\exp(\xi) \overset{(*)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist exp streng mon wachsend.
Wir zeigen $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$:

[1] 4.40(i) $\Rightarrow \exp(x) > 0 \;\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$.
Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es z. z.

$n \in \mathbb{N}$ $$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0, \qquad (**)$$

denn dann werden wegen des ZWS 2.3 alle Werte in $(0,\infty)$ angenommen. [genauer sei $y \in (0,\infty) \overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-n) < y < \exp(n) \overset{ZWS}{\Longrightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$]

Die Grenzwerte in (**) sind aber leicht zu kriegen:
$n \in \mathbb{N} \overset{[1]\,4.40(iii)}{\Longrightarrow} \exp(n) = e^n$

[1] 4.43 $\Rightarrow e > 2 > 1 \overset{[1]\,1.5(i)}{\Longrightarrow} e^n \rightarrow \infty \;(n \to \infty)$

und schließlich

$$\exp(-n) \overset{[1]\,4.40(ii)}{=} \frac{1}{\exp(n)} \overset{[1]\,4.40(iii)}{=} \frac{1}{e^n} \overset{[1]\,2.47(i)}{\longrightarrow} 0 \quad (n \to \infty)$$

(ii) Mit (i) besagt nun 2.18:

$\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist bijektiv und $\exp^{-1}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig & str. mon. wachsend

(iii) [Die Funktionalgl. für log folgt aus der für exp. [etc]]

Seien $x,y \in (0,\infty)$; setze $\xi := \log x$, $\eta := \log(y)$

$$\overset{[1]\,4.39}{\Longrightarrow} \exp(\xi+\eta) = \exp(\xi)\cdot\exp(\eta) \overset{(ii)}{=} x\cdot y$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\log(xy)} \overset{(i)}{=} \xi+\eta = \underline{\log(x)+\log(y)}. \qquad \square$$

3.3 BEM (Potenzen des Logarithmus)

Als unmittelbare Konsequenz von 3.2(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k\log(x) \qquad (0<x\in\mathbb{R},\, k\in\mathbb{N}).$$

3.4 MOTIVATION (allg. Potenzen)

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalem Exponenten definiert, d.h. x^q für $\mathbb{R}\ni x>0$, $q\in\mathbb{Q}$.
Genauer haben wir folgende Definitionen

- $x^n := x\cdot\ldots\cdot x \qquad (n\in\mathbb{N})$
- $x^{-n} := 1/x^n \qquad (n\in\mathbb{N})$
- $x^{1/n} := \sqrt[n]{x} \qquad (n\in\mathbb{N})$ [vgl. [0] 1.11(iii)]

und damit für $\mathbb{Q}\ni q = m/n$

$$\boxed{x^q := \sqrt[n]{x^m}}$$

Wir werden nun die allg. Potenz, also x^α $(x>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$ definieren also x^q $(q\in\mathbb{Q})$ zu x^α $(\alpha\in\mathbb{R})$ verallgemeinern.
Als Leitfaden benutzen wir folgende Eigenschaft von x^n

$$x^n = \exp(\log(x^n)) \overset{3.3}{=} \exp(n\log(x)).$$

3.5 DEF (Allg. Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfkt)

(i) Sei $x>0$ und $\alpha\in\mathbb{R}$. Wir definieren die allg Potenz als

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$$

(ii) Für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ definieren wir die allg Potenzfunktion

$$\omega_\alpha : (0,\infty)\to\mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha \ (= \exp(\alpha\log(x)))$$

(iii) Die Exponentialfkt mit Basis $a\in(0,\infty)$ definieren wir als

$$\exp_a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x \ (= \exp(x\log(a)))$$

3.6 BEM (zur allg Potenz- & Exp-Fkt)

(i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 3.5(i) ist $(x>0, \alpha\in\mathbb{R})$

$$\boxed{\log(x^\alpha) = \alpha\log(x)} \qquad [\log(x^\alpha) = \cancel{\log\circ\exp}(\alpha\log x)]$$

also eine Verallgemeinerung von 3.3 von $k\in\mathbb{N}$ zu $\alpha\in\mathbb{R}$.

(ii) Bemerke, dass $\boxed{\exp(x) = \exp_e(x) = e^x}$ $(x\in\mathbb{R})$ gilt, denn

$$e \overset{[1]\,4.37}{:=} \exp(1) \overset{3.2(iii)}{\Longrightarrow} \log(e)=1 \Rightarrow e^x = \exp(x\log e) = \exp(x).$$

(iii) Als nächstes fassen wir die Grundeigenschaften von allg. Potenz- & Exp-Fkt in einer Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den jeweiligen Definitionen [siehe tw auch [UE]]

Ab jetzt können wir e^x statt $\exp(x)$ schreiben

3.7 Prop (Die allg. Exp-Fkt) Sei $\mathbb{R} \ni a > 0$.

Die allg Exp-Fkt $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (auf ganz $\mathbb{R}$) und es gilt:

(i) Falls $a > 1$, dann ist $\exp_a$ str. mon wachsend.
Falls $a < 1$, dann ist $\exp_a$ str. mon fallend

(ii) Es gilt die Funktionalgl. $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}$

Konsistent mit ganzzahligen Potenzen

mit rationalen Potenzen

(iv) Für $p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \ni q \geq 1$ gilt $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{1/q}$.

(v) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\left(a^x\right)^y = a^{xy} = \left(a^y\right)^x$.

(vi) Für alle $b > 0, x \in \mathbb{R}$ gilt $a^x b^x = (ab)^x$

(vii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

3.8 Bsp (Nützliche Grenzwerte)

exp wächst stärker als jede Potenz

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty}$

OBdA $x > 0$, dann gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \ (x \to \infty)$

Und daraus folgt sofort [1] Prop 2.47(i)]

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0}$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^k e^{1/x} = \infty,}$

denn setze $y = 1/x$,

dann gilt $\lim_{x \searrow 0} x^k e^{1/x} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y^k} \overset{(i)}{=} \infty$

(iv) $\boxed{\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty,}$

denn wegen Prop 3.7(ii) ist $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv und str. mon wachsend.

(v) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \text{ und } \lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty}$

Wieder wegen [1] Prop. 2.47 folgt die 2. Aussage aus der 1. Um diese zu beweisen schreiben wir $x = e^{-y/\alpha}$ (d.h. $y = -\alpha \log(x)$) und rechnen

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = \lim_{y \to \infty} e^{-y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} \underset{[1]\, 2.47}{=} 0 .$$

(vi) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}}$

log wächst schwächer als jede Potenz

OBdA $x > 0$ und mit $x^\alpha = e^y$ (d.h. $y = \alpha \log(x)$) erhalten wir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^y} \overset{(ii)}{=} 0$$

x^α geht stärker gegen 0 als log gegen $-\infty$

(vii) Für $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0,}$

$0 = \log(1) = \log(x \tfrac{1}{x})$
$= \log(x) + \log(1/x)$
$\Rightarrow \log(x) = -\log(1/x)$

denn setze $x = 1/y$ dann gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \to \infty} -\frac{\log(y)}{y^\alpha} \overset{(vi)}{=} 0$$

(viii) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus [1] Prop. 4.42 für $N=1$:

$$|e^x - 1 - x| = |R_2(x)| \leq 2\frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{für } 0<|x|<3/2$$

und daher $\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| = \frac{|e^x-1-x|}{|x|} \leq |x| \longrightarrow 0 \quad (x\to 0)$.

3.9 Motivation (Die komplexe Exp-Fkt – Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$)

Wir wollen nun die Expfkt nicht nur $\forall x\in\mathbb{R}$ sondern sogar $\forall z\in\mathbb{C}$ definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen [vgl. [1] Bem 4.36]. Um deren (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von exp heranziehen zu können, müssen wir diese Begriffe in $\mathbb{C}$ definieren.

Eine Betrachtung der resp. Begriffe in $\mathbb{R}$ zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw die ε-Umgebungen in $\mathbb{R}$ durch ihr Analogon in $\mathbb{C}$ ersetzen müssen.

Daher stellt der folgende Exkurs über die Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$ auch eine Wiederholung derselben in $\mathbb{R}$ dar – wobei wir seine Verallgemeinerungsfähigkeit schamlos ausnutzen werden.

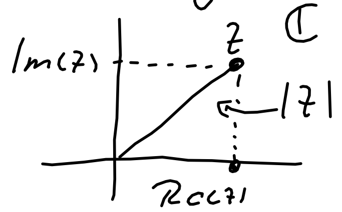
3.10 EXKURS: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$

(A) Wiederholung ($\mathbb{C}$) [vgl [O] 1.4]

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ und wir verwenden die Schreibweisen

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y), \quad z = x + iy = Re(z) + i\,Im(z)$$

Die komplex Konjugierte $\bar{z}$ ist gegeben durch $\bar{z} = x - iy$ und das Produkt $z\bar{z}$ erfüllt



$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

(B) DEF (Betrag in $\mathbb{C}$). Der (Absolut-) Betrag $|z|$ von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

Nach [O] 1.4(iv) identifizieren wir $x \in \mathbb{R}$ mit $x + i0 \in \mathbb{C}$ und daher ist der Betrag von x als reelle Zahl identisch mit dem Betrag von x als komplexe Zahl

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$

(C) Lemma (Grundeigenschaften des Betrags)

Die Abb $|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften ($z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

(N1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (pos definit)

(N2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (multiplikativ)

(N3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungl.)

wie in $\mathbb{R}$

Weiters gilt

(i) $|\bar{z}| = |z|$

(ii) $|Re(z)| \leq |z|$ und $|Im(z)| \leq |z|$

Beweis. Sei $z = x + iy$, $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2)$

(N1) $|z| \geq 0$ und $|0| = 0$ sind klar.

Falls $|z| = 0$, dann $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$ und

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0 = y$$

(N2) $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$

(i) klar per Def.

(ii) $|Re(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2$ und ebenso für $Im(z)$

(N3) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + \underbrace{z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2}_{2Re(z_1 \overline{z_2})} + z_2 \overline{z_2}$

$= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2$

$\overset{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

$\square$

(D) DEF (Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$)

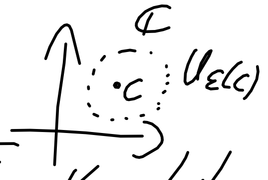
(i) Eine komplexe Folge bzw. eine Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Abb $c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Analog zum reellen Fall schreiben wir $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Folge und $c_n = c(n)$

(ii) Eine Folge (c_n) konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$, $c_n \to c$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

bzw äquivalent dazu mit der ε-Umgebung von $c \in \mathbb{C}$ definiert als

$$U_\varepsilon(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon \}$$



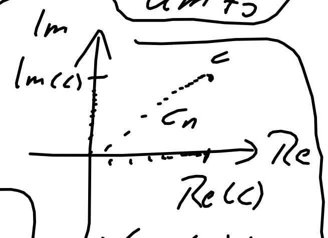
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad c_n \in U_\varepsilon(c)$$

offene Kreisscheibe mit Radius ε um z_0

(E) PROP (Konvergenz in $\mathbb{C}$ ist Konvergenz von Re & Im)

Für eine Folge (c_n) in $\mathbb{C}$ gilt

$$c_n \to c \text{ in } \mathbb{C} \iff \begin{array}{l} Re(c_n) \to Re(c) \\ Im(c_n) \to Im(c) \end{array} \text{ in } \mathbb{R}$$



Nichts Neues nur doppelt soviel Arbeit!

Beweis: Wir setzen $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$ und $a = \mathrm{Re}(c)$, $b = \mathrm{Im}(c)$

„$\Longrightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \overset{D(iii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |c_n - c| < \varepsilon$

und daher $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| = |\mathrm{Re}(c_n - c)| \overset{C(iii)}{\leq} |c_n - c| < \varepsilon$$

$$|b_n - b| = |\mathrm{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon,$$

also $a_n \to a$, $b_n \to b$

„$\Longleftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon/2$, $|b_n - b| < \varepsilon/2$

und daher $\forall n \geq N$

$$|c_n - c| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

also $c_n \to c$ $\square$

(F) KOR (Limes und Komplexkonjugation)

$$\boxed{c_n \to c \Longrightarrow \overline{c_n} \to \overline{c}}$$

Beweis: $\overline{\lim c_n} = \overline{\lim(\mathrm{Re}(c_n) + i\,\mathrm{Im}(c_n))} \overset{(E)}{=} \lim \mathrm{Re}(c_n) - i \lim \mathrm{Im}(c_n)$

$= \lim \mathrm{Re}(\overline{c_n}) + i \lim \mathrm{Im}(\overline{c_n}) = \lim \overline{c_n}$ $\square$

(G) KOR (Grenzwertsätze) Seien (c_n), (d_n) konvergente komplexe Folgen und sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt

(i) $\lim(c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$

(ii) $\lim(\lambda c_n) = \lambda \lim c_n$

(iii) $\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$

(iv) $\lim c_n/d_n = (\lim c_n)/(\lim d_n)$ falls $d_n \not\to 0$

Beweis: Aufspalten in Re & Im und reelle Grenzwertsätze [1] Satz 2.23, Satz 2.26 [Üc] $\square$

(H) THM (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$) Sei (c_n) Folge in $\mathbb{C}$, dann gilt

(c_n) konvergiert $\Longleftrightarrow$ (c_n) ist Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq N\ |c_n-c_m|<\varepsilon$$

Beweis: (c_n) konv. $\overset{(E)}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathrm{Re}(c_n))$ & $(\mathrm{Im}(c_n))$ konv in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{CP für } \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathrm{Re}(c_n))$ & $(\mathrm{Im}(c_n))$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ (c_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

Wie im Beweis von (E): „$\Rightarrow$" mit $\varepsilon/2$, „$\Leftarrow$" mit C(ii) $\square$

(I) DEF (Konvergenz komplexer Reihen) Sei (c_n) Folge in $\mathbb{C}$.
Die komplexe Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_n$ heißt

(i) konvergent, falls die Folge der Partialsummen

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} c_k \qquad (\text{in } \mathbb{C}) \text{ konvergiert.}$$

(ii) absolut konvergent, falls die reelle (!) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \text{ konvergiert.}$$

(J) PROP (Konvergenztests & Cauchy-Prod. f. komplexe Reihen)
(i) (Majorantenkriterium) Sei (a_n) eine Folge mit $a_n>0\ \forall n$ (daher $a_n\in\mathbb{R}$!) und sei $\sum a_n$ konvergent.
Ist (c_n) eine komplexe Folge und

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\ |c_n|\leq a_n,$$

dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent.

(ii) Der Wurzeltest und der Quotiententest gelten wortwörtlich wie für reelle Reihen. Insbesondere sei (c_n) komplexe Folge mit $c_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\exists \Theta \in [0,1) \text{ mit } \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \Theta,$$

Theta

dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent.

(iii) Die Proposition zum Cauchy-Produkt f. Reihen [[1] Prop 4.35] gilt wortwörtlich für komplexe Reihen.

Beweis. Inspektion der Beweise im Reellen zeigt, dass sie wortwörtlich gültig bleiben. ⌋

(K) DEF (Stetigkeit in $\mathbb{C}$) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ und sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine Funktion

(i) f heißt stetig in z_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

(ii) f heißt stetig auf D, falls f stetig in jedem $z_0 \in D$ ist.

(L) Bem (zur Stetigkeit)

(i) Die Bedingung in K(i) kann umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0))$$

(ii) (Stetigkeit ist Folgenstetigkeit) Wie in $\mathbb{R}$ kann die Stetigkeit in $\mathbb{C}$ via Folgen charakterisiert werden (selbe Beweis)

f stetig in $z_0 \in D$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ Folgen (z_n) in D mit $z_n \to z_0$ gilt $\lim f(z_n) = f(z_0) \; (= f(\lim z_n))$

3.11. BEM: (komplexe Exponentialreihe) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent, denn

für $z=0$ ist die Aussage trivial und für $z \neq 0$ verwenden wir den Quotiententest 3.10(J)(ii): für alle n mit $n > 2|z|$ gilt

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Analog zum reellen Fall definieren wir

3.12 DEF (komplexe Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

3.13 BEM (komplexe und reelle Exp-fkt)
Wenn wir exp aus 3.12 auf $\mathbb{R}$ einschränken, so erhalten wir klarerweise exp aus [1] Def 4.32, daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden; wir haben tatsächlich exp von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ausgedehnt

$$\left[\exp(x+i0) = \sum \frac{(x+i0)^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!}\right]$$

3.14 THM (Eigenschaften von exp) Die Exponentialfkt erfüllt

(i) (Funktionalgleichung) $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(ii) (Fehlerabschätzung)
Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z) \text{ mit } |R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

für $|z| \leq 1 + N/2$

(iii) $\exp(\bar z) = \overline{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(iv) $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(v) $$\lim_{z \neq 0,\, z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

(vi) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig (in jedem $z \in \mathbb{C}$)

Beweis (i), (ii) Wortwörtlich wie in $\mathbb{R}$ [1] Thm 4.38, [1] Prop. 4.42

(iii) folgt aus 3.10(F): Setze $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$, dann gilt

$$\exp(\bar z) = \lim s_n(\bar z) \overset{\text{endl.}\,\Sigma}{=} \lim \overline{s_n(z)} \overset{3.10(F)}{=} \overline{\lim s_n(z)} = \overline{\exp(z)}$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0$$

(v) Wegen (ii) mit $N=1$ gilt $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \le 2\frac{|z|^2}{2} = |z|^2 \ \forall |z| \le \frac{3}{2}$

und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \le |z| \to 0 \quad (z \to 0)$$

genau wie in 3.8(viii)

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit $N=0$, denn $\forall |z| \le 1$

$|e^z - 1| = |R_1(z)| \le 2|z| \to 0 \quad (z \to 0)$ und daher

$\lim_{z \to 0} e^z = 1 = e^0$ und mit 3.10(L)(ii) ist exp stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei $w \in \mathbb{C}$ folgt nun mittels Funktionalgleichung:

Sei (z_n) Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to w$, dann $z_n - w \to 0$ und

$$1 = \exp(0) \underbrace{=}_{\text{exp stetig bei } 0} \lim_{n \to \infty} \exp(z_n - w) \underset{(i)}{=} \left(\lim_{n \to \infty} \exp(z_n)\right) \exp(-w),$$

genau wie in 1.8(iii) nur anders herum aufgezogen

also (nochmals mit (i)) $\lim_{n \to \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$. $\square$

3.15 MOTIVATION (Winkelfunktionen) Jetzt (endlich!) sind wir in der Lage die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exp-Fkt zu definieren. Sinus & Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht gerade unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den eindeutigen Vorteil innerhalb unseres deduktiven Vorgehens konsistent zu sein und keine undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

kommt später basierend auf dem Integralbegriff

Wir werden aber nach der Def den Anschluss an unsere Intuition suchen!

3.16 DEF (Sinus & Cosinus) Wir definieren Cosinus & Sinus durch

$$\left\{\begin{array}{l} \cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \cos(x)=\mathrm{Re}(\exp(ix))=\mathrm{Re}(e^{ix}) \\ \sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \sin(x)=\mathrm{Im}(\exp(ix))=\mathrm{Im}(e^{ix}) \end{array}\right\}$$

3.17 BEM (Grundeigenschaften von sin & cos)

(i) Wegen $e^{ix}=\mathrm{Re}(e^{ix})+i\,\mathrm{Im}(e^{ix})$ erhalten wir die Eulersche Formel

$$\cos(x)+i\sin(x)=e^{ix}$$

Außerdem sind sin & cos stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da $x_n\to x$ in $\mathbb{R}$ $\overset{3.14(vi)}{\Longrightarrow} e^{ix_n}\to e^{ix} \overset{3.10(c)(ii)}{\Longrightarrow} \mathrm{Re}(e^{ix_n})\to\mathrm{Re}(e^{ix})$ und genauso für Im.

(ii) Geometrische Interpretation. Für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt

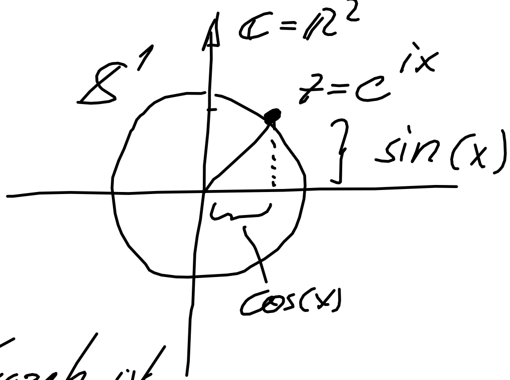
$$|e^{ix}|^2=e^{ix}\overline{e^{ix}}=e^{ix}e^{-ix}=e^0=1$$ und daher

$|e^{ix}|=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Das bedeutet aber, dass alle komplexen Zahlen der Form e^{ix} mit $x\in\mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis

$$S^1:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$$

liegen. Darüberhinaus sind $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ genau die Cartesischen Koordinaten von $z = e^{ix}$; insbesondere ergibt sich

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$



(iii) Cosinus ist gerade, Sinus ungerade

[d.h. $\cos(x) = \cos(-x)$, also der Graph ist symmetrisch bzgl der y-Achse und $\sin(-x) = -\sin(x)$ also der Graph ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.]

Tatsächlich gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
Daher folgt aus der Def des Winkelfunktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \quad \sin(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

und damit

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iv) Es gelten die Additionstheoreme: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Tatsächlich ergeben sich die ersten beiden Formeln als Real- bzw Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Die 3. bzw 4. Gleichung ergibt sich aus der 1. bzw 2. Gleichung mittels der Substitution $u = \frac{1}{2}(x+y), v = \frac{1}{2}(x-y)$. □

(v) Reihendarstellung für sin & cos

Die natürlichen Potenzen von i folgen einem einfachen Muster: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ und somit

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \ (\Leftrightarrow n \equiv 0 \bmod (4)) \\ i & \text{falls } n = 4m+1 \quad \text{— " —} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 1 (4)) \\ -1 & \text{falls } n = 4m+2 \quad \text{— " —} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 2 (4)) \\ -i & \text{falls } n = 4m+3 \quad (\Leftrightarrow n \equiv 3 (4)) \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) + i\sin(x) \overset{(i)}{=} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$= \left(0 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}}_{Re(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{Im(e^{ix})}$$

und daher

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

d.h.
$$\cos(x) = 0 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

(vi) Verhalten nahe $x = 0$

Für kleine x ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung x^2 oder höher

$$\cos x \approx 0 \qquad \sin x \approx x \qquad (|x| \text{ klein})$$

Tatsächlich gelten die folgenden Grenzwerte für $x \to 0$:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Denn zunächst folgt aus 3.14 (v)

$$1 = 1 + i\,0 \overset{3.14(v)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} \underset{3.10(E)}{=} \lim_{x\to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) + i \lim \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \quad (*)$$

und daher

$$\frac{\cos(x)-1}{x} \underset{\frac{1}{i}=-i}{=} -\mathrm{Im}\left(\frac{\cos(x)-1+i\sin(x)}{ix}\right) \overset{(i)}{=} -\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \xrightarrow{(*)} 0 \quad (x\to 0)$$

sowie

$$\frac{\sin(x)}{x} = \mathrm{Re}\left(\frac{\cos(x)-1+i\sin(x)}{ix}\right) \overset{(i)}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \xrightarrow{(*)} 1 \quad (x\to 0)$$

3.18 MOTIVATION (π)

Wie schon den Winkelfunktionen werden wir uns der Kreiszahl π auf etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Weg nähern. Wir werden π als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von $\cos$ auf $[0,2]$ definieren – erst später werden wir mittels des Integralbegriffs sehen, dass π der halbe Umfang des Einheitskreis ist.

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten

3.19 Lemma (Technisches zu sin & cos)

(i) $\cos(0)=1$ und $\cos(2)\leq -1/3$

(ii) $\sin(x)>0 \quad \forall\, 0<x\leq 2$

(iii) $\cos(x)$ ist streng mon. fallend auf $[0,2]$

Beweis:

(i) $\cos(0)=\mathrm{Re}(e^{i0})=1$. Um $\cos(2)$ abzuschätzen verwenden wir die Reihendarstellung aus 3.17(v):

$$\cos(2) \underset{3.17(v)}{=} 1-\frac{2^2}{2!}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

1. Term herausgeschoben

$$= -1+\frac{2^4}{4!}\underbrace{\Big(\underbrace{1-\frac{2^2}{5\cdot 6}}_{\leq 1}+\underbrace{\frac{2^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}}_{\leq \frac{2^2}{5\cdot 6}} - \dots\Big)}_{\leq 1}$$

usw

vgl. Bew Leibniz-Kriterium & Bem 4.12(ii) [nicht vorgetragen]

$$\leq -1+\frac{16}{24} = -1+\frac{2}{3} = -1/3$$

(ii) Wir verwenden wieder 3.17(v). Sei $0<x\leq 2$, dann gilt

$$\sin(x) = x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}\underbrace{\Big(\underbrace{1-\frac{x^2}{4\cdot 5}}_{\leq 1}+\underbrace{\frac{x^4}{4\cdot5\cdot6\cdot7}}_{\leq x^2/4\cdot 5}-\dots\Big)}_{\leq 1}$$

usw

$$\frac{x^3}{3!}\leq x\frac{x^2}{6}\overset{x\leq 2}{\leq} x\frac{4}{6}=\frac{2x}{3}$$

$$\geq x-\frac{x^3}{3!}\geq x-\frac{2x}{3}=x/3>0$$

(iii) Sei $\underbrace{0 \le x_1 < x_2 \le 2} \Longrightarrow 0 < \frac{x_1+x_2}{2} \le 2$ (*)

$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \le 2$ und daher

$$\underbrace{\cos(x_2) - \cos(x_1)} \overset{3.17(iv)}{=} -2 \underbrace{\sin \frac{x_2+x_1}{2}}_{\overset{(*)}{\ge} 0} \underbrace{\sin \frac{x_2-x_1}{2}}_{\overset{(*)}{\ge} 0} < 0$$

□

3.20 PROP (1. Nullstelle des Cosinus)

$$\exists! \; x_0 \in [0,2] \text{ mit } \cos(x_0) = 0$$

Beweis. 3.19(iii) $\Rightarrow$ cos str. mon fallend auf $[0,2]$

$\Rightarrow \cos|_{[0,2]}$ ist injektiv

3.19 (i) $\Rightarrow \cos(0) > 0, \; \cos(2) < 0$

$\overset{ZWS}{\Longrightarrow} \exists \; x_0, \; 0 < x_0 < 2$ mit $\cos(x_0) = 0$

Wegen der Injektivität ist x_0 die einzige NST. □

3.21 DEF (π)

Sei x_0 die eindeutige NST von cos in $[0,2]$ (gemäß 3.20)
Wir definieren die reelle Zahl π als

$$\pi = 2 x_0$$

3.22 BEM (Ein bißchen in Richtung Gewohntes)

Mit unserer Def werden einige der obigen Aussagen vertrauter

(i) Lemma 3.19 (i) und Def 3.21 liefern

$$\cos(x) > 0 \quad \text{für } 0 \le x < \pi/2, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$
$$\cos(x) < 0 \quad \text{für } \pi/2 < x < 2$$

Außerdem gilt $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ (3.19(ii)) und daher

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ und } \boxed{\underline{e^{i\pi/2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \underline{i}} \quad (*)$$

(ii) Extrema & Nullstellen f. Sin & Cos

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt mit $(*)$ $e^{ik\pi/2} = (e^{i\pi/2})^k \overset{(*)}{=} i^k$ und damit insbesondere

$$e^{i0} = 1 = \cos(0) + i\sin(0) \qquad e^{i\pi/2} = i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$$
$$e^{i\pi} = -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \qquad e^{i\pi 3/2} = -i = \cos(\tfrac{3\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{2})$$
$$e^{i2\pi} = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

und damit ergibt sich folgende Wertetabelle

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

3.23 KOR (Weitere Eigenschaften von sin & cos) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ (Periodizität mit Periodenlänge 2π)

(ii) $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ (halbe Periode)

(iii) $\cos(\pi/2 - x) = \cos(x)$, $\sin(\pi/2 - x) = \sin(x)$ ($\pi/2$ Verschiebung ergibt jeweils die andere Fkt)

(iv) $\sin(x) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}$, $\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2}\} + \pi\mathbb{Z} =$

$= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad = \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. (i)-(iii) folgt unmittelbar aus den Additionstheoremen & der Wertetabelle [genauer:

(i) $\cos(x+2\pi) \overset{3.17(iv)}{=} \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) \overset{3.22(ii)}{=} \cos(x)$

und analog für sin.

(ii) $\cos(x+\pi) \overset{3.17(iv)}{=} \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \overset{3.22(ii)}{=} -\cos(x)$

und analog für sin.

(iii) $\sin(\pi/2 - x) \overset{3.17(iv)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \overset{3.17(iii)}{=} \cos(-x) = \cos(x)$

und analog für cos.]

(iv) Wegen der 2π-Periodizität (ii) genügt es die Aussage für $x \in [0, 2\pi)$ zu zeigen. Wir beginnen mit sin.

Sei dazu $x \in (0, \pi)$; die beiden Nullstellen in $0, \pi$ haben wir schon in 3.22(ii) gefunden. Es genügt daher z.z., dass es keine weiteren NST in $[0, 2\pi)$ gibt. Das tun wir indem wir zeigen, dass $\sin(x)$ für $x \in (0, \pi)$ positiv und für $x \in (\pi, 2\pi)$ negativ ist.

$0 < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in (-\pi/2, \pi/2)$ und daher

$$\sin(x) \overset{(ii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \overset{3.22(i),\, 3.17(iii)}{>} 0 \quad (*)$$

Wegen $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$ gilt

$$\sin(x+\pi) \overset{(ii)}{=} -\sin(x) \overset{(*)}{<} 0 \text{ also } \sin(x) < 0 \ (\pi < x < 2\pi).$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus

$$\cos(x) \overset{(ii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

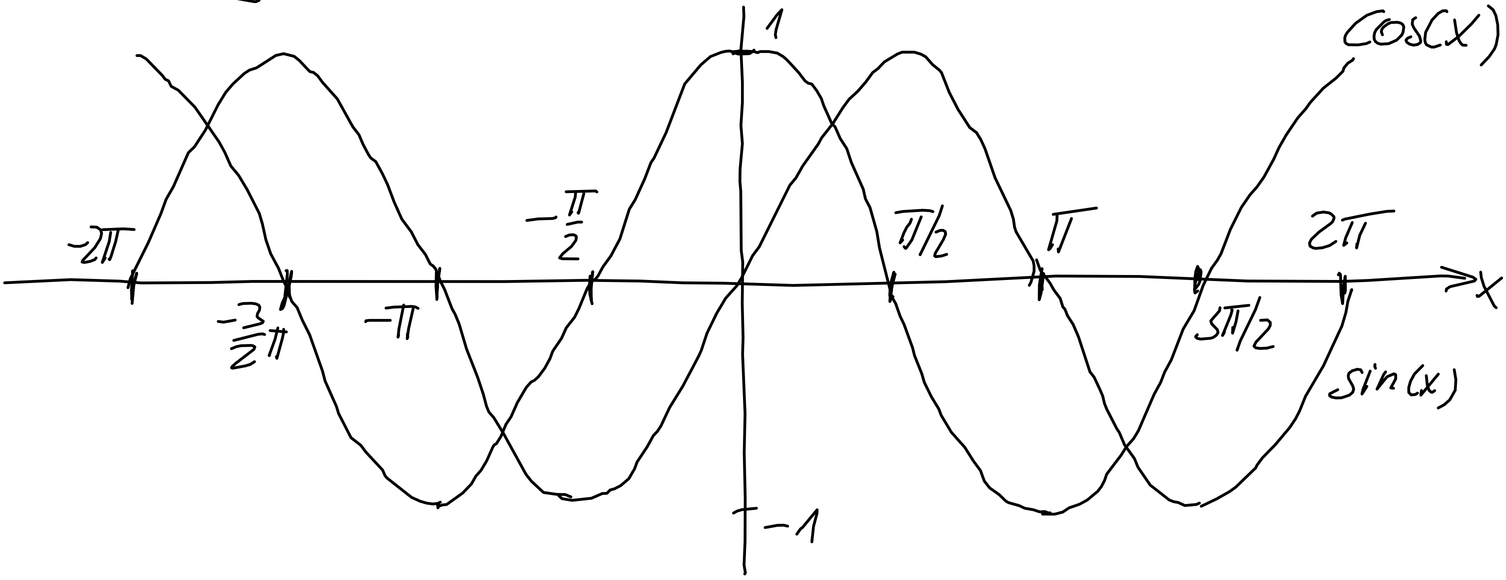
$\square$

3.24 DER GRAPH von Sinus & Cosinus

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein gutes qualitatives Bild der Graphen der Fkt sin & cos gewinnen; insbes gilt

(i) Eine Verschiebung des Graphen von cos um $\pi/2$ nach rechts ergibt den Graphen des sin
[3.23(iii) & 3.17(iii): $\cos(x-\pi/2)=\sin(x)$]

(ii) Neben den NST [3.23(iv)] kennen wir die Maxima und Minima [jeweils die NST der anderen Fkt wegen 3.17(ii)], wo die Fkt jeweils das Monotonieverhalten ändern.



3.25 DEF (Tangens & Cotangens) Wir definieren die Fkt

(i) Tangens, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

genau die NST von cos

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

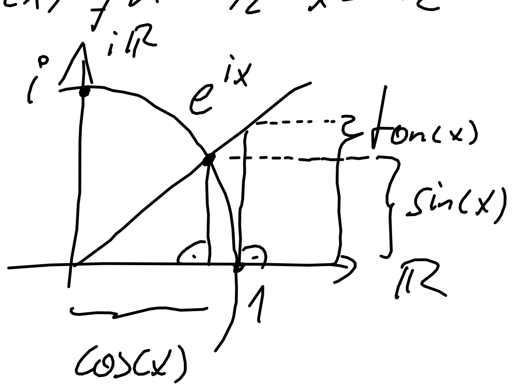
(ii) Cotangens, $\cot : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

genau die NST von sin

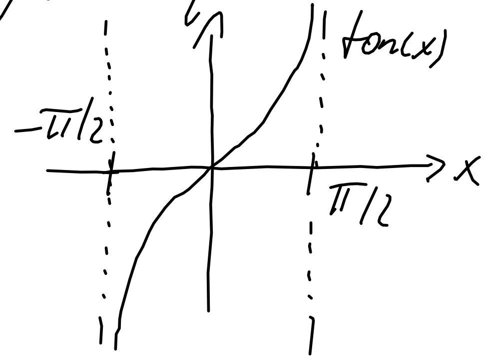
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

3.26 BEM (Eigenschaften des Tangens)

(i) Eine geometrische Interpretation von $\tan(x)$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$ ergibt sich mit dem Strahlensatz:



(ii) Der Graph auf $(-\pi/2, \pi/2)$ ergibt sich aus den Eigenschaften von sin & cos zu



(iii) Periodizität. Es gilt

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{3.23(ii)}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

also ist tan periodisch mit Periode π; der gesamte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben des Graphen in $(-\pi/2, \pi/2)$ um $\pi\mathbb{Z}$.

3.27 MOTIVATION (Arcusfunktionen)

Zu guter Letzt behandeln wir die Umkehrfunktionen von cos, sin & tan. Sie geben also zu gegebenem Winkelfunktionswert den jeweiligen Winkel (im Bogenmaß) an, also die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis an – daher die Namen Arcussinus/cosinus/tangens. Wesentliches Werkzeug ist hier – wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus – der Umkehrsatz 2.18.

lat. Bogen

3.28 PROP & DEF (Arcuscos/sin/tan)

(i) cos ist stetig, str. mon. fallend auf $[0,\pi]$ und $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$.
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

und nennen sie Arcuscosinus. arccos ist stetig und str. mon fallend.

(ii) sin ist stetig, str. mon. wachsend auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ und $\sin([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$.
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

und nennen sie Arcussinus. arcsin ist stetig und str. mon wachsend.

(iii) tan ist stetig, str. mon. wachsend auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ und $\tan([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = \mathbb{R}$.
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arctan : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$$

und nennen sie Arcustangens. arctan ist stetig & str. mon. wachsend

Beweis. Es sind jeweils die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.18 zu zeigen – dieser besorgt dann jeweils den Rest.

(i) 3.17(i) $\Rightarrow$ cos stetig

3.19(ii) $\Rightarrow$ cos str. mon. fallend auf $[0,\pi/2]$

$$\left.\begin{array}{l} 3.23\,(ii) \Longrightarrow \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \qquad \Longrightarrow \cos \text{ str. mon fallend auf } [\pi/2, \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \text{ str. mon fallend auf } [0,\pi] \quad (*)$$

$$3.22\,(ii) \Rightarrow \cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} ZWS \Longrightarrow [-1,1] \subseteq \cos([0,\pi]) \\ (*) \Longrightarrow \cos([0,2\pi]) \subseteq [-1,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \cos([0,\pi]) = [-1,1]$$

$$\xRightarrow{2.18} \cos \text{ hat str. mon fallende \& stetige Inverse } [-1,1] \to [0,\pi]$$

(ii) Mit $\sin(x) \overset{3.23(iii)}{=} \cos(\pi/2 - x)$ erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$.

(iii) tan ist str. mon wachsend auf $[0, \pi/2)$, denn für $0 \leq x < x' < \pi/2$

$$\xRightarrow{(i)} \cos(x) > \cos(x')$$

$$\xRightarrow{(ii)} \sin(x) < \sin(x')$$

und damit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} < \dfrac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x')$

tan ist auch str. mon wachsend auf $(-\pi/2, 0]$, denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \qquad (*)$$

tan ist stetig (als Quotient stetiger Fkt; 1.17(ii))
und schließlich gilt $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$,

denn $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0 \ \forall x \in (0, \pi/2)$ und $\lim\limits_{x \nearrow \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \overset{1.26}{=} \dfrac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} \overset{3.22(iii)}{=} 0$

$$\xRightarrow{\boxed{1}\,2.47(ii)} \lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = \infty \xRightarrow{ZWS} \tan([0, \tfrac{\pi}{2})) = [0, \infty)$$

$$(*) \Longrightarrow \tan((-\pi/2, 0]) = (-\infty, 0].$$

$\square$

3.28 BEM (Zu den Arcusfunktionen)

(i) Natürlich hätten wir den „Umkehrprozess" statt auf $[0,\pi]$ bzw. auf $[-\pi/2, \pi/2]$ auf jedem Intervall durchführen können,
sin, tan → wo die jeweilige Funktion str. monoton ist.

(ii) Als Graphen ergeben sich (durch Spiegelung an der 1. Mediane)