NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25
1. Termin, 11.2.2025
GRUPPE B

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und Ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(4)	(8)	(6)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (b) Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs charakterisiert diesen fachmathematisch vollständig.
   (c) Unter einer Grundvorstellung eines mathematischen Begriffs versteht man eine mathematische Definition dieses Begriffs.
   (d) Primäre Grundvorstellungen sind immer individuell und daher normativ.

2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
   (a) Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass f beschreibt, wie sich die Änderung einer Größe (x durchläuft A) auf eine zweite Größe auswirkt ($f(x)$ durchläuft B).
   (b) Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch ihren Graphen also durch eine Teilmenge des Produkts $A \times B$ beschrieben werden kann.
   (c) Im Rahmen der Objektvorstellung wird f als ein einziges Objekt gesehen, das den Zusammenhang zwischen Elementen in A und B als Ganzes beschreibt.
   (d) Die Zuordnungsvorstellung bezieht sich darauf, dass sich die Änderung einer Größe (x durchläuft A) auf eine zweite Größe auswirkt ($f(x)$ durchläuft B).

3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei I ein Intervall. Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist
   (a) eine Teilmenge von $I \times \mathbb{R}$.
   (b) ein geordnetes Paar $(x, f(x))$.
   (c) die Menge $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$.
   (d) das Produkt aus Definitions- und Zielmenge.

4. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Die Definition baut auf der Zuordnungsvorstellung auf.
   (b) Die Definition nimmt wesentlich auf den Iterationsaspekt Bezug.
   (c) Die Definition bedient wesentlich die Kovariationsvorstellung.
   (d) Der Aufzählungsaspekt ist in der Definition gar nicht sichtbar.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen sind korrekt?
   (a) Die Grenzwertdefinition der Analysis baut auf der Vorstellung vom aktual Unendlichen auf.
   (b) Die Grenzwertdefinition der Analysis ist eine überwiegend dynamische Formulierung.
   (c) Eine schlecht ausgeprägte Annäherungsvorstellung ist eine Hauptursache von Fehlvorstellungen.
   (d) Die Annäherungsvorstellung ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

6. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Der Differenzialquotient von f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten von f in x_0 für x gegen x_0.
   (b) Der Differenzenquotient $[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ von f in x_0 ist genau die absolute Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).
   (c) Konvergiert der Differenzenquotient von f in x_0 (für x gegen x_0) gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.
   (d) Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die (sogenannte) Schmiegegerade (an f in x_0).

2 Sätze & Resultate

7. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Das Intervallschachtelungsprinzip ist eine Exaktifizierung der anschaulichen Vorstellung der Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$.
   (b) (Monotonieprinzip, 1) Eine nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist konvergent. Sie wird anschaulich gesprochen gegen ihr Supremum "gequetscht".
   (c) (Monotonieprinzip, 2) Das Monotonieprinzip ist unabhängig von der Vollständigkeit der reellen Zahlen.
   (d) Im axiomatischen Zugang wird $\mathbb{R}$ als ordnungsvollständiger geordneter Körper definiert, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt. Der Satz von Dedekind stellt sicher, dass $\mathbb{R}$ dann eindeutig definiert ist und mit dem aus den (ZFC)-Axiomen konstruierten Körper mit obigen Eigenschaften übereinstimmt.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) Die Konvergenz respektiert die $\leq$-Relation im folgenden Sinn: Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n \leq y_n$ für alle n, dann auch $x \leq y$.

   (b) Eine konvergente Folge (x_n) hat genau einen Grenzwert.

   (c) Ist (x_n) beschränkt, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) Die Konvergenz respektiert Summen im folgenden Sinn: Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y, dann auch $(x_n + y_n)$ und zwar gegen $x + y$.

9. *(Folgen, Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sind korrekt?

   (a) Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen sind beschränkt.

   (b) Eine Folge mit genau einem Häufungswert konvergiert.

   (c) Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe.

   (d) Die Koeffizientenfolgen konvergenter Reihen sind Nullfolgen.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Stetige Funkionen sind auch differenzierbar.

   (b) Hat der Graph von f einen Knick, so ist f nicht stetig.

   (c) Ist f differenzierbar, so hat der Graph von f keine Knicke.

   (d) Ist f streng monoton (wachsend oder fallend), dann ist f auch injektiv.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x, dann ist f monoton wachsend.

   (b) Hat f in $x_0 \in (-1, 1)$ keine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 auch keine Extremstelle.

   (c) Hat f in $x_0 \in [-1, 1]$ ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (d) f hat globale Extremstellen.

12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Jedes stetige f hat eine Stammfunktion.

   (b) Jedes Riemann-integrierbare f ist auch stetig.

   (c) Je zwei Stammfunktionen von f stimmen überein.

   (d) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, dann ist $F(x) := \int_a^x f(s)\, ds$ (mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Konvergente Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
    (a) $\dfrac{n^n}{n!} \to \infty$ für $n \to \infty$.
    (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$.
    (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \infty$.
    (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
14. *(Vorzeichenmaschine mit Störung.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge
$$x_n = (-1)^n \big(1 + \frac{1}{n}\big)$$
sind korrekt?
    (a) In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.
    (b) In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.
    (c) Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der fast alle Folgenglieder liegen.
    (d) Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der alle Folgenglieder liegen.
15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?
    (a) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist beschränkt.
    (b) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat Maximum und Minimum.
    (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ ist unstetig in $x_0 = 0$.
    (d) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.
16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$) sind korrekt?
    (a) $f(x) = x^5$ hat in $x = 0$ kein Extremum, obwohl dort die Tangente waagrecht ist.
    (b) $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ gilt.
    (c) Weil $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend ist, gilt $f'(0) > 0$.
    (d) Weil $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ hat cos in $x_0 = 0$ ein Extremum.

17. *(Differenzierbarkeit.)* Es gilt, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
ist und, dass f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ ist. Aber welche der folgenden Argumentationen sind schlüssig?

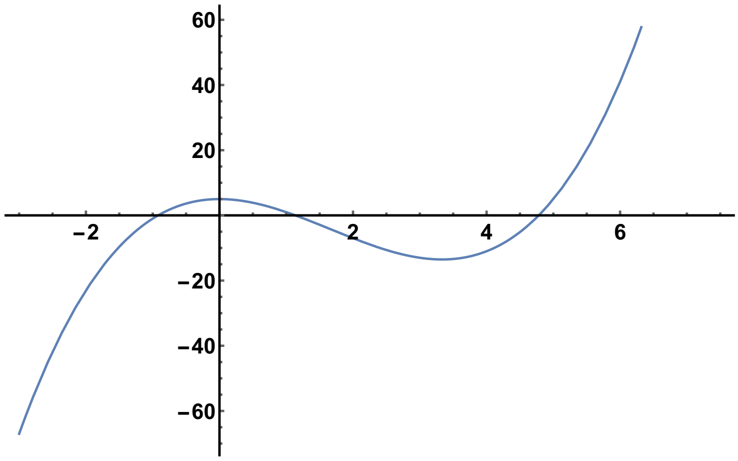
   (a) f ist differenzierbar in allen Punkten $x > 0$, weil
   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (h \to 0).$$

   (b) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, weil $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \to \infty$ $(x \searrow 0)$.

   (c) Die Aussage für $x > 0$ folgt aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen $(x^q)' = qx^{q-1}$ $(q \in \mathbb{Q})$.

   (d) Die Nicht-differenzierbarkeit bei $x_0 = 0$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der Differenzenquotient von f bei 0 für $x \searrow 0$ divergiert.

18. *(Graphische Kurvendiskussion)* Wir betrachten die reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) f hat im Intervall $[-2, 2]$ genau drei lokale Extrema.

   (b) f hat im Intervall $[-2, 6]$ eine Wendestelle.

   (c) f' ist im Intervall $[-2, 2]$ positiv.

   (d) f'' ist im Intervall $[-2, 1]$ negativ.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Differentialrechnung*

   (a) Begründen Sie, warum für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 eine fixe Stelle in $\mathbb{R}$ und für kleine (reelle) h die folgende Gleichung gilt (2 Pkte)

   $$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, h. \tag{1}$$

   (b) Berechnen Sie unter Verwendung der Gl. (1) eine Näherung für $\sqrt{27}$. (2 Pkte)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

2. *Zum Folgenbegriff.* Im Folgenden finden Sie Aufgabe 14 aus dem Teil 1 der standardisierten Reifeprüfung (AHS) vom 17.09.2021.

> Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ die Differenzengleichung $x_{n+1} = 1{,}2 \cdot x_n - 2$ mit dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.
>
> **Aufgabenstellung:**
>
> Stellen Sie mithilfe von x_0 eine Formel zur Berechnung von x_2 auf.

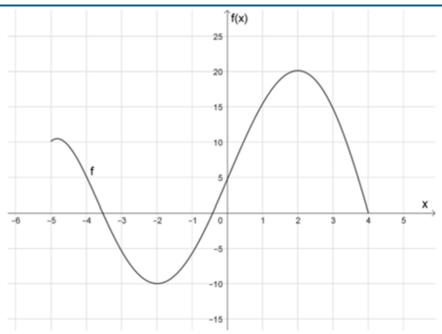
   (a) Geben Sie an, ob die Folge in rekursiver oder in expliziter Form angegeben ist, und erstellen Sie eine Musterlösung der Aufgabe, wie Sie sie von der besten Schülerin/dem besten Schüler Ihrer Klasse erwarten würden. (2 Pkte)

   (b) Welche der vier Grundvorstellungen (Reihenfolgenvorstellung, Kovariationsvorstellung, Zuordnungsvorstellung, Objektvorstellung) wird vorrangig angesprochen? Diskutieren Sie. (1 Pkt)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

3. *Schularbeit.* Nachstehend ist eine von einer Lehrkraft korrigierte Aufgabe aus einer Schularbeit einer 6. Klasse AHS abgebildet.

> Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f.
>
> <u>Beantworte folgende Fragen mithilfe der Abbildung</u>
>
> a. Wie lautet die Definitionsmenge von f?
>
> D_f = ~~$\mathbb{R} \setminus \{0\}$~~ 0 / 1
>
> b. Wie lautet die Wertemenge von f?
>
> W_f = ~~$\mathbb{R}$~~ 0 / 1
>
> c. Gib die globalen Extremstellen der Funktion an: Minimum: −2 Maximum: 2 2 / 2



Diskutieren Sie sowohl die Aufgabenstellungen, als auch die Punktevergabe:

(a) Erläutern Sie, warum die Formulierungen der Aufgabenstellungen problematisch sind, und finden Sie geeignetere Formulierungen für diese Aufgabenstellungen. (3 Pkte)

(b) Wie wäre Ihre Punktevergabe für die Aufgabenstellungen a. und b.? Begründen Sie Ihre Entscheidung. (2 Pkt)

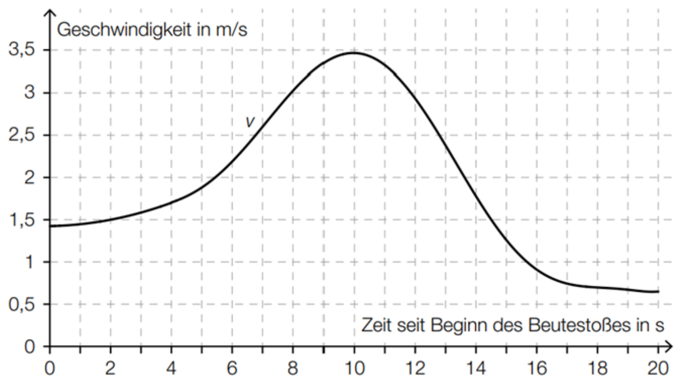
4. *Zum Integralbegriff.* Im Folgenden finden Sie Aufgabe 2 aus dem Teil A der standardisierten Reifeprüfung (BHS) vom 05.05.2020.

Fressverhalten von Furchenwalen

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: *Spektrum der Wissenschaft* November 2010, S. 60–67.

a) Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge s desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurückgelegt wird.

$s \approx$ ____________________ m *[1 Punkt]*

(a) Die Bearbeitung der Aufgabenstellung kann auf zwei der drei Grundvorstellungen (Flächeninhaltsvorstellung, Rekonstruktionsvorstellung, Mittelwertvorstellung) zum Integralbegriff aufbauen. Geben Sie diese beiden Grundvorstellungen an und zeigen Sie, wie eine Bearbeitung jeweils aussähe. (4 Pkte)

(b) Finden Sie zu den beiden in a) angesprochenen Grundvorstellungen jeweils eine Übungsaufgabe für Ihre Schüler*innen (12. Schulstufe), die die angesprochene Grundvorstellung trainiert. (2 Pkte)