

# EINFÜHRUNG IN DIE ANALYSIS

ROLAND STEINBAUER

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK  
UNIVERSITÄT WIEN  
SOMMERSEMESTER 2012  
3 WSd / 5 ECTS

(KORRIGIERTE VERSION  
(011-06-14))

# [0] EINLEITUNG

In dieser Einleitung machen wir einige inhaltliche & methodische Vorbemerkungen (§0) und legen dann (§1) den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

## §0 WAS WILL UND WAS SOLL DIE ANALYSIS

in diesem Skript  
hat jeder Absatz eine  
Nummer

### - EINE ERSTE BEGRIFFSBESTIMMUNG

0.1. MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN. Zu Beginn jedes Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- LINEARE ALGEBRA & GEOMETRIE
- ANALYSIS

Die Themen der Analysis sind also schon durchaus aus der Schulmathematik ge-  
kennzeichnet;

sie wird an der Uni allerdings axiomatisch aufgebaut daher ist zu Beginn eher das VIE als das WAS ein Problem

[Für viele Studierende ist die 1. Analysis-Vo die relativ schwierigste Vo des gesamten Studiums.]

Lösen linearer Gleichungs-  
systeme & deren  
entwickelte abstrakte  
Begriffssprache

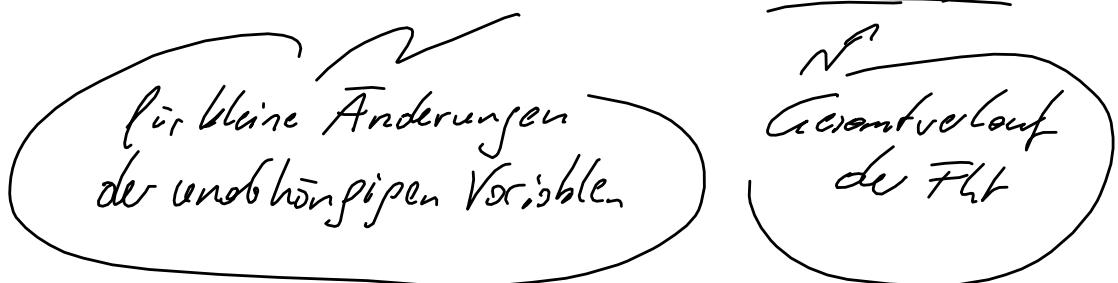
Grundwerte, Differential-  
und Integralrechnung

## 0.2 Analysis - Eine Erste Inhaltsbestimmung

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die Differenz- und Integralrechnung (in einer & in mehreren Variablen).

Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben } und beherrschen kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?



## 0.3 BSP (Fahrradfahren)

(Wann, Wie) kann aus der Kenntnis der Momentanbeschleunigung (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt oder Gesamtverlauf der Fkt (zurückgelegte Strecke; die Fkt im Großen) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden obere Längen durch den Tachometer bzw. Tropenkilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe wirklich und wie kann obige Frage systematisch bearbeitet werden?

Das fährt uns auf:

## O.4 DER ANALYTISCHE BEGRIFFSAPPARAT

Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen

Erscheinungsformen - Er ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichmaßen oder Differential- & Integralrechnung zugrunde?

O.5 WOZU DAS GANZE? Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken schauende)

Poterie mit der echten Welt zu tun? SEHR VIELE !

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Lagrange, Laplace, ... ) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt & Gesellschaft in den letzten 300 Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. [Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kultertechnik sowie die Schrift und nimmt m.E. ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein... ]

## O.6 JA SCHÖN - ABER WIE? ZUR METHODIK

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist - und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich - dass die Analysis [wie jedes math. Gebiet] nach der

Axiomatischen Methoden gelehrt wird. - Wozu?

abstraktes Vorpochen nach dem  
Definition-Satz-Beweis-Schema

(1) Nur so erreicht die Mathe-  
matik jene Sicherheit, die  
von ihr erwartet wird.

(2) Sie macht das Erlernen eines Gebiets leichter?

Das ist kein Witz:

Statt in „druischischer Weise“ von einem Meister im  
geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Handierens  
mit „unendlich kleinen Größen“ unterwiesen zu werden,  
wählt die axiomatiche Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige präzisierende Eig-  
enschaften exakt definiert. Allgemeine Aussagen über die  
Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert. Diese  
werden durch logische Schlussfolgerungen bewiesen.

JA, ABER .... natürlich bereitet diese Herangehensweise  
den Anfängern innen große Schwierigkeiten!

Es ist eine probe Herausforderung den deduktiven Aufbau  
mit dem eigenen Vorwissen, der Phantasie & Intuition  
und der Kreativität ins Einklang zu bringen. Dazu gehört  
natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fach-  
sprache.

Daher ist es auch eines der Ziele dieser Vo diese methodische  
Herausforderung zu bewältigen ... Insofern nimmt die EiDA  
auch den methodischen roten Faden der der EiTA auf  
und spinnt ihn weiter ...

## O.7 AXIOMATIK IN DER ANALYSIS

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundaxiomen der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir im nächsten §. Dabei nehmen wir den inhaltlichen Faden des der ENA auf und knüpfen daran den Teppich der Analysis.

O.8 BEVOR ES WIRKLICH LOSGEHT - EINE LETzte, AUCH  
ZU schen, wie aus den wenigen  
Axiomen der reellen Zahlen die gesamte  
Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und  
ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergraten der verschiedenen  
Begriffe zu verstehen & die vielen überraschenden Querver-  
bindungen zu entdecken kann viel Freude machen & wird  
nicht sonst ohne Folgen für das eigene Denken bleiben  
(können).

Ebenso die Kraft der Anwendungen (auf die wir in diese Vokabeln wenige Sätze schreiben können): Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie, etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft...

# §1 ZUSAMMENFASSUNG: DIE REGELN UND KOMPLEXE ZAHLEN

1.1 Motivation: In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen.

[Wir wählen diesen Ausgangspunkt: die reellen (und damit auch die komplexen) Zahlen können aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe [ETA, Erweiterungsstoff im Kap. 6]). Die so konstruierten Mengen  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen – Dazu spielt es für alles Weitere keine Rolle wo wir beginnen. Wichtig ist nur, dass wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.]

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile des ETAs sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf die ETAs arbeiten.

Wir werden den Satz v. Dedekind [ETA, Thm 6.6.4.] zur Definition erheben [ETA, p. 310 unten] also  $\mathbb{R}$  als (den bis auf Isomorphie eindeutigen) ordnungs Vollständigen geordneten Körper definieren, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Unterkörper besitzt.

Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen.

## 1.2 $R$ als Körper

$(R, +, \cdot)$  ist ein Körper [EMA, Def 4.5.1], d.h. es gilt (Axiome der Addition)

- (A1) Assoziativgesetz:  $(x+y)+z = x+(y+z)$   $\forall x, y, z \in R$
- (A2) Kommutativgesetz:  $x+y = y+x$   $\forall x, y \in R$
- (A3) Existenz der Null:  $\exists 0 \in R : \forall x \in R$   
additives Neutral  $x+0=x$
- (A4) Existenz von additiv Inversen:  $\forall x \in R \exists -x \in R : x+(-x)=0$

(Axiome der Multiplikation)

- (M1) Assoziativität:  $(xy)z = x(yz)$   $\forall x, y, z \in R$
- (M2) Kommutativität:  $xy = yx$   $\forall x, y \in R$
- (M3) Existenz der Eins:  $\exists 1 \in R : \forall x \in R$   
multiplikativ Neutral  $x \cdot 1 = x$
- (M4) Existenz von mult. Inversen:  $\forall x \in R, x \neq 0 \exists x^{-1} \in R : xx^{-1} = 1$

(Distributivgesetz)

regelt die Verträglichkeit von  $+$  und  $\cdot$ .

$$(D) \quad \forall x, y, z \in R : x(y+z) = xy + xz$$

### 1.3 BEM (Folgerungen aus den Körperaxiomen)

- (i) Das additive neutrale Element 0 und multiplikative neutrale Element 1 sind eindeutig bestimmt [ENNA, Prop. 5.2.16].
- (ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen  $-x$  bzw.  $x^{-1}$  eindeutig bestimmt [ENNA, Prop. 5.2.33].
- (iii) Es gibt keine Nullfaktor, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \neq y \Rightarrow xy \neq 0$  [ENNA, Bem. 4.5.9]
- (iv) Endliche Summen und Produkte reelle Zahlen erfüllen (erweiterte Versionen) von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetzen [„Klammerrechnung“]  $(x+y)(u+w) = ux + uy - xu -yw$  und wir verwenden die Summen- und Produktenschreibweise  $\sum, \prod$  [ENNA, Kap. 2.3].

### 1.4 Die komplexen Zahlen

- (i) Per Definitionen [ENNA, Def. 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reelle Zahlen [ $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ], d.h. wir schreiben  $z = (x, y)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Auf  $\mathbb{C}$  sind eine Addition und eine Multiplikation definiert ( $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ )

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(ii) Mit diesen Operationen ist  $\mathbb{C}$  ein Körper [ENIA, Thm. 6.5.2] wobei  $0 := (0, 0)$  das Nullelement und  $1 := (1, 0)$  das Einselement sind.

D.h. für  $\mathbb{C}$  gelten alle Punkte aus 1.2. mit  $\mathbb{C}$  statt  $\mathbb{R}$  [ klar weil 1.2. listet ja nur offiziell die Eigenschaften von Körpern ]

(iii) Für  $z = (x, y)$  verwenden wir auch die Schreibweise Imaginäre Einheit von  $\mathbb{C}$

Reellteil von  $z$

$$z = \overrightarrow{x} + i\overrightarrow{y}, \quad x = \text{Re}(z), \quad y = \text{Im}(z)$$

wobei  $i = (0, 1)$  die imaginäre Einheit genannt wird [ENIA, Defs. 6.5.5, 6.5.6].  $i$  hat die bemerkenswerte Eigenschaft  $i^2 = (0, 1)^2 \stackrel{(1,1)}{=} (-1, 0) = -1 + i \cdot 0 = -1$

(iv)  $\mathbb{R}$  ist ein Unterkörper [ENIA, Def. 5.4.13] von  $\mathbb{C}$  [ENIA, p.333] wobei  $\mathbb{R}$  mittels der Abbildung

$$\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (x, 0) = x + i \cdot 0$$

in  $\mathbb{C}$  eingebettet ist. (Siehe obige graue Box in [ENIA, p.333].) Insbesondere können wir  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$  identifizieren und  $1 \in \mathbb{R}$  mit  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ .

(v)  $\mathbb{C}$  besitzt mit der komplexen Konjugation eine wichtige Struktur. Genauer haben wir die Abb [ENIA, Def 6.5.8]

$$\bar{\phantom{z}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$$

Sie ist ein Körperautomorphismus ([EMA, S.4.20iii]) d.h. Körper isom. auf sich selbst) von  $\mathbb{C}$ , wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

Dann sagt die Komplexkonjugation ist eine Involution.

### 1.5 $\mathbb{R}$ als geordneter Körper

(Hier weichen wir etwas von [Hö] ab; die Fupörps sind aber äquivalent!)

(i) Auf der Menge  $\mathbb{R}$  ist eine Ordnungsrelation  $\leq$  definiert (die sog. natürliche Ordnung).  
Wir verwenden die Schreibweisen:

d.h. eine reflexive ( $x \leq x$ ), transitive ( $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ) und antisymmetrische ( $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ) Relation; siehe [EMA, Def 4.2.24(ii)]

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y \Leftrightarrow y < x$$

(ii)  $\leq$  ist eine Totordnung [EMA, Def 4.2.24(iii)], d.h. es gilt die Trichotomie.

(O1)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

[Genauer sagt [EMA, Def 4.2.24(iii)]: es gilt mindestens eine der Aussagen  $x \leq y, y \leq x$ . Es gilt aber (4.2.24(iii))  $\Leftrightarrow$  (O1)].

" $\Leftarrow$ " ist klar

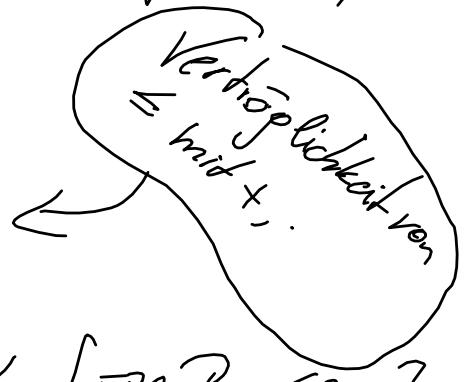
" $\Rightarrow$ ": per def gilt mind. eine der 3 Aussagen. Wir zeigen, dass niemals 2 oder alle 3 gelten können

- $x < y \wedge y = y$  ist per def nicht möglich  $\left[ \begin{array}{l} x < y: \Leftrightarrow x \leq y \wedge \\ x \neq y \end{array} \right]$
- $x > y \wedge x = y$  gatto antizym. was nicht möglich ist; siehe oben  $\square$
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

(iii)  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  ist ein geordneter Körper [EMA, Def 6.3.1],  
d.h. es gelten  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(O2) \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$(O3) \quad x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$$



(iv) In  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  gelten die Rechenregeln [EMA, Prop 6.3.2]  
( $x, y, z \in \mathbb{R}$ )

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$$

$$x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$$

$$x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$$

1.6. Wiederholung (Intervalle) Die Ordnung auf  $\mathbb{R}$  verwendet  
zusätzlich wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu  
definieren - die Intervalle [EMA p. 153]. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$

$(0, b) := ]0, b[ := \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < b\}$	... offene, beschränkte I.
$(-\infty, b) := ]-\infty, b[ := \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	... offene, halbbeschränkt I.
$(0, \infty) := ]0, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} / 0 < x\}$	... offene, halbbeschränkt I.
$[0, b] := ]0, b] := \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq b\}$	... halboffene, beschr. I.
$[a, b) := [a, b[ := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	... halboffene, beschr. I.
$(-\infty, b] := ]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	... abgeschlossene, halb- beschr. I.
$[0, \infty) := [0, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x\}$	... abgeschlossenes beschr. I.
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	... abgeschlossenes beschr. I.

Schließlich schreiben wir  $(-\infty, \infty) = ]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$

1.7. DER ABSOLUTBETRAG. Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die Abstandsmessung: auf  $\mathbb{R}$  veranschaulicht das der Betrag [EMA, Def 6.6. 11]

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion  $| \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat den Graphen

und die folgenden Eigenschaften

$$(N1) \quad |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [\text{EMA, Prop. 6.6. 12}]$$

$$\text{und } |x| = 0 \iff x = 0 \quad (\text{positiv definit})$$

$$(N2) \quad |xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{Multiplikativität})$$

$$(N3) \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1\text{-Ungleichung})$$

Weiter gilt [EMA, p. 318] ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$(i) \quad |-x| = |x| \quad (\text{Spiegelungsasymmetrie})$$

$$(ii) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \quad (\text{verkehrte 1-})$$

$$(iii) \quad |x-y| \geq | |x| - |y| |, \quad |x+y| \geq | |x| - |y| | \quad \text{Angl.: } \text{VER}, 4)$$

$$(iv) \quad \max(x, y) = \frac{x+y+|x+y|}{2}, \quad \min(x, y) = \frac{x+y-|x+y|}{2}$$

$$\left[ \max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases}; \text{ das ist wohldefiniert} \right. \quad \left. \text{wege (O1)} \right]$$

[Satto] (VE, 1, 3)



## 1.8. (ÜBER) ABzählbarkeit [EMA, Kap. 4.4]

Eine Menge  $M$  heißt abzählbar, falls es eine Bijektion  $F: M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

Abzählbare Mengen sind:  $\mathbb{N}$  [klar!],  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar,

man sagt überabzählbar  
[Es ist schon  $(0,1)$ ]

überabzählbar, [EMA, p 176]

Continuierliches Diagonaleverfahren  
[EMA, P. 174]

## 1.9. ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT

→ Rep

Eine totale geordnete Menge  $M$  heißt ordnungs vollständig, falls  $\forall E \subseteq M, E \neq \emptyset, E$  nach oben (kunten) beschränkt

(V)  $\Rightarrow E$  hat ein Supremum (Infimum) [EMA, Def 6.6.1]

{ kleinste obere Schranke - ein wichtiger Begriff  $\rightarrow$  Rep }  
 $\alpha = \sup E : \Leftrightarrow$  (1)  $\alpha$  ist obere Schranke von  $E$  ( $\alpha \geq x \forall x \in E$ )  
 $\rightarrow$  (2)  $\beta < \alpha \Rightarrow \beta$  ist nicht obere Schranke von  $E$  }  
 + Prop. 6.4.2 ]

Aufgabe der Woche

Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind nicht ordnungs vollständig -  
daher eignen sie sich nicht als Grundkörper der Analysis!

[EMA, Bsp 6.6.3]

## 1.10. DEFINITION VON $\mathbb{R}$

Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt die im Dedekindschen Satz [1.10; EMA, Thm 6.6.4.] vorkommen.

Er lautet:

Es gibt bis auf Isomorphe (geordnete Körper) }  
genau einen ordnungs vollständigen, geordneten }  
Körper, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Teilkörper }  
enthält.

Wir definieren nun  $\mathbb{R}$  als genau jenen Körper.

$\mathbb{R}$  hat nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

- die Körperaxiome (algебраische Eigenschaften)  $(A1) - (A3), (T1) - (T3), (D)$
- die Ordnungsaxiome  $(O1) - (O3)$
- Ordnungsvollständigkeit  $(V)$

„in  $\mathbb{R}$  gelten die  
4 Grundrechenregeln“

„wir haben  
das übliche  $\leq$ “

„ $\mathbb{R}$  hat im Gegensatz zu  $\mathbb{Q}$   
keine Löcher“

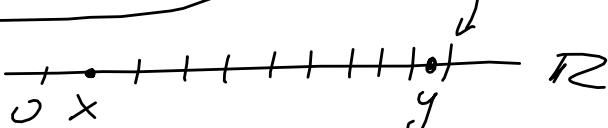
Zum Schluss des Abschnitts halten wir einige wichtige Folgerungen aus  $(V)$  fest

### 1.11. Konsequenzen aus der Ordnungsvollständigkeit

(i) Die Archimedische Eigenschaft [ETNA, Prop 6.4.5(i)] [REP]

Seien  $x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Der Witz ist, dass  
 $x$  sehr klein und  
 $y$  sehr groß sein kann



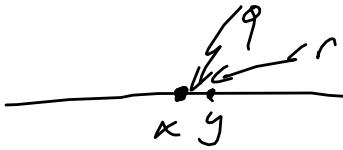
n-faches Abzählen von  
 $x$  übertrifft  $y$

(ii) Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  [ETNA, Prop 6.4.5(ii)]

Seien  $x < y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

Der Witz ist es, dass  
 $x$  sehr nahe bei  $y$  sein kann

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < r < y$



R „zwischen je zwei reellen Zahlen, egal wie nahe sie beieinander liegen, gibt es immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl“

### (iii) Existenz & Eindeutigkeit von Wurzeln

Sei  $0 < \varrho \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig

$\Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R} \text{ mit } x^n = \varrho \quad [\text{EMA, Prop. 6.4.7}]$

n-te Wurzel aus  $\varrho$

A

# FOLGEN UND REIHEN - KONVERGENZ

In diesem Kapitel legen wir den Grundstein der Analysis: den Konvergenz-Begriff für Folgen. Wir werden obo definiieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexe Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiters werden wir Folgen als Werkzeug verwenden um den formalen Begriff der (Ordnungs-)Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen abo Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entlarven und unser diesbezügliches Wissen verwenden um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit konvergenten Reihen wird sich im Laufen ob ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{M}$ , eingeschr. Mengen) – offizielle Def. später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  aus der EITA und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft – damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

# §1 $\mathbb{N}$ ALS TEILMENGE VON $\mathbb{R}$ UND EINIGE KONSEQUENZEN AUF DER ARCHIMEEDISCHEN EIGENSCHAFT

## 1.1. Wiederholung. (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ )

In [EMA, 6.1.1] wurde  $\mathbb{N}$  als Menge definiert, die die Peano-Axiome erfüllt und in [EMA 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt. Es ist also  $\mathbb{N}$  jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der Nachfolgerabbildung  $S$  die Axiome

(PA1)  $0 \in \mathbb{N}$

(PA2)  $\forall n \in \mathbb{N}: S(n) \in \mathbb{N}$  (d.h.  $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ )

(PA3)  $\nexists n \in \mathbb{N}: S(n) = 0$  (d.h. 0 ist kein Nachfolger)

(PA4)  $S$  ist injektiv, d.h.  $\forall m, n \in \mathbb{N}: S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$

(PA5) Induktionsprinzip: Fölle  $M \subseteq \mathbb{N}$  und (PA1), (PA2) für  $n$  gelten [man sagt  $M$  ist induktiv:  $0 \in M$  und  $m \in M \Rightarrow S(m) \in M$ ] dann gilt schon  $M = \mathbb{N}$

(PA5) sagt, dass vollst. Induktion funktioniert ...

## 1.2. $\mathbb{N}$ (Wohlordnung von $\mathbb{N}$ )

Klarweise ist  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  (Details siehe [EMA, Kap 6, Erweiterungsstoff]). Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  besitzt  $\mathbb{N}$  die Eigenschaft der Wohlordnung:

Jede nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{N}$  hat ein Min

Beweis: (i) Falls  $A$  endlich ist, dann gibt es keinerweise ein Minimum (es kann noch endlich vielen „Vergleichsschritten“ gefunden werden).

(ii) Falls  $A$  unendlich ist wählen wir ein beliebiges  $a \in A$  und zerlegen  $A$  in 2 Teilmengen:

$$B := \{x \in A : x \leq a\} \quad C := A \setminus B$$

Nun gilt  $A = B \cup C$  und  $B$  ist endlich  $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \min B$   
 Außerdem gilt lt. Konstruktion  $\forall b \in B \forall c \in C: b < c$   
 $\Rightarrow \min B = \min A$ . □

Als nächstes halten wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft fest

1.3. THM (Die Macht von  $1/n$ )

Der Kitzon "Fest"

ist, dass  $\varepsilon$  beliebig  
groß bei 0 sein kann

(i)  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1: 1/n < \varepsilon$

(ii) Sei  $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ . Falls  $r < 1/n \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$   
dann gilt schon  $r = 0$

" $\varepsilon$  wird beliebig klein"

= Zwischen  $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$   
und 0 ist kein Punkt

Beweis:

(i) [Archimedes O.1.M(i);  $x = \varepsilon, y = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n\varepsilon > 1$ ]

$$\Rightarrow \varepsilon > 1/n$$

(ii) Sei  $r \geq 0$ . Falls  $r > 0 \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 1: 1/m < r$

↳ zur Voraussetzung

Also gilt  $r = 0$ . □

1.4. LEMM (Bernoulli-Ungleichung) Sei  $-1 \leq x \in \mathbb{R}$ , 20

dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n (1+x)^k \geq 1+nx$$

Beweis: Induktion

$$n=0: (1+x)^0 = 1 \geq 1+0x \quad \text{Ind. Voraussetzung und } 1+x \geq 0?$$

$$n \mapsto n+1: (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

$$= 1+nx + x + nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

$\geq 0$

1.5. PROP (Wachstum von Potenzen)

Sei  $b \in \mathbb{R}$ .

(i) Fölle  $b > 1$ , dann gilt

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: b^n > K.$$

Für  $b > 1$  wird  
 $b^n$  pro Bruch jache vorgerückt

Zahl

(ii) Fölle  $0 < b < 1$ , dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: b^n < \varepsilon.$$

Beweis:

(i). Setze  $x = b-1 \Rightarrow x > 0$  und wir können die Bernoulli-Ungleichung verwenden

$$\stackrel{1.4}{\Rightarrow} b^m = (1+x)^m \geq 1+mx(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Sei } K \in \mathbb{R} \stackrel{\text{Arch}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: nx > K-1 \quad (**)$$

Nun setze  $m = n$  in  $(*)$ . Dann gilt  $\underbrace{b^n}_{\geq 1} \stackrel{(*)}{\geq} 1+nx \stackrel{(**)}{>} 1+K-1 = K$

Für  $b > 1$   
wird  $b^n$  größer  
obige Postulat

Für  $b < 1$   
ist das  $x \leq 0$   
größer sein kann

(ii) Folgt aus (i); konnker setzen  $b_1 = 1/b \Rightarrow b_1 > 1$

$$\xrightarrow{(i)} [b=b_1, K=1/\varepsilon] \quad \text{fetd}: b_1^n > K \geq$$

$$\text{Also insgesamt } b = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_1^n} < \varepsilon.$$

]

Zum Abschluss des § betrachten wir geometrische Summen – ein ganz wichtiges Werkzeug

### 1.6. GEOMETRISCHE SUMMEN Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

die Funktion

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s_n(x) := \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \end{array} \right.$$

(i) Für  $x = 1$  erhalten wir

$$s_n(1) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

(ii) Um  $s_n(x)$  für  $x \neq 1$  zu berechnen schreiben wir

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$x s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$$

$$\underbrace{s_n(x) - x s_n(x)}_{(1-x)s_n(x)} = 1 - x^{n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (\star) \\ (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \end{array} \right.$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von  $s_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty^2$  (und  $x \neq 1$ ). Dazu schreiben wir  $(*)$  am Ende

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (**)$$

unabhängig  
von  $n$

$\nearrow$

interessanter  
Term

(ir) Für  $|x| < 1$  besagt 1.5(iii), dass der interessante Term beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |x|^N < \varepsilon_1 \quad (***)$$

[1.1.6(ii), b = |x|]

Klarerweise gilt  $(**)$  auch für alle  $n \geq N$  und daher

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon_1}{1-x} \quad \forall n \geq N \quad (****)$$

$|x| < 1$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig [klein, Witz?], sei  $\varepsilon_1 = \varepsilon(1-x)$ . Dann gilt  $\forall n \geq N$

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \stackrel{(****)}{<} \frac{\varepsilon_1}{1-x} = \varepsilon.$$

~~~~~

Zusammengefasst ist also  $s_n(x)$  für  $|x| < 1$  und  $n \rightarrow \infty$  sehr nahe an  $\frac{1}{1-x}$ , und zwar im folgenden praktischen Sinn:

Zu jeder vorgegebenen "Toleranzgrenze"  $\varepsilon$  können wir einen Index  $N$  finden, sodass der Fehler

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right|$$

kleiner als die Toleranz  $\varepsilon$  ist, falls  $n \geq N$ .

Anzahl von  
Berechnungsschritten

Diese Formulierung stößt uns geradezu mit der Nase auf das kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg - - -

## §2 FOLGEN UND GRENZWERTE

Jetzt geht es los - und war mit den offiziellen

Z.H.-DEF (Folge) Sei  $M$  eine Menge. Eine Folge in  $M$  ist eine Abbildung

$$\alpha: \mathbb{N} \rightarrow M$$

Gilt  $M = \mathbb{R}$  bzw  $M = \mathbb{C}$ , so nennen wir  $\alpha$  eine reelle bzw. komplexe Folge. [Zunächst wird fast immer  $M = \mathbb{R}$  sein.]

Z.Z. SCHREIBWEISE. Nachdem eine Folge ob eine spezielle Funktion definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl. ENTA, 4.3)) hier gültig.

mit komischen Def bezüg

Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige spezielle Schreibweisen eingebürgert:

- Statt  $a(1), a(2)$ , usw schreiben wir  $a_1, a_2$ , usw.
- Für die ganze Folge schreiben wir statt  $a$  oft auch  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n=0}^\infty$  oder kürzer  $(a_n)_n$  oder nur  $(a_n)$
- Hier und weiter werden Folgen auftreten, die erst bei  $n=1$  oder noch später beginnen – das bringen wir durch die Schreibweise  $(a_n)_{n=1}^\infty$  oder etwa  $(a_n)_{n=17}^\infty$  zum Ausdruck.

Ja aber: dürfen die das? Soll heißen: Sind das dann überhaupt Folgen im Sinne der Def?

Ja schon, dann sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n=n_0}^\infty$  eine Folge, die erst bei  $n_0$  beginnt. Dann ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = a_{n+n_0}$  eine echte "Folge" und es zahlt sich nicht aus, zwischen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zu unterscheiden.

### 2.3 Beispiele (Kont & einfache Folgen)

(i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n = 2n$ . Das ergibt die reelle Folge  $(a_n)_n = (2n)_n = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$

(ii) Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Mit  $b_n = c$  für  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir eine sog. konstante (reelle) Folge

$$(b_n)_n = (c)_n = (c, c, \dots).$$

Dafür hätten wir den Begriff "oben nicht gebraucht"

(iii) M.L.  $c_n = \frac{1}{n}$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) erhalten wir

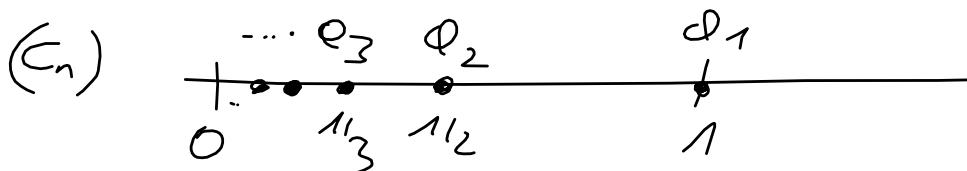
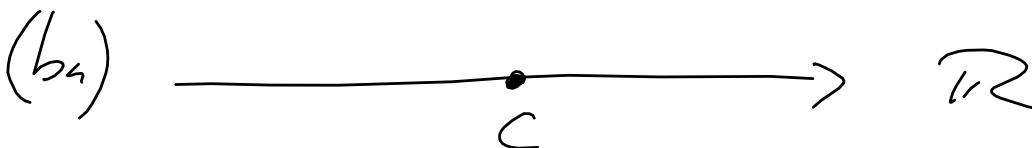
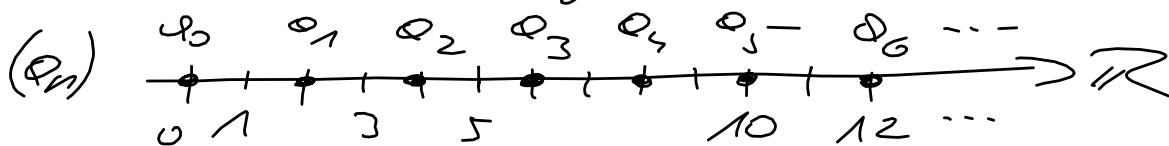
$$(c_n) = \left( \frac{1}{n} \right)_n = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$$

2.4. Veranschaulichung von Folgen. Es gibt 2 Wege  
Folgen in proportionale  
Werte zu veranschaulichen.

(i) Spätisprung in  $\mathbb{M}$ :

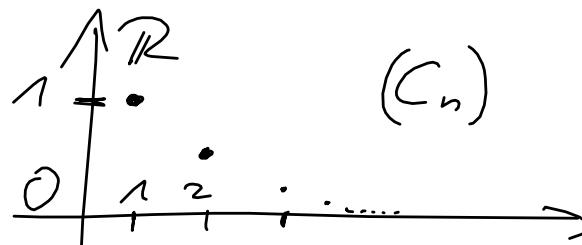
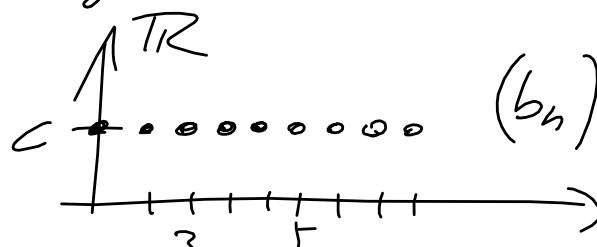
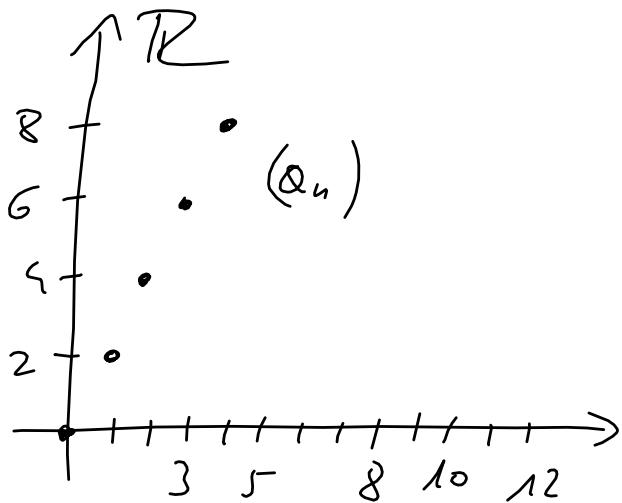
Man trägt die Werte  $q_n$   
der Reihe nach in  $\mathbb{R}$  ein. Für

die Bsp in 2.3 ergibt das



(ii) (Für reelle Folgen) Graph der Folge

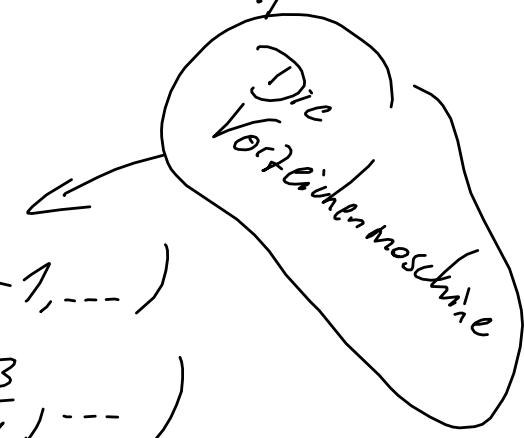
Für die Bsp aus 2.3. ergibt sich so



[Siehe auch Mathematica-Notebook auf d. Materialienseite]

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii). 26

2.5 Bsp (Einige wichtige Folgen)



$$(i) \quad a_n = (-1)^n, \quad (a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$(ii) \quad b_n = \frac{n}{n+1}, \quad (b_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

$$(iii) \quad c_n = \frac{n}{2^n}, \quad (c_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots\right)$$

(iv) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert  
zunächst

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Es gilt also

$$(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$



(v) Geometrische Folge: Sei  $x \in \mathbb{R}$ ; setze  $a_n = x^n, (a_n) = (1, x, x^2, \dots)$

(vi) Geometrische Reihe (siehe 1.6. - war ja als wichtig angekennert!)

Sei wieder  $x \in \mathbb{R}$  und definiere

$$S_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n a_k. \quad \text{Wie in (v)}$$

$$\text{Dann gilt } (s_n) = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, \dots)$$

[Darstellung gemäß 2.4 → UE]

[Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Def ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Angelpunkt.]

2.6 DEF (Grenzwert) Sei  $(\alpha_n)$  eine reelle Folge,  $a \in \mathbb{R}$ .

Die Folge  $(\alpha_n)$  konvergiert gegen  $a$ , falls

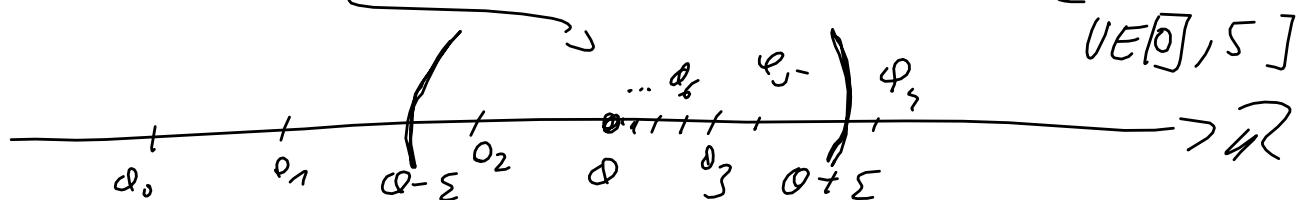
$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |\alpha_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad (2.1)$

In diesem Fall heißt  $a$  Grenzwert (Kimes) der Folge  $(\alpha_n)$  und wir schreiben

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  bzw. kürzer  $a = \lim \alpha_n$  und  
 $\alpha_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  bzw. kürzer  $\alpha_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ .

## 2.7 GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG & SPRECHWEISEN

Für  $\varepsilon > 0$  versteht man unter der  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  von  $a \in \mathbb{R}$  alle Zahlen in  $\mathbb{R}$ , die von  $a$  Abstand kleiner als  $\varepsilon$  haben, also das offene Intervall  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\}$  [siehe auch



Die Konvergenzbedingung (2.1) sagt nun: zu jedem (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Folgenindex  $N$ , sodass alle späteren Folgentglieder  $\alpha_n (n \geq N)$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$  liegen, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \alpha_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq N$ .

Anderer Sprechweisen für die Konvergenzbedingung (2.1) sind<sup>28</sup>

- die Folgenglieder  $a_n$  liegen schließlich in jeder (noch so kleinen  $\epsilon$ )  $\epsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$ .  
bzw.  
• in jeder (noch so kleinen?)  $\epsilon$ -Umgebung des Limes  $a$  liegen fast alle Folgenglieder  $a_n$  liegen.  
soll heißen alle bis auf endlich viele; nämlich bis auf  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$

soll heißen  
ob einem bestimmten  
 $N$ , also  
 $a_N \in N$

[Weitere gültige & ungültige Formulierungen in der UE]

Wir möchten noch die folgenden Sprechweisen offiziell

### 2.8 DEF (Divergent, Nullfolge)

- (i) Ist eine Folge  $(a_n)$  nicht konvergent (d.h. fällt mit  $a_n \rightarrow \infty$ ), dann heißt  $(a_n)$  divergent.
- (ii) Gilt  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), dann heißt  $(a_n)$  Nullfolge.

### 2.9 BEHANDLUNG VON Bsp (Allerschön & gut, aber wie zeige ich konkret $a_n \rightarrow \infty$ ?)

- (i) Will ich konkret für gegebenes  $(a_n)$ ,  $\infty$  zeigen, dass  $a_n \rightarrow \infty$ , dann muss

für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Folgenindex  $N$  gefunden werden<sup>29</sup>

i. o. schwerer  
für klein  $\varepsilon$

der darf nicht von  $\varepsilon$  abhängen und wird es  
i. o. auch fast oft schreibt man deshalb  $N(\varepsilon)$

sodass die Abschätzung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle  $n$  nach  $a_N$  gilt.

GROSSE FEITE WARENUNG: Niemals darf umgekehrt  $\varepsilon$   
von  $N$  abhängen vgl.  
~~exist~~ [EMA, 3.2.3.3]

(ii) Will ich hingehen zeigen, dass  $a_n \rightarrow a$ , so  
muss (nur) ein Versprechen  $\varepsilon$  gefunden werden,  
sodass die  $a_n$  beliebig spät aus der  $\varepsilon$ -Umge-  
bung raus hüpfen. Das ergibt sich nämlich aus  
der Verneinung der Konvergenzbedingung

$$\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon) =$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N: |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Es gibt  
zumindest  
ein Versprechen

Sodass es  
wie spät

es immer noch  
ein  $n$  gibt

sodass  $a_n$   
nicht in  
 $U_\varepsilon(a)$  liegt

(iii) Bei konkreten Bsp ist es also färdlich zuerst eine Vermutung über Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuwisen, ob entweder (i) zu jedem  $\epsilon > 0$  einen Index  $N(\epsilon)$  zu finden, ob dem alles gut ist, oder

(ii) ein Versoper- $\epsilon$  zu finden für das auch beliebig späte Folgenterme  $a_n$  das der  $\epsilon$ -Umgabeung entsprechen.

Beror wir jetzt endlich mit konkreten Bsp aufzugeben noch eine einfache aber wichtige

## 2.10 BEZOAKTUNG (Der Folgenanfang ist esp( ))

Aus der Def 2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge  $(a_n)$  ändert, wenn endlich viele Folgenterme verändert oder fortgesperrt werden

[d.h.  $\exists N \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall n \geq N$  die  $a_n$  gleich bleiben - es wird also nur am Folgenanfang herumgeschoben]

## 2.11. Bsp

(i) Konstante Folgen konvergieren.

Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und  $b_n = c \quad \forall n \quad [2.3(i)]$   
dann gilt  $\lim b_n = c$ .

bonobes  
Bsp

So bonob,  
der N von  
 $\epsilon$  unabhängig  
wählbar

Dann sei  $\epsilon > 0$  beliebig, wähle  $N=0$ , dann gilt

$$\|b_n - c\| = 0 < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

(ii)  $\left(\frac{1}{n}\right)$  ist eine Nullfolge

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \xrightarrow{1.3(i)} \exists N \in \mathbb{N}: \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

[Bemerkung 1.3(ii) ist nichts anderes als die Feststellung Archimedes  $\Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ; es gilt aber auch " $\leftarrow$ " siehe VE]

(iii) Die Vorzeichenmaschine divergiert.

Sei  $(\alpha_n) = (-1)^n$ , dann gibt es kein  $\vartheta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_n \rightarrow \vartheta$ .

Wir beweisen das indirekt. [Für einen Beweis direkt oder der

Ang  $\exists \vartheta \in \mathbb{R}: \alpha_n \rightarrow \vartheta$ . [Def nach Versorgere's  $\rightarrow$  VE]

$$\text{Setze } \varepsilon = \frac{1}{2} \xrightarrow{2.6} \exists N \in \mathbb{N}: |\alpha_n - \vartheta| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N \quad (*)$$

$$\text{Zusätzlich bemerke } |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(1 - 1)| = 2$$

Damit ergibt sich  $\forall n \geq N$

$$2 = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = |\alpha_{n+1} - \vartheta + \vartheta - \alpha_n|$$

$$1-\text{Mgl} \leq |\alpha_{n+1} - \vartheta| + |\vartheta - \alpha_n| \stackrel{(*)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ir)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  [Diese Konvergenz kann nach 2.5(iii) bzw. VE vermutet werden]

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > 1/\varepsilon$  [vgl. (ii)]

Dann gilt  $\forall n \geq N$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Wiederum im Großen

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$  [Vermutung wiederum nach 2.5(iii) bzw<sup>32</sup> VE]

Wir verwenden folgendes

LEMMA  $f_n \geq 4: n^2 \leq 2^n$  [Beweis VEGO] 1(ii)]

Es gilt also  $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . (\*)

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und wähle  $N$  so dass  $N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right)$  (\*\*)

Dann gilt  $\forall n \geq N$

$$\left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

## 2.12 MOTIVATION (Noja - zum Teil ganz schön frickelach...)

Wir haben geschen, dass beim Bearbeiten von konkreten Bsp. Einiges an Kreativität und auch Übung benötigt... Bevor wir weitere wichtige Bsp. angeben erweitern wir unseren Begriffsapparat - was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

## 2.14 DEF (Beschränkte Folge) Sei $(a_n)$ eine reelle Folge.

$(a_n)$  heißt noch  $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$  beschränkt, falls  $\exists K \in \mathbb{R}:$

$$a_n \begin{cases} \leq K \\ \geq K \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(a_n)$  heißt beschränkt, falls  $(a_n)$  nach oben und unten beschränkt ist.

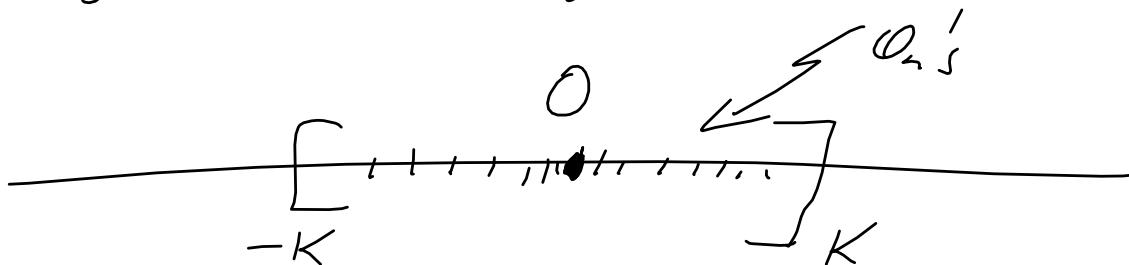
## 2.15 Beobachtung (Beschränkte Folgen sind eingeschlossen) <sup>33</sup>

Def 2.14 besagt,

$$(\alpha_n) \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists K > 0: |\alpha_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Wähle das Max der K's in 2.14 für oben bzw unten]

Geometrisch bedeutet das, dass alle  $\alpha_n$  im Intervall  $[-K, K]$  liegen (also dort eingeschlossen sind)



## 2.16 Bsp ((un)-beschränkte Folgen)

(i)  $\alpha_n = n$  ist noch unten durch 0 beschränkt

$$\left[ \alpha_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \right]$$

ober nicht noch oben

[Folgt direkt aus dem Archimed. Axiom:

$$\forall K > 0 \text{ gilt } \exists n \in \mathbb{N}: n > K \quad [x=1, y=k]$$

(ii)  $\left(\frac{1}{n}\right)$  ist beschränkt.

noch unten  
beschr.

$\left(\frac{1}{n}\right)$  ist durch 0 n.o.b  $\left[ 0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \overline{0} \right]$  1.5 (pr)  
und durch 1 n.o.b  $\left[ \frac{1}{n_m} < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall 1 \leq n \in \mathbb{N} \right]$

Die Tatsache, dass die konvergente Folge  $(\frac{1}{n})$  beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein obj. Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

2.17 SATZ: (konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt)

Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt

Beweis. Sei  $\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - \varrho| < 1 \quad \forall n \geq N$

(Schön wieder das!)

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - \varrho + \varrho| \leq |a_n - \varrho| + |\varrho| \leq 1 + |\varrho|$$

Nun setze  $K = \max \{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |\varrho| + 1 \}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

□

2.18 WARENKAS (beschränkt  $\not\Rightarrow$  konvergent)

Die Umkehrung von 2.17. ist FALSCH. Ein Gegenbeispiel ist etwa die Vorzeichenmaschine  $a_n = (-1)^n$ :

$|a_n| \leq 1 \quad \forall n$  aber  $a_n$  divergent nach 2.11(iii)

Wir arbeiten nun unsere Beispieldliste aus 2.5 weiter ab.

2.19 BSP

(ii) Die Fibonaccifolge ist divergent.

Wir zeigen, dass  $(f_n)$  unbeschränkt ist

2.18  $\Rightarrow (f_n)$  divergent.

Genauer behaupten wir:  $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n \quad f_n \geq 5$

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \end{aligned}$$

Beweis mittels Induktion:

$n=5$ :  $f_5 = 5$  (vgl 2.5(iii))

$n \geq 6$

$n \rightarrow n+1$ :  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq n + (n-1) \geq n + (2-1) = n+1$

(IV)

□

(ii) Für ein (beliebiges oder fixiertes)  $x \in \mathbb{R}$  betrachten wir die <sup>35</sup>  
geometrische Folge  $d_n = x^n$

Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von  $x$  ab

FALL(1):  $|x| > 1 \Rightarrow x^n$  divergent

$$|x| > 1 \stackrel{1.5(i)}{\Rightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: |x|^n > K$$

Wachstum von Punkt

$$\Rightarrow [b=|x|] \Rightarrow x^n \text{ unbeschränkt} \stackrel{2.17}{\Rightarrow} x^n \text{ divergent}$$

FALL(2):  $|x|=1$  also  $x=1 \Rightarrow d_n = 1 \forall n \stackrel{2.11(i)}{\Rightarrow} d_n \rightarrow 1$   
oder  $x=-1 \Rightarrow d_n = (-1)^n \stackrel{2.11(iii)}{\Rightarrow} \text{div}$

FALL(3):  $|x| < 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

für interessante Fall

$$\text{Falls } x=0 \Rightarrow x^n = 0 \forall n \geq 1 \stackrel{2.11(ii)}{\Rightarrow} d_n \rightarrow 0$$

aber vor  
leicht

Bliebt nur der Fall  $0 < |x| < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$

$\stackrel{1.5(ii)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |x|^N < \varepsilon$  und damit  $\forall n \geq N$   
 $[b=|x|]$

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon.$$

## 2.20 HOPPACA (Der Grenzwert?)

Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge gesprochen. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa 2 oder 3? Zum Glück gilt...

rpl. die  
Anmerkung  
in ENTA, graue  
Box, p. 118

2.21. SATZ (Eindeutigkeit des Limes) 36

) Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes

Beweis. [ Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe 2 verschiedene Limes und folglich daraus einen Widerspruch. ]

Ang:  $\exists \alpha \neq b$  mit  $a_n \rightarrow \alpha$  und  $a_n \rightarrow b \Rightarrow \frac{|\alpha - b|}{3} =: \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1: |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$$

$$\underbrace{|\alpha - b|}_{\alpha \neq b} = |\alpha - a_n + a_n - b| \leq |\alpha - a_n| + |b - a_n| \underset{\varepsilon}{<} 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\alpha - b|$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$$



2.22 MOTIVATION (Warum theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz)

Ganz im Sinne von 2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limesen weitere Hilfestellungen bisher nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können um verzweigte komplizierteren Folgen zu berechnen

## 2.23. SATZ (Summen & Produkte konvergenter Folgen)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente (reelle) Folgen.

Dann konvergieren auch  $(a_n + b_n)_n$  und  $(a_n \cdot b_n)_n$  und es gilt

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

Die Summe konvergenter Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte, falls dies für

Beweis. Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b := \lim b_n$

Summe: Wir müssen zeigen, dass  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ .

Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2 > 0$  und daher

$$\exists N_1 \forall n \geq N_1 |a - a_n| < \varepsilon/2, \text{ und}$$

$$\exists N_2 \forall n \geq N_2 |b - b_n| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$$

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Produkt: zz:  $a_n b_n \rightarrow ab$

$(a_n)$  konv.  $\xrightarrow{2.12} (a_n)$  besch., genauer:  $\exists K_1 > 0: |a_n| \leq K_1 \forall n$

Definiere  $K := \max(K_1, |b|) > 0$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2K > 0$  und wegen  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq M := \max(M_1, M_2)$$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b - b_n) + (a_n - a)b|$$

$$\begin{aligned} \text{1-Ungl} &\rightarrow = |a_n| / |b_n - b| + |a_n - a| / |b| \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon \end{aligned}$$

]

2.24 BEI (Polierte Beweise) Natürlich ist insbesondere der lehre Beweis poliert, in dem man, dass  $\varepsilon$  und  $K$  so gewählt wurden, dass am Schluss  $\underline{\varepsilon}$  steht und nicht etwa  $2K\varepsilon$ . Letzteres wäre zwar auch okay, aber eben nicht ganz so klassip. [OE]

Man spricht im Zusammenhang mit dem Aufstellen der 1-Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von  $\varepsilon/2$ -Bereichen [vgl. Summe in 2.23]. Wir werden aber sehr bald auch  $\varepsilon/3$ -Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der 1-Ungl. angelehnt.

Statt weiter „Methodologie“ lieber eine (einfache) Folgerung aus 2.23

2.25 KOR: (Linearkombinationen konv. Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen und sei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert auch die Folge  $(\alpha a_n + \beta b_n)$  und es gilt

$$\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \lim \alpha a_n + \beta \lim b_n$$

Bew. Das Korollar folgt aus 2.23 mittels eines Tricks:  
Wir interpretieren die Folge  $(a_n)_n$  als Produkt zweier Folgen

$$(a_n)_n = (1)_n \cdot (a_n)_n$$

konstante Folge  $(1)_n \rightarrow \lim 1$  (2.1(i))  $\xrightarrow{2.23} a_n \rightarrow \lim a_n$

Analog folgt  $\mu b_n \rightarrow \mu \lim b$  und mit dem Summenteil<sup>39</sup>  
in 2.23 haben wir insgesamt

$$\cancel{(\alpha_n) + (\beta_n)} \rightarrow \cancel{\lim \alpha + \lim b} .$$

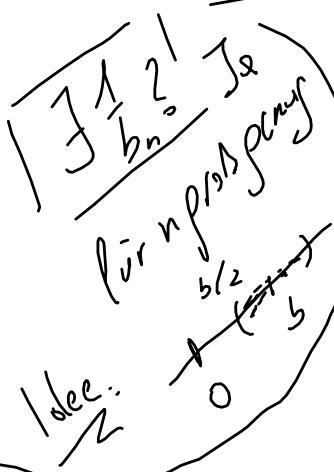
D

### 2.26 Satz (Quotienten konvergenter Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen mit  $\lim b_n = b \neq 0$

Dann gilt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ ,  
die Quotientenfolge  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0}$  konvergiert  
und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$



Beweis: Sei  $a := \lim a_n$

(1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass  $b_n \neq 0$  für  $n \geq n_0$ :  
 $b \neq 0 \Rightarrow |b|/2 (= \varepsilon') > 0$

$$\stackrel{(b_n \rightarrow b)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \frac{|b|}{2} > |b_n - b| > |b| - |b_n| \Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad (*)$$

umgekehrt 1-Ungl

(2) Wir zeigen  $\left( \frac{1}{b_n} \right)_{n \geq n_0} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\stackrel{\text{Sei } \varepsilon > 0}{\Rightarrow} \varepsilon'' := |b|^2 / 2 > 0$$

$$\stackrel{b_n \rightarrow b}{\Rightarrow} \exists N_1 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad (***)$$

Achtung: Schon wieder Polig! ~

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_1)$$

(\*) (\*\*\*)

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(3) Aus Satz 2.23 folgt sofort  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{b} = 0$  [40]

### 2.27 BSP (Im Sinne von 2.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 13n}{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 3$$

[2.26]

Trick: dividiere Zähler und Nenner durch den jeweils höchsten n-Poten

$$3 + \frac{13}{n} = 3 + 13 \frac{1}{n} \rightarrow 3 + 13 \cdot 0 = 3$$

[2.25, 2.26]

$$1 + \frac{2}{n^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

[2.23, 2.25, 2.26]

### 2.28 SATZ (Großes Vergleichskriterium für Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  (d.h.  $\exists n_0 : a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ ) dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n$$

Idee:  $a_n \leq c_n$   
kon. nicht  
 $\lim$ -sein

Beweis:

- Setze  $c_n := b_n - a_n \Rightarrow c_n \geq 0$  für fast allen  $n$   
 $\Rightarrow \lim c_n := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$

Daher genügt es zu zeigen, dass  $c \geq 0$

- Indirekt:  $c < 0$ . Setze  $-c = \varepsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$

$$\varepsilon > |c_n - c| = |c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| \stackrel{N}{\nearrow} c_n + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 > c_n \quad \forall n \geq N$$

↙ WID  
[ $c_n \geq 0, \varepsilon > 0$ ]

[ ]

2.29 Satz (Sandwich-Lemma) Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle) Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für fast alle } n$$

und  $a_n \rightarrow a, c_n \rightarrow a$ . Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und es gilt  $b_n \rightarrow a$ .

Beweis: Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0 \quad \begin{cases} |a_n - a| < \varepsilon \\ |c_n - a| < \varepsilon \end{cases}$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N := \max\{N_0, N_0\}$$

$$\stackrel{(-a)}{\Rightarrow} -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow b_n \rightarrow a. \quad \square$$

2.30 Bsp (Wieder im Sinne von 2.22; mit einem Bonus)

$$\text{Sei } (n \geq 1) \quad b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

Es gilt  $n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow n < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}$   
und daher

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n-\text{mal}} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Sandwich-L  $\xrightarrow{b_n \rightarrow 0}$

$[a_n = 0, c_n = \frac{1}{n}] \xleftarrow{\quad}$

2.31 Warnings (Kann 2.28 für  $<$  stattd  $\leq$ )  $(a_n), (b_n)$  konv;

$a_n < b_n$  (sogar)  $\xrightarrow{\substack{2.30 \\ 2.28}} \lim a_n < \lim b_n$  der BONUS von 2.30

## 2.32 MOTIVATION (Unendliche Reihen - Formulierung)

Einige der bisher untersuchten Folgen waren ob summen gegeben (z.B. Z.5(vi) = die geometrische Reihe, Z.30). Genauer, sei  $(\alpha_n)_n$  eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Def. unten) durch Summieren

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \dots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vag - um ihn präziser zu fassen betrachten wir die sog. Partialsummen

$$S_m = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = \sum_{k=0}^m \alpha_k$$

und fassen  $(S_m)_m$  als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen - nämlich ob die Folge der Partialsummen - auffassen und so aller, was wir über Folgen schon herausgefunden haben verwenden. Nun offiziell.

## 2.33 DEF (Reihe) Sei $(\alpha_n)$ eine Folge.

(i) Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir die m. Partialsumme

$$S_m := \sum_{n=0}^m \alpha_n$$

(ii) Die Folge  $(S_m)_m$  der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe mit Gliedern  $\alpha_n$  und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad (\text{oder kurz } \sum \alpha_n) \text{ bezeichnet.}$$

(iii) Konvergiert  $(S_m)$ , so sagen wir auch die Reihe konvergiert. Wir bezeichnen  $\lim S_m$  ebenfalls mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  (kurz  $\sum \alpha_n$ ) nennen ihre Summe der Reihe.

2.34 Bem (Zur Notation) Das Symbol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ( $\Sigma a_n$ ) steht<sup>43</sup>  
also für 2 Dinge

- (i) die Reihe selbst, also die Folge  $(S_m)_m$  der Partialsummen
- (ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n$$

Ganz analog zu Folgen betrachten wir auch Reihen  
 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  für ein beliebiges  $k \leq k \in \mathbb{N}$ .

2.35 Bsp: Sei  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  ( $n \geq 1$ ). Die korrespondierende  
Reihe ist dann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Bemerke, dass  $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$ .  $\left[ \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \right]$   
Daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + \left( \frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1} \right) + \left( \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \right) = \frac{m}{m+1} \xrightarrow{\quad} 1$$

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 1 \right\}$$

Wie  
z.z.  
ist

S. 2.2  
z. 1.1 c(iv)

## 2.36 HOPPALA (Reality check)

Wie können wir intuitiv verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Zahlen nicht unendlich ergibt, also konvergiert - so wie in Bsp 2.35 postuliert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1 \quad ?$$

Natürlich werden die  $a_n$  immer kleiner; es gilt sogar  
 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0 \quad [0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0]$  dann Sandwich-Lemma  
 Aber worum (bzw. wann) reicht das?

Für eine intuitive Antwort betrachten wir eine Torte.  
 Zunächst essen wir die halbe Torte, dann (sparsamerweise)  
 von der verbliebenen Hälfte die Hälfte usw. Es ergibt sich die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann - wir hatten ja nur eine Torte! Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Bsp sehen werden.



## 2.37 Bsp (Die geometrische Reihe)

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig aber fix. Wir betrachten

Praktischerweise haben wir in 1.6

schon die Partialsummen  $S_m$  ausgerechnet:

DAS Erzbsp

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$S_m(x) = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (*)$$

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 2.19(iii) (wo wir prob-<sup>45</sup>  
fischweise schon das Konvergenzverhalten der Reihe  $x^n$   
berechnet haben).

FALL (1):  $|x| > 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent

$$S_m = \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} x^{m+1} \stackrel{2.17}{\Rightarrow} S_m \text{ unbeschr} \Rightarrow S_m \text{ dir}$$

↑  
unbeschränkt nach 2.19(iii)

FALL (2):  $|x| = 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent

Sei  $x=1 \Rightarrow S_m \stackrel{(*)}{=} m+1$  unbeschr  $\Rightarrow$  div.

$$\text{Sei } x=-1 \Rightarrow S_m \stackrel{(*)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow S_m$  divergent (analog VT-Roschire 2.11(iii))

FALL (3):  $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$S_m = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x} \rightarrow 0 \quad [2.19(\text{ii})]$$

$\rightarrow 0 \quad [2.23]$

o/c wichtig  
FALL D

Einige der  
wichtigsten  
Formeln der VO

Als Spezialfälle von Fall (3) betrachten wir  $x = \pm 1/2$ .  
Wir erhalten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

vpl. Tork  
2.36

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

2.38 BEN (Konvergenz von Reihen) Im Vergleich zu „normalen“ Folgen ist es oft schwieriger die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier holten wir nur ein einfaches strukturreelles Resultat für Summen (LK) konv. Reihen fest - Produkte sind komplizierter... später

2.39 Prop (Linearkombinationen konv. Reihen)

Sagen  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergente Reihen und seien  $\mu$  und  $\lambda$  feste Zahlen, dann ist auch  $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$  konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Bewis. Wende Kor 2.25 auf die Partialsummen an. [VE] 1]

2.40 BSP: (Periodische Dezimalzahlen) Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die periodische Dezimalzahl  $x = 0,0\overline{86363}$

Das bedeutet, dass  $x$  folgenden Wert hat

$$x = \frac{8}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$

$$= \frac{8}{100} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \dots = \frac{8}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}}$$

Wir berechnen [2.37]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}} = \frac{63}{10^4} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k = \frac{63}{10^4} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{855}{9900} = \underline{\underline{\frac{19}{220}}}$$

Schreibweise:  
63 wiederholt  
sich unendlich  
oft

## 2.41 Motivation. (Ein genauer Blick auf divergente Folgen<sup>47</sup>)

Zum Abschluss dieses Kapitels werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet

- die Vorzeichenmaschine  $(-1)^n$  ist divergent aber beschränkt
- $a_n = n$  ist unbeschränkt und (daher) divergent.

Wir führen nun für diese 2. Art - nämlich über alle Schranken hinwegwachsend - den Divergent einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmt“ Divergent.

## 2.42 DEF (Bestimmte Divergent, uneigentlich konvergent)

(i) Eine (reelle) Folge  $(a_n)$  heißt uneigentlich konvergent oder bestimmt divergent gegen  $\pm\infty$  (oder kurz  $\infty$ ), falls

$$\left\{ \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : a_n > K \quad \forall n \geq N \right.$$

In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  [ $a_n \rightarrow \infty$ ]

nicht schließlich eine jede Schrankeninger

(ii) Wir sagen  $a_n$  konvergiert uneigentlich, oder divergiert bestimmt gegen  $-\infty$ , falls  $(-a_n) \rightarrow \infty$  und schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  [ $a_n \rightarrow -\infty$ ].

## 2.43 BEOBACHTUNG (Bestimmte Dir. & Schranken)

(i)  $a_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : a_n < K \quad \forall n \geq N$

(ii) Bestimmt divergente Folgen sind unbeschränkt, genauer:

$a_n \rightarrow \infty \Rightarrow (a_n)$  nach oben unbeschränkt

$a_n \rightarrow -\infty \Rightarrow (a_n)$  —— unten — —

## 2.44 Bsp (Bestimmt divergente Folgen)

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$

(ii)  $a_n = (-1)^n$  ist unbeschränkt daher divergent aber  
nicht bestimmt divergent, da  $a_2 \rightarrow \infty$   
 und  $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$

Also ist die Umkehrung von 2.43(ii) falsch

bestimmt divergent  $\Rightarrow$  unbeschränkt

## 2.45 Prop (Rechenregeln für unbestimmte Grenzrechte)

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle) Folgen mit  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, b_n, c_n \rightarrow \infty$

Dann gilt

(i)  $\lim (a_n + b_n) = \lim (b_n + a_n) = \infty$

(ii)  $\lim (b_n + c_n) = \lim (c_n + b_n) = \infty$

(iii)  $\lim (a_n - b_n) = \lim (-b_n + a_n) = -\infty$

(iv) falls  $a > 0 \cdot \lim (a_n b_n) = \lim (b_n a_n) = \infty$

(v)  $\lim (b_n c_n) = \lim (c_n b_n) = \infty$

Beweis: [UE]

]

2.46 WARNUNG. Es gibt keine analogen Rechenregeln für  
 die Different unbestimmt divergenter Folgen.  
 nur das Produkt von unap. div. Folgen mit Nullfolgen:

- $\lim n = \infty, \lim n^2 = \infty, \lim (n-n) = 0, \lim (n-n^2) = -\infty$

- $\lim \frac{1}{n} = 0, \lim \frac{1}{n^2} = 0, \lim \left(n \frac{1}{n}\right) = 1, \lim \left(n \frac{1}{n^2}\right) = 0$

## 2.47 Prop (Kehrwerte best. dis. Folgen & Nullfolgen)

Sei  $(a_n)_n$  eine reelle Folge

$$(i) \lim a_n = \infty \text{ [oder } -\infty] \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{und } \left( \frac{1}{a_n} \right)_{n \geq n_0} \rightarrow 0$$

$$(ii) \lim a_n = 0, \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \quad \left[ b.z. \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \right] \Rightarrow \lim \left( \frac{1}{a_n} \right) = \infty \quad [b.z. - \infty]$$

Bemerk.

(i) • Es genügt  $a_n \rightarrow +\infty$  zu betrachten [vgl. Def 2.42(i)]

• Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass  $\frac{1}{a_n}$  zumindest für große  $n$  bilden können. Es folgt unmittelbar aus Def 2.42(i) mit  $K=0$ :

$$K=0 \stackrel{2.42(i)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n > K=0 \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerk.:  $\frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall n \geq n_0$

• Wir sagen  $\left( \frac{1}{a_n} \right)_{n \geq n_0} \rightarrow 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , setze  $K = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\stackrel{2.42(i)}{\Rightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n > K = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall n \geq N := \max(n_0, N_0)}_{\text{oder }}: \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

(ii)  $[UE]$

]

2.48 Bsp.  $\lim \left( \frac{n}{2^n} \right) = 0 \stackrel{2.47(ii)}{\Rightarrow} \lim \left( \frac{2^n}{n} \right) = \infty$

$\uparrow$   $\uparrow$

$\left[ 2.11(v) \right] \quad \left[ \frac{n}{2^n} > 0 \quad \forall n \right]$

2.49 BEN (Bestimmte Divergenz reicht sich nach oben resp. unten) <sup>50</sup>

Falls  $a_n \leq b_n$  für festes  $n$  und  $a_n \rightarrow \infty$  dann folgt (direkt aus Def 2.52(i))  $b_n \rightarrow \infty$ .

Analog für  $a_n \leq b_n$  und  $b_n \rightarrow -\infty$ .

### §3 VOLSTÄNDIGKEIT von $\mathbb{R}$ , KONVERGENZPRINZIPIEN

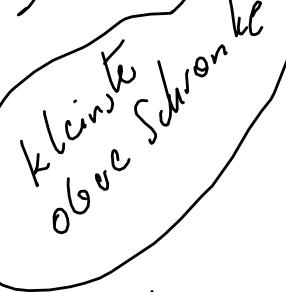
3.1 MOTIVATION (Ordnungsvollständigkeit) Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (auch Supremums Eigenschaft; [O], 1.9.)

(V) Jede nicht leere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (Infimum)

an wesentlichen Stellen verwendet. z.B. folgt die Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. [O] 1.11(i)] und diese wiederum impliziert  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . In diesem § wollen wir (V) und seine Konsequenzen weiter nachspüren – (V) ist der rote Faden der sich durch die gesamte Analysis zieht.

Zu diesem Zweck benötigen wir erst einmal 2 neue Begriffe nämlich Teilfolge und Häufungspunkt um zu einem ersten Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

3.2 Motivation (Teilfolge) Wir kennen hier ein Verfahren kennen um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln – dies ist intuitiv sehr einfach zu



verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verirrend). 51

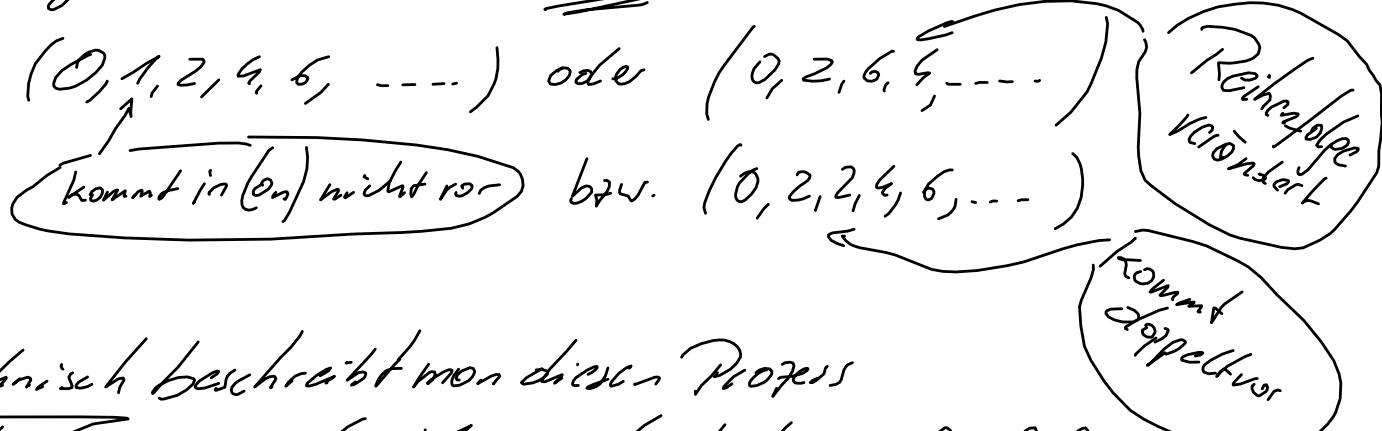
Eine Teilfolge einer gegebenen Folge  $(\alpha_n)$  erhält man, wenn man einige Glieder von  $(\alpha_n)$  auslässt, z. B.

$$(\alpha_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots) \text{ hat etwa die } \overline{\text{TF}} = (0, 4, 8, 16, \dots), (0, 6, 12, 18, \dots), [\text{alle durch 3 teilt.}] \\ (0, 4, 10, 18, \dots) \quad [\alpha_1, \alpha_2 \text{ ausspiessen, } \alpha_3, \alpha_4 \text{ ausspiessen, } \dots]$$

Wesentlich dabei ist es, dass

- nur Glieder der Ausgangsfolge  $(\alpha_n)$  verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keine/keine Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder  $\alpha_n$  verwendet werden [z.B. Jede Folge ist TF von sich selbst] oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine  $\overline{\text{TF}}$  von  $(\alpha_n)$  sind z. B.



Technisch beschreibt man diesen Prozess

indem man aus der Menge der Indizes  $0, 1, 2, 3, \dots$  gewisse auswählt also  $1, 3, 5, 7, \dots$  und damit die zugehörigen  $\alpha_n$ 's, also  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \dots$  D.h. aus  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gewisse  $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$ . Nun offiziell:

[hier  $n_0=1, n_1=3, n_2=5, n_3=7$ ]

3.3 DEF (Teilfolge) Sei  $(\alpha_n)_n$  eine Folge.

Ist  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{N}$  (d.h. eine Folge natürliche Zahlen) mit der Eigenschaft  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  (d.h.  $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ ) dann heißt die Folge

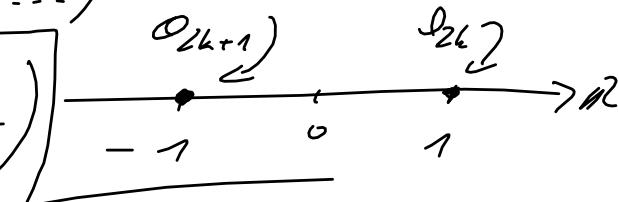
$$(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge (TF) der Folge  $(\alpha_n)$ .

3.4 Bsp (TF).

(i)  $\alpha_n = (-1)^n$  hat z.B. Teilfolgen  $(\alpha_{2k})_k = (1, 1, \dots) = (1)_k$   
n<sub>k</sub>=2k+1 und  $(\alpha_{2k+1})_k = (-1, -1, -1, \dots)$

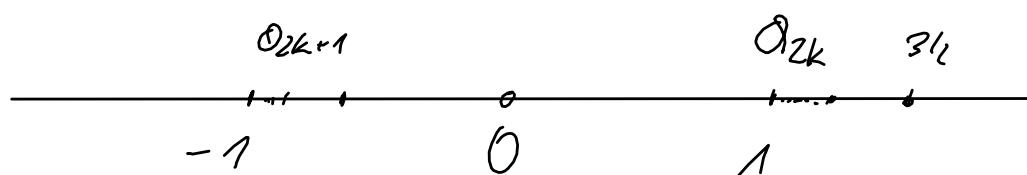
$$(ii) b_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \geq 1} = (0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots)$$



hat etwa die TF

$$(b_{2k})_k = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)_{k \geq 1} = \left(1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \dots\right)$$

$$(b_{2k+1})_k = \left(-1 + \frac{1}{2k+1}\right)_{k \geq 0} = \left(-1 + 1 = 0, -1 + \frac{1}{3}, \dots\right)$$



$$(iii) (\zeta_n)_{n \geq 1} = \left(1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots\right) = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat etwa TF  $(\zeta_{2k})_{k \geq 1} = (2k)$

$$((\zeta_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

(iv) l.o. gibt es mehrere Folgen von  $(n_k)_k$  um dieselbe TF zu erzeugen. So ist etwa auch  $(\alpha_{4k})_k = (1)_k$

- (v) Keine TF von  $(\alpha_n)$  ist  $(-1, 0, -1, 0, \dots)$  [0 kommt in  $\overset{53}{\underset{\alpha_n \text{ nicht}}{\text{nicht}}}$ ]  
Keine TF von  $(b_n)$  ist  $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  [ $1 + \frac{1}{3}$  kommt nicht vor]  
aber  $(-1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{5})$  [Reihenfolge folgt, d.h.  
FWahl von  $n_k$  mit  $n_k < n_{k+1}$ ]

### 3.5 Rotation (Häufungswert)

In 3.4(i) und (ii) haben die Punkte  $\pm 1$  eine spezielle Rolle: sie sind jeweils Grenzwerte von Teilstichen  
 $(\alpha_{2k} = (1)_n \rightarrow 1, \alpha_{2k+1} = (-1) \rightarrow -1,$   
 $b_{2k} = (1 + \frac{1}{2k}) \rightarrow 1, b_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1]$

Solche Punkte sind interessant & verdienen einen eigenen Namen:

3.6 DEF (Häufungswert einer Folge) Sei  $(\alpha_n)_n$  eine reelle Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$\alpha$  heißt Häufungswert (HW) von  $(\alpha_n)$ , falls eine Teilfolge  $(\alpha_{n_k})_k$  von  $(\alpha_n)$  existiert mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha$$

### 3.7 Bsp (HW)

- (i) Sei  $\alpha = \liminf \alpha_n$ , dann ist  $\alpha$  [federweise] auch Häufungswert
- (ii) Die V7-Roschine  $\alpha_n = (-1)^n$  hat die beiden HW  $\pm 1$
- (iii)  $b_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  hat ebenso die beiden HW  $\pm 1$
- (iv)  $c_n = \begin{cases} n & \text{n gerade} \\ 1 & \text{n ungerade} \end{cases}$  hat oben genannte HW 0.

### 3.8 Rotation (Wie viele Folgenglieder sind noch zum HW?)

Sei  $\alpha = \lim \alpha_n$ , dann liegt in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $\alpha$  fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele)  $\alpha_n$

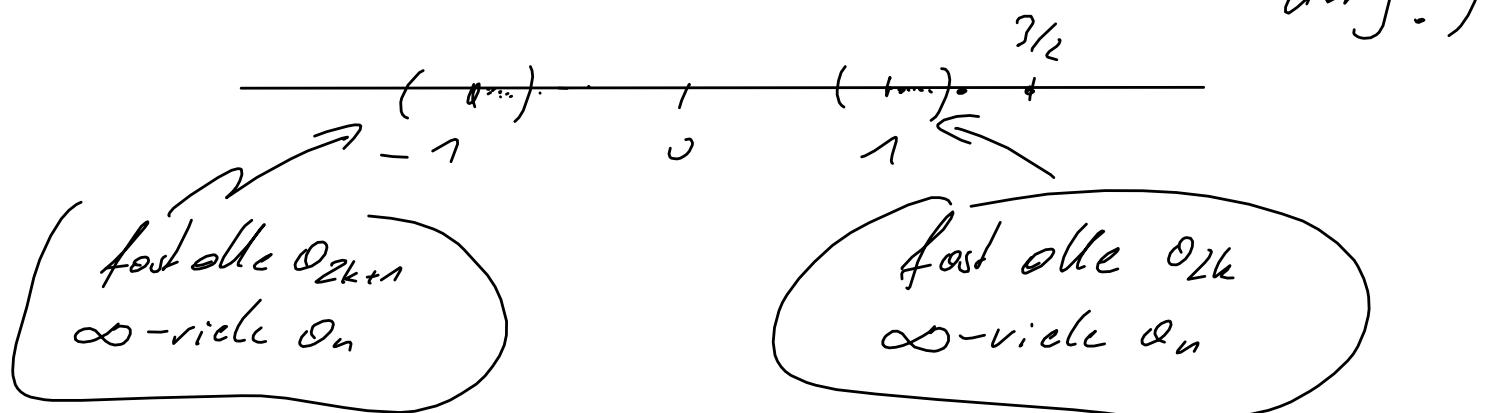
[Vgl. 2.7]

Gilt (nur)  $\varnothing$  ist Hw von  $(\alpha_n)$ , dann  $\exists$  (nur) TF  $\alpha_k$  mit  $\alpha_k \rightarrow \varnothing$ ; also liegen alle bis auf endlich viele der  $\alpha_n$  in jedem  $U_\varepsilon(\varnothing)$  — das sind zumindest unendlich viele der  $\alpha_n$ . Diese Eigenschaft ist charakterisierend für Hw — wie die nächste Prop lehrt. Vorher noch eine

Warnung: In obiger Situation müssen die alle bis auf endlich vielen  $\alpha_k$  nicht schon alle bis auf endlich viele der  $\alpha_n$  sein. Mit anderen Worten

$$\text{lim eind.} \quad \varnothing \text{ Hw von } \alpha_n \quad \xrightarrow{\text{3.7(i)}} \quad \varnothing = \lim \alpha_n$$

Ein explizites Gegenbeispiel ist etwa  $b_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})$  m.i.  $H_w \pm 1$  (3.7(iii))  
In jedem  $U_\varepsilon(1), U_\varepsilon(-1)$  liegen  $\alpha_i$  etc.  $b_n$ . Aber für  $\varepsilon < 1$  gilt  
 $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(-1) = \emptyset$  und daher können in  $\mathbb{N}$  die beiden Mengen fast alle  $b_n$  liegen (es bleiben für die andere viel zu wenige  $b_n$  übrig!)



3.8 PROP (Charakterisierung von Hw) Sei  $(\alpha_n)$  eine (reelle) Folge, o.H.

$\varnothing$  ist Hw von  $(\alpha_n) \Leftrightarrow$  jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\varnothing$  enthält unendlich viele  $\alpha_n$ , d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N: \alpha_n \in U_\varepsilon(\varnothing) = (\varnothing - \varepsilon, \varnothing + \varepsilon)$

die Folge kommt immer wieder in  $U_\varepsilon(\varnothing)$  vor.

Beweis. [Do es sich um eine Äquivalent handelt....]

" $\Rightarrow$ ":  $\alpha$  Fw von  $(\alpha_n)$   $\xrightarrow{3.6.}$   $\exists \overline{TF} (\alpha_{n_k})_k: \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha$

Sei  $\underline{\varepsilon > 0}$   $\xrightarrow{2.6.} \exists K \forall k \geq K \alpha_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$

Sei  $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_1 \geq K$  mit  $n_{k_1} \geq N$

[Def 3.3:  $n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$ ]

Setze  $\underline{m = n_{k_1}} \Rightarrow \underline{\alpha_m = \alpha_{n_{k_1}}} \in \underline{U_\varepsilon(\alpha)}$

" $\Leftarrow$ ": Es gelte die Bed. auf der r.-S. der Prop obz.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \alpha_n \in U_\varepsilon(\alpha) \quad (\times)$

• Wir konstruieren induktiv eine  $\overline{TF} (\alpha_{n_k})_{k \geq 1}$  von  $(\alpha_n)$  mit  $\alpha_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$

$k=1$ : Setze  $\varepsilon = 1 = N \xrightarrow{(\times)} \exists n_1 \geq 1: \alpha_{n_1} \in U_1(\alpha)$

$k \mapsto k+1$ : Sei  $\alpha_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$  schon definiert

Setze  $\varepsilon = 1/(k+1)$ ,  $N = n_k + 1$

$\xrightarrow{(\times)} \exists n_{k+1} \geq N > n_k: \alpha_{n_{k+1}} \in U_{1/(k+1)}(\alpha)$

• Wir zeigen  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha$ :

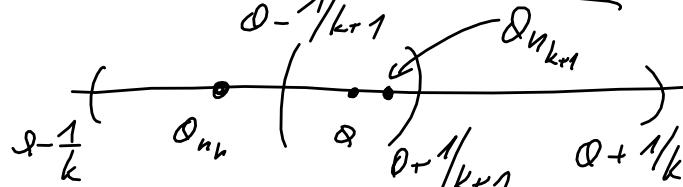
Sei  $\underline{\varepsilon > 0}$  und sei  $\underline{K \in \mathbb{N}}$  mit  $\frac{1}{K} < \varepsilon$  [1.3(i)]

$\Rightarrow \forall k \geq K \quad |\alpha_{n_k} - \alpha| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$   $\square$

Da noch Konstruktion

$\alpha_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$

Idee der Konstruktion: Zoomen mit Umgebung



### 3.10 Motivation (In Richtung Bolzano-Weierstraß)

Wir wissen schon [2.7, 2.8]:  $(a_n)$  beschr  $\Leftrightarrow (a_n)$  konvergiert

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich alle (abzählbar vielen) Folgenglieder in einem beschränkten Intervall tummeln – und dann müssen sich zumindest manche nähern kommen und einen Hw bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reelle Folgen ist.

### 3.MTHM (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert

Beweis. (I) Wir verwenden die Ordnungs Vollständigkeit um einen Kandidaten für einen Hw zu bekommen.

$a_n$  beschr  $\stackrel{\text{Def 2.14}}{\Rightarrow} \exists K > 0 : |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Menge

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a_n \geq x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$ , denn  $K \in A$   $\left[ \text{da } a_n \text{ erfüllt } a_n > K \right]$
- $A$  ist n.u.b., denn falls  $x < -K \Rightarrow x \notin A$ , obwohl  $\nexists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n \geq -K$  untere Schranke

$$\xrightarrow{(V)} \exists \varrho := \inf A$$

Hier  
possiert  
es

(2) Wir zeigen, dass  $\alpha$  Hb der Folge  $(\alpha_n)$  ist: Sei  $\varepsilon > 0$

- $\alpha + \varepsilon > \alpha$  ist keine untere Schranke für  $A$  [ $\alpha = \inf A$ ]
- $\Rightarrow \exists x \in A: \alpha < x < \alpha + \varepsilon$

$\xrightarrow{\text{Def } A} \alpha_n \leq x < \alpha + \varepsilon$  für fast alle  $n$ , d.h.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \alpha_n < \alpha + \varepsilon \quad (\times)$$

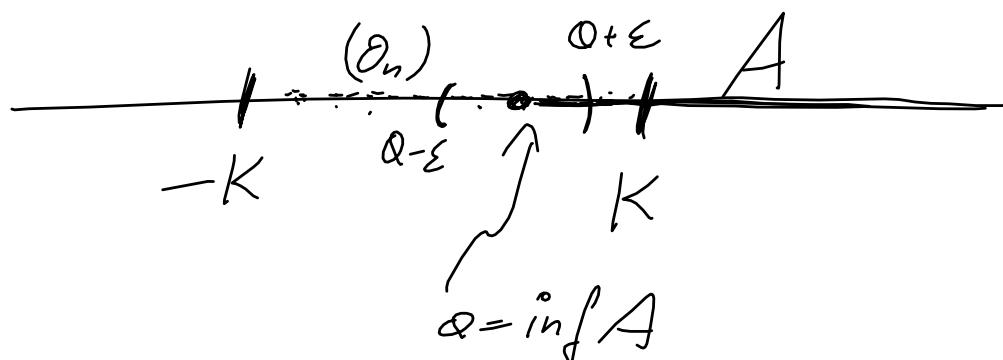
- $\alpha$  ist unt. Schr. v.  $A \Rightarrow \alpha - \varepsilon \notin A \xrightarrow{\text{Def } A} \alpha_n > \alpha - \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ , d.h.
- $\forall n_1 \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq n_1: \alpha - \varepsilon < \alpha_m \quad (\times \times)$
- Kombination von (\*) & (\*\*) gibt die Beh.

Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben, dann wähle  $n_1 = \max(n_0, N)$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{(\times \times)} \exists m \geq n_1 \geq N: \alpha - \varepsilon < \alpha_m \\ &\xrightarrow{(\times)} [m \geq n_0] \quad \alpha_m < \alpha + \varepsilon \quad \left. \right\} \alpha_m \in U_\varepsilon(\alpha) \end{aligned}$$

Skizze zw. Konstruktion

□



### 3.12 BEM ( $\alpha$ ist der grösste Hw)

Dass ins obigen Bera konstruierte  $\alpha$  ist der grösste Hw von  $(\alpha_n)$ .

Dann sei  $b > \alpha \stackrel{\alpha = \inf A}{\implies} \exists c \in A: \alpha < c < b$

Setze  $\varepsilon = b - c (> 0)$   $\Rightarrow U_\varepsilon(b)$  enthält höchstens  
 $\frac{\alpha}{U_\varepsilon(b)} \subset b$  DG A endlich viele  $\alpha_n$   
 $\Rightarrow b$  ist nicht Hw von  $x_n$

Analog dazu können wir auch den kleinsten Hw von  $(\alpha_n)$  konstruieren [dieser könnte gleich dem grössten sein...]

Diese speziellen Hw verdienen einen eigenen Namen

### 3.13 DEF ( $\liminf, \limsup$ )

(i) Sei  $(\alpha_n)$  eine beschränkte (reelle) Folge. Der grösste [kleinste] Hw  $\alpha$  von  $(\alpha_n)$  [Für einen BV 3.11] heißt Limes superior [inferior] bzw kürzer limsup [ $\liminf$ ] und wir schreiben

$$\alpha = \limsup \alpha_n \equiv \overline{\lim} \alpha_n \quad [\liminf \alpha_n \equiv \underline{\lim} \alpha_n]$$

(ii) Falls  $(\alpha_n)$  nicht von oben [unten] beschränkt ist, dann setzen wir  $\overline{\lim} \alpha_n = \infty$  [ $\underline{\lim} \alpha_n = -\infty$ ].

### 3.14 Bsp ( $\liminf/\sup$ )

$$(i^\circ) \alpha_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$$

$$\overline{\lim} \alpha_n = 1, \underline{\lim} \alpha_n = -1$$

(ii)  $\alpha_n = n$  hat keinen Hw und es gilt  $\overline{\lim} \alpha_n = \infty$   
 $\not\exists \underline{\lim} \alpha_n$

### 3.15 Motivation (Konvergenzprinzipien)

Erinnern wir uns an unsere bisherigen Konvergenzbeweise (VOL 1 §2 und UE): Bevor es richtig losgehen konnte, haben wir meist einen (guten) Kandidaten für den Limes gebraucht. Das ist in der Praxis notwendig ein großer Nochtal!

Au) bilden Folgen  
"einfachen" limitierbar  
Rechenregeln f. limitierbare  
Sondichtkomm-Folgen und bc'

Wir werden nun die "Existenzmaschine" Bolzano-Weierstraß so modifizieren, dass sie uns unter passenden Bedingungen nicht nur die Existenz eines Flx sondern schon das Limes liefert - ohne einen Kandidaten f. den Gegenwart zu benötigen.

Die mächtigsten dieser Konvergenzprinzipien sind das Cauchy-Prinzip und das Konvergenzprinzip f. monoton, beschränkte Folgen.

Als Bonus werden wir sehen, dass es manchmal relativ leicht ist, den Grenzwert auszurechnen, wenn schon klar ist, dass überhaupt Konvergenz vorliegt.

Als erstes benötigen wir dazu den Begriff Cauchy-Folge. Dass sind Folgen, bei denen sich die Folgenglieder schließlich beliebig nahe kommen. Anschaulich im Bild des "Spaziergangs" in  $\mathbb{N} = \mathbb{R}$  (vgl. 2.4(c)) versendet die Folge d.h. die Schritte werden immer kleiner...

Geht weiter

Achtung nicht nur die einzelne Schrittwerte

Stellt uns  
die  
Folge aus  
der  
Bisherige  
Schritte  
...  
Kopf

3.16 DEF (Cauchy-Folge) Eine reelle Folge  $(o_n)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{heißt Cauchy-Folge (CF), falls} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |o_n - o_m| < \varepsilon \end{array} \right\}$

3.17 BEN (Bedeutung von CF)

Wir werden gleich sehen, dass CF genau die konvergenten Folgen sind – daher erübrigt es sich Bsp auszuschließen.

Im Sinne von 3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung ob eine Folge  $(o_n)$  eine CF ist (im Prinzip) den Limes & nicht kennen muss [& kommt in 2.16 keines vor – das wird mit dem Auftreten von 2 Indizes ( $m \neq n$ ) erkauft ...].

3.18 TH (Cauchy-Prinzip) Sei  $(o_n)$  eine reelle Folge. Dann gilt

$(o_n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow (o_n)$  ist CF

Beweis:

$\Rightarrow$ : (die „leichte“ Richtung – ein  $\varepsilon/2$ -Beweis)

Setze  $\varrho := \lim o_n$

$\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |o_n - \varrho| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$ .

Dann gilt  $\forall m, n \geq N$

$$|o_n - o_m| = |o_n - \varrho + \varrho - o_m| \leq |o_n - \varrho| + |o_m - \varrho| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ : (Die schwierige Richtung in 3 Schritten) Sei  $(\varrho_n) \subset \mathbb{C}$

(1)  $(\varrho_n)$  ist beschränkt

Setze  $\varepsilon = 1$  in 3.16  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |\varrho_n - \varrho_m| < 1 \quad \forall m, n \geq N$

Setze  $m = N \Rightarrow |\varrho_n| - |\varrho_N| \leq |\varrho_n - \varrho_N| < 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |\varrho_n| \leq |\varrho_N| + 1 \quad \forall n \geq N$  verkehrte  $\Delta$ -Ungl

Die ersten  $N$  Glieder erledigen wir wie im Beweis von 2.11:

Sei  $K := \max \{|\varrho_0|, |\varrho_1|, \dots, |\varrho_{N-1}|, |\varrho_N| + 1\}$ , dann gilt

$$|\varrho_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2) Bolzano-Weierstraß  $\Rightarrow \exists \varrho \text{ Hw von } (\varrho_n)$

(3)  $\varrho_n \rightarrow \varrho$ : [ $\varepsilon/2$ -Beweis mit Hinschmuppeln eines  $\varrho_k$  höher dem Hw]

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$(\varrho_n) \subset \mathbb{C} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |\varrho_n - \varrho_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N \quad (*)$

$\varrho \text{ Hw} \Rightarrow \exists k \geq N : |\varrho_k - \varrho| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$

Dann gilt  $\forall n \geq N$

Das ist die Idee!

$$|\varrho_n - \varrho| = |\varrho_n - \varrho_k + \varrho_k - \varrho|$$

$$\leq |\varrho_n - \varrho_k| + |\varrho_k - \varrho|$$

$(*)$ ,  $(**)$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.19 Bsp (Konvergent ohne Limes) - NICHT VORGETRAGEN 02

Sei  $(\alpha_k)$  eine reelle Folge mit  $|\alpha_k| \leq \theta < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Reihe  $\sum \alpha_k^k$  und zeigen mittels Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz

(i) Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.

Wie üblich setzen wir  $s_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^k$ . Dann gilt für  $m < n$

Vgl. 2.53

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k^k \right| \stackrel{\text{A.Ugl}}{\leq} \sum_{k=m+1}^n |\alpha_k|^k \leq \sum_{k=m+1}^n \theta^k$$

$$\xrightarrow{\text{Trick A}} = \sum_{k=0}^n \theta^k - \sum_{k=0}^m \theta^k \stackrel{1.6}{=} \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{m+1}}{1-\theta}$$

$$= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1-\theta} = \theta^{m+1} \frac{1-\theta^{n-m}}{1-\theta} \leq \underbrace{\theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta}}_{< 0} \quad (*)$$

(ii)  $(s_n)$  ist CF: Sei  $\varepsilon > 0$ .

Wegen  $0 \leq \theta < 1 \xrightarrow{1.5 \text{ cii)} \exists N \in \mathbb{N}: 0 \leq \theta^{m+1} < \varepsilon(1-\theta)$

Daher gilt  $\forall n > m \geq N \quad \forall m \geq N$

$$|s_n - s_m| \stackrel{(*)}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon \quad (**)$$

noch nicht  
fertig?

Ganz analog bereist man  $(**)$  für alle  $m > n \geq N$ .

Schließlich gilt für  $m = n \geq N$ , dass  $s_m - s_n = 0$

Also ist  $(s_n)$  insgesamt eine CF

(iii) 3.18  $\Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^k$  konvergiert

UND: Wir haben keine Ahnung wo der Limes  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^k$  ist!  
A kann dieser doch nicht berechnet werden.

### 3.20 Motivation (Monotone Folgen - Konvergenzprinzip)

Um das in 3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschr. Folgen anzupassen müssen wir zuerst den ersten Begriff exakt fassen.

### 3.21 DEF (Monotonie von Folgen) Sei $(\alpha_n)$ eine reelle Folge.

(i)  $(\alpha_n)$  heißt [streng] monoton wachsend, falls

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \quad [\alpha_n < \alpha_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

(ii)  $(\alpha_n)$  heißt [streng] monoton fallend, falls

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \quad [\alpha_n > \alpha_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

(iii) Falls  $\exists N \in \mathbb{N}$  sodass  $(*)$  bzw  $(**)$  nur  $\forall n \geq N$  gelten so sagen wir  $(\alpha_n)$  hat die respektive Eigenschaft ab  $N$ .

### 3.22 BSP (Monotone Folgen)

Die Fibonacci-Folge  $(f_n)$  [siehe 2.5(cii)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab  $N=2$ .

Tatsächlich gilt  $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$  und  $f_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \quad \forall n \geq 2$$

### 3.23 BEMERKUNG. (Monotonie & Schranken)

(i) Eine mon. wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt, denn sei  $\alpha_n \leq C$  dann gilt  $\forall n$

$$C \geq \alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \dots \geq \alpha_0$$



(ii) Analog für n.a.b Folgen, die mon. fallen.

(iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen dass die Folgen sogar konvergieren. Vorher noch ein motivierendes

### 3.24 Bsp (Approximation für $\sqrt{3}$ )

Sei  $x_0 > 0$ . Wir definieren rekursiv die Folge  $(x_n)$  via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

Bemerkung  $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . [Induktion]

(1)  $(x_n)$  ist n.a.b. panauer  $\forall n \geq 1: \underline{3 \leq x_n^2}$ .

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 3 &= \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right)^2 - 3 = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{4} \left( x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{3}{x_n} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(2)  $(x_n)$  ist monoton fallend ab  $N=1$ .

Für  $n \geq 1$  gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n} \left( x_n^2 - 3 \right) \stackrel{(1)}{\geq} 0$$

(3)  $(x_n)$  konvergiert genauer  $\exists x := \lim x_n$

laut dem in 3.23(iii) angekündigten Thm 3.25 – (enten) das wir hier schon verwenden.

[Sinn ist es zu sehen, dass aus (3) amöphicht  $\lim x_n$  auszulehnen?]

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$$

Zuerst bemerke  $0 < \sqrt{3} \leq x$  (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (\*) zum Limes über:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) \\ &\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ x &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also gilt } x &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left( x^2 + 3 \right) \\ &\Rightarrow x^2/2 = 3/2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Jetzt aber schleunigst zum Thm mit seinem atroalich einlochen Beweis

3.25 THM (KP für beschränkte monotone Folgen)

Jede nach oben beschränkte und [ob einem  $N \in \mathbb{N}$ ] monoton wachsende Folge konvergiert.

Analog für n. u. b und mon. fallende Folgen.

Beweis. Sei  $(a_n)$  nob & mon wachsend.

(1) Produzieren eines Kondidaten

für  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  [(V) ob]

Existenzmaschine]

Intuitives Bild:

$$\xrightarrow{\quad} \bullet \dots \quad a_0 < a_1 < \dots < a = \sup A$$

die  $a_n$ 's werden gegen  $a$  gedrückt

Sei  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

3.23(i)  $\Rightarrow a_n$  beschränkt  $\Rightarrow A$  beschränkt  
 $[A \neq \emptyset, \text{klar}]$

(V)

$$\Leftrightarrow \exists a := \sup A$$

(2)  $\lim a_n = a$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$a = \sup A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: a - \varepsilon < a_N \leq a$

nicht obere Schranke

et. Def sup

$(a_n)$  monoton wachsend  $\Rightarrow \forall n \geq N: a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$

D.h.  $\forall n \geq N \quad |a - a_n| < \varepsilon$ .

]

3.26 BEOBSACHTUNG ( $a_n \rightarrow \sup A$ )

Obiger Bsp. zeigt explizit  $\lim a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 und in diesem Sinne wird das intuitive Bild  
 bestätigt: Eine monoton wachsende n.o.b. Folge wird  
 gegen ihr Supremum gepresst.

Das motiviert auch das Studium von Mengen der Art  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  bzw noch allgemeiner die folgenden [später  
 sehr wichtigen] Begriffe für Punktmengen in  $\mathbb{R}$ .

### 3.27 DEF (Berührpunkt, Häufungspunkt)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$

(i)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Berührpunkt von  $A$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

(ii)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $A$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap A \text{ enthält unendlich viele Punkte}$$

Jedes Ump.  
von  $a$   
enthält mind.  
einen Pkt. aus  $A$

### 3.28 Bsp (BP & HP)

(i) Jedes  $a \in A$  ist BP von  $A$  [ $a \in U_\varepsilon(a) \cap A \forall \varepsilon$ ]  
Jeder HP von  $A$  ist auch BP von  $A$

(ii) Nicht jeder Pkt von  $A$  ist HP von  $A$ , dann  
 $A = \{0\}$  hat gar keine HP.

(iii) Sei  $A := [0, b)$  ein Intervall. Jedes  $x \in [0, b]$   
ist HP (und somit BP) von  $A$   
[Bemerkung:  $b$  ist BP von  $A$  obwohl  $b \notin A$ ]

(iv) 0 ist HP von  $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
[Bemerkung wiederum  $0 \notin A$ ]

### 3.28 BET (HP vs HW) Sei $(p_n)$ reelle Folge

Gilt  $\alpha$  HW von  $(p_n) \Rightarrow \alpha$  HP von  $A := \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\alpha$  HW der Folge

$\xrightarrow{\text{NEIN, denn}}$

$\alpha$  HP der Menge  
der Folgenglieder

Sei  $\varrho_n = (1)_n \Rightarrow \varrho = 1$  ist HW von  $\varrho_n$

ABER  $A = \{\varrho_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$  hat gar keine HP [3.28(ii)]

[Bemerkung: 1 ist immerhin BP von A]

[In der Literatur werden HW von Folgen auch oft ob HP betrachtet. Hier wird bewusst darauf verzichtet, da (mit dieser Bezeichnung)  $\varrho$  HP von  $\varrho_n$  ~~ist~~  
 $\varrho$  HP von  $\{\varrho_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ]

3.30 Prop (Einfache Eig von HP & BP) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$

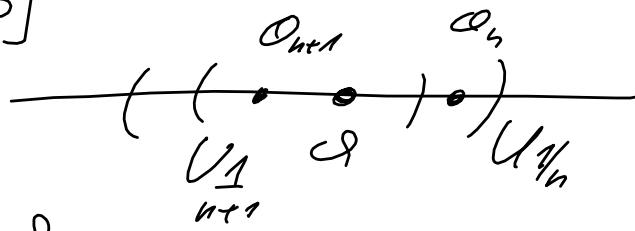
- (i)  $\varrho$  ist BP von A  $\Leftrightarrow \exists$  Folge  $(\varrho_n)$  in A [d.h.  $\varrho_n \in A \forall n$ ] mit  $\varrho_n \rightarrow \varrho$
- (ii)  $\varrho$  ist HP von A  $\Leftrightarrow \varrho$  ist BP von  $A \setminus \{\varrho\}$

Beweis. (i)

$\Rightarrow$ : Sei  $\varrho$  BP von A  $\Rightarrow \forall n \geq 1 \exists \varrho_n \in U_{\frac{1}{n}}(\varrho) \cap A$  3.27(i)

So erhalten wir induktiv eine Folge  $(\varrho_n)$  in A mit

$$\varrho_n \rightarrow \varrho \quad [\lvert \varrho_n - \varrho \rvert < \frac{1}{n} \rightarrow 0]$$



$\Leftarrow$ : Ld. Voraussetzung

$\exists (\varrho_n)$  in A mit  $\varrho_n \rightarrow \varrho$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \varrho_n \in U_\varepsilon(\varrho) \cap A \Rightarrow U_\varepsilon(\varrho) \cap A \neq \emptyset$$

(ii) FUE

3.30A. BETT. Nach 1.1.M(ii) liegt  $\varrho$  dicht in  $\mathbb{R}$ . Das

bedeutet, dass jedes  $x \in \mathbb{R}$  HP von  $\varrho$  ist.

$[\varrho \in \mathbb{R}$  dicht  $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \exists p, q \in \mathbb{Q}: x < p < y \Leftrightarrow$  s.o. unendl. viele induktiv unendl.  $\Rightarrow \forall \varepsilon \ U_\varepsilon(x) \cap \varrho$  unendl. ]

### 3.31 Bsp (BP beschränkter Mengen) Sä A ⊂ R beschränkt<sup>69</sup>

(i) Sei  $(\alpha_n)$  Folge in A  $\xrightarrow{\text{Bsp}} (\alpha_n)$  hat einen BW  $\alpha$

On hat TF  $\alpha_{n_k}$   
 und  $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha$

$\xrightarrow{3.30(i)}$

$\alpha$  ist BP von A

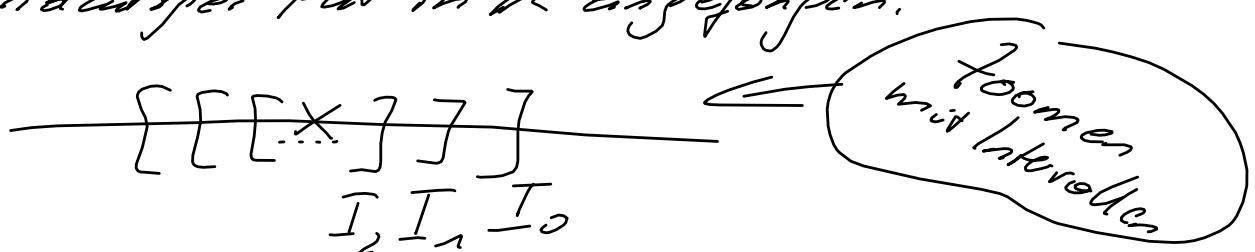
(ii) ( $V$ )  $\Rightarrow \exists \varnothing = \sup A \xrightarrow[\sup]{\text{Def}}$   $\varnothing$  ist BP von A

[Es gilt  $\sup A$  ist Limes einer monoton wachsenden Folge in A: Wähle  $\alpha - 2 < \varnothing \leq \alpha$  und dann induktiv  
 $\forall n \in \mathbb{N}: \alpha_n \in A, \alpha_n \geq \varnothing_{n-1}, \alpha - \frac{1}{n} \leq \varnothing_n \leq \alpha$ . ]

### 3.32 Partition (Intervallschachtelungsprinzip)

Wir leiten nun aus des Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenz-Maschine“ her, die im Gegensatz zum CP sehr anschaulich ist:

Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, obgeschl. Intervalle sich zusammenschüttet, dann wird dabei ein endlicher Pkt in  $\mathbb{R}$  eingefangen.



Dieses Prinzip veranschaulicht noch einmal die Tatsache, dass  $\mathbb{R}$  „keine Löcher“ hat

Doch zuerst zu den exakten Begriffen.

### 3.33 DEF (Durchmesser eines abg. Intervalls)

Seien  $a \leq b \in \mathbb{R}$  und  $\underline{I} := [a, b]$ . Wir definieren den Durchmesser von  $\underline{I}$  ob

$$\text{diam } \underline{I} := b - a$$

### 3.34 IHT (Intervallschachtelungsprinzip, (IP))

Sei  $(\underline{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eig.

$$(i) \quad \underline{I}_0 \supseteq \underline{I}_1 \supseteq \underline{I}_2 \supseteq \dots \supseteq \underline{I}_n \supseteq \underline{I}_{n+1} \supseteq \dots$$

$$(ii) \quad \text{diam } \underline{I}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann existiert genau ein  $a \in \mathbb{R}$ , das in jedem  $\underline{I}_n$  liegt, d.h.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underline{I}_n = \{a\}$$

### Beweis. (Existenz) Seien $\underline{I}_n = [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N})$

(1) Die Folge  $(a_n)$  der linken Randpunkte ist eine F.

Sei  $\varepsilon > 0$ . (ii)  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \text{diam } \underline{I}_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad (*)$

Seien also  $m, n \geq N$ .  $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} a_m, a_n \in \underline{I}_N$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq \text{diam } \underline{I}_n \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$$

(2)  $\stackrel{3.18}{\Rightarrow} \bar{f}a = \lim a_n$

(3)  $\forall n \geq k$  gilt:  $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a_k & a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & (n \rightarrow \infty) \\ b_k \end{matrix}$$

(in  $n$ )  
konstante  
F.P.C

$$\stackrel{2.28}{\Rightarrow} a_k \leq \varphi \leq b_k \quad (\forall k) \Rightarrow \varphi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad (\forall k)$$

71

(Eindeutigkeit). [folgt sofort aus (ii)]

Seien  $a, b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  dann gilt  $\forall n$

$$0 \leq |a - b| \leq \text{diam } I_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |a - b| = 0 \stackrel{(M)}{\Rightarrow} a = b.$$

]

3.35 BEOBACHTUNG: Es gilt also  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\varphi\}$ , wobei  $\varphi$  eindeutig festgelegt ist durch  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  [und analog  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ] [NICHT VORGE-TRAGEN]

### 3.36 NACHBETRACHTUNG (Der rote Faden)

Diese führt (neben anderen, praktischeren Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungs Vollständigkeit (V) gewidmet.

Genauer haben wir bewiesen:

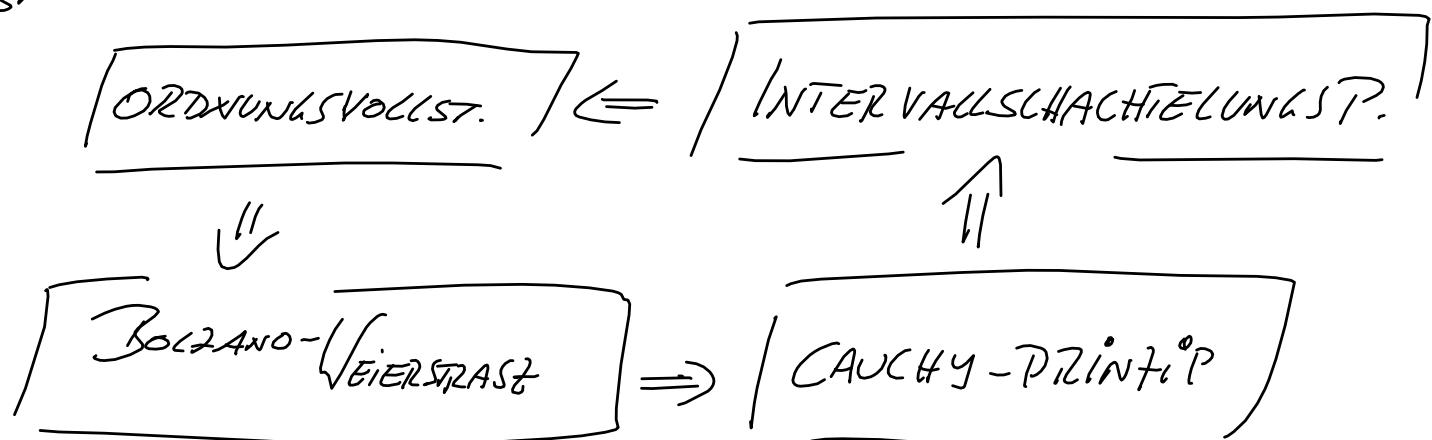
$$(V) \Rightarrow (BW) \Rightarrow (CP) \Rightarrow (IS)$$

Es gilt also auch  $(IS) \Rightarrow (V)$  } ohne Bezug; siehe [Hö] 3.16 Thm und daher sind alle 4 Aussagen äquivalent!  $P$ ,  $(BW)$ ,  $(CP)$  und  $(IS)$  sind also nur andere (fr. unschöner) Manifestationen der Ordnungs Vollständigkeit (V) von  $\mathbb{R}$ .

Daher spricht man oft auch einfach von der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , die durch jede der 4 Aussagen <sup>72</sup> charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen für Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Defs der Vollständigkeit finden [z.B. (P) in Forster, (V) in Deiser und Heuser und noch eine Variante (Konzept von Deolekindschritten) in Behrend's] aber (immer) auch einen Satz der die Äquivalenzen herstellt — also besagt, dass alle diese Fassungen äquivalent sind.

Zum Abschluss des § noch einmal & räte es so schön ist



# §4 REIHEN & KONVERGENZ}

## 4.1. EINLEITUNG & AUSBLICK.

In diesem Lernzettel von Kap 11 beschäftigen wir uns ebenfalls mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def 2.33). Wie bereits in 2.38 angekündigt ist es für Reihen i.d. schwieriger als für "normale" Folgen Konvergenz nachzuweisen und i.a. noch schwieriger den Grenzwert zu bestimmen - obwohl die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der "normale" Konvergenzbegriff für Reihen zu kurz gefasst. Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konv. Reihe nicht ebenfalls konvergieren muss - die Konvergenz hängt also von der Raihenfolge der Summation ab! Dieser wirklich problematische Aspekt löst sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff zunächst nimmt. Die sogen. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

Das klingt kompliziert; aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit abs. konv. Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir jetzt zum Schluß dieses § schaen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.



## 4.2 Erinnerung (Reihen - Sein & Schein) [vgl. 2.32-34]

Sai  $(\alpha_n)$  eine reelle Folge, m.E.

Wir definieren die m-te Partialsumme der Reihe  $\sum \alpha_n$  als

$$S_m = \sum_{n=0}^m \alpha_n$$

und schreiben  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \alpha_n =: \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ , falls

der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt - Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

Wir beginnen damit einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Ab erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip [Thm 3.18]

oft fälschiger als  
„normale“ Folgen

4.3 PROP (Cauchy-Prinzip für Reihen) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  eine

} reelle Reihe, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad (\text{4.1})$$

$$\forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n \alpha_k \right| < \varepsilon$$

Beweis:  $\sum \alpha_k$  kono  $\stackrel{\text{Def 2.33}}{\Rightarrow} S_m$  konvergent  $\stackrel{3.18}{\Rightarrow} S_m$  CF

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \underbrace{|S_n - S_{m-1}|}_{\substack{n \\ m-1}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \alpha_k - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k = \sum_{k=m}^n \alpha_k \quad \square$$

OBDH  $n \geq m-1$

Wai! in 3.16  
„ $\forall m, n \geq N$ “  
können hier  $m$  &  $n$   
so gewählt werden.

## 4.4 BEN (Änderung endlich vieler Glieder)

(i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern (vgl. 2.10).

4.3. zeigt, dass dies auch für Reihen gilt:

Bedingung (4.1) wird von der Änderung endlich vieler  $a_k$ 's nicht berührt.

[exakt: Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) Folgen und  $M \in \mathbb{N}$   
 $\forall n \geq M: a_n = b_n$  und  $(a_n)$  erfüllt (4.1), dann auch  
 $(b_n)$ : Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \forall n \geq N_1 \left| \sum_{k=M}^n a_k \right| < \varepsilon$

$$\text{Wähle } N := \max \{M, N_1\} \Rightarrow \forall m, n \geq N \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

(ii) Weiters verändert sich der Limes einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden. Das ist bei Reihen anders. Offensichtlich ändert sich dann der Wert der Reihe, z.B.:  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - x^0 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Nun eine weitere wichtige Konsequenz aus 4.3.

## 4.5 KOR (Die Glieder konv. Reihen sind Nullfolgen)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow a_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$ . Setze in (4.1)  $m = n \geq N$

$$\Rightarrow \varepsilon > \left| \sum_{k=n}^n a_k \right| = a_n \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

□

## 4.6. PROP (Beschränktheit der Partialsummen)

Sei  $\Sigma \alpha_n$  eine Reihe nicht-negativer Zahlen (d.h.  $\alpha_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow s_m = \sum_{k=0}^m \alpha_k \text{ beschränkt}$$

Beweis.  $\Rightarrow$  folgt sofort aus 2.17

$\Leftarrow$  [Auf den ersten Blick überraschend [vgl. 2.18] auf den 2. Blick: Monotonie, D.]

- $s_m$  ist mon. wachsend, denn

$$s_{m+1} = s_m + \underbrace{\alpha_{m+1}}_{\geq 0} \geq s_m$$

3.25

 $\Rightarrow s_m$  kono.

- $s_m$  ist beschr. ob. Kriter.  $\square$

[Höchste Zeit für ein Bsp. ?]

## 4.7 BSP (konv & div Reihen)

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1, 0, 1, 0, \dots)$  divergiert, weil  $\alpha_n = (-1)^n \not\rightarrow 0$  [4.5]

"Doppel-Test"  
On/O →  
Zondio.

## (ii) Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Erstens ist die Reihe

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist  $\left[ \xrightarrow{4.6} \alpha_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \sum \frac{1}{n} \text{ div} \right]$

Wir betrachten  $s_{2^k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) 77

$$\begin{aligned}
 s_{2^k} &= \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\
 &\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
 &\dots + \left( \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) \\
 &\geq 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{k}{2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k \text{ Terme}}
 \end{aligned}$$

Also  $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \Rightarrow s_n$  unbeschränkt.

#### 4.8 GROSSE FETTE WARNUNG!

Bemerke die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert, OBWEGE  $a_n \rightarrow 0$ . Doher ist die Umkehrung von 4.5 FALSCH. Es gilt also

$$\left\{ \sum a_n \text{ konv.} \right. \quad \xrightarrow{4.5} \quad \left. a_n \rightarrow 0 \right\}$$

einer der beliebtesten Fehler von Anfängern!

4.9 Bsp

$$\left( \sum \frac{1}{n^s} \right)$$

(i) Sei  $\forall k \geq 2$ , dann ist  $\sum \frac{1}{n^k}$  konvergent

Da alle Glieder  $\frac{1}{n^k} \geq 0$  sind müssen wir mit 4.6 nur zeigen, dass  $s_m$  beschränkt ist. Dazu sei  $m \in \mathbb{N}$ ; Wohl  $\ell \in \mathbb{N}$  so dass  $m \leq 2^{\ell+1}-1$ , dann gilt

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{n^k} & n = 2^2 - 1 = 2^1 + 1 \\ &= 1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right)}_{\leq 2^{\ell+1}} + \underbrace{\left( \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} \right)}_{\leq 4^{\ell+1}} + \dots & n = 2^{\ell+1} \\ &\leq 2^{\ell+1} & \leq 4^{\ell+1} = 2^2 \cdot 4^{\ell} \end{aligned}$$

$$\dots + \underbrace{\sum_{n=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{n^k}}_{\leq 2^{\ell+1}} \leq 2^{\ell+1} \cdot \frac{1}{2^{\ell k}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\ell} 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^{\ell} \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^j \stackrel{\infty}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}$$

geom. Reihe 2.37

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (vorwieglich) auch für  $\Re k > 1$  - wir haben aber  $n^k$  für  $k \notin \mathbb{Z}$  im Rahmen der VS noch nicht definiert...

obere Schranke von  $s_m$  unabh. von  $n$

Wie doch immer, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ ist } \begin{cases} \text{div für } s \leq 1 \\ \text{konv für } s > 1 \end{cases}$$

(iii) Für alle geraden Zahlen  $k$  können die Summen sofort explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

wie wir später (Teil 2 des Zyklus) sehen werden

#### 4.10 TH 7 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei  $a_n \geq 0 \forall n$ . Wir betrachten die sog. alternierende Reihe

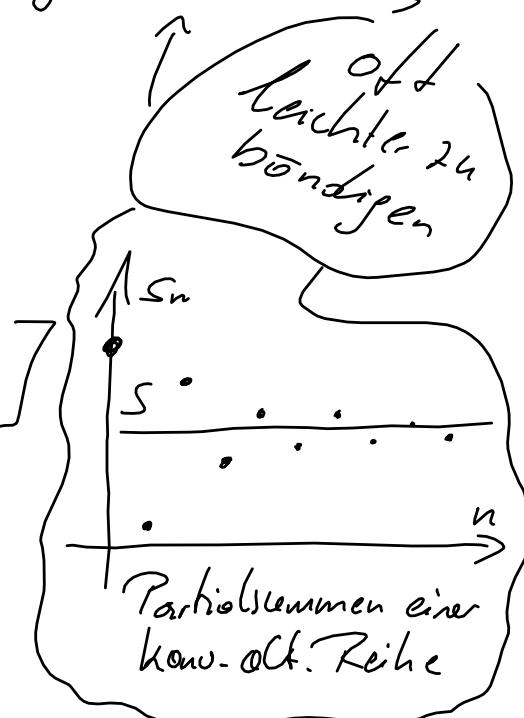
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

Falls gilt, dass

(i)  $a_n$  monoton fällt [ $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ ]

(ii)  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent



Beweis: • Betrachte TF der geraden/ungeraden  $\xrightarrow{(i)} \xrightarrow{(i)} \underline{\text{Partialsummen } s_{2k} \text{ (kekt)}}$

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \stackrel{(i)}{\leq} 0 \Rightarrow s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \quad (\star)$$

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \stackrel{(i)}{\geq} 0 \Rightarrow s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \quad (\star\star)$$

$$\text{Außerdem } s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \Rightarrow s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad (\star\star\star)$$

Also  $(s_{2k})$  mon. fallend [(\star)] & n.u.b  $[s_{2k} \geq s_1, (\star\star)] \xrightarrow[3.25]{(\star\star\star)} \underline{\text{konv}}$   
d.h.  $\exists S := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$

Analog  $S_{2k+1}$  mon. wachsend  $\left[\text{(*)}\right] \& \text{n.o.b.} \left[\text{(**)}\right] \Rightarrow$  konv<sup>3.25</sup>  
 d.h.  $\exists S' := \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1}$

$\bullet \underline{\underline{S = S'}}$  dann  $\underline{\underline{S - S'}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{2k+1} = 0$

$\bullet \underline{\underline{S_n \rightarrow S}}$ , denn  $s_n \cdot \varepsilon > 0$ .

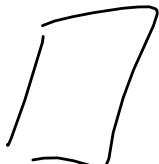
$$S_{2n} \rightarrow S \Rightarrow \exists N_1 \forall n \geq N_1 |S_{2n} - S| < \varepsilon$$

$$S_{2n+1} \rightarrow S \Rightarrow \exists N_2 \forall n \geq N_2 |S_{2n+1} - S| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}: |S_n - S| < \varepsilon$$

4.11 BST Die alternierende harmonische Reihe  

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
 konvergiert



noch 4.10 weil  $1/n$  mon. fallende Nullfolge.

### 4.12 BEY (Zum Leibnizkriterium)

(i) Bemerkung, dass 4.10 eine schwache Form der Umkehrung von 4.5  $\left[ \sum \alpha_n \text{ konv} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \right]$  ist  
 [vgl. 4.8] denn 4.10 sagt

$$\alpha_n \rightarrow 0 \text{ & mon. fallend} \Rightarrow \sum (-1)^n \alpha_n \text{ konv}$$

(ii) Der Beweis von 4.10 liefert die folgende Fehlerabschätzung

$$|S - S_m| \leq |S_{m+1} - S_m| = \alpha_{m+1}$$

$S_m$  häufig ist immer über  $S$  hinweg

[Nicht  
VORGETRAGEN]

## 4.13 BEM & WARUNG (Reihenkonv. ist instabil)

Wie bereits in 4.1 angekündigt hängen Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge ab.

(i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen benötigen wir die folgende Notation:

Sei  $\sum a_n$  eine Reihe und  $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv, dann  
 $\sum a_{\pi(n)}$  heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$  eine Umordnung von  $\sum a_n$ .

(ii) Umordnung konvergenter Folgen kann den Limes ändern.

Sei z.B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  die alternierende harm. Reihe

Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{-1/16} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{-1/10} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}}_{-1/14} + \dots \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right) \end{aligned}$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

(iii) Umordnung konv. Reihen kann sogar zu Divergenz führen!

Vir ordnen nochmals die alt. harm. Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später auftreten (n32):

$$1 - \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)}_{>2/8 = 1/4} - \frac{1}{6} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{>4/16 = 1/4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$P=2^3+1$$

$$15=2^{3+1}-1$$

$$8=2 \cdot 3+2$$

# Terme =

$$\frac{2^{n+1} - 2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} = 2^{n-1}$$

$$\dots + \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1} \right) - \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$\geq 2^{n-1}/2^{n+1} = 1/4$$

$$\geq \frac{n-1}{4} - \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n+2}} \right) \geq \frac{n-1}{4} - \frac{n-1}{6} = \frac{n-1}{12}$$

# der Klammern mit pos. Termen

$$\leq n-1 = \# \text{ der neg. Terme}$$

Also müssen die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt sein  $\Rightarrow$  Reihe divergent

(ir) FATZT: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff  
der solche Effekte ausschließt

4.14 DEF (Absolute Konvergenz) Eine Reihe  $\sum a_n$   
ist absolut konvergent, falls  $\sum |a_n|$  konvergiert

4.15 BETT (zu obs. Konv.)

(i) Wegen  $|a_n| \geq 0$  ergibt 4.6.

$(\sum |a_n| \text{ konv.} \Leftrightarrow s_m = \sum_{n=0}^m |a_n| \text{ beschränkt})$

Reihe der  
Absolutbeträge  
der Glieder

(ii)  $\sum a_n$  konv.  $\neq \sum |a_n|$  konv. dann die hor.  
Reihe ist ein Gegenbeispiel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konv. [4.11]} \text{ aber } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div [4.7aii]}$$

Die Umkehrung ist aber richtig  $\leftarrow$

4.16. PROP (Obs Konv.  $\Rightarrow$  Konv.)

Obs Konv. ist ohne  
Wirklichstärke ob  
bloße Konvergenz

{ Jede absolut konv. Reihe konvergiert }

Beweis. [CP für Reihen & A-Ugl.]

Sei  $\epsilon > 0$ , dann gilt mit 4.3. für  $\sum |a_k|$ :  $\exists N \forall n \geq m \geq N$

$$\epsilon > \sum_{k=m}^n |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \quad 4.3 \text{ für } \sum a_n \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.}$$

A-Ugl f. endl Summe  
von rechts nach links gelesen

T

Abs Konv. ist stabil  
bifl. Umordnungen

4.17 THM (Umordnungsatz)

{ Sei  $\sum a_n$  absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung  
 $\sum \sigma_{\tau(n)} a_n$  abs. konvergent und konvergiert gegen denselben Limes. }

Beweis. 4.16  $\Rightarrow \exists S := \lim \sum a_n$ . Sei  $\epsilon > 0$

[Jetzt im 3 Schritten ins Ziel]

(1) Abschätzung für den Reihenrest.

$$\begin{aligned} \stackrel{4.3}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \ell \geq N \quad \sum_{k=N}^{\ell} |\alpha_k| &< \varepsilon/2 \\ \sum |\alpha_n| & \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\alpha_k| \leq \varepsilon/2 \quad (*) \end{aligned}$$

2.28 [rpl. auch  
2.31]

Daher  $\forall m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^m \alpha_k - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \right| = \left| \sum_{k=N}^m \alpha_k \right| \leq \sum_{k=N}^m |\alpha_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |\alpha_k| \leq \varepsilon/2$$

$$\stackrel{2.28}{\Rightarrow} \left( m \rightarrow \infty \right) \left| S - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \right| \leq \varepsilon/2 \quad (***)$$

(2)  $\lim \sum \alpha_{\tau(n)} = S$ .

möglich, weil  
 $\tau$  bijektiv

Sei  $M \in \mathbb{N}$  so dass  $M \geq N$

und sodass  $\{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(M)\} \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$  (A)

Dann gilt  $\forall m \geq M$

$$\left| \sum_{k=0}^m \alpha_{\tau(k)} - S \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^m \alpha_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \right|}_{+} + \left| \sum_{k=N}^{N-1} \alpha_k - S \right|$$

Wegen (A) fällt  $\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k$  sicher weg; über die anderen  $\alpha_{\tau(k)}$ 's weiß man nichts genauer, aber die Abschätzung hält  $(**), (***)$  sicher hin?

$$\leq \left| \sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |\alpha_k|$$

vergl. 2.28  
rpl. Zeile 1 von unten

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{\tau(n)} = S$$

(3)  $\sum \alpha_{\tau(n)}$  konv. absolut.

Folgt sofort aus (1) & (2)

für die Reihe  $\sum b_n$  mit  $b_n := |\alpha_n|$ .



## 4.18 MOTIVATION (Absolute Konvergenz: schön, aber wie?) 85

Nochdem wir gesehen haben, dass abs.

Konvergent der richtige Begriff ist, um Reihen gut umschreiben zu können - manchmal sagt man ja bloß konvergente R. auch Bedeutet Konv. - stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich eine Reihe an, ob sie absolut konvergiert?

Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

## 4.19 PROP (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium)

(i) Sei  $\sum c_n$  konvergent und  $c_n \geq 0$ . ( $\sum c_n$  ist eine konv. Majorante)

$\left\{ \begin{array}{l} |o_n| \leq c_n \text{ für fast alle } n \Rightarrow \sum |o_n| \text{ absolut konv.} \end{array} \right.$

(ii) Sei  $\sum d_n$  divergent und  $d_n \geq 0$  ( $\sum d_n$  ist div. Minorante)

$\left\{ \begin{array}{l} o_n \geq d_n \text{ für fast alle } n \Rightarrow \sum |o_n| \text{ divergent} \end{array} \right.$

Beweis. (i) OBdA können wir annehmen, dass  $|o_n| \leq c_n$  für gilt (der Reihenverlauf ist egal; vgl. 4.4(ii))

Wir verwenden 4.6: ( $\sum |o_n|$  ist Reihe mit nichtneg. Termen)

$$\forall m \text{ gilt } 0 \leq s_m = \sum_{n=0}^m |o_n| \leq \sum_{n=0}^m c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$\Rightarrow s_m$  beschränkt  $\xrightarrow{4.6} \sum |o_n|$  konv.

(ii) Indirekt auf  $\sum |o_n|$  konvergent  $\xrightarrow{(i)} \sum d_n$  konvergent

□

### 4.20 Bsp (Vergleichstest)

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$  divergiert, denn  $f_n \geq 1: \frac{1}{f_n} \geq \frac{1}{n}$   
 $\sum \frac{1}{n}$  div (4.7(iii))  $\xrightarrow[(i)]{4.19} \sum \frac{1}{f_n}$  div

(ii) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $|a_n| < 1 + f_n$ . Sei  $p \in (0, 1)$ , dann gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p$  ist absolut konvergent, denn  
 $|a_n|^p \leq q^n$ ;  $\sum q^n$  konv [Z.37]  $\xrightarrow[(i)]{4.19} \sum |a_n|^p$  konv.

### 4.21 Prop (Wurzeltest) Die reelle Reihe $\sum a_n$ ist

(i) absolut konvergent, falls  $\exists \theta: 0 < \theta \leq 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \forall n \geq n_0 \right\}$$

(ii) divergent, falls  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n$

### Beweis [schr einfach...]

(i)  $|a_n| \leq \theta^n$  für fast alle  $n$ ,  $\sum \theta^n$  konv [Z.37]  
 $\xrightarrow[(i)]{4.19} \sum |a_n|$  konv.

(ii)  $|a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$

$\xrightarrow[4.5]{\text{Doppel-Test}}$   $\sum a_n$  divergent. □

4.22 REM (Zum F-Test) (i) In der Praxis drift Hoff auf, dass  
 $\exists \varrho := \lim |\alpha_n|^{1/n}$ . Dann gilt

$\varrho < 1 \Rightarrow$  Bedingung in 4.21(i)  $[\varrho = \varrho + \varepsilon < 1] \Rightarrow \sum \alpha_n$  obs. konv.

$\varrho > 1 \Rightarrow$  Bedingung in 4.21(ii)  $\Rightarrow \sum \alpha_n$  div

(ii) WARNUNG! Der F-Test benötigt wirklich die Abschätzung

$\sqrt[n]{|\alpha_n|} \leq \varrho < 1$  und nicht nur  $\sqrt[n]{|\alpha_n|} \leq 1$ .

$|\alpha_n|^{1/n}$  hat endlichen Abstand zu 1

$|\alpha_n|^{1/n}$  kann 1 beliebig nahe kommen

Es gilt z.B. nämlich ( $n \geq 1$ )

$\exists (\beta_{n^2})^{1/n} \rightarrow 1$  und  $\sum \frac{1}{\beta_{n^2}}$  konv. [4. P.(i)]

$\exists (\gamma_n)^{1/n} \rightarrow 1$  und  $\sum \gamma_n$  div [4.7(ii)]

4.23 PROP (Quotiententest) Sei  $\alpha_n \neq 0$  für fast allen. Die reelle Reihe  $\sum \alpha_n$

(i) konvergiert absolut, falls  $\exists \varrho: 0 < \varrho < 1$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \leq \varrho \quad \forall n \geq n_0$$

(ii) divergiert, falls

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$$

Beweis. (i)  $\forall n \geq n_0$  gilt

$$|o_{n+1}| \leq \theta |o_n| \leq \theta^2 |o_{n-1}| \leq \dots \leq \theta^{n-n_0} |o_{n_0}|$$

$$\Rightarrow \sum \theta^{n-n_0} |o_{n_0}| = |o_{n_0}| \theta^{-n_0} \sum \theta^n \text{ konv. } [2.32]$$

$$\xrightarrow{4.1P_{C(i)}} \sum |o_n| \text{ konv.}$$

(ii) Sei  $n \geq n_0$  und so dass  $o_n \neq 0 \Rightarrow |o_n| \geq |o_{n_0}| > 0 \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \exists n \neq 0 \xrightarrow{G.5} \sum o_n \text{ div.}$$

□

4.24. BEI (zum Quotiententest)

(i) Analog zum WT: Falls  $\exists \varrho = \lim \left| \frac{o_{n+1}}{o_n} \right|$ , dann gilt

$$\varrho < 1 \xrightarrow{4.23(i)} \sum o_n \text{ abs. konv.}$$

$$\varrho > 1 \xrightarrow{4.23(ii)} \sum o_n \text{ div.}$$

(ii) Warnung! Auch hier ist bei  $\varrho = 1$  keine Aussage möglich, dann z.B.

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konv und } (n \geq 1) \quad \lim \frac{o_{n+1}}{o_n} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div und } (n \geq 1) \quad \lim \frac{o_{n+1}}{o_n} = \lim \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest. Man kann sagen,

(i) im Quotiententest  $\Rightarrow$  (i) im Wurzeltest

[d.h. falls der QT positiv oder füllt, dann ist auch der W-T unendbar]

Die Umkehrung ist falsch [für Details siehe Barner, Flohr Analysis 1, §5.3]

## 4.25 Bsp (QT, WT)

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ist abs. kono., dann [4.23(ii), 4.24(ii)]

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

(ii)  $\sum a_n$  mit  $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$  ist obs konv, dann [4.21(ii)]

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n$$

Bemerkung, für diese Reihe  
ist der Quotientenkriterium nicht  
schlüssig, denn

1.5(ii)

QT bringt hier nichts!

können  $\theta = \frac{1}{2}$   
wählen

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

## 4.26 MOTIVATION (Dekimeldarstellung & $b$ -adische Entwicklung)

Als erste Anwendung des entwickelten Begriffssystems für Reihen werden wir nun die Dekimeldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren.

(i) Beginnen wir mit  $\mathbb{Q}$ : Im Alltag sind wir gezwungen, rationale Zahlen in Dekimeldarstellung zu schen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt 17,48 EUR. Die entsprechende Bruchzahl  $x \in \mathbb{Q}$  errechnet sich gemäß

$$x = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \frac{1748}{100}$$

(ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

(A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und  $x$  so als Limes einer (unendlichen) Reihe auffassen - und welche folgen  $x$  können wir so darstellen (mehr als  $\mathbb{Q}$ ?)

(B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen  $b \geq 2$  statt 10 ist leicht zu bewerkstelligen.

In diesem Rahmen (offizielle Def kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

4.27 DEF (b-odische Entwicklung)

Sei  $N \geq b \geq 2$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  und  $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ )

Basis  
Die Reihe

$$+ \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

Ziffern

heißt b-odische Entwicklung mit Ziffern  $a_n$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ )

4.28 BSP (b-odische Entwicklungen)

(i) Im Bsp in 4.26 ist  $b=10$ ,  $N=-1$ ,  $a_{-1}=1$ ,  $a_0=7$ ,  $a_1=4$ ,  $a_2=8$ ; nochmal

$$17,48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^2 a_n 10^{-n}$$

(ii)  $2^7=128$  diese hat 128 die Binärdarstellung ( $b=2$ )

$$128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-2} 1 \cdot 2^n$$

## 4.29 Motivation (Konkretisierung von (A) in 4.26(iii))

91

- Die Fragen in 4.26(ii) (A) können wie folgt konkretisiert werden
- Ist jede  $b$ -adische Entwicklung konvergent?
  - Kann jeder  $x \in \mathbb{R}$  als Limes einer  $b$ -adischen Entwicklung dargestellt werden?
  - Ist die Darstellung eindeutig?

## 4.30 BEIT (Unaendlichkeit $b$ -adische Entwicklungen)

Die Antwort auf 4.29(iii) ist negativ, wie das folgende Bsp zeigt ( $b=10$ )

$$0,9999\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-1})^n$$

$$\textcircled{SICHER} \quad = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{10-1} = 1 = 1,0000\dots$$

Zum Glück lautet die Antwort auf 4.29(i), (ii): JA

## 4.31 THM ( $b$ -adische Entwicklung reelle Zahlen)

Sei  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ , dann gilt:

- Jede  $b$ -adische Entwicklung konv. absolut.
- Jeder reelle Zahl  $x$  ist Summe (d.h. Limes) einer  $b$ -adischen Entwicklung (wobei die Ziffern rekursiv konstruiert werden können).

Beweis. (i) [Leicht & Vio geholt] Vn p. f.:

$|0_n b^{-n}| \leq (b-1) b^{-n}$  und  $(b-1) \sum b^{-n}$  ist konvergent

$$\overbrace{0_n \leq b-1}^{\text{f. h.}}$$

$\xrightarrow{\text{Djorante}} \text{G. Thm.} \Rightarrow \text{obs. konv.}$

(ii) [technisch anspruchsvoll ...]

Es genügt den Fall  $x \geq 0$  zu betrachten. Wir konstruieren eine  $b$ -adische Darstellung für  $x \in \mathbb{R}$

(1) Konstruktionsvorschrift

[Vollständig]

$$b \geq 2 \xrightarrow{1.5} \exists m \in \mathbb{N}: b^m > x \Rightarrow \exists m_0 = \min \{ m \in \mathbb{N} : x \leq b^{m+1} \}$$

$$\text{Sche } N = -m_0.$$

Wir konstruieren induktiv eine Folge  $0_n$  in  $\{0, 1, \dots, b-1\}$

sodass

$$\left. \begin{array}{l} \exists n \geq N \quad \exists \xi_n \text{ mit } 0 \leq \xi_n < b^{-n} \text{ und} \\ x = \sum_{k=N}^n \alpha_k b^{-k} + \xi_n \end{array} \right\} (*)$$

(2) Das genügt, denn  $(*) \Rightarrow \xi_n \rightarrow 0$  also

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k b^{-k}$$

was die Aussage (ii) berecht.

(3) Konstruktion.

Wir gehen induktiv vor und beginnen bei  $n=1$

Erinnerung: nächst kleinere Länge

[VE, Blatt 1, 16]

$$L[y] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[y] := \max \{ l \in \mathbb{Z} \mid l \leq y \}$$

$$\text{Es gilt } 0 \leq y - [y] < 1 \quad (\Delta)$$

$n = N!$  Def  $N \Rightarrow 0 \leq x b^N < b$ . Wir definieren  $\alpha_N \in \{0, 1, \dots, b-1\}^{93}$   
und  $\xi_N$  durch

$$\alpha_N := \lfloor x b^N \rfloor, \quad \xi_N := (x b^N - \alpha_N) b^{-N}$$

Dann gilt  $x = b \alpha_N + \xi_N$  und  $0 \leq \xi_N < b^{-N}$   
Also  $(*)$  für  $n=N$

$n \mapsto n+1$ : Aus  $(*)$  für  $n$  folgt  $0 \leq \xi_n b^{n+1} < b$   
Wir definieren  $\alpha_{n+1}, \xi_{n+1}$  durch

$$\alpha_{n+1} = \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := (\xi_n b^{n+1} - \alpha_{n+1}) b^{-n-1} \quad (A)$$

Dann gilt  $\xi_n = \alpha_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1}$  und daher

$$x = \sum_{k=N}^n \alpha_k b^{-k} + \alpha_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} \alpha_k b^{-k} + \xi_{n+1} \quad (A)$$

und

$$0 \leq \xi_{n+1} < b, \quad \text{also } (*) \text{ für } n+1.$$

□

4.32 KOR (Dichte von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , zum Dritten)

{ Jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist Limes einer Folge in  $\mathbb{Q}$  }

Vgl. mit  
1. Mitt.  
und 3. Satz

Beweis: 4.31  $\Rightarrow$  Dzimaldarstellung für  $x$ , d.h.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot 10^{-n}$$

Für jedes  $m$  ist die Partialsumme

$$S_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$$

und  $S_m \rightarrow x$ .

4.33 BEM. Sei  $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$  eine  $b$ -odische Entwicklung<sup>94</sup>  
 Man kann zeigen [Amann, Escher, Analysis I, II.7]   
 $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$  Die Ziffernfolge  $a_n$  ist ob einem KEN  
 periodisch, d.h.  $\exists K \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   
 $a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq K$   
 inkludiert den Fall,  
 dass fast alle  $a_n$  verschwinden,  
 die Entwicklung also obgleich.

#### 4.34 Motivation (Das Cauchy-Produkt für Reihen)

- (i) Um zu einer zweiten - noch viel wichtigeren - Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen nämlich der Exponentiellefunktion müssen wir uns nach Produkten von Reihen kümmern.
- (ii) Um lehrtre zu motivieren beginnen wir mit einer Überlegung zu Produktes endliche Summen.

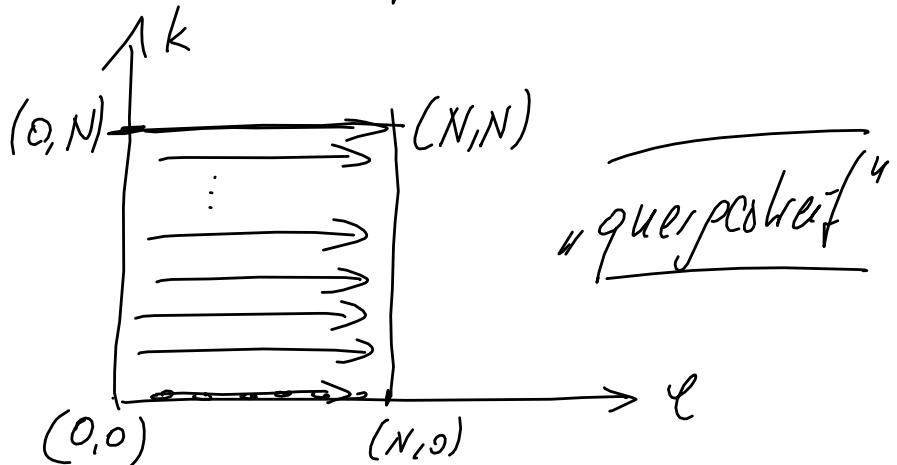
Seien  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$ ,  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left( \sum_{n=0}^N a_n \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n \right) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k b_l \quad (\star)$$

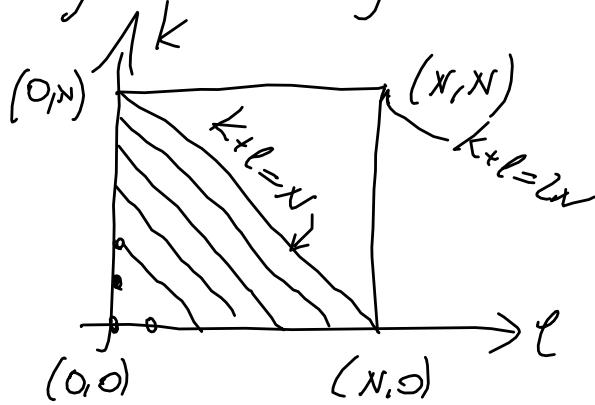
Für die Untersuchung der Konvergenz  $N \rightarrow \infty$  solcher Ausdrücke erwächst es sich als günstig, die Summation anders zu angeben. Am besten wird dies in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich:

Alles läuft darauf hinow in welche Reihenfolge  
wir die Indexpaare  $(k, l)$  in die Doppelsumme in (\*)  
abkloppern:

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \alpha_k b_l =$$



Es erweist sich für viele Anwendungen als prinzipiell  
längs der Diagonale zu laufen, zumindest bis wir  
die längste Diagonale  
erreichen ...



Wir verwenden folgende Ab-  
kürzung für Bereiche des  
Gitters  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =: \mathbb{N}^2$

$$Q_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq k, l \leq N\}$$

$$\Delta_N := \{(k, l) \in Q_N \mid k + l \leq N\}$$



Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned}
 A_N \cdot B_N &= \sum_{(k,l) \in Q_N} \alpha_k b_l = \underbrace{\sum_{(k,l) \in \Delta_N} \alpha_k b_l}_{\sum_{h=0}^N \sum_{k=0}^n \alpha_k b_{n-k}} + \underbrace{\sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} \alpha_k b_l}_{\sum_{h=0}^N \sum_{\substack{(k,l) \in Q_N \\ k+l=n}} \alpha_k b_l} = \\
 &= \sum_{h=0}^N \sum_{k=0}^n \alpha_k b_{n-k} + \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} \alpha_k b_l
 \end{aligned}$$

laufe längs der Diagonalen

(iii) Voraussetzung? Wenn  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergent und  $\text{v.r. } (\sum a_n)(\sum b_n)$  betrachten, dann müssen wir in obige Terminologie ein  $(A, B)$  bearbeiten. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist, dass

$$\sum_{(k,e) \in Q_N \times A_N} a_k b_e \rightarrow 0$$

und der erste Term abgesehen  $(\sum a_n)(\sum b_n)$  geht.

Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Schöne Formeln

(iv) Ja, und muß man das so machen?

Nun, jede Form des Durchlaufens ergibt bei obs. konv  $\sum a_n, \sum b_n$  eine obs konv. Reihe [Dazu P 116ff]

4.035 Prop (Cauchy-Produkt f. Reihen)

Seien  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \right)$$

Nicht vorgetragen  
Beweis. [Technisch]. Wir verwenden die Notation aus 4.35<sup>97</sup>.  
Sei  $S_N := \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , dann gilt

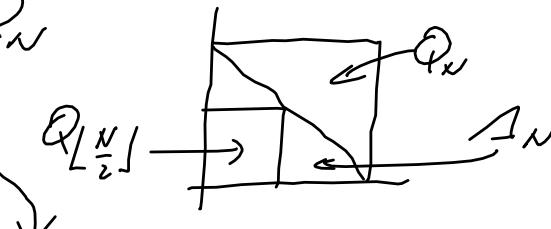
$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus A_N} a_k b_l$$

(1)  $\lim S_N = (\sum a_k)(\sum b_l)$ :

$$\text{Setze } A_N^* = \sum_{n=0}^N |a_n|, B_N^* = \sum_{n=0}^N |b_n| \Rightarrow A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l) \in Q_N} |a_k b_l|$$

Es gilt  $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subseteq A_N \subseteq Q_N$   
und damit

$$|A_N B_N - S_N|$$



$$\leq \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus A_N} |a_k||b_l| \leq \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k||b_l| \quad (*)$$

$$= A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor}^*$$

Nach Vorauss.  $(A_N^* B_N^*)_N$  konv  $\Rightarrow$  CF

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor}^* = 0$$

Wegen  $A_N \cdot B_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} S_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l)$

(2)  $\sum c_n$  konv. obsolet:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |a_k||b_{n-k}| \stackrel{(1) \text{ für } \sum |a_n|, \sum |b_n|}{\stackrel{\Longleftarrow}{\Rightarrow}} \text{konv.}$$

$\square$

Jetzt endlich zur Exponentialreihe

### 4.36 BETT (Exponentialreihe)

(i) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  abs. konv.,  
denn für  $x \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$

und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{\text{QT}}$  obs. konv.

für  $x=0$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

(ii) [Achtung: NEUE IDEE!]

Daher können wir eine Funktion definieren

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R},$$

offiziell:

### 4.37 DEF (Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und  $e := \exp(1)$  heißt Eulersche Zahl!

### 4.38 Notation (Funktionsgleichung für $\exp$ )

Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen  $\exp$ -Fkt folgen aus der Funktionsgl.  $\exp(xy) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ .

[Tatsächlich ist  $\exp$  dadurch und eine Beschränktheits-

bedingung schon eindeutig charakterisiert [Bauer-Flöhi, Sec 7.5]  
 Wir wollen sie jetzt ob Folgerung des dem Cauchy-Produkt herleiten

4.39 THT (Funktionalpl. für die exp-Fkt)

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y). \quad (4.2)$$

Beweis. 4.36  $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$  sind obs konv.

$$4.35 \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!} \quad (*)$$

Also

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

4.40 KOR (Wichtige Eigenschaften von exp) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\square$

$$(i) \exp(x) > 0$$

$$(ii) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$(iii) \text{Für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ gilt } \exp(n) = e^n$$

Beweis. (ii) Die Funktionalpl. (4.2) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \stackrel{(4.2)}{=} \exp(x) \exp(-x)$$

(i) Für  $x \geq 0$  gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0. \quad (*)$$

Für  $x < 0$  gilt  $\exp(x) = \frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{> 0}} > 0$

(iii) Wegen  $\exp(-n) = 1/\exp(n)$  [(ii)] genügt es die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$n=0$ :  $\exp(0) = 1 = e^0$

$n \mapsto n+1$ :  $\exp(n+1) \stackrel{(4.2)}{=} \exp(n)\exp(1) \stackrel{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$

#### 4.41 BEM & Differenziation



(i) Thm 4.39 und Kor 4.40(i) beweisen, dass  $\exp$  ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow ((0, \infty), \circ)$$

ist; vgl. [ETA, 5.2.62]

(ii) Zum Abschluß des § und des Kapitels beweisen wir nun eine probe aber doch nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe – später [WS] werden wir dies noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe]

4.42 PROP (Fehlerabschätzung für  $\exp$ ) Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Für alle

$x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

Wobei der „Rest“  $R_{N+1}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1 + N/2$

die Abschätzung  $|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$  erfüllt.

$N$ -te  
Partialsumme

VORLESUNGEN

Basis: Für den Restterms pilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Und letztere Reihe konvergiert absolut. [4.36(i)]

Daher gilt

$$|R_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right)$$

verallgemeinerte A-Ungl f. obs  
konv. Reihen:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$$\text{Ber. } \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{n=0}^N |a_n|$$

$$(N \rightarrow \infty) \downarrow \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{N+2} \right)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

$$|x| \leq \frac{N+2}{2}$$

4.43 BSP (Approximation für e) Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1)$$

und  $x=1 \leq 1+N/2$   $\forall N \in \mathbb{N}$ . Daher erhalten wir aus 4.42 für  $N=2$

$$e = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und

$$0 < R_3(1) \leq 2 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also inspiamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} \stackrel{2.83}{<} 3.$$

Tatsächlich gilt  $e \approx 2,71828$  [die ersten 100 Stellen erhalt man genau schon nach summation der ersten 73 Terme]

[2]

## STETIGE FUNKTIONEN

In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit FUNKTIONEN und zwar zunächst mit solchen von  $\mathbb{D}\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die folgende schöne Eigenschaft haben:

Kleine Änderungen der Argumente versachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sog. STETIGEN FUNKTIONEN haben einige hervorrende Eigenschaften, z.B.: Jeder stetige  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

- nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an (Wischenwerte)
- nimmt Maximum & Minimum an (Satz vom Max.).

Noch einem gründlichen Studium des STETIGKEITSBEGRIFFS lernen wir eine wichtige Klasse „infacher“ Funktionen kennen: die ELEMENTAREN TRANSZENDENTEN Funktionen.

Dazu gehört insbesondere die LOGARITHMUSFUNKTION, die die Umkehrfunktion der EXPONENTIALFUNKTION ist. Ebenfalls mittels exp erweitern wir zur Definition der allgemeinen POTENTZ  $r^s$  ( $r > 0, s \in \mathbb{R}$ ).

Dann erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen & Reihen auf den Fall komplexe Zahlen und erweitern über die komplexe EXPONENTIALFUNKTION zu den WINKELFUNKTIONEN SINUS & COSINUS.

# §1 STETIGKEIT

In diesem § lernen wir den essenziellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennen. Zuvor wiederholen wir Grundlegendes zu solchen Fkt.

## 1.1. Erinnerung (Funktionen)

Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  zwischen (beliebigen) Mengen  $A, B$  ordnet jedem  $a \in A$  genau ein  $f(a) \in B$  zu [ETA, 3.4.1]

Wir betrachten hier Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

Für solche Funktionen ist der Graph [ETA, 4.3.4]

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und kann in der „üblichen Weise“ gezeichnet werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von

## 1.2. Bsp (reelle Fkt)

„Dafür hätten wir den Begriff nicht gebraucht...“

### (i) Konstante Fkt.

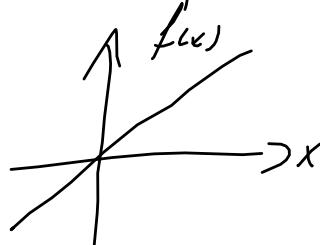
Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, dann definiert  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := c \quad \forall x \in \mathbb{R}$  eine konstante Fkt



### (ii) Die identische Abb auf $\mathbb{R}$ [ETA, p. 165]

ist gegeben durch  $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

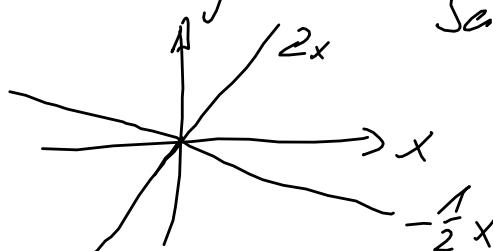
$$x \mapsto x$$



### (iii) Lineare Fkt sind Potenzfkt. 1. Ordnung.

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) = qx$$

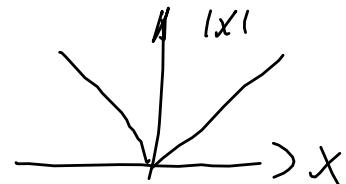
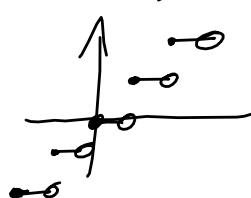


Sei  $q \in \mathbb{R}$  beliebig

Anstieg

(i) Die Betragsfunktion  $f_0$  [1.7]  $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 

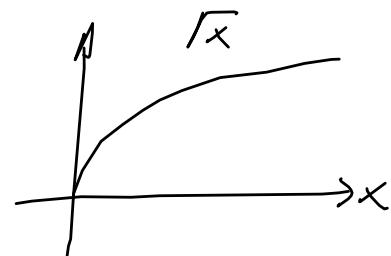
$$x \mapsto |x|$$

(ii) Die Gaußklammer  $L$   $J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  [UE, Blatt 1, 16]

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max \{ n \in \mathbb{Z}: n \leq x \}$$

(iii) Die Wurzelfkt.  $\Gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  [1.11(iii)]

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

(iv) Die Exponentialfkt. [1.4.37]

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$$

(viii) Polynomfunktionen [EN 1, p. 30] Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ , dann definieren wir  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch ( $x \in \mathbb{R}$ )

(Grad, falls  $a_m \neq 0$ )

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Koeffizienten

z.B.  $m=2, a_0=0, a_1=-1=a_2$

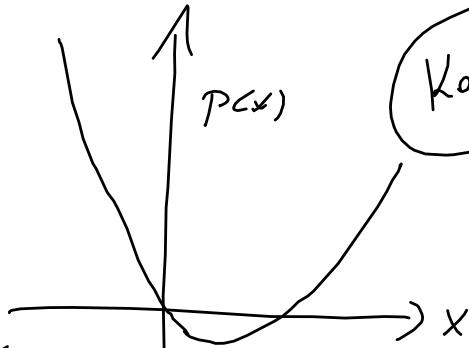
$$p(x) = -x + x^2$$

(ix) Rationale Fkt. Eine rationale Funktion ist ein Quotient zweier Polynome,

genauer sei  $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

$$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

und sei  $D := \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$ . Wir definieren

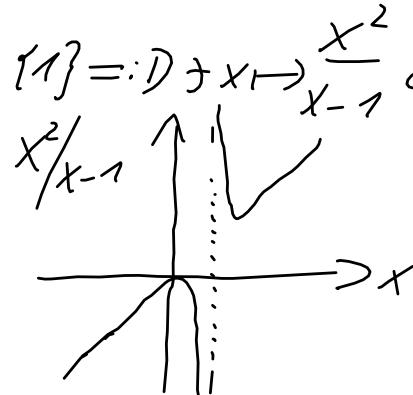
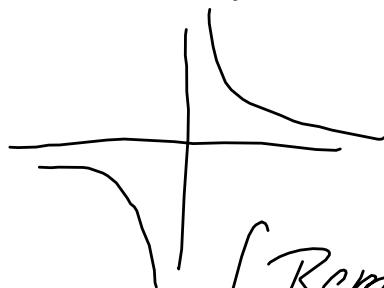


$$r: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

Ein Bsp einer rot. Funktion ist etwa  $\mathbb{R} \setminus \{1\} =: D \ni x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{R}^{105}$   
oder etwas einfacher mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$r(x) = \frac{1}{x}$$



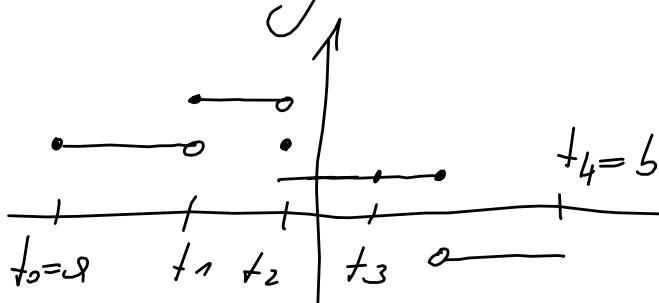
[Bemerkung Polynome sind rationale Fkt mit Nenner  $q(x) = 1$ .]

(x) Treppenfunktionen: Eine Fkt  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion, falls

- es eine endliche Partition des Intervalls  $[a, b]$  gibt  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$
- end. Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$

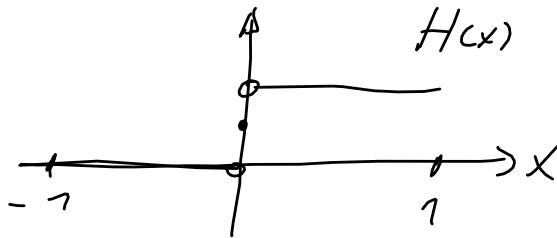
sodass  $\varphi(x) = c_k$  für  $x \in (t_{k-1}, t_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ )

[ $\varphi$  hat auf den offenen Teilintervallen  $(t_{k-1}, t_k)$  den Wert  $c_k$ ; die endlich vielen Werte  $\varphi(t_k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ) können beliebig sein.]



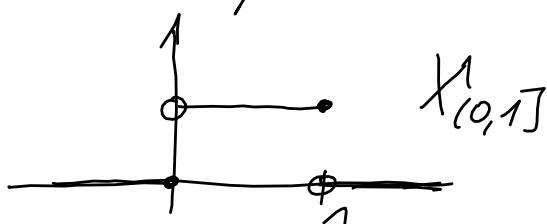
Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer  $\lceil (x) \rceil$  und die Sprungfunktion  $H(x)$  auf  $[-1, 1]$  mit  $t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$   
und  $H(0) := 1/2$

*Dies ist Willkür...*



(xi) Charakteristische Funktion einer Menge. Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$

dann definieren wir  $\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



So einfach das klingt, für  
höhere  $M$  kann das ja sehr  
unanschaulich werden, z.B.  $M = \mathbb{Q}$

Dirichlet-Fkt

$$A(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{f(p, 1) : p \in \mathbb{Q}\} \cup \{f(r, 0) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

### 1.3 FAKTENSAMMLUNG (Grundoperationen mit Funktionen)

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben kompliziertere Funktionen aus einfacheren Bausteinen zu bestehen - diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue obwesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in  $\mathcal{D}$  (Hilberträume der Fkt) verwendet werden um Operationen für die Fkt selbst zu definieren - letzteres Konzept werden wir bald als wesentlicher Verknappungsschritt lernen.

Seien also  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen auf  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und sei  $\mathcal{D}$ .

(i) Die Funktionen

$$f \pm g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cdot f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ and } f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

sind in Formen der punktfreien Operationen in  $\mathcal{D}$  definiert, d.h.

$$\left\{ \overbrace{f(x)}^{\forall x \in D} \right\}$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

neues + zwischen Fkt

+ in  $\mathbb{R}$

$$(d \cdot f)(x) = d \cdot f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

def. 10  
Schreibweise  
statt  $f+g(x)$   
 $(f+g)(x)$   
etc...

[Nebenbemerkung: Die Menge  $F(D) := \{f: D \rightarrow \mathbb{R}\}$  ist mit  $+$ ,  $\cdot$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum]

(ii) Sei  $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ . Die Quotientenfunktion von  $f$  und  $g$  ist definiert durch

$$\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}; \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  sodass  $f(D) \subseteq E$  und  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

des Bildes  
von  $D$  unter  
 $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq E$   
[EVA, 6.3.13]

Dann können wir die Verknüpfung (Zusammensetzung, Komposition) von  $f$  mit  $h$  definieren ob ([EVA 6.3.13])

$$h \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}; \quad h(f(x))$$

1.6.4 Bsp (Ops f. Fkt)

(i) Für  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = x^2 \text{ gilt}$$

hier muss  $f(x) \in E$  sein, sonst kann  $h$  nicht anwenden

$$g(x) = \text{id} \cdot \text{id}(x) \quad [\text{id}(x) = x]$$

(ii) Allgemein lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

Konst.  
Fkt

$$P(x) = \vartheta_m x^m + \vartheta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \vartheta_1 x + \vartheta_0, \text{ also}$$

$$P = \vartheta_m \underbrace{(\text{id} \cdot \text{id} \cdot \dots \cdot \text{id})}_{m-\text{mal}} + \dots + \vartheta_1 \cdot \text{id} + \vartheta_0 \cdot X_m \quad \text{Konst. Fkt 1}$$

(iii) Mit  $g$  wie in (ii) gilt  $\Gamma \circ g = 1_1$ , denn

$$(\Gamma \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

## 1.5 Notation (Stetigkeit)

(i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

Eine kleine Änderung der Stelle soll ( $f(x)$ ) }  
nur eine kleine Änderung der Funktionswerte }  
zur Folge haben.

natürliche  
intuitive  
Vorstellung

Genauer: falls  $x$  nahe  $x_0$  liegt, dann sollte  $f(x)$   
nahe bei  $f(x_0)$  liegen.

(ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in den Anwendungen wichtig. Am Bsp des Fahrradfahrens [10] 0.3]:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden,  
wenn ich nur ein bisschen schneller fahre

[zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe [Behrendt, p. 198].]

Anderseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft klar nicht erfüllt ist: Die Farbe der Ampel als Fkt. der Zeit. Genauer, sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \\ & \text{rot ist.} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \\ & \text{grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Funktionspunkt  $f_0$ , an dem die Anzahl<sup>109</sup> unbeschwert: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Fkt nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

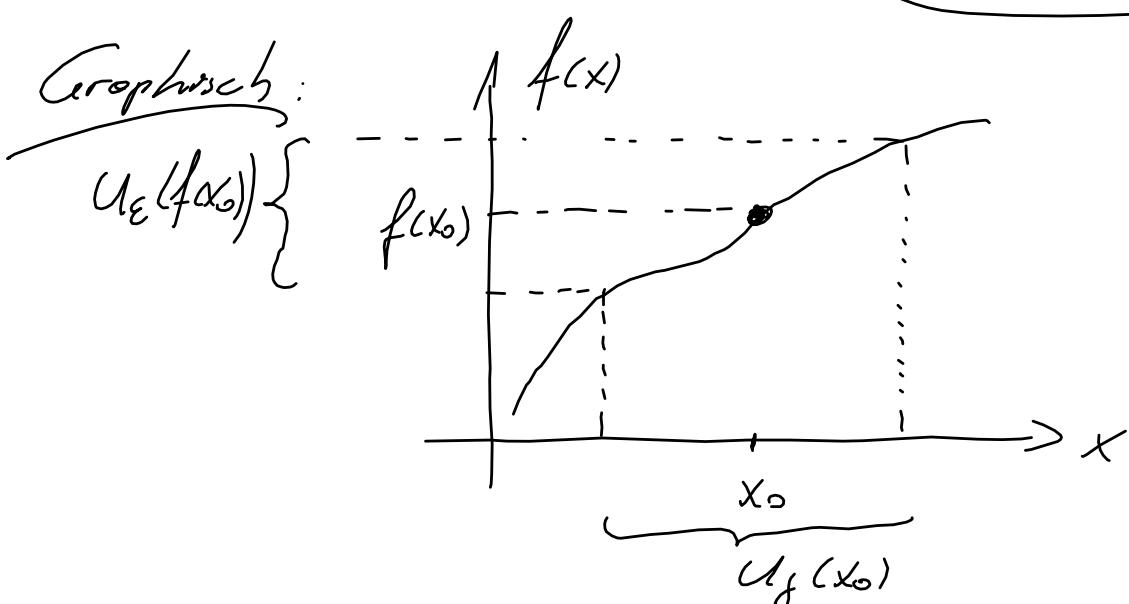
(iii) Wir beginnen nun die induktive Idee der Schärfe von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in D$  zu formalisieren:

Es scheint wünschenswert zuerst eine Toleranzgrenze für die Funktionswerte vorzugeben ohne eine beliebige  $\varepsilon$ -Umpackung von  $f(x_0)$  und dann zu fordern, dass es ein "Sicherheitsintervall"  $U_f(x_0)$  um  $x_0$  geben soll, sodass

$$|x - x_0| < \delta \text{ ergibt, dass } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$x$  im Sicherheitsintervall  
um  $x_0$

$f(x)$  innerhalb der  
Toleranzgrenze um  $f(x_0)$



Der Kern der Formulierung ist: für jede (noch so kleine) Toleranz  $\varepsilon$  gibt es ein  $\delta$ -Sicherheitsintervall; offiziell

1.6. DEF (Stetigkeit)  $\leftarrow$  mindestens so wichtig wie Grundwelt def 110

Sei:  $D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und sei  $x_0 \in D$  eine Stelle im Definitionsbereich.

(i)  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , falls

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D \text{ mit} \\ (1.1) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

(ii)  $f$  heißt stetig (auf  $D$ ), falls  $f$  stetig in jedem  $x_0 \in D$  ist.

1.7 Beisp. (Für Stetigkeit)

(i) Offensichtliche Umformulierungen der Stetigkeit im Punkt  $x_0$  sind

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad x \in U_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(f(x_0))$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(U_{\delta}(x_0)) \subseteq U_{\varepsilon}(f(x_0))$$

Bild von  $U_{\delta}(x_0)$  unter  $f$

(ii) Will ich konkret für  $x_0 \in D$  zeigen, dass  $f$  dort stetig ist, dann muß ich

für jede noch so kleine Toleranz  $\varepsilon$   
um  $f(x_0)$

ein entsprechendes Sicherheitsintervall  $U_{\delta}(x_0)$  finden (können)  $[f(\xi)]$

sodass  $|x - x_0| < \delta$  die Abschätzung  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$  ergibt.

Im allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls  $\delta$  von der (zuvor festgelegten) Toleranz  $\varepsilon$  abhängen, also  $\delta(\varepsilon)$ .

Grosse FETTE WARENKURS: Niemals darf man sich  
 ~~$\varepsilon(\delta)$~~  von  $\delta$  abhängen  
 (vgl. [1] 2.9)

### 1.8 BSP (stetige Funktionen)

(i) Konstante Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = c \quad \text{für ein fixes } c \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt  $\forall x_0 \in D \forall x \in D |f(x) - f(x_0)| = 0$ ,  
 also (1.1)  $\forall \varepsilon > 0$  mit  $\delta > 0$  beliebig

Sobald  
 dass  $\delta$  unabhängig  
 von  $\varepsilon$  und  $x_0$   
 gewählt  
 kann

(ii) Lineare Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defber.)

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \varrho x$  für ein  $\varrho \in \mathbb{R}$

Vorüberlegung: falls  $\varrho = 0$  liegt eine konst. Fkt  $f(x) = 0$   
 vor und diese ist noch (i) stetig

Sei also  $\varrho \neq 0$ . Wir müssen  $|f(x) - f(x_0)|$  abschätzen. Es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |\varrho| |x - x_0|$$

Wir müssen also  $f$  nur  $\varepsilon / |\varrho|$  wählen.

Sobald  
 dass  $\delta$  unabh.  
 hängt von  
 $x_0$  gewählt  
 werden kann

Nun zum Beweis: Sei  $\delta_0 \varepsilon > 0$ . Wöhle  $\delta = \varepsilon / |\varphi| (> 0)$   
dann gilt  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x_0 - x| < \delta$

$$\underbrace{|f(x_0) - f(x)|}_{\text{Definition}} = |\varphi| |x - x_0| < |\varphi| \frac{\varepsilon}{|\varphi|} = \varepsilon.$$

(iii) Die Exponentialfunktion ist stetig (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ )

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig und sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt

$$\underbrace{|\exp(x) - \exp(x_0)|}_{\text{Definition}} = \underbrace{|\exp(x - x_0 + x_0) - \exp(x_0)|}_{\exp(x-x_0) \cdot \exp(x_0)} (\text{II}, 4.39)$$

$$\stackrel{\text{II}, 4.60(i)}{=} \exp(x_0) \underbrace{|\exp(x_0 - x) - 1|}_{(*)}$$

Für müssen also  $|\exp(x-x_0) - 1|$  für  $x$  nahe  $x_0$  abschätzen,  
also  $|\exp(y) - 1|$  für  $y$  nahe 0; das erledigt obv II, 4.62  
mit  $N=0$  für uns

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \implies$$

$$|\exp(y) - 1| = |R_1(y)| \leq 2|y| \text{ falls } |y| < 1 \quad (***)$$

Sei also  $\delta := \min\{1, \varepsilon / (2 \exp(x_0))\}$ . Dann gilt  $\forall |x - x_0| < \delta$

$$\underbrace{|\exp(x) - \exp(x_0)|}_{\text{Definition}} \stackrel{(**)}{=} \exp(x_0) \underbrace{|\exp(x-x_0) - 1|}_{\text{Definition}} \stackrel{(***)}{\leq} \exp(x_0) 2|x - x_0| \stackrel{(*)}{<} 2 \exp(x_0) \delta \leq \varepsilon.$$

Wcl Anschl  
 $a = \pm 1$   
vgl. (ii)

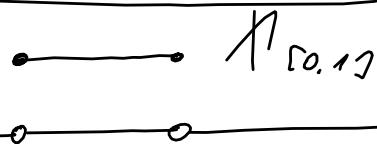
(iv) Der Betrag ist stetig (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ ) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ; schreibe  $\delta = \varepsilon$ ,  
dann gilt  $\forall |x - x_0| < \delta$  (verdeckt 1-4c)

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

(V) Sprünge sind nicht stetig

$$\text{Sei } f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erzbispiel anschließender Flkt 113



Dann ist  $f$  unstetig bei  $x_0 = 0$ :  
 und ebenso bei  $x_0 = 1$ ;  
 $f(0) = 1$  aber beliebig nahe „links“ von  $x_0 = 0$  gilt  $f = 0$ ; aber vollständig? ein konstante Flkt ist stetig?  
 muß schief gehen...

Sei also  $\varepsilon = 1/2$ , dann gilt  $\nexists \delta > 0$  (es gibt wie klein?)

$$\exists x \in U_\delta(0), x < 0 \quad \begin{array}{c} (+) \\ x_0 = 0 \end{array}$$

und somit  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > 1/2 = \varepsilon$ .

## 1.8. Bem (Stetige und unstetige Flkt)

(i) Wie wir es in 1.8(V) gelernt haben muß für einen Beweis der Unstetigkeit einer Flkt  $f$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  nur ein „Versager- $\varepsilon$ “ angegeben werden (vgl. 1.7.2.P.(ii))  
 Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (1.1)

$$\neg (\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

$$= \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad \begin{array}{l} \exists x \in D \\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \end{array}$$

Es gibt zumindest eine  $\varepsilon$ -Toleranz

Sodass es pol. wie klein des Sicherheitsintervall  $U(x_0)$  gewählt ist

Es immer noch zumindest ein  $f \in U(x_0) \cap D$  gibt

Sodass  $f(x)$  nicht im Toleranzintervall  $U(x_0)$  liegt

(ii) Wie schon in 1.7(ii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung (1.1)

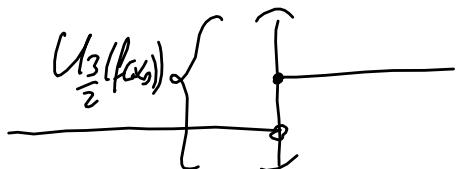
zuerst die Toleranz  $\epsilon$  vorgegeben wird

und erst dann das Sicherheitsintervall gefunden werden muss.

Kehrt man dies falschvoraus um zu

$$(*) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists \epsilon > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

dann wäre z.B. der Sprung in 1.8(iv) stetig. Tatsächlich brauche ich nur  $\epsilon > 1$  zu wählen:



Erhält sich  
auch, falls in  
(1.1) im Hinweis  
Teil  $\epsilon$  mit  
 $\delta$  vertauscht  
wird?

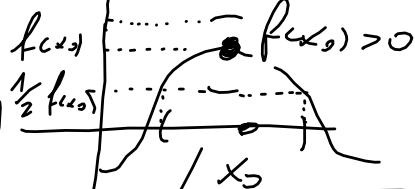
(iii) Die Funktionswerte  $f(x)$  einer bei  $x_0$  stetigen Fkt  $f$  bleiben also für  $x$  nahe bei  $x_0$  in der Nähe von  $f(x_0)$ . Anders ausgedrückt falls  $f(x_0) \neq c$ , dann bleibt  $f(x)$  nahe bei  $x_0$  auch weg von  $c$ . Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden – oft sehr brauchbaren – Lemma für  $c = 0$ ; die allgemeine Föld folgt sofort durch Verschieben des Graphen.

1.10 LEMMA (Nichtverschwinden auf Ump.)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$  und sei  $f(x_0) \neq 0$ .

Dann  $\exists \delta > 0$  so dass auch

$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$  gilt dass  $f(x) \neq 0$ .



Umpföbung von  
 $x_0$  auf der  $f \neq 0$   
(weil  $> f(x_0)/2$ )

Beweis.  $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$

(1.1)  $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$

Daher gilt  $\forall x \in (x_0, \delta) \cap D$  verkehrte A-Upc

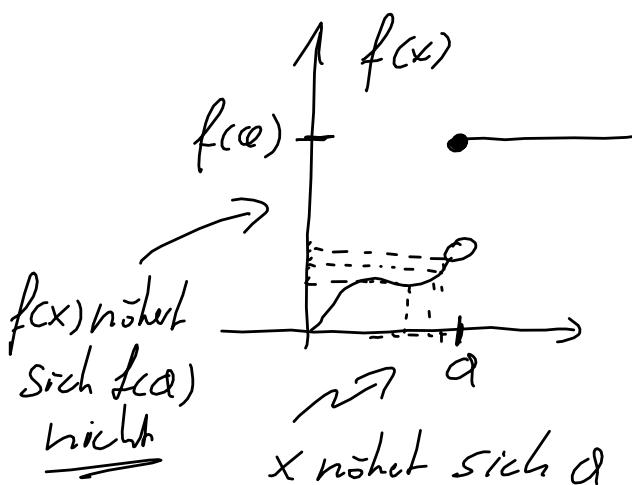
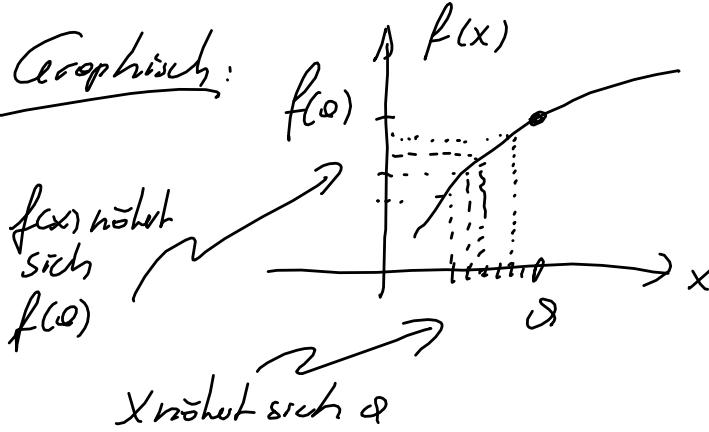
$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| \\ \text{Trick} \nearrow & \\ &\geq |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0 \end{aligned}$$

## 1.1 Motivation (Stetigkeit und Folgen)

Die intuitive Idee der Stetigkeit von  $f$  in einem Pkt  $a \in D$  lässt sich wie folgt umformulieren

| Es gilt wie sich  $x$  an  $a$  annähert,  
es nähert sich  $f(x)$  an  $f(a)$  an

Geographisch:



Diese Idee lässt sich mittels Folgen präzisieren:

$\forall$  Folgen  $x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$ , bzw.

$\forall$  Folgen  $x_n \rightarrow a: \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

und sie funktioniert auch, wie die folgende essentielle Thm lehrt

f vertauscht mit limiten

1.12 TH) (Stetigkeit via Folgen) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  
 $\exists \alpha \in D$ . Dann gilt

ist stetig in  $\alpha$   $\Leftrightarrow$  Für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt  
 $x_n \rightarrow \alpha \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\alpha)$ .

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim x_n = \alpha$ . Wir müssen zeigen, dass  $\lim(f(x_n)) = f(\alpha)$  gilt. Sei also  $\varepsilon > 0$

$$\stackrel{(1.1)}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(\alpha): |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\stackrel{x_n \rightarrow \alpha}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: |x_n - \alpha| < \delta \quad (**)$$

$$\text{Dann } \stackrel{(**)}{\forall n \geq N} \Rightarrow |x_n - \alpha| < \delta \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |f(x_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

$$\text{Also } \lim(f(x_n)) = f(\alpha)$$

" $\Leftarrow$ ": Angenommen  $f$  ist unstetig bei  $\alpha \in D$ . Wir konstruieren eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \alpha$  aber  $f(x_n) \not\rightarrow f(\alpha)$ .

Unstetigkeit bei  $\alpha \Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(\alpha) \cap D: f(x) \notin U_\varepsilon(f(\alpha))$$

Wir fixieren dieses  $\varepsilon$  und wählen sukzessive  $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ).

Damit erhalten wir eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit ( $n \geq 1$ )

- $x_n \in U_n(\alpha)$ , d.h.  $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$  also  $x_n \rightarrow \alpha$  aber
- $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(\alpha))$ , d.h.  $|f(x_n) - f(\alpha)| \geq \varepsilon$ ,

also  $f(x_n) \not\rightarrow f(\alpha)$ . ]

## 1.13 Ben (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit)

Nicht von rechten

(i) Für Terminologie: Bedingung (1.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren; man spricht daher von Umgebungsstetigkeit. Die v.S. in Thm 1.12 hingegen verwenden Folgen und man spricht von Folgenstetigkeit.

(ii) Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken

↳ vertauscht mit Limiten  $\left[ f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \right]$

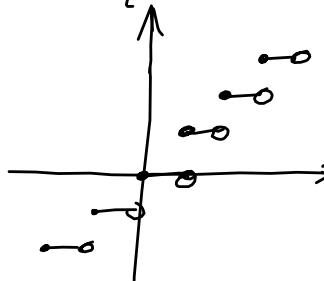
(iii) Thm 1.12 besagt in diese Terminologie, dass (für Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind. Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (oder wichtigeren) Mengen ist das nicht der Fall;  $\Rightarrow$  gilt immer,  $\Leftarrow$  ist i.o. falsch!

(iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und ob Unstetigkeitsstellen entfernen.

## 1.14 BSP (Sprünge)

(i) Die Gaußklammer ist stetig in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und unstetig in jedem

$$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$



$$\vartheta \in \mathbb{Z}:$$

Sei  $\vartheta \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor \vartheta \rfloor = \vartheta$  und die Folge  $x_n = \vartheta - \frac{1}{n}$  erfüllt  $x_n \rightarrow \vartheta$

aber  $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor \vartheta - \frac{1}{n} \rfloor = \vartheta - 1$  daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor x_n \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta - 1 = \vartheta - 1 \neq \vartheta = \lfloor \vartheta \rfloor = \lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rfloor$$

- Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  gilt  $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$ . Daher gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow a$ :  $\exists N_0 \forall n \geq N_0 : \lfloor a \rfloor < x_n < \lfloor a \rfloor + 1$   
 $\Rightarrow \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor \forall n \geq N_0$  und somit  $\lim \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor = \lfloor \lim x_n \rfloor$ .

(ii) Die Dirichletfkt  $X_Q$  ist unstetig in jedem  $x \in \mathbb{R}$

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Wir unterscheiden die Fälle

- (1)  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Dann ist  $X_Q(a) = 0$ . Wegen der Dichte hat  $(\overline{\text{D.M.(ii)}})$  von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  können wir in jedem Intervall  $I_\delta(0) = (0-\delta, 0+\delta)$  eine rationale Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  finden, d.h.  $\forall \delta > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |q - 0| < \delta$  also klarweise gilt

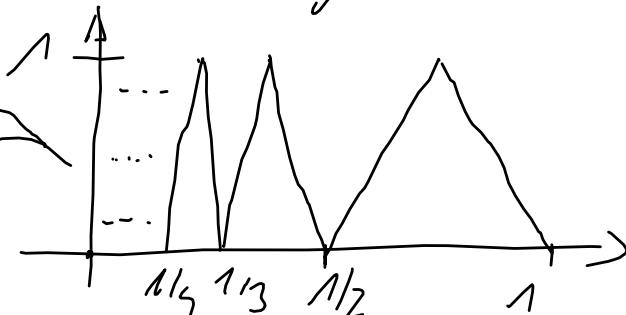
$$|X_Q(q) - X_Q(0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

- (2)  $a \in \mathbb{Q}$ : Dann ist  $X_Q(a) = 1$ . Wegen der Dichte hat von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$   $(\overline{\text{D.M.(ii)}})$  gilt völlig analog zu Fall (1):  $\forall \delta > 0 \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |r - a| < \delta$  und dann  $|X_Q(r) - X_Q(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ .

### 1.15 WARNUNG (Für Stetigkeit)

- (i) Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit

Auch „wilde Oszillation“ führt zur Unstetigkeit, denn sei z.B.  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(0) = 0$  und sonst durch die unten dargestellten immer schmäler werdenden Zacken:



$\forall x_0 > 0$  gilt:  $f$  stetig in  $x_0$  (vgl. 1.8(iii) und 1.8(iv))

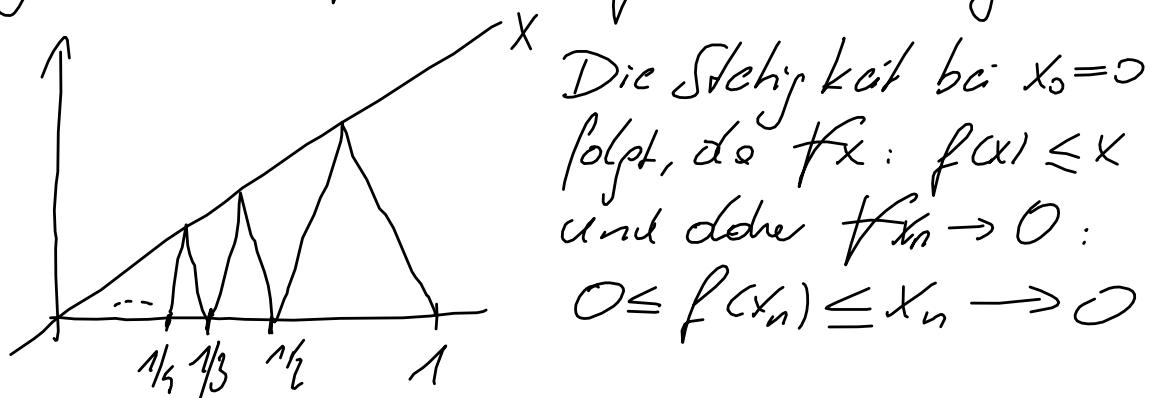
Kontinuität kann explizit aufschreiben, bringt aber keine bessere Einsicht

Dann gibt es für jedes  $c \in [0, 1]$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $f(x_n) = c \neq f_0$ . Dafür ist  $f$  in 0 nicht stetig, obwohl  $f$  dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

(ii) Folgende „Markgraf“, die auch in Schulbüchern zu finden ist, ist sehr problematisch:

?) Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn man sie ohne Abszissenzeichnen kann.

Erstens ist nicht klar, was das heißen soll. Zweitens ist etwa folgende Modifikation von  $f$  aus (i) stetig auf  $[0, 1]$ .



Beim Zeichnen erkennt sich aber das Problem, dass die Länge des Graphen nicht endlich ist, also wirklich alle Blauhüte dieser Welt verbraucht worden sind, bevor  $x_0=0$  erreicht wird. Genauer gilt für die Länge des Graphen von  $x=1$  (noch links) bis  $x=\frac{1}{n}$

$$\ell\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \text{ divergent nach G.7(ii)}$$

Die Länge von  $\frac{1}{k-1}$  bis  $\frac{1}{k}$  ist sicher größer als 2x die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion, also  $2 \cdot \frac{1}{k}$

(iii) Es gibt Monster. So onschochlich die Def der Jhjigkeit<sup>120</sup>  
 auch sein mög - es gibt völlig un-  
 onschochliche „Monster-Funktionen“ mit sehr eigenartigen  
 Stetigkeitsverhalten. So gibt es z.B. eine Funktion  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die in allen irrationalen Pkten stetig ist  
 in allen rationalen Pkten aber unstetig.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ob

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit} \\ & \text{minimalem } p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

(1)  $f$  ist unstetig in allen  $x_0 \in \mathbb{Q}$ : Sei  $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  
 dann setze  $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{q}$ . Wäl  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  nicht liegt  
 ( $\exists$ ) 1.M(iii) gilt  $\nexists \delta > 0$   $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $|x - x_0| < \delta$   
 aber  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q}| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \frac{1}{p} = \varepsilon$

(2)  $f$  ist stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Sei  $\varepsilon > 0$  gewählt.

Von allen Zahlen  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$  liegen in  
 jedem Intervall nur endlich viele und keiner davon  
 ist gleich  $x_0 (\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

$\Rightarrow \exists$  ein  $\frac{p_0}{q_0}$ , das  $x_0$  am nächsten liegt.

Definiere  $\delta = |x_0 - \frac{p_0}{q_0}|$ . Nun gilt  $\forall x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ ,  
 dass  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , dann folgt

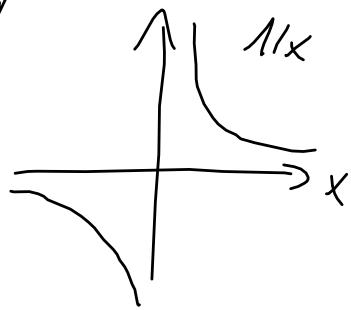
•  $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$

•  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p'}{q'} \text{ (gekürzt)} \text{ mit } q' > \frac{1}{\varepsilon} \quad [\text{dann ist}]$   
 $q' \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{q'} < \varepsilon \quad \text{und daher}$   
 $|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q'}| = \frac{1}{q'} < \varepsilon$ .

nicht ragetragen

(ir) Offensichtlicher Unfall: Wir betrachten die Fkt <sup>121</sup>  
 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$  (1.2(i))

Ist  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  stetig?



Diese Frage ist Unfall, weil  $x_0 = 0 \notin D$ , daher ist  $f$  in  $x_0$  gar nicht definiert und die Frage nach der Stetigkeit kann gar nicht gestellt werden. Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass alle rationalen Funktionen auf ihrem gewöhnlichen Definitionsbereich stetig sind.

### 1.16 MOTIVATION (Grundoperationen und Stetigkeit)

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der Grundoperationen für Funktionen aus 1.3 bedienen ( $\pm, \cdot, :, -$ ) und zeigen, dass diese aus stetigen Fkt wiederum stetige Fkt machen. Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine sehr elegante Methode zum Bestimmen vieler neuer stetiger Fkt.

### 1.17 PROP (Grundop f. stetige Fkt.) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ .

(i) Falls  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $d \in D$  sind, dann sind auch  
 $f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad df: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad fg: D \rightarrow \mathbb{R}$

stetig in  $d$ . Falls  $\delta \in D := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , dann  
 ist auch

$$\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $d$ .

(ii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subseteq E$  und  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Folks  $f$  stetig in  $a \in D$  und  $h$  stetig in  $b := f(a) \in E$  dann ist auch die Zusammensetzung

$$\text{hof}: D \rightarrow \mathbb{R} \quad [D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq E \xrightarrow{h} \mathbb{R}]$$

stetig in  $a$ .

Beweis (i) Wir bereisen nur die Aussage für die Summe; die anderen Fälle sind ähnlich [ $\cup E$ ]

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Wir zeigen  $(f+p)(x_n) \rightarrow (f+p)(a)$ , woraus mit 1.12 die Stetigkeit von  $f+p$  in  $a$  folgt.

$$(f+p)(x_n) \stackrel{1.3c_i}{=} f(x_n) + p(x_n) \xrightarrow[\text{f. p stetig}]{1.3c_i} f(a) + p(a) \stackrel{1.3c_i}{=} (f+p)(a) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Wir veruchen so wie oben 1.12. Sei also  $(x_n)$  Folge in  $D$ ,  $x_n \rightarrow a$ .

$$f \text{ stetig in } a \stackrel{1.12}{\implies} f(x_n) \rightarrow f(a) = b$$

$\Rightarrow (y_n) := (f(x_n))$  ist Folge in  $E$  mit  $y_n \rightarrow b$

$$h \text{ stetig in } b \stackrel{1.12}{\implies} h(y_n) \rightarrow h(b)$$

Also insgesamt

$$(\text{hof})(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \rightarrow h(b) = h(f(a)) = (\text{hof})(a)$$

1.18 Kor (Stetigkeit v. Polynomen & rot. Fkt)

□

{ Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gewöhnlichen Definitionsbereich.

Beweis: [vgl. Motivation 1.16]

Polynome sind endliche Summen und/oder Produkte konstanter Fkt mit id [1.6(iii)]. Alle "Baukästen" sind stetig [1.8(c), 1.8(ii) mit  $\varrho=1$ ], daher folgt aus 1.17(i)  $[+, \cdot]$  die Stetigkeit von Polynomen in jedem Pkt ihres Definitionsbereichs.

Rationalen Fkt sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, wo der Nenner nicht verschwindet [1.2(ix)]. Polynome sind noch objektiv stetig auf ihrem Definitionsbereich also nach 1.17(ii)  $[ \ ]$  auch rot. Funktionen in jedem Pkt ihres Definitionsbereichs.

]

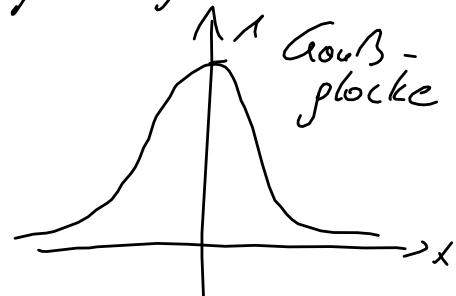
### 1.18 BSP (Stetige Fkt aus 1.17)

(i)  $p(x) = -x^2$  ist als Polynom stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  [1.18]  $\exp$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$  [1.8(iii)]. Also gilt wegen 1.17(iii)

$$\exp \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

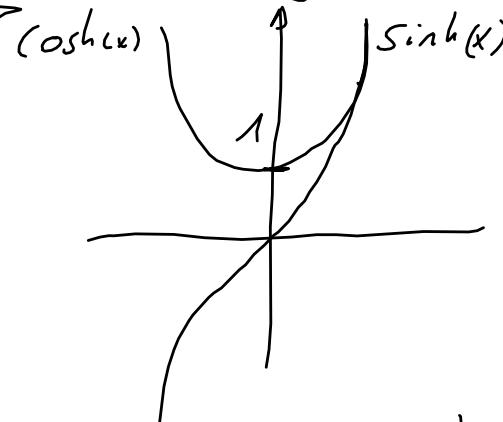
$$x \mapsto \exp(-x^2)$$

ist stetig auf  $\mathbb{R}$



(ii) Der hypabolische Sinus & Cosinus sind stetig  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$



$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

Diese Fkt parametrisieren die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  in Analogie zum Kreis  $x^2 + y^2 = 1$   $\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases}$ .

$$\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \\ [VE] \end{cases}$$

## 1.20 Motivation (Grenzwert von $f$ ist)

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitbegriffs führen.

Genauer wollen wir eine  $f$  entlang beliebiger konvergenter Folgen  $(x_n)$  in  $D$  auswerten also  $f(x_n)$  betrachten. Diese Idee liegt sehr nahe zur Folgenstetigkeit, vgl. 1.11, 1.12).

Als technischer Punkt ergibt sich, dass eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$ , die (als Folge in  $\mathbb{R}$ ) konvergiert (zu  $x$  ins)

nicht notwendig muss in  $D$  liegen müssen, z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1] \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1].$$

Grenzwerte von Folgen in  $D$ , die (in  $\mathbb{R}$ ) konvergieren sind die sogenannten Berührpunkte (vgl. 1.17 3.27) von  $D$  [17] Prop. 3.30(c)].

Die grundlegende Def ist daher:

1.21 DEF (Grenzwert einer Fkt) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt und sei  $\vartheta$  ein Berührpunkt von  $D$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \vartheta} f(x) = c, \quad \text{falls für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow \vartheta \text{ gilt, dass } f(x_n) \rightarrow c$$

$c \in \mathbb{R} \text{ oder } \pm \infty$

## 1.22 BEOBACHTUNG (Zum Grenzwert von Fkt)

- (i) Wie in 1.20 wiederholt gibt es wegen 1.17 3.30(c)
  - für jeden Berührpunkt  $\vartheta$  von  $D$  mindestens eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \vartheta$  [i.e. wieder über viele solcher Folgen gehen ...]

(ii) Wie oben gesagt, muß  $a$  nicht in  $D$  liegen. Folglich dem der so ist, so ist  $x_n = a + \epsilon_n$  ( $\epsilon_n$  die konstante Folge  $\epsilon_n = 0$ ) eine gemäß Def 1.21 erlaubte Folge. Folglich dann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  überhaupt existiert, muß er schon  $f(a)$  sein [dann  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x_n = a}} f(x_n) = \lim f(a) = f(a)$ ]

### 1.23 Bsp (lineare rationale Fkt)

(i)  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

denn sei  $x_n \in \mathbb{D} \Rightarrow x_n \neq 1 \forall n$  und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

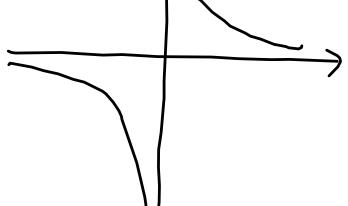
Lst ja nur eine  
verkoppelte lineare Fkt

(ii)  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1/x$$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  weil z.B.  $f(1/n) \rightarrow \infty$ ,  $f(-1/n) \rightarrow -\infty$

Wir sollten also unseren Begriff erweitern:



(1) Wir brauchen einen Begriff, der auch "einschichtig" Annähern erlaubt, also Folgen  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$  bzw  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n < 0$

(2) Wir sollten auch Grenzwerte für  $f$  längs Folgen  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $x_n \rightarrow -\infty$  zulassen.

Also formalisieren wir wie folgt

### 1.24 Def (einschichtig & unendliche Grenzwerte v. Fkt)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

(i) Sei  $a$  ein Berührpunkt von  $D \cap (0, \infty)$ . Wir schreiben

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  oder  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c$  rechtsseitig  
 $c$  ist der rechtsseitige Grenzwert von  $f$  gegen  $a$ , falls

für alle Folgen  $(x_n)$  in  $D$ ,  $x_n > a$ ,  $x_n \rightarrow a$ :  $\lim_{x_n \rightarrow a} f(x_n) = c$  gilt

(ii) Analog dazu definieren wir den linksschreitigen  
 $\lim_{x \rightarrow a}$   $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

(iii) Falls  $D$  noch oben unbeschränkt ist und für  
jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt, dass  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$   
dann schreiben wir

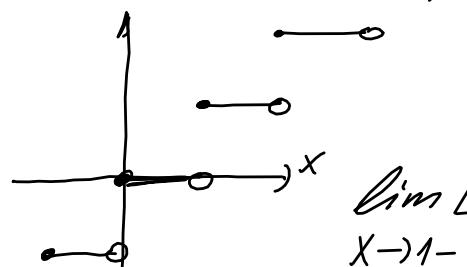
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

(iv) Analog definieren wir  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  für noch unten unbo-  
schränkte Definitionsbereiche  $D$ .

### 1.25 Bsp (Nachmals Grenzwerte von Fkt)

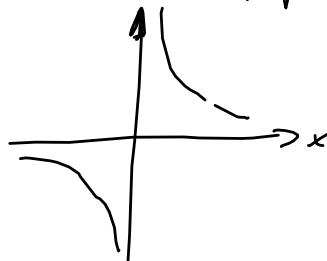
(i)  $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$$



$$0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$$

(ii)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 1/x$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 > x_n &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow f(x_n) &= 1/x_n \rightarrow -\infty \end{aligned}}$$

(detho M) 2. G7(iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\forall k > 0 \exists N \forall n \geq N |x_n| > k \Rightarrow |1/x_n| < 1/k$$

(iii) Sei  $m \geq 1$  und  $p(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$  ein

Polynom. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{p(x)} = 0$$

Untersuchung gilt:

$$p(x) = x^m \left(1 + \frac{\alpha_{m-1}}{x} + \frac{\alpha_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_0}{x^m}\right) \geq x^m \left(1 - \frac{|\alpha_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|\alpha_0|}{|x|^m}\right)$$

Sei  $x \geq M := 2m \cdot \max(1, |\alpha_{m-1}|, \dots, |\alpha_0|)$  dann gilt

$$p(x) \geq x^m \left(1 - m \frac{1}{2^m}\right) = \frac{x^m}{2^m} \quad (*)$$

Sei nun  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \geq M \forall n \geq N$

und somit

$$p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2^m} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ .

Um die 2. Behauptung zu zeigen bemerke dass (\*) impliziert, dass  $p(x) \geq 1/2 \quad \forall x \geq M$ , daher ist  $1/p(x)$  für alle  $x \geq M$  definiert und das Resultat folgt aus  $\boxed{1} 2.67(iii)$ .

in 1.10  
angekündigt

1.26 Punkt (Kontinuität & Stetigkeit)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Dann gilt

$f$  ist stetig in  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Beweis [ganz einfach die Begriffe zusammenfassen & 1.12]

$f$  stetig in  $a \stackrel{1.12}{\iff} \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a) \stackrel{1.20}{\iff} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

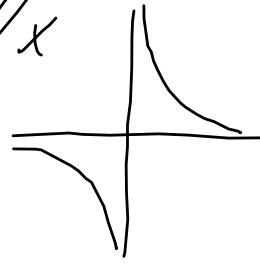


# 1.27 BEM (Nochmals $1/x$ - für Erinnerung von 1.15(iii)) 128

Wir betrachten nochmals  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$

In 1.15(iii) haben wir bemerkt, dass

es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0 = 0 \notin D$  zu fragen.



Tatsächlich hat es über etwas mit dem „unstetigen Aussehen“ von  $1/x$  bei  $x_0 = 0$  auf sich, und zwar:

$f(x) = 1/x$  kann nicht stetig von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden.

Dies bedeutet  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den beiden Eigenschaften

- $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$
- $\tilde{f}$  stetig auf  $\mathbb{R}$

Dann angenommen es gäbe so ein  $\tilde{f}$  so mitte wegen 1.26  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x)$  existieren (und gleich  $\tilde{f}(0)$  sein). Dieser Limes existiert aber nicht, da [vgl. 1.25(ii)] es Nullfolgen  $(x_n), (y_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) \stackrel{x_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \quad \text{aber}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(y_n) \stackrel{y_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

[Siehe auch weitere [UE]-Aufgaben dazu]

## §2 SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

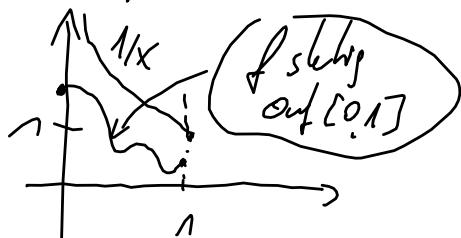
Nach den oben praktischen Ausführungen (zum Schluß) des §1 lernen wir nun die wesentlichen theoretischen Aussagen über stetige Funktionen (auf obg. beschr. Intervallen) kennen.

- den Zwischenwertsatz
- die Annahme von Minimum & Maximum
- die plausimäßige Stetigkeit
- Umkehrsatz f-stetige, streng mon. Fkt.

### 2.1. Rotation (Die Sonderrolle obg. beschr. Intervalle)

Bisher haben wir stetige Fkt auf beliebigen  $T \subseteq \mathbb{R}$  betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass der obgeschlossene & beschränkte Intervall  $[0, 1]$  eine Sonderrolle zukommt; solche Intervalle heißen auch KOMPAKT.

Ein einfache Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Fkt auf  $[0, 1]$  im Gegensatz zu solchen auf  $(0, 1)$  betrachten: Etwa nimmt  $f(x) = 1/x$  auf  $(0, 1)$  beliebig große pos. Werte an [1.25(iii)]. Für eine stetige Fkt auf  $[0, 1]$  ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar und wir werden zeigen, dass tatsächlich



jede stetige Fkt auf  $[0, 1]$  nur beschränkte Werte annehmen kann  
beschränkte Fkt

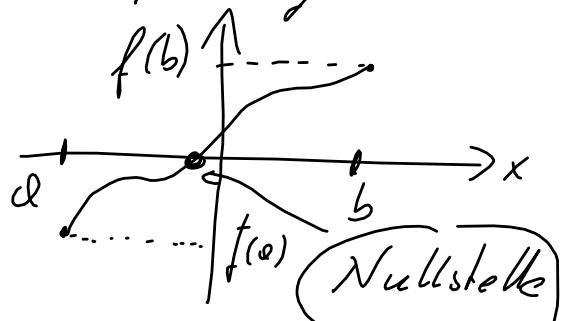
Wir beginnen mit einer anscheinlich klaren Aussage, die obwieder einmal – eigentlich die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  verwendet.

2.2 Motivation (Der Zwischenwertsatz) Wir betrachten <sup>130</sup> ein stetiges  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Es scheint dann klar zu sein, dass  $f$  eine Nullstelle haben muß. Tatsächlich ist dies auf  $\mathbb{R}$  richtig - wie wir gleich sehen werden - aber etwa

auf  $\mathbb{Q}$  falsch, denn mit  $D = \{p \in \mathbb{Q} : 1 \leq p \leq 2\}$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f(1) = -1, f(2) = 2$$



Nullstelle wäre  $x_0 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \supset D$

Ein Hauptresidual der VO

2.3 THT (Zwischenwertsatz)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) < 0, f(b) > 0$  (bzw.  $f(a) > 0, f(b) < 0$ ). Dann  $\exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$  d.h.  $f$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{P}$

Vor dem Beweis ein Bsp einer Anwendung

2.4 KOR (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad)

Je eines Polynoms von ungeradem Grad hat mind. eine reelle Nullstelle.

Beweis. Sei  $p(x) = b_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + b_0$  mit  $b_{2n+1} \neq 0$ . Klarerweise können wir schreiben

$$p(x) = b_{2n+1} \left( x^{2n+1} + \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} x^{2n} + \dots + \frac{b_0}{b_{2n+1}} \right) = b_{2n+1} q(x)$$

und  $q$  ist von der Form

$$q(x) = x^{2n+1} + Q_{2n} x^{2n} + \dots + Q_1 x + Q_0 \quad (Q_j = \frac{b_j}{b_{2n+1}}, j=0, \dots, 2n)$$

und damit wie  $p$  in 1.75(iii)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \Rightarrow \exists x_+ > 0$  mit  $q(x_+) > 0$

Andererseits gilt

$$\varphi(-x) = -x^{2n+1} + \alpha_{2n} x^{2n} - \dots = -\left(x^{2n+1} - \alpha_{2n} x^{2n} + \dots - \alpha_0\right)$$

$\xrightarrow{1.25(\text{a})}$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_- < 0 \text{ mit } \varphi(x_-) < 0$

$q|_{[x_-, x_+]}: [x_-, x_+] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig

die Einschränkung von  $\varphi$   
auf  $[x_-, x_+]$ -Vergiß den Rest  
außerhalb von  $[x_-, x_+]$

$\xrightarrow{\text{Thm 2.3}}$   $\exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$   
 $\Rightarrow p(x_0) = 0$ .  $\square$

Beweis des Ths. Sei also  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) < 0 < f(b)$   
Wir benutzen die Intervallschachtelung [1] 3.34 um mittels  
Intervallhalbierung eine Nullstelle  $x_0$  zu "folgen".

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von obg. Intervallen  $[a_n, b_n]$   
( $n \in \mathbb{N}$ ) mit den Eigenschaften

$$(a) [a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$$

$$(b) b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$(c) f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$$

Schachtelung  
d. Intervalle

Intervalllänge in jedem  
Schritt halbiert

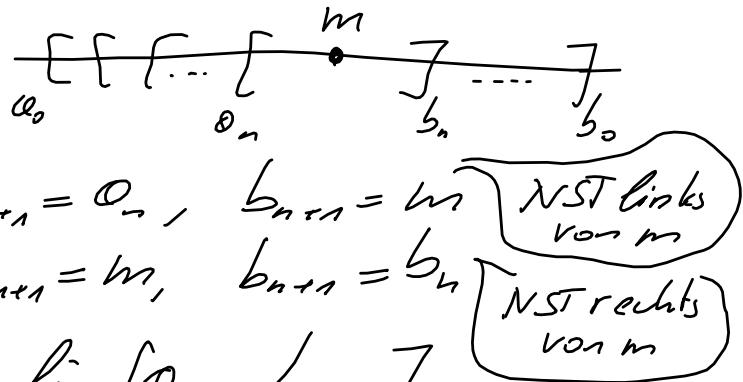
"Folgen" du erst

Induktionsanfang:  $n=0$ : setze  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , dann sind  
(a)-(c) offensichtlich erfüllt

Induktionsschritt:  $n \mapsto n+1$ : Angenommen wir haben

$[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$  bereits konstruiert, so dass (a)-(c)  
gelten. Wir müssen  $a_{n+1}, b_{n+1}$  finden, so dass (a)-(c)  
auch für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  gelten.

Wir setzen  $m = \frac{b_n - a_n}{2}$  und machen eine Fällentscheidung:



Ist  $f(m) \geq 0$  dann setze  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = m$   
 Ist  $f(m) < 0$  dann setze  $a_{n+1} = m$ ,  $b_{n+1} = b_n$

Offensichtlich gelten (a)-(c) für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip [1] 3.36 impliziert  
 $\exists! x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$  und  $x_0 \in [0, b]$  mit  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(3) Wgl f stetig auf  $[0, b]$  ist gilt mit 1.12  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ .

(4) Aus der Eigenschaft (E) in (1) folgt mit [1] 2.28  
 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$

Damit also  $f(x_0) = 0$  und wir haben eine NST gefunden

2.5 KOR (Frischenwertsoh)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und liegt  $c \in \mathbb{R}$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  [d.h.  $f(a) \leq c \leq f(b)$  oder  $f(a) \geq c \geq f(b)$ ].

Dann  $\exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = c$

Durchmal wird 2.4 als Nullstellen-Satz bezeichnet und nur 2.5 als Zers.

Jeder Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  wird angenommen

Beweis. Wende 2.3 auf  $g(x) := f(x) - c$  an. [Anmerk.: OBdA gelte  $f(a) < c < f(b)$  [falls auch nur einmal  $\leq$  stellt  $<$  ist nichts zu zeigen dann  $x_0 = a$  oder  $x_0 = b$ ; falls  $f(x) > c$  gilt verläuft der Beweis völlig analog.]  
Sei  $g(x) = f(x) - c$ , dann ist  $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\rho(a) < 0 < \rho(b) \xrightarrow{2.3} \exists x_0 \in [a, b] : \rho(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$ . ]]

2.6 Kor (Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle)  
 Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (nicht leer, möglicherweise unbeschränktes) Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I) \subseteq \mathbb{R}$  wieder ein Intervall oder enthält nur einen Punkt

Beweis. (1) Sei  $A := \inf(f(I))$ ,  $B := \sup(f(I))$ , wobei  $A = -\infty$ , falls  $f(I)$  nicht n.u.b. und  $B = \infty$ , falls  $f(I)$  nicht n.o.b.

Falls  $A = B$  enthält  $f(I)$  nur einen Punkt und wir sind fertig. Sei also  $A < B$

(2)  $(A, B) \subseteq f(I)$ , denn sei  $y \in (A, B)$  dann  $\exists r, s \in I$  mit  $f(r) < y < f(s)$  [ $A, B$  sind inf, sup]

OBdA können wir annehmen, dass  $r < s$  [ $r = s$  ist nicht möglich und  $r > s$  ist analog zu behandeln]

$\xrightarrow{2.5} \exists x_0 \in [r, s] \subseteq I$  mit  $f(x_0) = y \Rightarrow y \in f(I)$

(3) Also gilt  $(A, B) \subseteq f(I) \subseteq [A, B]$  (bzw.  $(-\infty, B]$  oder  $[A, \infty)$ )  
 Dafür ist  $f(I)$  eines der Intervalle  $(A, B)$ ,  $[A, B]$ ,  $(A, B]$ ,  $[A, B]$  (bzw.  $(-\infty, B]$ ,  $(-\infty, B]$  oder  $(A, \infty)$ ,  $[A, \infty)$ ). ]]

auf Teilnahme  
ausreichend

2.7 Kor (Fixpunktsetz) Sei  $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$  eine

stetige Fkt. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt,

d.h.  $\exists x_0 \in [a,b]$  mit  $f(x_0) = x_0$

## 2.8 Bew ( zum Fixpunktsetz)

(i) Die Aussage von 2.7 kommt auf ein Quadrat  $[0,b] \times [0,b]$

in  $\mathbb{R}^2$  veranschaulicht werden.

Der Graph von  $f$  beginnt

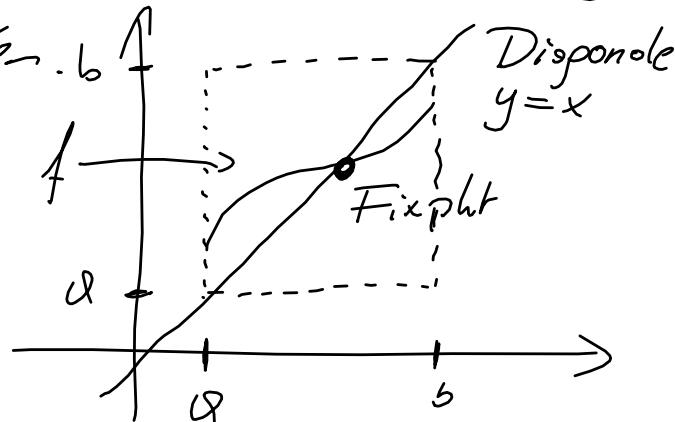
bei  $x=a$  oben an der linken

Kante des Quadrats und

endet bei  $x=b$  an der rechten

Kante; daher muß er die

Diagonale schneiden & dort gilt dann  $f(x_0) = x_0$ .



(ii) Voraussetzung? Fixpunktsetze dienen ganz allgemein

dazu Lösungen von Gleichungen zu

finden (im Sinne von: die Existenz einer lsg zu beweisen

vor allem in dem Fall, dass man die Gleichung nicht

explizit lösen kann) - Und das ist einer der roten

Fäden der Analysis: Existenzmaschinen)

*findet nur*

In diesem Sinne ist schon Thm 2.3 die Existenzmaschine und die Koralle 2.6, 2.7 Varianten davon.

[Wenig überraschend spielt die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  wieder einmal die zentrale Rolle vgl. 2.2.]

Inwiefern ist nun insbesondere 2.7 nützlich?

Offen kann man das Lösen einer Gleichung z.B.  $g(x)=0$

135

gevinbringen in ein Fixpunktproblem verwandeln, ohne  
 $f(x) = g(x) - \alpha + x$ ; Dann gilt nämlich für einen Fixpkt  
 $x_0$  von  $f$   $g(x_0) = f(x_0) - x_0 + \alpha = x$ .

(iii) Die Tatsache, dass 2.7 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.3 ist sieht man auch daran, dass ein Kippen der Skizze in (ii) um  $90^\circ$  genau die Skizze in 2.2 liefert.

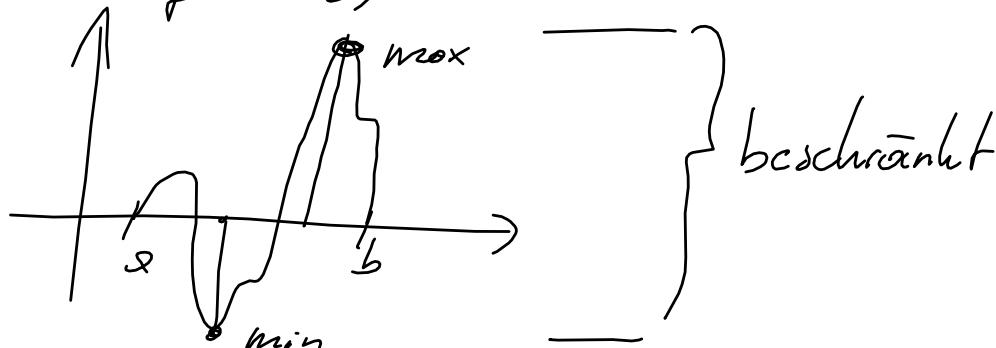
Beweis (Fixpfeitsatz). Wende 2.3 auf die Fkt  $g(x) = f(x) - x$  an. [UE]

□

### 2.8. Rotation (Annahme von $\text{Pax} \& \text{Pin}$ )

Der Pfs lehrt uns, dass eine stetige Fkt auf dem kp Intervall  $[a, b]$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt oder der Graph von  $f$  keine Lücken hat.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph  $f$  auch nicht beliebig große oder kleine Werte beinhaltet kann und darüber  $f([a, b])$  ein Pax und ein Pin hat, also:



Zunächst etwas Terminologie

2.10 DEF (Beschränkte Fkt) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt.  
 Falls das Bild  $f(D)$  von  $f$  beschränkt ist, d.h.  
 $\exists M > 0 \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M$ ,  
 dann heißt  $f$  beschränkt.

2.11 TTTT (Schepe Fkt nehmen auf kp Intervallen Rox & Minon) <sup>136</sup>

Sei  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h.

$$\exists x_1 \in [0, b] \quad f(x_1) = \min_{x \in [0, b]} f(x) = \inf f[0, b]$$

$$= \inf f[0, b]$$

$$\exists x_2 \in [0, b] \quad f(x_2) = \max_{x \in [0, b]} f(x) = \sup f[0, b]$$

$$= \sup f[0, b]$$

natürlich auch

2.12 WÄRNG ( $[0, b]$  beschr & obg, D)

(i) Es ist essentiell, dass das Intervall in 2.11 auf dem stetig ist obg und beschränkt ist. Sonst muss  $f$  nicht

$$\hookrightarrow f_1: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \hookrightarrow f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{beschränkt sein...}$$

$$f(x) = 1/x$$

$$x \mapsto x$$

Intervall nicht obg,  $f$  nicht n.o.b.

Intervall unbeschränkt  
 $f$  nicht n.o.b.

und auch weder Min noch Max annehmen:

$$f_3: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

ist zwar beschränkt hat oben weder Rox noch Min

(ii)  $x_1, x_2$  oben müssen keinesfalls eindeutig sein, z.B. wenn  $f$  konstant ist.

Beweis. Wir beweisen nur, dass  $f$  noch oben beschränkt ist ( $\exists M: f(x) \leq M \forall x$ ) und das Rox angenommen wird. Der Beweis für n.u.b und Min ist analog (bzw kann durch Übergang zu  $-f$  gezeigt werden)

Nicht vorgetragen

auf Folie vorgetragen

(1) Sei  $A := \sup f[0, b]$  ( $\exists s \text{ s.t. } A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ )

$\Rightarrow \exists$  Folge  $(a_n)$  in  $[0, b]$  mit  $f(a_n) \rightarrow A$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
 [Def. sup]

(2)  $a_n \in [0, b] \Rightarrow a_n$  beschränkt  $\xrightarrow{\text{Bolzano}}$   $\exists$  konvergente TF  
 Limes  $(a_{n_k})_k$

Schre  $x_2 := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$   $\boxed{228}$

Vegen  $a \leq a_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq \lim a_{n_k} = x_2 \leq b$   
 also  $x_2 \in [0, b]$

(3)  $f$  stetig  $\Rightarrow$

$$f(x_2) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[0, b]$$

Also ist  $f$  durch  $f(x_2) = \sup f[0, b]$  n. o. b.  
 und das Sup wird in  $x_2$  angenommen, also ist  
 $f(x_2) = \max f[0, b]$ .

□

### 2.13 MOTIVIERENDES BSP (Die Abhängigkeit $f_s$ von $x_0$ )

Ist eine Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf part  $D$  stetig so gilt nach (11)

$$\forall x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das bedeutet dass  $\delta$  i. o. nicht  
 nur (und klarweise vgl. 1.7cii) von  $\varepsilon$  abhängt, sondern auch  
von  $x_0$ . Diese Abhängigkeit wollen wir nun in einem  
 Bsp explizit machen.

Sei dazu  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1/x$$

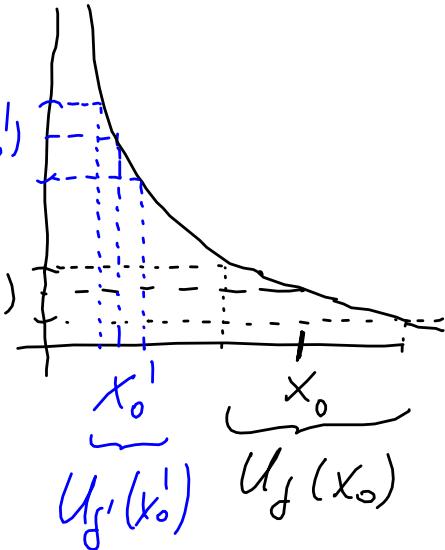
$$U_\varepsilon(f(x_0)) \{ f(x_0)\}$$

Nun fixieren wir  $\varepsilon > 0$ .

Dann ist anschaulich klar,  
dass für ein  $x_0$  näher bei

0 das entsprechende Sicherheitsintervall

$U_f(x_0)$  kleiner gewählt werden muß.



[Rechnerisch: Wir brauchen nur jenst  $x < x_0$  zu betrachten,  
da dort der Anstieg steil und  $\delta$  potentiell klein wird.

Sche also  $x_0 = x_0 - \delta$  und betrachte

$$|f(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0}{x_0 x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

Soll nun  $|f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  sein,  
so muss gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \iff \varepsilon x_0 - \varepsilon x_0 \delta > \delta \iff \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

Aber  $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$  und das bedeutet, dass bei  
kleinem  $x_0$  auch  $\delta$  kleiner werden muß.]

Wenn wir nun für eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  fordern,  
dass  $\delta$  (enoughig vom Pkt  $x_0, \varepsilon$ ) sein soll so erhalten  
wir eine stärkere Stetigkeitseigenschaft: Für je 2 Pkte  
 $x, x' \in D$  soll wenn sie nur  $\delta$ -nahe beizinande liegen  
(d.h.  $|x - x'| < \delta$ ) – und zwar egal wo die beiden liegen –  
sich die Abschätzung  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  gelten. Offiziell:

2.14 DEF (Gleichmäßige Stetigkeit) Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ <sup>139</sup>  
 heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

2.15 BEI (Stetigkeit vs. plm Stetigkeit)

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ plm. stetig} \Rightarrow f \text{ stetig auf } D$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.13 zeigt, also

$$f \text{ plm stetig} \not\Rightarrow f \text{ stetig in } D$$

[Brent explizit:  $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$ . Folgt  $x_n = \frac{1}{n}$  und  $x_n' = \frac{1}{2n}$  ( $n \geq 1$ ) dann gilt

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{aber}$$

$$|f(x_n) - f(x_n')| = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n'} = n - 2n = n$$

der Abstand der Plts  
wenn die Plts noch links  
rutschen

ist unbeschränkt und daher sicher  
nich erreichbar eine fixe  $\varepsilon$ -Toleranz.]

(iii) Esentiellem Gegenbsp ist, dass  $D = (0, 1]$  obwohl bei  $D$  offenes Intervall ist. [Für jedes Intervall der Form  $[\eta, 1]$  mit  $0 < \eta < 1$  kann obiger Effekt nicht erfasst werden, denn  $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$  können nie kleiner als  $\eta$  werden. Und tatsächlich sind offen  
oben & beschr. Intervallen beide Begriffe  
äquivalent, wie das nächste Thm lehrt.]

ETA

noch links  
unmöglich  
anzutreffen ist

## 2.16 THM (Glm Stetigkeit auf kp Intervallen)

Sei  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  auch glm. stetig (auf  $[0, b]$ ).

Beweis. (1) Indir. anz.  $f$  ist nicht glm. stetig

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x' \in [0, b] \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

$$\text{auf folgende Art prfzen} = \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x' \in [0, b] \quad \text{und} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon \\ |x - x'| < \delta$$

(2) Wir fixieren dieses  $\varepsilon$  und konstruieren Folgen  $(x_n), (x'_n)$  indem wir sukzessive  $\delta = 1/n$  ( $n \geq 1$ ) setzen. [vgl. Beweis 1.12. ""] So erhalten wir

(\*)  $(x_n), (x'_n)$  in  $[0, b]$  mit  $|x_n - x'_n| < 1/n$  aber  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$

(3)  $(x_n)$  ist beschränkt  $\xrightarrow[\text{Vierstr.}]{\text{Bolzano}} \exists$  konvergente TF  $(x_{n_k})_k$

$n_k$  sind die Indizes der TF  $(x_{n_k})_k$  von  $x_n$

$$\text{Sche } x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

(4) Die TF  $(x'_{n_k})_k$  von  $(x'_n)$  konvergiert auch gegen  $x_0$ , denn  $|x_{n_k} - x'_{n_k}| \stackrel{(*)}{\leq} 1/n_k \rightarrow 0$

(5) Die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  liefert einen Widerspruch:

$$0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0 \quad \leftarrow \quad \downarrow \\ ((4) + 1.12)$$

]

2.17 Motivation (Stetige inverse Fkt) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  und <sup>141</sup>  
 sei  $f: A \rightarrow B$  bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion  
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ , fast  $\forall x \in B$  [vgl. ENA, 4.3. 28].

Falls  $f$  stetig ist, folgt dann auch  $f^{-1}$  stetig?

In allgemeinen NEIN. Für ein Gegenbsp. siehe

Durch zwei zusätzliche Annahmen an  $f$  [UE]

können wir über ein (JA) erreichen, nämlich

(1)  $f$  streng monoton [d.h.  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  bzw.  $f(x) > f(y)$ ]

Bemerkung: str. monoton  $\Rightarrow$  injektiv

(2)  $A$  ist ein Intervall

↑ wachsend

↑ fallend

2.18 Thm (Umkehrsatz f str-mon & stetige Fkt)

Sei  $I$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & streng mon. wachsend [fallend]

Dann gilt (i)  $J := f(I)$  ist ein Intervall

(ii)  $f: I \rightarrow J$  ist bijektiv

(iii)  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ist stetig & streng mon. wachsend [fallend]

2.19 BEM (zur Notation) Ganz streng genommen

müssten wir für die Abb  $f$  mit eingeschränktem Definitionsbereich  $f(I)$  eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B.

$$\hat{f}: I \rightarrow J := f(I)$$

$$x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müssten wir dann  $\hat{f}^{-1}$  schreiben.

Gemäß einem allg. üblichen Missbrauch der Notation schreiben wir aber wiederum  $f$  und  $f^{-1}$  [vgl. ENA, 2. Aufl. gr. Box p. ]

Beweis von 2.18. Wir beweisen nur den Fall streng monoton wachsend: Der fallende Fall ergibt sich, wenn man  $f$  durch  $-f$  ersetzt.

auf Folienrück

(i) Kor 2.6  $\Rightarrow f(I) = J$  ist ein Intervall

[der Fall einpunkig ist wegen der str. Monotonie unmöglich]

ist jede Abb  
surj. auf  
ihr Bild

(ii)  $f$  str. mon wachsend  $\Rightarrow f$  injektiv (und daher  $f: I \rightarrow J$  bijektiv)

(iii)  $f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$  [= Widerspruch Injektivität,  $x \neq y$  der Ann.]

| Bleibt  $\forall f^{-1}$  stetig  $\Rightarrow f^{-1}$  streng mon wachsend

Fall 1:  $b$  ist kein Randpunkt von  $J$

Sei  $\alpha := f^{-1}(b) \Rightarrow \alpha$  ist kein Randpunkt von  $I$

[sonst wäre wegen der str. Monotonie  $b$  ein Randpunkt von  $J$ ]

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  sodass  $\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \in I$

$f$  str.  
mon  $\Rightarrow f(\alpha - \varepsilon) < f(\alpha) = b < f(\alpha + \varepsilon)$

Aber  $\exists \delta > 0$  mit  $f(\alpha - \varepsilon) < b - \delta < b + \delta < f(\alpha + \varepsilon)$ .

Dies bedeutet über  $f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b))$

und damit ist  $f^{-1}$  stetig in  $b$  [vgl 1. Thm]

Fall 2:  $b$  ist linker Randpunkt von  $J \xrightarrow{\text{Mon}} \alpha = f^{-1}(b)$  ist linker Randpunkt von  $I$  und wir können den Beweis wie in Fall 1 führen aber mit "einsitzigen Umgebungen"  $U_\delta(b) \cap J, U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$  und  $f(\alpha) = b < b + \delta < f(\alpha + \varepsilon)$

Fall 3  $b$  ist rechter Randpunkt von  $J$ : völlig analog zu Fall 2



## 2.20 BEM (Umkehrsatz f. str. Inv. Fkt)

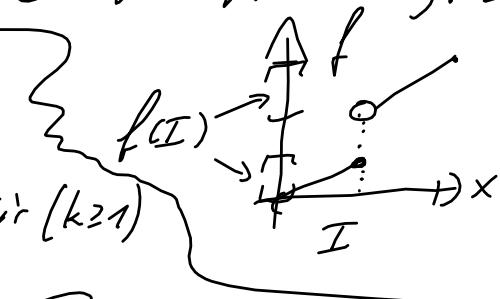
Folie  
Im Beweis von 2.18 haben wir die Stetigkeit von  $f$  nur in  $c$  verwendet. Daher gilt folgende Variante des Thms:

I ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton (nicht notwendiger Weise stetig)  
 $\Rightarrow f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  stetig & str. mon

Falls  $f$  unstetig ist, dann ist i.o.  $f(I)$  obc kein Intervall, z.B.

## 2.21 BSP (Stetigkeit der Wurzel)

Folie  
Als Anwendung von Thm 2.18 betrachten wir (k21)



$$f_{2k}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x \mapsto x^{2k}$$

$$f_{2k+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{2k+1}$$

Beide Fkt sind auf einem Intervall definiert ( $\Omega = (-\infty, \infty)$ )

stetig [1.18] streng mon. wachsend und bijektiv [auf  $[0, \infty)$  b7r  $\mathbb{R}$ ]

2.18  $\Rightarrow f_{2k}^{-1}: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad f_{2k+1}^{-1}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

sind stetig & streng mon. wachsend

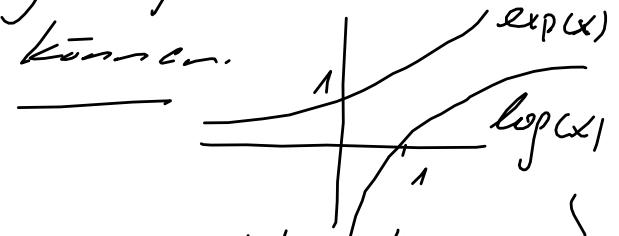
Klarerweise sind  $f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1}$  gerade obc Wurzelfunktionen  
 $\xrightarrow{2k} \xrightarrow{b7r 2k+1}$  [vgl. (1) 1.11(cii)].

## §3 ELEMENTARE TRANZENDENTE FUNKTIONEN

3.1 EINLEITUNG. In diesem § definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir allgemeine Potenzen  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) definieren.

Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in  $\mathbb{C}$ -periode soweit, dass wir die komplexe Exponentialfunktion ( $\exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) analog zur über die Reihendarstellung definieren können. Diese verwenden wir, um die Winkelfunktionen Sinus & Cosinus zu definieren. Dann Grundigenschaften studieren wir gründlich, um schließlich die Tangensfunktion und die Kreis-Funktionen herzuleiten zu können.

### 3.2 PROP & DEF (Logarithmus)



- (i) Die Exponentialfkt  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng monoton wachsend und  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .
  - (ii) Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- (d.h.  $\Leftrightarrow x = \exp(y)$ )
- und nennen sie den (natürlichen) Logarithmus.  $\log$  ist stetig und streng mon. wachsend.

- (iii) Die Logarithmusfkt erfüllt die Folgende Funktionalgleichung ( $x, y \in (0, \infty)$ )
- $\log(xy) = \log x + \log y.$

Beweis. (i) exp ist stetig nach 1.8(iii). Wir zeigen die Monotonie.

$\xi > 0$ , dann gilt

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 0$

$[x_i] \quad \exp(\xi) = 1 + \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 1 + \xi. \quad (*)$

Sei nun  $x_1 < x_2$  und setze  $\xi = x_2 - x_1 > 0$ , dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \stackrel{[1] \text{ (4.2)}}{=} \exp(x_1) \exp(\xi) \stackrel{(*)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist exp strng mon wachsend.

Wir zeigen  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ :

$$[1] \text{ 4.60(i)} \Rightarrow \exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty).$$

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es z.B.

NET  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \exp(-n) = 0, \quad (**)$

denn dann werden wegen des Zrs 2.3 alle Werte in  $(0, \infty)$  angenommen. [genauer sei  $y \in (0, \infty) \stackrel{(**)}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $\exp(-n) < y < \exp(n) \stackrel{\text{Zrs}}{\iff} \exists x \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = y$ ]

Die Grenzwerte in  $(**)$  sind aber leicht zu kriegen:

$$n \in \mathbb{N} \stackrel{[1] \text{ 4.60(iii)}}{\Rightarrow} \exp(n) = e^n \stackrel{[1] \text{ 1.5(i)}}{\Rightarrow} e^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

und schließlich

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} \stackrel{[1] \text{ 2.47(i)}}{\rightarrow} 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Mit (i) besagt nun Z.18:

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv und  $\exp^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist  
stetig & str. mon. wachsend

(iii) [Die Funktionsfolge für  $\log$  folgt aus der für  $\exp$ .] [etw]

Seien  $x, y \in (0, \infty)$ ; setze  $\xi := \log x$ ,  $\eta := \log y$

$$\boxed{1} \quad \boxed{6.39} \implies \exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y$$

$$\implies \underline{\log(xy)} = \xi + \eta = \underline{\log(x) + \log(y)}. \quad \square$$

### 3.3 BEI (Logarithmen von Potenzen)

Als unmittelbare Konsequenz von 3.2(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k \log(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}).$$

### 3.4 MOTIVATION (ollp. Potenzen)

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalen Exponenten definiert, d.h.  $x^q$  für  $\mathbb{R} > x > 0, q \in \mathbb{Q}$ .

Genauer haben wir folgende Definitionen

- $x^n := x \cdot \dots \cdot x$  (n ∈ ℤ)

- $x^{-n} := 1/x^n$  (n ∈ ℤ)

- $x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$  (n ∈ ℤ) [Vgl. 10] 1.11(iii)]

und damit für  $\mathbb{Q} \ni p = m/h$

$$\left\{ x^p := \overbrace{\sqrt[h]{x^m}}^{} \right.$$

Wir werden nun die ollp. Potent, also  $x^\alpha$  ( $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ ) definieren also  $x^q$  ( $q \in \mathbb{Q}$ ) zu  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) verallgemeinern. Ab Leitfaden benutzen wir folgende Eigenschaft von  $x^n$

$$x^n - \exp(\log(x^n)) \stackrel{3.3}{=} \exp(n \log(x)).$$

3.5 Def (Alg. Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfkt) 147

(i) Sei  $x > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die alg. Potenz

} ob }  $x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$

(ii) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren wir die alg. Potenzfunktion

}  $w_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^\alpha (= \exp(\alpha \log(x)))$

(iii) Die Exponentialfkt mit Basis  $a \in (0, \infty)$  definieren

} wir als  $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \exp_a(x) = a^x (= \exp(x \log(a)))$

### 3.6 Bew (zu alg. Potenz- & Exp-Fkt)

(i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 3.5(i) ist  $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

$\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$  }  $[\log(x^\alpha) = \log \exp(\alpha \log x)]$

also eine Verallgemeinerung von 3.3 konkret zu  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(ii) Remarke, dass  $\overline{\exp(x) = \exp_e(x) = e^x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) gilt,  
 dann  $\stackrel{1) 4.37}{\text{dann}} \stackrel{2) 2.2.1)}{e := \exp(1) \Rightarrow \log(e) = 1 \Rightarrow e^x = \exp(x \log e) = \exp(x)}$   $\stackrel{(3.5(iii))}{= \exp(x)}$

(iii) Als nächstes fassen wir die Grund Eigenschaften von alg. Potenz- & Exp-Fkt in eine Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den jeweiligen Definitionen [siehe für auch [UE]]

Ab jetzt können wir  $e^x$  statt  $\exp(x)$  schreiben

### 3.7 Prop (Die offg. Exp-Fkt) Sei $\mathbb{R} \ni a > 0$ .

Die offg. Exp-Fkt  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (ausp. auf  $\mathbb{R}$ ) und es gilt:

(i) Falls  $a > 1$ , dann ist  $\exp_a$  str. mon. wachsend.

Falls  $a < 1$ , dann ist  $\exp_a$  str. mon. fallend

(ii) Es gilt die Funktionalgl.  $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m-\text{mal}}$

Konsistent mit natürlichen Potenzen  
mit reihenden Potenzen

(iv) Für  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $N \geq q \geq 1$  gilt  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{1/q}$

(v) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

(vi) Für alle  $b > 0, x \in \mathbb{R}$  gilt  $a^x b^x = (ab)^x$

(vii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$

### 3.8 Bsp (Nützliche Grenzwerte)

(i) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt OBdA  $x > 0$ , dann

$$\text{gilt } c^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{c^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Exp. höchst  
stark ob  
jede Potenz

Und daraus folgt sofort [1] Prop 2.47(ii)]

(ii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

(iii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^k e^{1/x} = \infty$ ,  
denn setze  $y = 1/x$ ,

dann gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^k e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^k} \stackrel{(ii)}{=} \infty$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$ ,

dann wegen Prop. 3.2(ii) ist  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und str. monoton wachsend.

(v) Für alle  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$

Wieder wegen [1] Prop. 2.47 folgt die 2. Aussage aus der 1.  
Um dies zu beweisen schreiben wir  $x = e^{-y/\alpha}$  (d.h.  $y = -\alpha \log(x)$ ) und rechnen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} \stackrel{\text{[1] 2.47}}{=} 0.$$

(vi) Für alle  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$

OBdA  $x > 0$  und

mit  $x^\alpha = e^y$

(d.h.  $y = \alpha \log(x)$ ) erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} \stackrel{(ii)}{=} 0$$

(vii) Für  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log(x) = 0$ ,

denn setze  $x = 1/y$  dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\log(y)}{y^\alpha} \stackrel{(vi)}{=} 0$$

$\log$  wächst  
ob schwächer  
je höher Punkt

+ sehr  
stark  
geschw.  
aber los  
offen/8

$$\begin{aligned} 0 &= \log(1) = \log\left(\frac{1}{x} x\right) \\ &= \log(x) + \log(1/x) \\ &\Rightarrow \log(x) = -\log(1/x) \end{aligned}$$

$$(viii) \left| \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right|$$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus [1] Prop. 4.4.2  
für  $N=1$ :

$$|e^x - 1 - x| = |R_2(x)| \leq 2 \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{für } 0 < |x| < 3/2$$

und daher  $\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - 1 - x|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$

### 3.9 Motivation (Die komplexe Exp-Fkt - Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$ )

Wir wollen nun die Expfkt nicht nur für  $x \in \mathbb{R}$  sondern sogar für  $z \in \mathbb{C}$  definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen [vgl. [1] Bem 4.36]. Um dann (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von exp heranziehen zu können, müssen wir diese Begriffe in  $\mathbb{C}$  definieren.

Eine Betrachtung der resp. Begriffe in  $\mathbb{R}$  zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw. die  $\epsilon$ -Umgebungen in  $\mathbb{R}$  durch ihr Analogon in  $\mathbb{C}$  ersetzen müssen.

Daraus stellt der folgende Exkurs über die Grundlagen der Analysis in  $\mathbb{C}$  auch eine Wiederholung derselben in  $\mathbb{R}$  dar – wobei wir seine Verallgemeinerungsfähigkeit schamlos ausnutzen werden.

### 3.10 EXKURS: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$

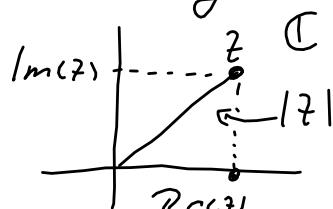
#### (A) Wiederholung (I) [vgl. 10] 1.6] von Folierargangen

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  und wir verwenden die Schreibweise

$$\textcircled{1} \ni z = (x, y), \quad z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

Die komplexe Konjugierte  $\bar{z}$  ist gegeben durch  $\bar{z} = x - iy$  und das Produkt  $z\bar{z}$  erfüllt

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$



(B) DEF (Betrag in  $\mathbb{C}$ ). Der Absolut-Betrag  $|z|$  von  $z \in \mathbb{C}$  ist definiert ob

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

Noch 10] 1.6(c) identifizieren wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x + i0 \in \mathbb{C}$  und daher ist der Betrag von  $x$  als reelle Zahl identisch mit dem Betrag von  $x$  als komplexe Zahl

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$

#### (C) Lemma (Grund-eigenschaften des Betrags)

Die Abb 1.1:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaften ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ )

$$(N1) \quad |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 \iff z = 0 \quad (\text{pos definit})$$

$$(N2) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (\text{multiplikativ})$$

$$(N3) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{A-Ungl.})$$

Weiters gilt

$$(i) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(ii) \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

Liegt in  $\mathbb{R}$

Beweis. Sei  $z = x + iy$ ,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j=1,2$ )

(N1)  $|z| \geq 0$  und  $|0|=0$  sind klar.

Folgs  $|z|=0$ , dann  $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$  und

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x=0=y$$

$$(N2) |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

(i') klar per Def.

$$(ii') |\operatorname{Re}(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2 \text{ und ebenso für } \operatorname{Im}(z)$$

$$\begin{aligned} (N3) |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + \underbrace{z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2}_{2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})} + z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

□

(D) DEF (Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{C}$ )

(i) Eine komplexe Folge bzw. eine Folge in  $\mathbb{C}$  ist eine Abb  $c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Analog zum reellen Fall schreiben wir

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für die Folge und  $c_n = c(n)$

(ii) Eine Folge  $(c_n)$  konvergiert gegen  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\overbrace{c_n \rightarrow c,}$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

bzw äquivalent dazu mit der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $c \in \mathbb{C}$  definiert ob

$$U_\varepsilon(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon\}$$

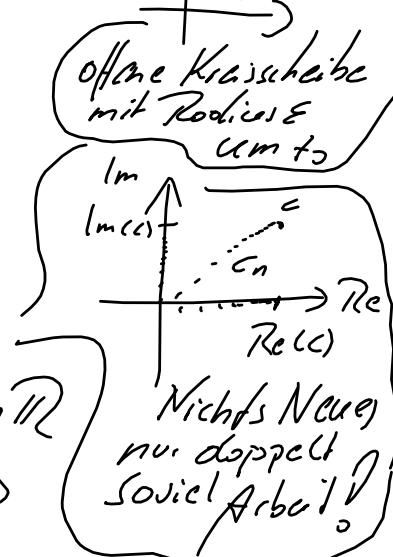
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad c_n \in U_\varepsilon(c)$$

(E) Prop (Konvergenz in  $\mathbb{C}$  ist Konvergenz von  $\operatorname{Re}$  &  $\operatorname{Im}$ )

{ Für eine Folge  $(c_n)$  in  $\mathbb{C}$  gilt

$$c_n \rightarrow c \text{ in } \mathbb{C} (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_n) &\rightarrow \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c_n) &\rightarrow \operatorname{Im}(c) \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}$$



Beweis. Wir setzen  $a_n = \operatorname{Re}(c_n)$ ,  $b_n = \operatorname{Im}(c_n)$  und  
 $a = \operatorname{Re}(c)$ ,  $b = \operatorname{Im}(c)$

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{\text{Def.}} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |c_n - c| < \varepsilon$   
und daher  $\forall n \geq N$  (C(iii))  
 $|a_n - a| = |\operatorname{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$   
 $|b_n - b| = |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon,$   
also  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$   
und daher  $\forall n \geq N$   
 $|c_n - c| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)|$   
 $\stackrel{\Delta u_1}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$   
also  $c_n \rightarrow c$  □

(F) KOR (Times and Komplexkonjugation)

$$\left\{ c_n \rightarrow c \Rightarrow \bar{c}_n \rightarrow \bar{c} \right.$$

Beweis  $\overline{\lim c_n} = \lim (\operatorname{Re}(c_n) - i \operatorname{Im}(c_n)) \stackrel{(E)}{=} \lim \operatorname{Re}(c_n) - i \lim \operatorname{Im}(c_n)$   
 $= \lim \operatorname{Re}(\bar{c}_n) + i \lim \operatorname{Im}(\bar{c}_n) = \lim \bar{c}_n$  ]

(G) KOR (Grundwertsätze) Seien  $(c_n), (d_n)$  konvergente komplexe Folgen  
und sei  $d \in \mathbb{C}$ , dann gilt

- (i)  $\lim (c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$
- (ii)  $\lim (d c_n) = d \lim c_n$
- (iii)  $\lim (c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$
- (iv)  $\lim \frac{c_n}{d_n} = \frac{(\lim c_n)}{(\lim d_n)}$  falls  $d_n \neq 0$

Beweis. Aufspalten in  $\operatorname{Re}$  &  $\operatorname{Im}$  unduelle Grundwertsätze  
□ Satz 2.23, Satz 2.26 [Uc] □

(H) TH1 (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ ) Sei  $(c_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt<sup>154</sup>

$\{(c_n)\text{ konv.} \Leftrightarrow (c_n) \text{ ist Cauchy-Folge, d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N |c_n - c_m| < \varepsilon\}$

Beweis:  $(c_n)$  konv.  $\stackrel{(E)}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re}(c_n)) \& (\operatorname{Im}(c_n))$  konv. in  $\mathbb{R}$

$\stackrel{\text{P für } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re}(c_n)) \& (\operatorname{Im}(c_n))$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (c_n)$  ist Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$

(sic im Beweis von (E):  $\Rightarrow$  "mit  $\varepsilon/2$ "  $\Leftarrow$  "mit (ii)")

(I) DEF (Konvergent komplexe Reihen) Sei  $(c_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$ .  
Die komplexe Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  heißt LK

(i) Konvergent, falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n c_k \quad (\text{in } \mathbb{C}) \text{ konvergiert.}$$

(ii) absolut konvergent, falls die reelle (?) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \quad (\text{in } \mathbb{R}) \text{ konvergiert.}$$

(J) Prop (Konvergent desw. & Cauchy-Prod. f. komplexe Reihen)

(i) (Majorantenkriterium) Sei  $(\alpha_n)$  eine Folge mit  $\alpha_n > 0 \forall n$  (d.h.  $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ ) und sei  $\sum \alpha_n$  konvergent.

Ist  $(c_n)$  eine komplexe Folge und

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |c_n| \leq \alpha_n,$$

dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent.

(ii) Der Wurzeltest und der Quotiententest gelten wortwörtlich wie<sup>155</sup> für reelle Reihen. Insbesondere sei  $(c_n)$  komplexe Folge mit  $c_n \neq 0$  für fast alle  $n$  und

$$\exists \theta \in [0, 1] \text{ mit } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta, \quad \text{Thm}$$

dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent.

(iii) Die Proposition zum Cauchy-Produkt f. Reihen [1] Prop 6.35 gilt wortwörtlich für komplexe Reihen.

Beweis. Inspektion der Beweise im Realen zeigt, dass sie wortwörtlich gültig bleiben. ]

(K) Def (Stetigkeit in  $\mathbb{C}$ ) Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  und  $z_0 \in D$  und sei  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion

(i) f hat stetig in  $z_0$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

(ii) f hat stetig auf  $D$ , falls  $f$  stetig in jedem  $z_0 \in D$  ist.

(L) Bem (zu Stetigkeit)

(i) Die Bedingung in K(i) kann umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0))$$

(ii) Stetigkeit ist Folgenstetigkeit Wie in  $\mathbb{R}$  kann die Stetigkeit in  $\mathbb{C}$  via Folgencharakterisiert werden (selbe Beweis)

Stetigkeit in  $z_0 \in D$   $\Leftrightarrow \forall$  Folgen  $(c_n)$  in  $D$  mit  $c_n \rightarrow z_0$  gilt  
 $\lim f(c_n) = f(z_0) (= f(\lim c_n))$

3.11 BEN: (komplexe Exponentialreihe) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  absolut konvergent, denn

für  $|z|=0$  ist die Aussage trivial und für  $|z| \neq 0$  verwenden wir den Quotientenkriterium 3.10 (J)(ii): für alle  $n$  mit  $n > 2/|z|$  gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Analog zum reellen Fall definieren wir

3.12 DEF (komplexe Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\left\{ \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right\}$$

3.13 BEN (komplexe und reelle Exp-fkt)

Wenn wir  $\exp$  aus 3.12 auf  $\mathbb{R}$  einschränken, so erhalten wir klarweise  $\exp$  aus [1] Def 4.32, daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden; wir haben förmlich  $\exp$  von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  ausgedehnt

$$[\exp(x+iy) = \sum \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!}]$$

3.14 THM (Eigenschaften von  $\exp$ ) Die Exponentialfkt erfüllt

(i) (Funktionalgleichung)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

(ii) (Fehlerabschätzung)

Für alle  $N \in \mathbb{N}$  und  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z) \text{ mit } |R_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für } |z| \leq 1 + N/2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{iii}) & \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)} & \forall z \in \mathbb{C} \\ (\text{iv}) & \exp(z) \neq 0 & \forall z \in \mathbb{C} \\ (\text{v}) & \lim_{z \rightarrow 0, \bar{z} \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2} = 1 \end{array} \right.$$

(vi)  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig (in jedem  $z \in \mathbb{C}$ )

Beweis (i), (ii) Wortwörtlich wie in R [1] Thm 4.39, [1] Prop. 4.42  
 (iii) folgt aus 3.10(F): Sei  $s_n(z) = \sum_{k=0}^{\text{endl. } \Sigma} z^k / k!$ , dann gilt

$$\exp(\bar{z}) = \lim s_n(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim \overline{s_n(z)} = \overline{\lim s_n(z)} = \overline{\exp(z)}$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z) \exp(\bar{z}) = \exp(z - \bar{z}) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0$$

(v) Wegen (ii) mit  $N=1$  gilt  $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \leq 2 \frac{|z|^2}{2} = |z|^2$  für  $|z| \leq \frac{3}{2}$   
 und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$$

Genau wie  
in 3.8(viii)

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit  $N=0$ , denn  $|f(z)| \leq 1$   
 $|e^z - 1| = |R_1(z)| \leq 2|z| \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow 0$ ) und daher  
 $\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 = e^0$  und mit 3.10(L)(ii) ist  $\exp$  stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei  $w \in \mathbb{C}$  folgt nur mittels Funktionalgleichung:  
 Sei  $(z_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $z_n \rightarrow w$ , dann  $z_n - w \rightarrow 0$  und

Denn  
1.8(ii) nur  
unter  
Umkehr  
ausgeführt

$$1 = \exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n - w) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) \right) \exp(-w)$$

exp stetig bei 0

& Cso (nochmals mit (ii))  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$ .

]

### 3.15 Motivation (Winkelfunktionen) Jetzt (endlich!) sind 158

wir in der Lage die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exp-Fkt zu definieren. Sinus & Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht genau unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den einfachen Vorteil innerhalb unseres deduktiven Vorpogens konsistent zu sein und keine undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

Wir werden aber noch den Def. der Anschluss an unsere Intuition suchen!

Kommt später basierend auf dem Integralbegriff

3.16 DEF (Sinus & Cosinus) Wir definieren Cosinus & Sinus durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \\ \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \operatorname{Im}(e^{ix}) \end{array} \right.$$

### 3.17 BET (Grundeigenschaften von sin & cos)

(i) Wegen  $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix})$  erhalten wir die Eulärsche Formel

$$|\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}|$$

Außerdem sind Sin & Cos stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ , da  $x \mapsto x$  in  $\mathbb{R}$

$$\stackrel{3.14(\text{vi})}{\Rightarrow} e^{ix_n} \rightarrow e^{ix} \stackrel{3.10(\text{ii})}{\Rightarrow} \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{ix}) \text{ und analog für Im.}$$

(ii) Geometrische Interpretation. Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

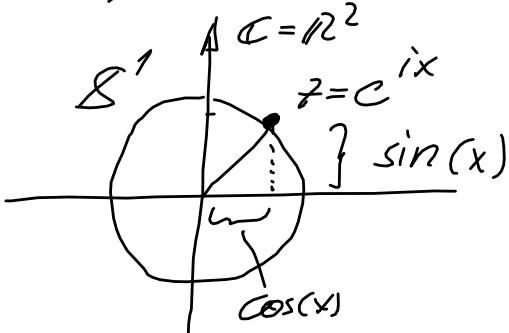
$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1 \quad \text{und daher}$$

$|e^{ix}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet also, dass alle komplexen Zahlen der Form  $e^{ix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  auf dem Einheitskreis

$$\mathcal{S}^1 := \{ z \in \mathbb{C} : |z|=1 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

liegen. Darüber hinaus sind  $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$  und  $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ <sup>159</sup> genetische kartesischen Koordinaten von  $z = e^{ix}$ ; insbesondere ergibt sich

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



(iii) Cosinus ist parität, Sinus unparität

[d.h.  $\cos(x) = \cos(-x)$ , also der Graph ist symmetrisch bzgl. der y-Achse und  $\sin(-x) = -\sin(x)$  also der Graph ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.]

Tatsächlich gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$ :  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ .  
Daher folgt aus der Def. der Winkelfunktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + \bar{e}^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - \bar{e}^{-ix})$$

und damit

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iv) Es gelten die Additionstheoreme:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \end{array} \right.$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \sin(x) - \sin(y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{array} \right.$$

Tatsächlich ergeben sich die bekannten Formeln als Real- bzw. Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Die 3. bis 6. Gleichung ergibt sich aus der 1. bzw. 2. Gleichung<sup>160</sup> mittels der Substitution  $U = \frac{1}{2}(x+y)$ ,  $V = \frac{1}{2}(x-y)$ . 1]

### (v) Reihendarstellung für $\sin$ & $\cos$

Die natürlichen Potenzen von  $i$  folgen einem einfachen Muster:  
 $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  und somit

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4m \text{ für } m \in \mathbb{N} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{4}) \\ i & \text{falls } n = 4m+1 \quad \dots \quad (\Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{4}) \\ -1 & \text{falls } n = 4m+2 \quad \dots \quad (\Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{4}) \\ -i & \text{falls } n = 4m+3 \quad \dots \quad (\Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \sin(x) &\stackrel{(ii)}{=} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left( 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\text{Re}(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{Im}(e^{ix})} \end{aligned}$$

und daher

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

d.h.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

### (vi) Verhalten nahe $x=0$

Für kleine  $x$  ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung  $x^2$  oder höher

$$\left\{ \cos x \approx 1 \quad \sin x \approx x \right\} \quad (|x| \text{ klein})$$

Tatsächlich gelten die folgenden Grenzwerte für  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Denn zunächst folgt aus 3.15 (vi)

$$1 = 1+i \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix}-1}{ix} \right) + i \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix}-1}{ix} \right) \quad (*)$$

und daher

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = -\operatorname{Im} \left( \frac{\cos(x)-1+i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} -\operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix}-1}{ix} \right) \stackrel{(*)}{\rightarrow} 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$\frac{1}{i} = -i$

sowie

$$\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Re} \left( \frac{\cos(x)-1+i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix}-1}{ix} \right) \stackrel{(*)}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

### 3.18 MOTIVATION (II)

Wie schon den Winkelfunktionen werden wir uns der Kreiszahl  $\pi$  auf etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Wege nähern. Wir werden  $\pi$  als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von  $\cos$  auf  $[0, 2]$  definieren – erst später werden wir mittels des Integralsprinzips sehen, dass  $\pi$  die halbe Umlänge des Einheitskreises ist.

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten  
3.18 (Lemma) (Technisches zu sin & cos)

Ob hier  
 Vortrag auf Folie  
 162

- (i)  $\cos(0)=1$  und  $\cos(2) \leq -1/3$
- (ii)  $\sin(x) > 0 \quad \forall 0 < x \leq 2$
- (iii)  $\cos(x)$  ist streng monoton fallend auf  $[0, 2]$

Beweis:

(i)  $\cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = 1$ . Um  $\cos(2)$  abzuschätzen  
 verwenden wir die Reihendarstellung aus 3.17(v):

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

1. Term herauspicken

$\underbrace{\qquad\qquad}_{3.17(v)}$

$$= -1 + \frac{2^4}{4!} \left( 1 - \underbrace{\frac{2^2}{5 \cdot 6} + \frac{2^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots}_{\| \leq 1 \leq \frac{2^2}{5 \cdot 6} \text{ usw}} \right)$$

vgl. Bew Leibniz-Kriterium & Bem 4.12(ii)  
 [nicht vorgetragen]

$$\leq -1 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

(ii) Wir verwenden wieder 3.17(v). Sei  $0 < x \leq 2$ , dann gilt

$$\sin(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} \left( 1 - \underbrace{\frac{x^2}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots}_{\| \leq 1 \leq x^2/4 \cdot 5 \text{ usw}} \right)$$

$$\frac{x^3}{3!} \leq x \frac{x^2}{6} \stackrel{x \leq 2}{\leq} x \frac{4}{6} = \frac{2x}{3}$$

$$\geq x - \frac{x^3}{3!} \geq x - \frac{2x}{3} = x/3 > 0$$

$$\text{(iii) Sei } \underline{0 \leq x_1 < x_2 \leq 2} \Rightarrow 0 < \frac{x_1+x_2}{2} \leq 2 \quad (*)$$

$$0 < \frac{x_2-x_1}{2} \leq 2 \quad \text{und daher}$$

3.17(iv)

$$\underline{\cos(x_2) - \cos(x_1)} = -2 \sin \frac{x_2+x_1}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2} < 0$$

$\geq 0 \quad \geq 0$

□

3.20 PROP (1. Nullstelle des Cosinus)

$\exists! x_0 \in [0, 2] \text{ mit } \cos(x_0) = 0$

Beweis: 3.19(iii)  $\Rightarrow \cos$  str. mon. fallend auf  $[0, 2]$   
 $\Rightarrow \cos|_{[0, 2]}$  ist injektiv

3.19(i)  $\Rightarrow \cos(0) > 0, \cos(2) < 0$

$\xrightarrow{\text{ZUS}}$   $\exists x_0, 0 < x_0 < 2 \text{ mit } \cos(x_0) = 0$

Wegen der Injektivität ist  $x_0$  die einzige NST. □

3.21 DEF ( $\pi$ )

Sai  $x_0$  die eindeutige NST von  $\cos$  in  $[0, 2]$  (gemäß 3.19)

Wir definieren die reelle Zahl  $\pi$  ob

$\exists \pi = x_0$

3.22 BEN (Ein bisschen in Richtung Gewohntes)

$\pi$  ist unser Def werden einige obigen Aussagen verkannt.

(i) Lemma 3.18 (i) und Def 3.11 liefern

$$\cos(x) > 0 \text{ für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) < 0 \text{ für } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Außerdem gilt  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $\sin\frac{\pi}{2} > 0$  (3.18(ii)) und daher

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ and } e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i \quad (*)$$

(ii) Extrema & Nullstellen f. Sin & Cos

Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  folgt mit (\*)  $e^{ik\pi/2} = (e^{i\pi/2})^k = i^k$ ; k end damit insbesondere

$$e^{i0} = 1 = \cos(0) + i \sin(0) \quad e^{i\pi/2} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{i\pi} = -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) \quad e^{i3\pi/2} = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$e^{i2\pi} = 1 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi)$$

und damit ergibt sich folgende Wertetabelle

| $x$       | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|-----------|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $\sin(x)$ | 0   | 1               | 0     | -1               | 0      |
| $\cos(x)$ | 1   | 0               | -1    | 0                | 1      |

3.23 KOR (Weitere Eigenschaften von sin & cos) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$(i) \cos(x+2\pi) = \cos(x), \sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \begin{array}{l} \text{(Periodizität mit)} \\ \text{(Periodenlänge } 2\pi) \end{array}$$

$$(ii) \cos(x+\pi) = -\cos(x), \sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \text{(hobt Periode)}$$

$$(iii) \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x), \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \quad \begin{array}{l} \text{(\frac{\pi}{2} Verschiebung)} \\ \text{ergibt jewei-} \\ \text{lich andere Fkt.} \end{array}$$

$$(iv) \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}, \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z} = \left\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Beweis. (i)-(iii) folgt unmittelbar aus den Additionsäquationen  
& der Wertetabelle [genauer:

$$(i) \cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x)$$

(3.17(iv)) (3.22(iii))

und analog für  $\sin$ . (3.22(ii))

$$(ii) \cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$$

(3.17(iv)) (3.17(iii))

und analog für  $\sin$ . (3.17(iii))

$$(iii) \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) = \cos(-x) = \cos(x)$$

(3.17(iv)) (3.17(iii))

und analog für  $\cos$ . ]

(ir) Wegen der  $2\pi$ -Periodizität (ii) genügt es die Aussage  
für  $x \in [0, 2\pi)$  zu zeigen. Wir beginnen mit  $\sin$ .

Die zwei behaupteten Nullstellen in  $[0, 2\pi)$  nämlich  $0, \pi$   
haben wir schon in 3.22(iii) gefunden. Es genügt also zu zeigen,  
dass es keine weiteren NST in  $[0, 2\pi)$  gibt. Das tun wir  
indem wir zeigen, dass  $\sin(x)$  auf  $(0, \pi)$  positiv  
und auf  $(\pi, 2\pi)$  negativ ist. Sei dazu  $x \in (0, \pi)$ :

$$0 < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ und daher}$$

$$\sin(x) \stackrel{(ii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{(3.17(iii))}{>} 0 \quad (*)$$

Wegen  $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$  gilt

$$\sin(x+\pi) \stackrel{(ii)}{=} -\sin(x) \stackrel{(*)}{<} 0 \text{ also } \sin(x) < 0 \quad (\pi < x < 2\pi).$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus

$$\cos(x) \stackrel{(ii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

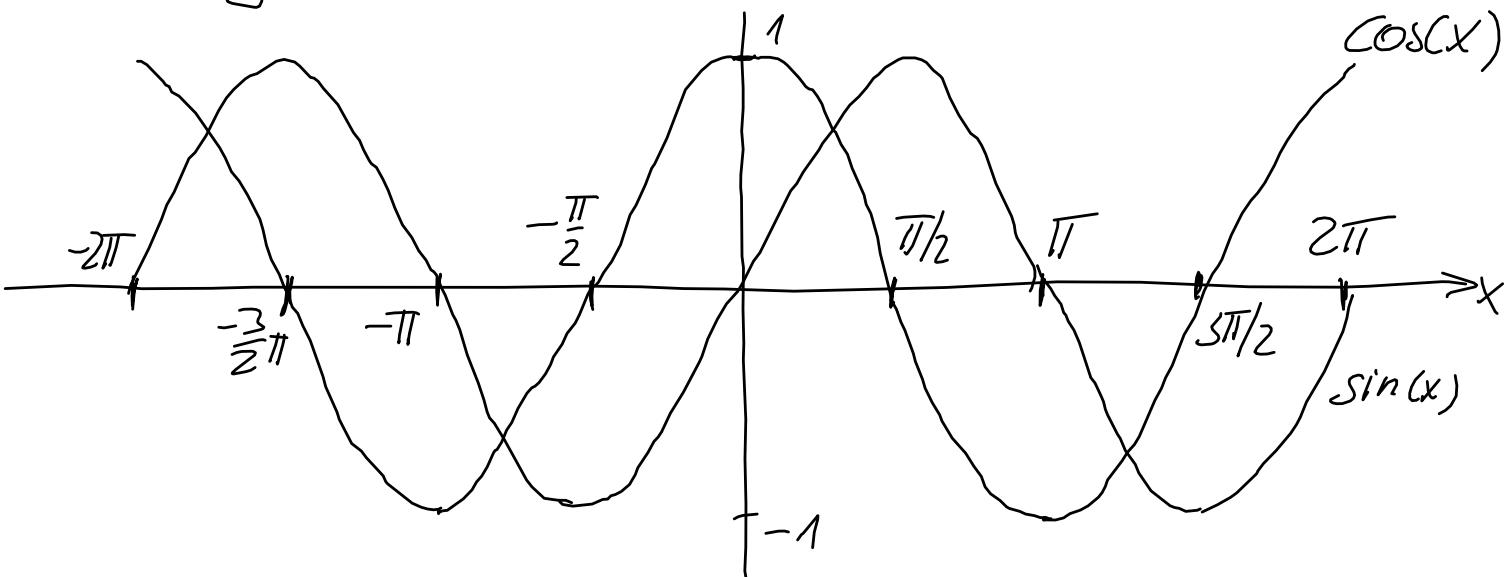
]

### 3.24 DER GRAPHS von Sinus & Cosinus

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein relatives qualitatives Bild der Graphen der Fkt  $\sin$  &  $\cos$  gewinnen; insbes. gilt

(i) Eine Verschiebung des Graphen von  $\cos$  um  $\pi/2$  nach rechts ergibt den Graphen des  $\sin$   
 $[3.23(\text{iii}) \& 3.17(\text{iii}): \cos(x - \pi/2) = \sin(x)]$

(ii) Neben den NST [3.23(iv)] kennen wir die Maxima und Minima [jezals die NST der anderen Fkt wegen 3.17(ii)], wo die Fkt jezals das Monotonieverhalten ändern.



### 3.25 DEF (Tangens & Kotangens) Wir definieren die Fkt

(i) Tangens,  $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$  periodic NST von  $\cos$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

(ii) Kotangens,  $\cot: \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

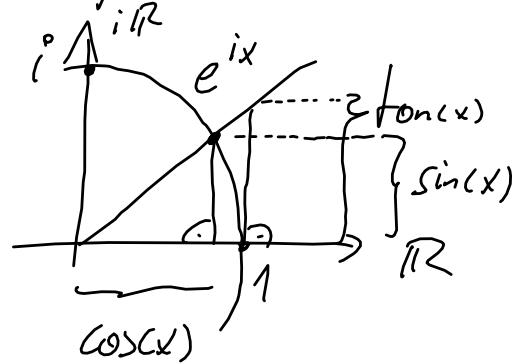
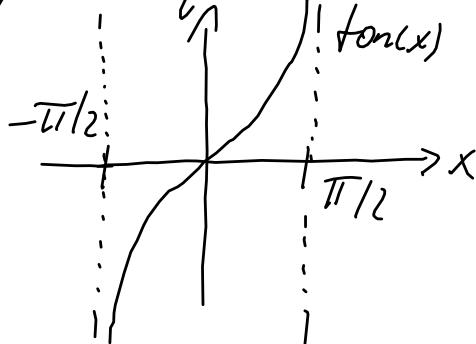
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

gepolte  
Grafen  
der NST  
von  $\sin$

### 3.26 BEM (Eigenschaften des Tangens)

(i) Eine geometrische Interpretation von  $\tan(x)$  für  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  ergibt sich mit dem Stochiensatz:

(ii) Der Graph auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ergibt sich aus den Eigenschaften von  $\sin$  &  $\cos$  zu



(iii) Periodizität: Es gilt

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

(3.23cii)

Also ist  $\tan$  periodisch mit Periode  $\pi$ ; der gesuchte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben der Graphen in  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  um  $\pi$ .

### 3.27 ROTATION (Arcusfunktionen) zu plzler (erst behandeln)

wir die Umkehrfunktionen von  $\cos$ ,  $\sin$  &  $\tan$ . Sie geben dazu gegebenem Winkelwerts oder juraligen Winkel (im Bogenmaß) an, ob die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis ist – daher die Namen Arcussinus/Cosinus/Tangens.

lot. Bogen

Wesentlicher Werkzeug ist hier – wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus – der Umkehrsatz 2.18.

## 168

### 3.028 Prop & DEF (Arcuscosinus /fon)

(i)  $\cos$  ist stetig, str. mon. fallend auf  $[0, \pi]$  und  $\cos(0\pi) = 1$ ,  $\cos(\pi) = -1$ .

Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

und nennen sie Arcuscosinus.  $\arccos$  ist stetig und str. mon. fallend.

(ii)  $\sin$  ist stetig, str. mon. wachsend auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

und nennen sie Arcussinus.  $\arcsin$  ist stetig und str. mon. wachsend.

(iii)  $\tan$  ist stetig, str. mon. wachsend auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\tan(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$ ,  $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$ .

Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

und nennen sie Arcustangens.  $\arctan$  ist stetig & str. mon. wachsend.

Bemerkung: Es sind jeweils die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.18 zu zeigen – dies besorgt dann jeweils der Rest.

(i) 3. A(i)  $\Rightarrow \cos$  stetig

3. 1P(ii)  $\Rightarrow \cos$  str. mon. fallend auf  $[0, \pi/2]$

$$3.23 \text{ (ii)} \Rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \cos \text{ str. mon folgend auf } [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \Rightarrow \cos \text{ str. mon folgend auf } [0, \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \text{ str. mon } \overset{169}{\uparrow}$$

$$3.22 \text{ (ii)} \Rightarrow \cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$$

$$\text{ZwS} \Rightarrow [-1, 1] \subseteq \cos([0, \pi]) \quad \left. \begin{array}{l} (\ast) \Rightarrow \cos([0, \pi]) \subseteq [-1, 1] \\ \Rightarrow \cos([0, \pi]) = [-1, 1] \end{array} \right\}$$

2.18

$\Rightarrow \cos$  hat str. mon folgende & schlige Inverse  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

(ii) Mit  $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von  $\sin$  auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

(iii)  $\tan$  ist str. mon steigend auf  $[0, \frac{\pi}{2})$ , denn  
für  $0 \leq x < x' < \frac{\pi}{2}$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \cos(x) > \cos(x')$$

$$\stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \sin(x) < \sin(x')$$

und damit  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x')$

$\tan$  ist auch str. mon steigend auf  $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ , denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad (\ast)$$

$\tan$  ist steigig (als Quotient steigige Fkt; 1.17(i))

und schließlich gilt  $\tan((- \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ ,

denn  $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$  und  $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \stackrel{(1.26)}{=} \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \stackrel{3.22 \text{ (ii)}}{=} 0$

$\Rightarrow \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty \quad \text{ZwS} \quad \Rightarrow \tan([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, \infty)$

$(\ast) \Rightarrow \tan((- \frac{\pi}{2}, 0]) = (-\infty, 0]$ .

]

### 3.29 BEM (zu den Arcusfunktionen)

$\cos$  170

(i) Natürlich hätten wir den "Umkehrprozess" stell auf  $[0, \pi]$  bzw.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  auf jedem Intervall durchführen können, wo die jeweilige Funktion str. monoton ist.

(ii) Als Graphen ergeben sich (durch Spiegelung entw. 1. Mediane)

