Kapitel C

Der Funktionsbegriff

In diesem Abschnitt behandeln wir den Funktionsbegriff. Im Kanon der Schulmathematik Vorlesungen und im Curriculum (Studienplan) ist das Thema „funktionale Abhängigkeiten“ der Schulmathematik Arithmetik und Algebra (Modul: UF MA 08) zugeordnet. Da aber der Funktionsbegriff allen Themen der Schulanalysis zugrunde liegt und daher in der Vorlesung eine tragende Rolle spielt, gehen wir hier in gebotener Kürze auf ihn ein, wobei wir seine analytischen Aspekte betonen.

§1 Einleitung

Der Begriff der *Funktion* bzw. der *Abbildung*[1] ist zentral für die gesamte Mathematik. Er ist ein sehr allgemeiner Begriff und gerade, weil er so allgemein ist, ist es schwierig, seine Substanz zu verstehen und zu vermitteln. Darauf fokussieren wir in unserer Darstellung.

§1.1 Zur Entstehung des Funktionsbegriffs

Obwohl der Begriff der Abbildung einer der wichtigsten Begriffe der modernen Mathematik ist, wurde er erst sehr spät, nämlich im zwanzigsten Jahrhundert formalisiert. Natürlich wussten die Mathematiker/innen schon lange davor, was eine Funktion ist. Der Begriff wurde allerdings in verschiednen Gebieten in verschiedenen speziellen Ausformungen verwendet und seine abstrakte Definition hat sich erst sehr spät herausgebildet.
Diese Tatsache spiegelt sich auch in der Vielzahl von Bezeichnungne wider, mit der (Spezialfälle von) Funktionen in den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verwendet werden, vgl. etwa (Schichl and Steinbauer, 2018, p. 165, graue Box).

1.1.1. Zur Geschichte des Funktionsbegriffs. Es gibt aufgrund der oben angedeuteten langen Geschichte der Begriffsentwicklung auch eine Fülle von mathematisch-historischer Literatur zum Funktionsbegriff, seiner Entstehungsgeschichte, seinen Vorformen und seiner Verwendung in den Werken einflussreicher Mathematiker. Einen ersten Überblick bietet etwa (Greefrath et al., 2016, Aschn. 2.1) und wir belassen es hier mit diesem Hinweis.

1.1.2. Didaktische Phänomenologie. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Mathematik eignet sich aufgrund ihrer Geschichte besonders gut für einen speziellen didak-

[1] Die beiden Bezeichnungen werden meist synonym verwendet, wir werden aber, weil das in der Schulmathematik weiter verbreitet ist, meist von Funktionen sprechen.

tischen Zugang, der *didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen* genannt wird und auf (Freudenthal, 1983) zurückgeht. Aufbauend auf fachwissenschaftlichen und historisch-genetischen Überlegungen sowie der Beziehung der Mathematik zur realen Welt besteht dieses Konzept darin, den historischen Weg im Unterricht gewissermaßen (zumindest teilweise) nachzuvollziehen:

> Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind. (Freudenthal, 1983, S. IX)

Dieser Zugang kann insbesodere gut verwendet werden, um tragfähige Grundvorstellungen zu entwickeln.

§2 Zum Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs

§2.1 Fachdidaktische Bestandsaufnahme

Das Lehren des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht hat sich im vergangenen Jahrhundert immer wieder verändert. Oft waren die didaktischen Diskussionen dazu von Mathematikern ausgelöst, die in den Anfängervorlesungen zur Analysis viel Kritik am mangelnden Verständnis der Studierenden äußerten. Fachdidaktische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Funktionen lieferten zahlreiche Erkenntnisse. Die wesentlichen davon seien hier im Folgenden skizziert (vgl. etwa Vollrath and Weigand (2007)).

(1) Häufig werden das Formale und die Ansprüche an Exaktheit und Strenge überbetont sowie oft auch zu früh mit unverstandenen Begrifflichkeiten gearbeitet. Dies führt nicht zum gewünschten Begriffsverständnis.

(2) In den 1990er Jahren zeigte sich, dass für das Verständnis von Funktionen die Vorstellungen (concept image) entscheidend sind. D.h. Funktionen sind bei Schülerinnen und Schülern vorwiegend durch Beispiele und ihre Darstellungen bestimmt — nicht durch eine formale Definition.

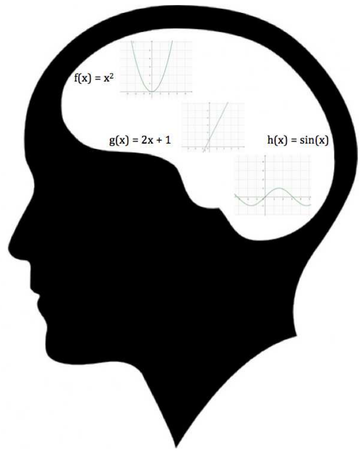
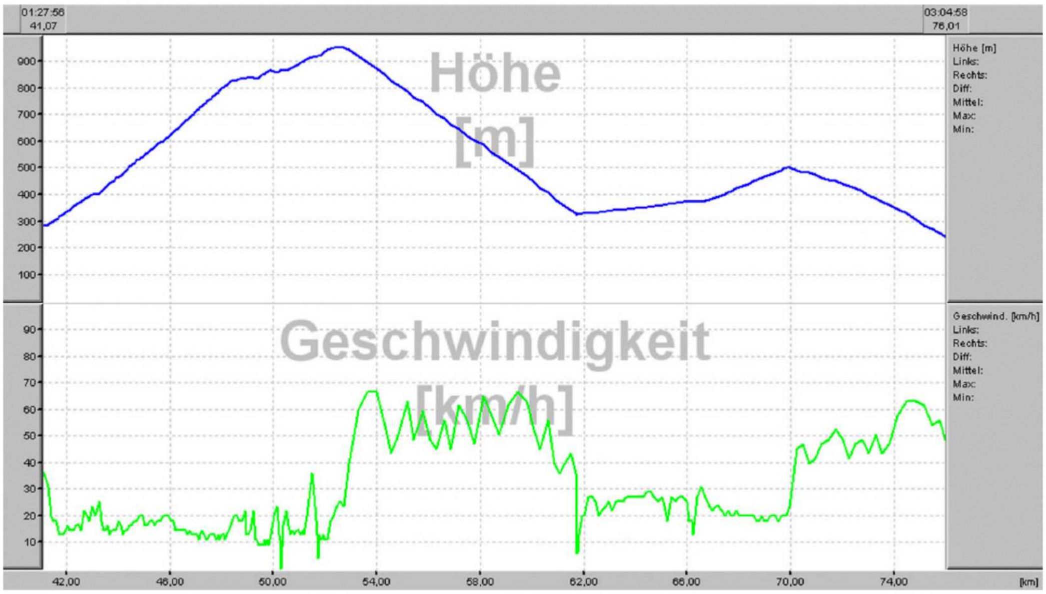


Abb. C.1: Concept image

(3) Weiters zeigte sich, dass viele Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Lesen von Funktionsgraphen haben. Ungewohnte Darstellungen wie die nachfolgende Abbildung C.2 sowie das zusammenhängende Betrachten und Erfassen des dargestellten Zusammenhangs stellen zusätzliche Herausforderungen dar.

Das untenstehende Diagramm zeigt einen Ausschnitt aus einer Trainingsaufzeichnung eines Radfahrers.



a) Wie lang ist die erste Abfahrt vom Berg?
b) Wie viele Serpentinen (enge Kurven) kamen auf der Abfahrt vom ersten Berg vor?
c) Wie groß war die ungefähre Durchschnittsgeschwindigkeit des Raderennfahrers.

Abb. C.2: Ausschnitt aus der Aufgabe Trainingsanalyse (Quelle: Blum et al. (2006))

(4) Die unterschiedlichen Darstellungen Term, Tabelle und Graph einer Funktion eigenen sich unterschiedlich gut, Eigenschaften von Funktionen einsehbar zu machen. So ist beispielweise für Schülerinnen und Schüler anhand einer Tabelle (siehe Abbildung C.3) direkte Proportionalität (zum r-fachen gehört das r-fache) besser ersichtlich als beim Graphen (siehe Abbildung C.4). Dort wird für sie vorwiegend die „Geradlinigkeit“ sichtbar.

x	f(x)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30

Abb. C.3: Direkte Proportionalität — Wertetabelle

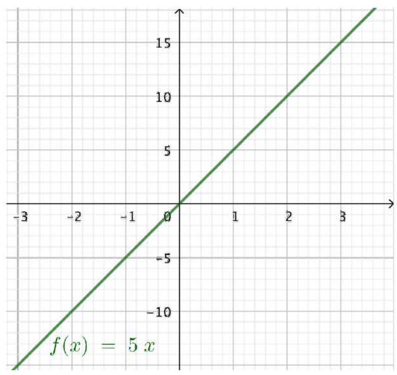


Abb. C.4: Direkte Proportionalität — Funktionsgraph

(5) Zu guter Letzt konnten auch erhebliche Schwierigkeiten beim Wechsel zwischen den Darstellungsformen (Text — Funktionsgleichung — Tabelle — Graph) festgestellt wer-

den.

§2.2 Funktionales Denken

In der fachdidaktischen Literatur wird im Allgemeinen[2] unter „Funktionalem Denken“ der gedankliche Umgang mit Funktionen verstanden. Dabei gilt es, den Mathematikunterricht so zu gestalten, dass die Schülerinnen und Schüler die drei nachstehenden Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff entwickeln können. An vielen Stellen des Unterrichts können im Themenbereich der Funktionen die sekundären Grundvorstellungen aus den primären Grundvorstellungen entwickelt werden.

2.2.1. Grundvorstellung 1: Zuordnungscharakter bzw. Zuordnungsvorstellung. Dazu finden sich in der Literatur folgende Charakterisierungen:

> *Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann einer andere zugeordnet, so dass die Größe als abhängig von der anderen gesehen wird.* (Vollrath and Weigand, 2007)

> *Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu. Mit dem Mengenbegriff formuliert bedeutet dies: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Zielmenge zu.* (Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)

Im Unterricht können Experimente, bei denen Schülerinnen und Schüler selbstständig Messungen vornehmen und diese aufzeichnen, zur Ausbildung dieser Grundvorstellung beitragen. Wir besprechen zwei Beispiele.

Abkühlvorgang von Tee. Miss im Minutentakt die Temperatur eines frisch gekochten Tees und halte in einer Tabelle die Messzeitpunkte und die Temperatur fest. Stelle anschließend die Wertepaare $(t|\,^\circ C)$ im Koordinatensystem dar.
Tee ist bei etwa 60° trinkbar. Nach welcher Zeit ist der frisch gekochte Tee soweit abgekühlt, dass er ohne Verbrennen trinkbar ist?

Eine **exemplarische Lösung** dazu kann wie folgt aussehen:

Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Abb. C.5: Meßwerte zum Abkühlvorgangs

Nach 5 Sekunden ist der Tee trinkbar, da die Temperatur zwischen der vierten und fünften Sekunde auf unter 60° absinkt.

[2] In der mathematikdidaktischen Genderforschung erhält das „Funktionales Denken“ eine weitere Bedeutung. Dort steht es im Gegensatz zum „Prädikativen Denken“. Siehe z.B. http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm033a2.pdf

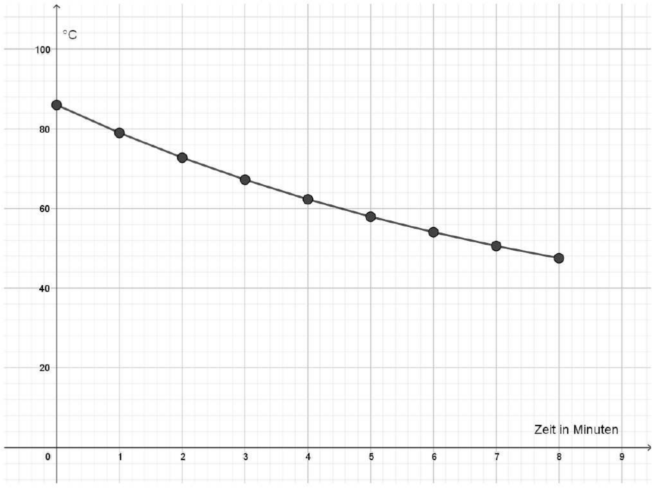


Abb. C.6: Grafische Darstellung des Abkühlvorgangs

In diesem Fall erfahren die Schülerinnen und Schüler, dass jedem Messzeitpunkt (genau) eine Temperatur zugeordnet wird. Das Protokollieren der Temperaturmessung in Form einer Tabelle stützt die Grundvorstellung „Zuordnungscharakter“.

Dynamische Darstellung. Um den Zuordnungscharakter an der grafischen Darstellung deutlich zu machen, eignen sich dynamische Lernobjekte, die den Zusammenhang zwischen der x- und y-Koordinate deutlich sichtbar machen (siehe Abbildung C.7).

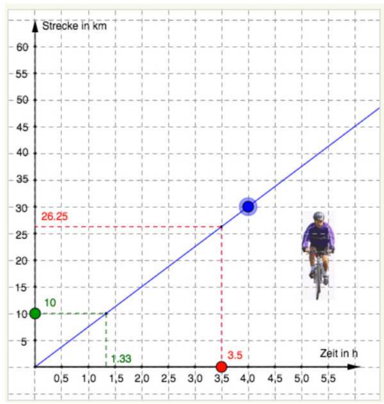


Abb. C.7: Zuordnungscharakter — Quelle: http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/-proportion/fahrrad.html

Zeit	Temp in°C
0	86
1	79
2	73
3	67
4	62
5	58
6	54
7	51

Abb. C.8: Zuordnungsvorstellung und Wertetabelle.

Entscheidend ist, dass mit der Zuordnungsvorstellung ein funktionaler Zusammenhang punktuell betrachtet wird. Dabei werden Wertepaare der Wertetabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in horizontaler Richtung gelesen.
Von Interesse sind z.B. bei der Aufgabenstellung zum Abkühlvorgang von Tee die einzelnen Wertepaare — also einzelne Zeitpunkte und die ihnen zugeordnete Temperatur (siehe Abbildung C.8).

2.2.2. Grundvorstellung 2: Änderungsverhalten/Kovariation bzw. Kovariationsvorstellung. Diese Grundvorstellung wird in der Literatur wie folgt beschrieben:

> *Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.* (Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)

Als Fortsetzung der Aufgabenstellung „Abkühlvorgang von Tee“ bieten sich im Sinne der zweiten Grundvorstellung folgende Fragen an:

Abkühlvorgang von Tee (Fortsetzung).
(1) Wie ändert sich die Temperatur des Tees in gleichen Zeitschritten?
(2) Ändert sich die Temperatur gleichmäßig oder zunächst schneller und dann langsamer?
(3) Belege deine Aussagen zur Temperaturänderung mit Werten aus der Tabelle bzw. Abschnitten des Graphen.

Eine **exemplarische Lösung** dazu kann wie folgt aussehen:
(1) Die Temperatur ändert sich in gleichen Zeitschritten unterschiedlich schnell.

Im Zeitintervall $[0;1]$	sinkt die Temperatur um 7 °C
In $[1;2]$	sinkt die Temperatur um 7 °C
In $[2;3]$	sinkt die Temperatur um 6 °C
In $[3;4]$	sinkt die Temperatur um 5 °C
In $[4;5]$	sinkt die Temperatur um 4 °C
In $[5;6]$	sinkt die Temperatur um 4 °C
In $[6;7]$	sinkt die Temperatur um 3 °C
In $[7;8]$	sinkt die Temperatur um 3 °C

(2) Die Temperatur ändert sich immer langsamer. Zu Beginn sinkt sie rasch, danach langsamer.
(3) Am Graphen zeigt sich das bei der unterschiedlichen Abnahme der Funktionswerte in gleichen Zeitintervallen.

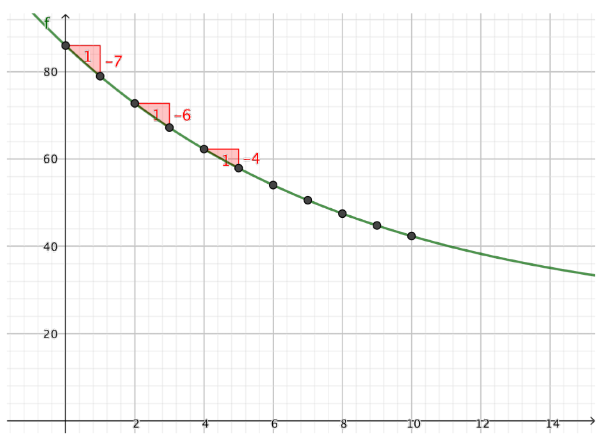
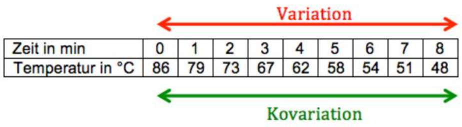


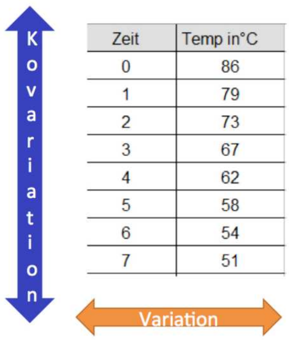
Abb. C.9: Graphische Darstellung — Abkühlvorgang von Tee

Sowohl in der Tabelle (Abbildung C.10) als auch am Graphen (Abbildung C.12) wird die Kovariationsvorstellung sichtbar.



Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Abb. C.10: Kovariationsvorst. — Tabelle



Zeit	Temp in°C
0	86
1	79
2	73
3	67
4	62
5	58
6	54
7	51

Abb. C.11: Kovariationsvorst. — Wertetabelle

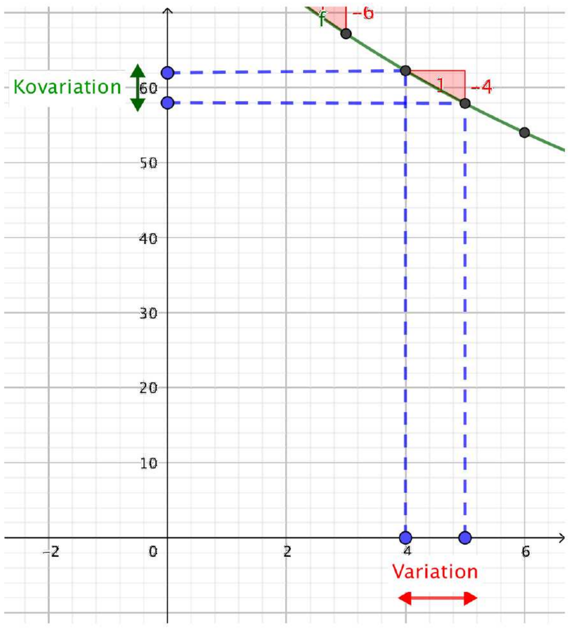


Abb. C.12: Kovariationsvorstellung — Graph

Das Entscheidende beim Kovariationsaspekt ist, dass es nicht mehr genügt, einzelne Wertepaare zu betrachten. Viel mehr müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden. Bei der Kovariationsvorstellung wird also der Blick darauf gerichtet, wie die Änderung von x mit der Änderung von y zusammenhängt. Hierbei wird also die Wertetabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in vertikaler Richtung betrachtet, siehe Abbildung C.11.

2.2.3. Grundvorstellung 3: Sicht als Ganzes bzw. Objektvorstellung. Diese dritte Grundvorstellung im Zusammenhang mit Funktionen wird wie folgt beschrieben:

> *Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder gestifteten Zusammenhang als Ganzes.* (Vollrath & Weigand, 2007)

> *Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.* (Greefrath et al., 2016, Abschn. 2.4.2)

Wird auf diese dritte Grundvorstellung im Unterricht abgezielt, dann werden jetzt nicht mehr einzelne Wertpaare, sondern die Menge aller Wertepaare betrachtet. Der Graph wird als Ganzes betrachtet und somit sind Aussagen über den gesamten Verlauf möglich.
Als weitere Fortsetzung der Aufgabenstellung „Abkühlvorgang von Tee“ bietet sich im Sinne der dritten Grundvorstellung ein Vergleich mit einem ähnlichen Abkühlvorgang an (Abbildung C.13)

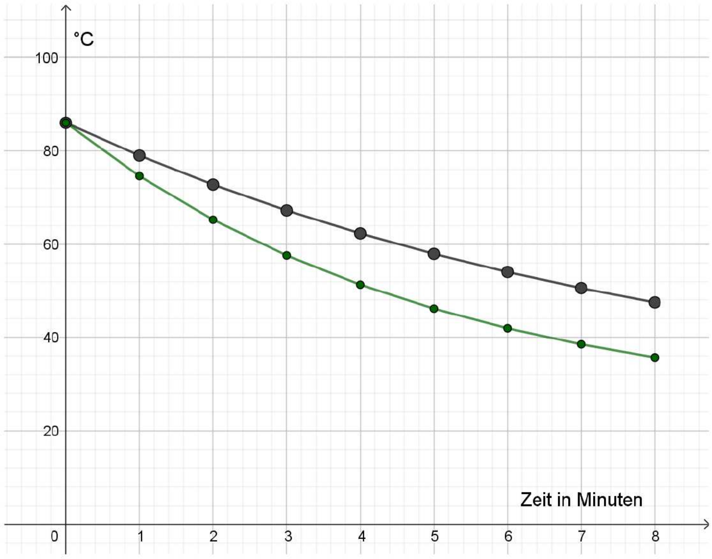


Abb. C.13: Vergleich zweier Abkühlvorgänge

Übungsaufgabe.

$\boxed{8}$ **Weltbevölkerung und Getreideproduktion.** Die Entwicklung der Weltbevölkerung für den Zeitraum 1970 bis 2010 kann näherungsweise durch die Funktion

$$w(t) = 3691\, e^{0{,}0156985\, t} \qquad (w(t) \text{ in Millionen, } t \text{ in Jahren})$$

beschrieben werden. Die Entwicklung der weltweiten Getreideproduktion in Tonnen kann im gleichen Zeitraum näherungsweise mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$g(t) = 0{,}004\, t^4 – 0{,}281\, t^3 + 6{,}04\, t^2 – 0{,}3\, t + 1193.$$

Formulieren sie je zwei Aufgabenstellungen für den Unterricht, die auf die Vorstellung von (a) Wertepaaren, (b) Änderungsverhalten und (c) das Verhalten der Funktionen im Ganzen fokussieren. Arbeiten Sie jeweils entsprechende Lösungserwartungen aus.

§2.3 Zum Technologieeinsatz bei Funktionen

Moderne Softwarepaket — wie zum Beispiel GeoGebra[3] — bieten die Möglichkeit, die drei zentralen Darstellungsformen einer Funktion (Funktionsgleichung, Tabelle, Graph) gleichzeitig zu verwenden (s. Abbildung C.14). Damit lassen einerseits die unterschiedlichen Darstellungsformen auf Knopfdruck erzeugen, andererseits können damit aber auch Eigenschaften von Funktionen, die Auswirkungen von Parametervariationen, etc. in allen drei Darstellungsformen studiert und erfasst werden.

[3] Andere auch wissenschaftlich genutzte Systeme sind z. B. Mathematica und Maple

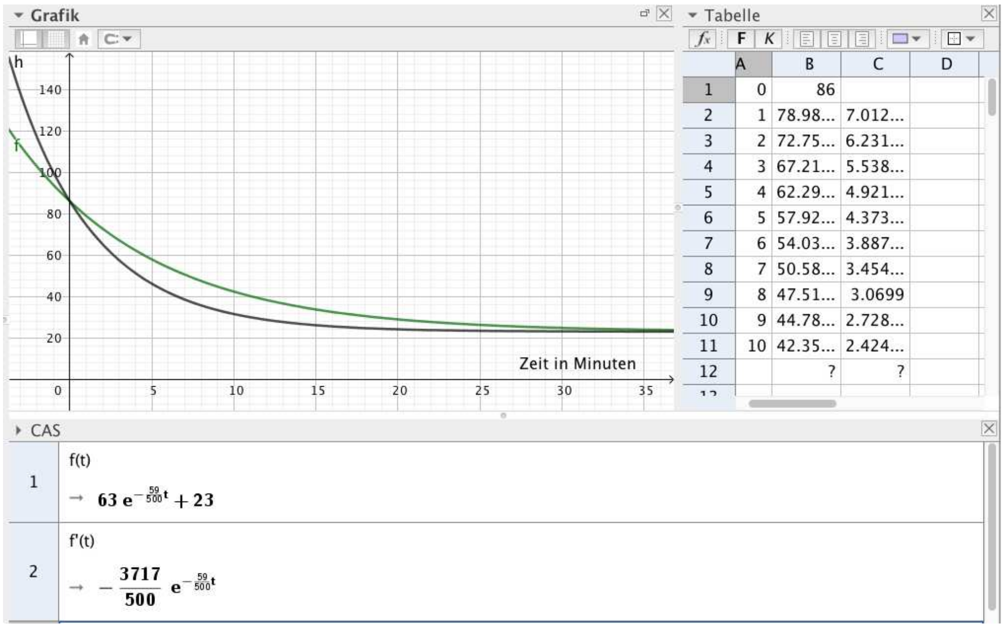


Abb. C.14: GeoGebra mit Grafik-, Tabellen- und CAS-Fenster

Des Weiteren kann der Computer — vor allem Computeralgebrasysteme — aber auch den Aufwand bei schematischen Abläufen wie z.B. dem Ermitteln von Nullstellen erheblich reduzieren. In solchen Fällen muss der Interpretation der Lösung dann größere Bedeutung zukommen.
Darüberhinaus erleichtert der Computer das Entdecken mathematischer Zusammenhänge sowie das Bearbeiten von Modellierungsaufgaben. Zu guter Letzt macht es der Computer auch möglich, erhaltene Lösungen zu überprüfen oder zu kontrollieren.

Übungsaufgabe.

$\boxed{9}$ **Parametervariation bei Exponentialfunktionen.** Untersuchen Sie (mithilfe von Technologie) wie sich bei den Funktionen

$$f_1(x) = e^{\lambda x}, \quad f_2(x) = e^{\lambda x} + c, \quad f_3(x) = e^{\lambda(x+c)} \quad \text{und} \quad f(x) = e^{\lambda c x}$$

die Variation der Parameter λ und c auf den Graphen der Funktion auswirken. Arbeiten Sie mit entsprechenden Wertetabellen und Graphen.

§3 Die Mathematik des Funktionsbegriffs

Hier wollen wir nun die wichtigsten mathematisch/inhaltlichen Facetten des Funktionsbegriffs diskutieren.

§3.1 Der Kern des Funktionsbegriffs

3.1.1. Erste Begriffsbestimmung. Kolloquial formuliert ist eine Funktion eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die *jedem* Element der einen Menge (Argument, unabhängige Variable) *genau ein* Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable) zuordnet. In der Literatur finden sich unterschiedlich abstrakte Definitionen des Funktionsbegriffs, die aber alle äquivalent sind. Der Kern des Begriffs ist das *„Jedem“* und das *„Genau-Ein“* in der Zuordnung.

3.1.2. Die fundamentale Bedeutung des Funktionsbegriffs in der (Struktur-)Mathematik. Abstrakt gesprochen, besteht ein großer Teil der modernen Mathematik aus der Analyse von abstrakten Strukturen. Diese Strukturen bestehen aus Objekten und den Beziehungen zwischen diesen Objekten. Diese Objekte werden meist zu Mengen zusammengefasst, sodass Mengen für die allermeisten Strukturen die Basis bilden. Funktionen sind nun die mathematische Formalisierung für die Beziehungen zwischen diesen Objekten. Daher bildet der Begriff einer *Funktion zwischen Mengen* das Fundament der gesamten Strukturmathematik.

Wir geben nun die mathematische Definition, mit der wir im folgenden arbeiten werden, siehe dazu auch (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 4.3). Wir werden — als Ergänzung — an einigen Stellen Verweise (mittels QR-Code bzw. Link) auf die Erklärvideos anbringen, die im Zusammenhang mit der 3. Auflage von Schichl and Steinbauer (2018) produziert wurden.

Mathematische Faktenbox 1: Funktion

3.1.3. Definition (Funktion). Seien A und B Mengen. Eine *Funktion* f von A nach B ist eine Vorschrift, die *jedem* $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ zuordnet.

➤ **Video** Funktionen, Teil I

3.1.4. Übliche Sprech- und Schreibweisen sind:

(1) Die Menge A wird als *Definitionsmenge* oder *Definitionsbereich* von f bezeichnet und B als *Zielmenge* oder *Zielbereich* von f.

(2) Das einem $a \in A$ zugeordnete Element b bezeichnen wir mit $f(a)$ und nennen es den Wert der Funktion f an der Stelle a oder das Bild von a unter f; a wird als ein Urbild von b unter f bezeichnet.

(3) Die Menge von geordneten Paaren

$$G(f) := \{(a, f(a)) |\ a \in A\} \subseteq A \times B \tag{C.1}$$

heißt *Graph* von f und ist die abstrakte Version der Zusammenstellung der a-Werte und der zugehörigen Funktionswerte $f(a)$ in einer Wertetabelle, siehe Abschnitt C.§2.2.

Mathematische Faktenbox 1 – Fortsetzung

(4) Das Symbol „$a \mapsto f(a)$“ (lies „a geht über (in) $f(a)$“) drückt aus, dass die Funktion f dem Element a des Definitionsbereichs das Bild $f(a)$ im Zielbereich zuordnet. Oft wird dieses Symbol auch zur Bezeichnung der Funktion selbst verwendet und man spricht von „der Funktion $a \mapsto f(a)$“ . Die ausführlichste und genaueste Darstellung einer Funktion erfolgt durch die Notation

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto \dots \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} f : A &\to B \\ f(a) &= \dots \end{aligned}$$

3.1.5. Beispiel (Funktionen). Einfache Funktionen sind etwa

(1) $f : A \to B$ mit $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$ gegeben durch $f : 1 \mapsto a$, $f : 2 \mapsto b$ und $f : 3 \mapsto a$. Der Graph von f ist dann die Menge $G(f) = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$.

(2) Sei $A = \mathbb{R} = B$. Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto x^2$. Dann gilt

$$G(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{(C.2)}$$

d.h. z.B. $(0, 0) \in G$, $(1, 1) \in G$, $(-1, 1) \in G$, $(2, 4) \in G$.

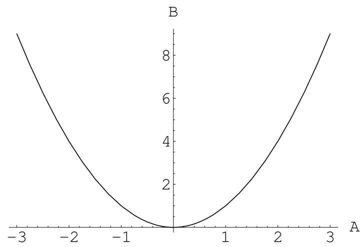


Abb. C.15: Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

3.1.6. Funktionen auf $\mathbb{R}$ und ihr Graph. Allgemein ist es üblich und sehr anschaulich (vgl. Abschnitt C.§2.2) die Graphen reeller Funktionen der Form

$$f : I \to J \qquad (I,\ J \text{ Intervalle oder andere „schöne“ Teilmengen von } \mathbb{R}), \qquad \text{(C.3)}$$

die ja Teilemengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ sind, „in kartischen Koordinaten darzustellen“, siehe Abbildung C.15. Bedenken Sie aber, dass für allgemeine Definitions- und Zielmengen eine solche Darstellung nicht möglich ist, vgl. auch Abschnitt C.§3.3, unten.

3.1.7. Der Kern der Funktionsbegriffs. Wie schon oben angedeutet, besteht der inhaltlich Kern des Funktionsbegriffs im „*jeden*“ und im „*genau ein*“, etwas ausführlicher in der Tatsache, dass

(F1) *jedem* Element der Definitionsmenge *genau ein* Element der Zielmenge zugeordnet wird.

Das ist gewissermaßen das hochverdichtete Konzentrat einer sehr lange andauernden Begriffsbildung und so allgemein und abstrakt, dass gerade darin die Schwierigkeit liegt, den Begriff zu erfassen und zu verstehen.

Wir werden uns dem anhand von sog. *Pfeildiagrammen* annähern, mit denen sich Funktionen zwischen *endlichen* Mengen sehr bequem darstellen lassen, siehe Abbildung C.16. In diesem Diagramm bezeichnen die Punkte die verschiedenen Elemente der Mengen A bzw. B, und die Pfeile symbolisieren die Zuordnung durch die Funktion f.
Die Tatsache, dass nach Definition 3.1.3 *jedem* $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ zugeordnet wird, bedeutet, dass von jedem Element von A *genau ein* Pfeil wegführt. Das bedeutet, dass

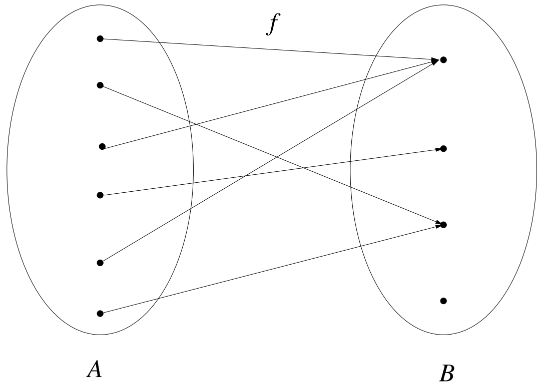


Abb. C.16: Pfeildiagramm einer Funktion $f : A \to B$ zwischen endlichen Mengen.

.

(1) von *keinem* $a \in A$ mehr als ein Pfeil startet und
(2) von *keinem* $a \in A$ gar kein Pfeil startet.

Andererseits können die Elemente von B von mehreren Pfeilen getroffen werden, oder auch von gar keinem. Ob das tatsächlich auftritt oder nicht, hat *nichts mit dem Funktionsbegriff* zu tun, sondern mit der Frage, ob die Funktion die Eigenschaften injektiv, surjektiv oder bijektiv hat, die wir unten genauer besprechen werden. An dieser Stelle ist es aber essentiell zu bemerken, dass beim Funktionsbegriff Definitions- und Zielmenge *nicht* „gleichrangig“ behandelt werden und daher ihre Rollen nicht einfach vertauscht werden können.

Übungsaufgaben.

$\boxed{10}$ **Funktionsdefinition.** Wir haben in 3.1.7 für den Fall einer Funktion zwischen endlichen Mengen herausgearbeitet, wie sich der Kern des Funktionsbegriffs (*jedem* Element der Definitionsmenge wird *genau ein* Element der Zielmenge zugeordnet) im Pfeildiagramm äußert.
Wir betrachten nun eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Wie äußert sich der Kern des Funktionsbegriffs in diesem Fall, d. h. wie muss der Graph von f aussehen, bzw. was kann nicht passieren?

$\boxed{11}$ **Eine Schulaufgabe.** Wir betrachten die folgende Schul(buch)aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f = \dfrac{x}{x^2+1}$. Bestimme den Definitionsbereich.

a) Diskutieren/kritisieren Sie diese Aufgabe.
b) Bringen Sie die Aufgabe in eine sinnvollere Form.

§3.2 Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Wir diskutieren zunächst die grundlegenden Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv, vor allem, um sie klar vom Kern des Funktionsbegriffs (F1) abzugrenzen und etwaige Missverständnisse aufzuklären.

Mathematische Faktenbox 2: Injektiv, surjektiv, bijektiv

3.2.1. Definition (Injektiv, surjektiv, bijektiv). Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

(1) *injektiv* wenn *jedes* Element $b \in B$ *höchstens ein* Urbild hat (kolloquial: von f höchstens einmal getroffen wird),

(2) *surjektiv* wenn *jedes* Element $b \in B$ (mindestens) *ein Urbild* hat (kolloquial: (überhaupt) von f *getroffen* wird),

(3) *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

➤ **Video** Injektiv, surjektiv, bijektiv, I Injektiv, surjektiv, bijektiv, II

3.2.2. Bijektive Funktionen haben also die Eigenschaft, dass jedes b in der Zielmenge genau einmal getroffen wird. Daher sind bijektive Funktionen in gewisser Weise „fad", weil sie eine Eins-zu-eins Zuordnung der Elemente von A und B sind: Die Funktion ordnet alle Elemente von A und alle Element von B einander in eindeutiger Weise zu. Im Falle endlicher Mengen A und B ist eine bijektive Abbildung „nur" eine Umbenennung der Elemente.

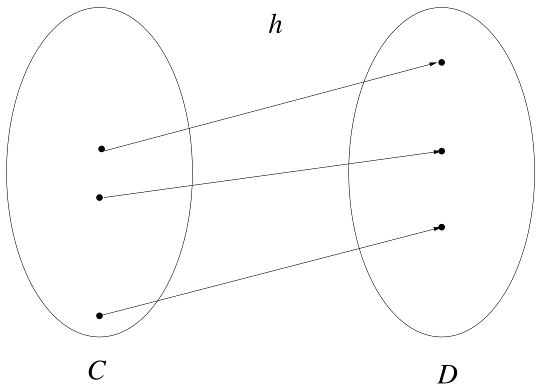


Abb. C.17: Das „fade" Pfeildiagramm einer bijektiven Funktion.
.

Schließlich sind bijektive Funktionen auch umkehrbar, d. h. es gibt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ mit

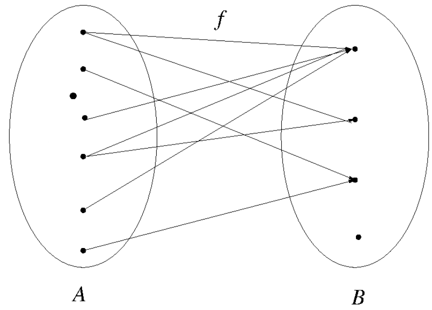
$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \tag{C.4}$$

für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

Übungsaufgaben.

$\boxed{12}$ **Funktion, injektiv, surjektiv, bijektiv im Pfeildiagramm.** Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift f zwischen den endlichen Mengen A und B im Pfeildiagramm.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Warum bzw. warum nicht?



Modifizieren Sie das Pfeildiagramm so, dass eine
(b) injektive aber nicht bijektive,
(c) surjektive aber nicht bijektive,
(d) bijektive.
Funktion entsteht.
(Hinweis: Überlegen Sie, wieviele Elemente die Zielmenge in (a) haben darf, bzw. in (b) haben muss, bzw. wieviele Elemeneten in (c) Definitions- bzw. Zielmenge haben müssen.)

$\boxed{13}$ **Injektiv, surjektiv, bijektiv für reelle Funktionen.** Beschreiben Sie in Worten bzw. graphisch, wie die Graphen von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein beliebiges Intervall) aussehen, falls sie (a) injektiv, (b) surjektiv, bzw. (c) bijektiv sind. Wie können Graphen solcher Funktionen (nicht) aussehen? Betrachten Sie auch *nicht* stetige Funktionen.

3.2.3. Funktionsdefinition: Häufige Fehler. Folgende Fallgruben im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff heben wir besonders hervor:

(1) Zur Festlegung einer Funktion **muss** man ausdrücklich Definitions- und Zielmenge angeben. Die Angabe der Zuordnungsvorschrift alleine ist keinesfalls ausreichend, weil die Eigenschaften der Funktion *wesentlich* von Definitions- und Zielmenge abhängen!
(2) Es ist wichtig, zwischen der Funktion f und den Werten $f(x)$ einer Funktion zu unterscheiden. Falsch ist etwa

   Die Abbildung $f\cancel{(x)}$ ...

   Dafür hat man die $\mapsto$–Notation. Die Formulierung

   Die Abbildung $f : x \mapsto f(x)$ ...

   ist in Ordnung.

Übungsaufgabe.

$\boxed{14}$ **Definitions- und Zielbereich sind wichtig.** Betrachten Sie die Zuordnungsvorschrift/Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ und finden Sie Intervalle I und J sodass die Funktion $f :\ I \to J$ die folgenden Eigenschaften hat:
a) injektiv (aber nicht bijektiv),
b) surjektiv (aber nicht bijektiv),
c) bijektiv.

§3.3 Weiterführende Bemerkungen

Obwohl in der Schulmathematik hauptsächlich Funktionen von (Intervallen in) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ auftreten, ist es wichtig im Blick zu behalten, dass der Funktionsbegriff *viel* allgemeiner ist. Wir diskutieren zwei Beispiele, die in der klassischen Analysis wichtig sind und eine „Anwendung“ des Funktionsbegriffs „auf höherer Ebene“.

3.3.1. Ebene Kurven sind Abbildungen von (Intervallen in) $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^2$. Das Erzbeispiel ist der Kreis, mathematisch auch S^1 genannt,

$$k : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad k(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \tag{C.5}$$

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterdarstellung#/media/File:Parametric-representation-of-unit-circle.svg
Von .gs8 (talk) — Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18961072

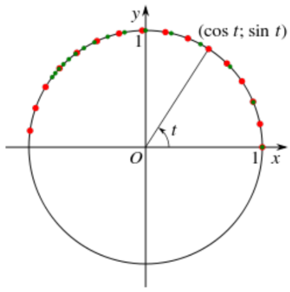


Abb. C.18: Der Kreis

Für derartige Funktionen ist es *nicht* möglich den Graphen im $\mathbb{R}^2$ darzustellen; er ist ja per Definition eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Eine gute Veranschaulichung von Kurven gelingt, indem man ihr *Bild* (vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, 4.3.11 f.)) als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ darstellt. Im obigen Beispiel (C.8) erhalten wir für das Bild $k([0, 2\pi))$ den Einheitskreis in der Ebene, siehe Abbildung C.18.

Die klassische Theorie der Kurven ist sehr reichhaltig und kennt viele „schöne“ Beispiele, etwa die Kardioide (Herzkurve) $c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$c(\varphi) = \begin{pmatrix} 2a(1 - \cos(\varphi))\cos(\varphi) \\ 2a(1 - \cos(\varphi))\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

die durch das Abrollen eines Kreises auf einem Kreis mit demselben Radius entsteht, siehe Abbildung C.19.

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kardioide#/media/File:Kardioide.svg von Ag2gaeh — Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46189703

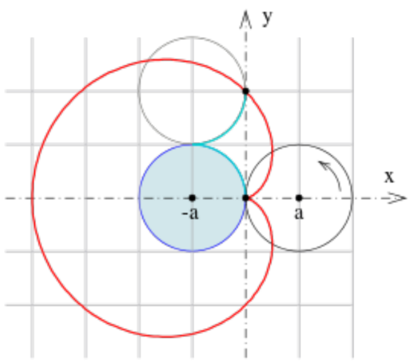


Abb. C.19: Die Kardioide

3.3.2. Flächen, Landschaften. Der Graph von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann als eine Fläche im Raum dargestellt werden, siehe Abbildung C.20.
Ein praktisches Beispiel einer solchen Funktion wäre etwa die Temperaturfunktion, die jedem Punkt in Wien (das wir der Einfachheit halber als Teil der Ebene $\mathbb{R}^2$ ansehen) die (vorhergesagte) Tiefsttemperatur der kommenden Nacht zuordnet.
Verständnisfrage: Was würde es in diesem Kontext bedeuten, falls Teile des Graphen „unterhalb“ der (x, y)-Ebene liegen?

Ein weiteres einfaches Beispiel ist die Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) &= \sin(2x)\cos(x), \end{aligned} \tag{C.6}$$

deren Graph links dargestellt ist.

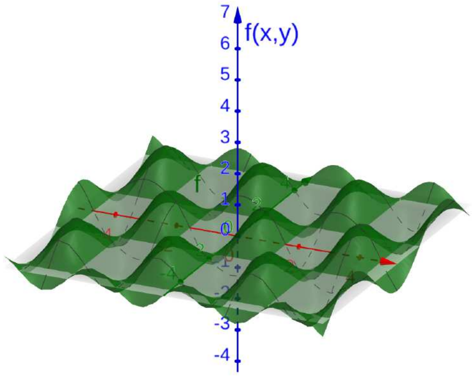


Abb. C.20: Graph der Funktion (C.6).

3.3.3. Ableitungsoperator. Eine äußerst interessante Begriffsbildung sind auch Funktionen, die Funktionen neue Funktionen zuordnen; man spricht dann meist von *Operatoren*. Ein instruktives Beispiel ist der *Ableitungsoperator* etwa in der folgenden Form:

$$D: \ C^1(\mathbb{R}) \ \to \ C(\mathbb{R}), \qquad f \mapsto f'. \tag{C.7}$$

Hier bezeichnet $C^1(\mathbb{R})$ die Menge (sogar den Vektorraum) der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $C(\mathbb{R})$ die Menge (ebenfalls Vektorraum) der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Der Operator D ordnet dann jeder C^1-Funktion ihre (stetige) Ableitungsfunktion zu. Mit dieser Begriffsbildung kann man nun Tatsachen/Sätze der Analysis in Termen der Eigenschaften des Operators D kodieren, aber das führt uns hier zu weit ...

Es sei aber angemerkt, dass man die aus dem Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung abgeleitetet Aussage, dass Differenzieren und Integrieren zueinander „im wesentlichen" inverse Operationen sind, in Termen des Ableitungs- und des Integraloperators präzise machen kann, siehe etwa (Steinbauer, 2013, $\boxed{4}$ Bem. 2.8).

§4 Aspkete und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel C werfen wir einen informierten Blick zurück und verwenden die Terminologie der Aspekte und Grundvorstellungen (siehe Abschnitt B.§1) um vor allem unsere fachdidaktische Diskussion des Funktionsbegriffs abzurunden.

§4.1 Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Wir haben in Abschnitt C.§2.2 bereits die drei Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff
(1) Zuordnungsvorstellung,
(2) Kovariationsvorstellung und
(3) Objektvorstellung
kennengelernt und im schulpraktischen Kontext beschrieben. Wir fassen sie hier im Folgenden noch einmal kurz zusammen.

4.1.1. Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff. Dieser ersten Grundvorstellung sind wir in 2.2.1 begegenet. Sie kann prägnant wie folgt formuliert werden.

FdPw-Box 6: Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff

Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.

Diese Vorstellung spielt also unmittelbar auf den Kern des Funktionsbegriffs (F1) an.
In dieser Vorstellung können wir den durch eine Funktion $f: A \to B$ gegebenen Zusammenhang zwischen Größen in der Definitionsmenge A und der Zielmenge B aus zwei Perspektiven betrachten. Um das auch konkret zu diskutieren, betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(r) = 2\pi r, \tag{C.8}$$

die jeder Zahl r den Umfang des Kreises vom Radius r zuordnet.

(1) *Perspektive der Definitionsmenge:* Gegeben ist ein $a \in A$. Welches $b \in B$ wird diesem A zu geordnet? Im Kontext von Beispiel (C.8) bedeutet das: Welchen Umfang hat ein Kreis vom Radius r?
Bemerke, dass diese Frage *immer genau eine* Antwort hat!
(2) *Perspektive der Zielmenge:* Gegeben ist ein $b \in B$. Welche a in A werden diesem b zugeordnet? Im Kontext von (C.8): Welchen Radius hat ein Kreis bei gegebenem Umfang? Bemerke, dass im Beispiel die Antwort zwar eindeutig ausfällt; das *muss aber nicht so sein* — außer die Funktion ist injektiv. Ebenfalls muss es überhaupt *nicht immer eine* Antwort geben — außer die Funktion ist surjektiv.

4.1.2. Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff. Etwas weniger präzise bzw. formal ist die zweite Grundvorstellung aus 2.2.2.

FdPw-Box 7: Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff

Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.

Hier steht also das „Miteinander-Variieren“ der beiden Größen im Zentrum. Beispielsweise nimmt der Umfang eines Kreises mit wachsendem Radius zu, die Funktion ist also monoton wachsend. Umgekehrt verhält es sich etwa beim Abkühlen des Tees.
Um Fehlvorstellungen zu vermeiden, ist es wichtig drauf hinzuweisen, dass „beeinflusst“ nicht im kausalen Sinne zu verstehen ist, sondern lediglich deskriptiv, vgl. auch 1.1.2.

Auch hier können wir wieder die beiden Perspektiven aus 4.1.1 einnehmen.

(1) *Perspektive der Definitionsmenge:* Variiert wird $a \in A$. Wie verhält sich dann die „abhängige Variable“ $b = f(a)$? Im Kontext von Beispiel (C.8): Wie verändert sich der Umfang eins Kreises wenn der Radius variiert?
(2) *Perspektive der Zielmenge:* Betrachtet wird die die „abhängige Variable“ $b = f(a)$. Wie muss sich $a \in A$ verändern, dass sich $b = f(a)$ in einer bestimmten Weise verhält, z. B. einen bestimmten Wert erreicht, oder einen oder Extremwert annimmt?

4.1.3. Objektivorstellung des Funktionsbegriffs. Die abstrakteste (und auch sekundäre) Grundvorstellung zum Funktionsbegriff ist die Objektvorstellung, die neben dem schulpraktischen Kontext vorallem in höheren Jahrgangsstufen (vgl. Abschnitt 2.2.3) auch in der Analysis an sich eine tragende Rolle spielt.

FdPw-Box 8: Objektvorstellung zum Funktionsbegriff

Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Betrachtet man Funktionen als Objekte, dann können ihnen in natürlicher Weise Eigenschaften zugeschrieben werden, wie z. B. Monotonie, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc. Außerdem erlaubt es die Objektvorstellung in natürlicher Weise, mit Funktionen *als ganzes* Operationen durchzuführen, etwa eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu skalieren oder zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu addieren:

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \text{und} \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x). \tag{C.9}$$

Diese Sichtweise erlaubt es auch das mathematische Gebäude weiter aufzubauen und „höhere“ Begriffsbildungen vorzunehmen, wie etwa den Ableitungsoperator 3.3.3. In diesem Fall spielen reelle Funktionen dann die Rolle von Punkten in einer Menge (von Funktionen), auf denen der Operator definiert ist.

§4.2 Aspekte des Funktionsbegriffs

Beim Funktionsbegriff lassen sich *zwei* fachliche Aspekte unterscheiden. Einen davon haben wir in der obigen Darstellung besonders hervorgehoben und insbesondere in 3.1.3 verwendet, um den Funktionsbegriff zu definieren.

4.2.1. Der Zuordnungsaspekt ist genau das, was wir als Kern des Funktionsbegriffs (F1) identifiziert und schon ausführlich thematisiert haben.

FdPw-Box 9: Zuordnungsaspekt des Funktionsbegriffs

Eine Funktion ist eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B, wobei jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet wird.

4.2.2. Der Paarmengenaspekt. Der zweite Aspekt des Funktionsbegriffs ist ebenfalls oben bereits angeklungen, wurde aber nicht in der Weise ins Zentrum gerückt wie der Zuordnungsaspekt. Der Paarmengenaspekt tritt in der Definition des Graphen einer Funktion 3.1.4(3) zu Tage: Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f:\ A \to B$ ist die Menge von *geordneten Paaren*

$$G(f) = \{(a, f(a)) :\ a \in A\} \tag{C.10}$$

und daher Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$ (das ja die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ ist, vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, 4.1.38 f.)).
Dieser Aspekt kann und wird im fachmathematischen Kontext auch oft als alternative (aber äquivalente) Definition herangezogen, was dann etwa die folgende Form annimmt (vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, 4.3.4 f.), ➤ **Video** Funktionen, Teil 2)

4.2.3. Definition (Funktion mengentheoretisch). Eine *Funktion* ist ein Tripel $f = (A, B, G)$ bestehend aus einer Menge A, genannt Definitionsbereich, einer Menge B, genannt Zielbereich und einer Teilmenge G des Produkts $A \times B$ mit den Eigenschaften:
(1) Jedes $a \in A$ tritt als erste Komponente eines Paares in G auf.
(2) Stimmen die ersten Komponenten eines Paares in G überein, dann auch die zweiten.

Die beiden Eigenschaften in dieser Definition kodieren zusammen genau den Kern des Funktionsbegriffs (F1) und G ist natürlich dieselbe Menge wie (in der Terminologie von Definition 3.1.3) der Graph $G(f)$. Daher sind die beiden Definitionen 3.1.3 und 4.2.3 mathematisch äquivalent.
Außerdem können wir den Paarmengenaspekt des Funktionsbegriffs nun wie folgt herausdestillieren:

FdPw-Box 10: Paarmengenaspekt des Funktionsbegriffs

Eine Funktion ist gegeben durch Teilmenge G des kartesischen Produkts zweier Mengen A und B mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert, sodass $(a, b) \in G$.

4.2.4. Die Rolle der beiden Aspekte des Funktionsbegriffs. Gemäß unsere Darstellung in Abschnitt B.§1.1 ist ein Aspekt eines mathematischen Begriffs eine seiner Facetten, mit der er *fachlich* beschrieben wird. In Falle des Funktionsbegriffs können beide Aspekte sogar herangezogen werden um den Begriff vollständig zu charakterisieren, vgl. die Definitionen 3.1.3, und 4.2.3, die jeweils einen Aspekt benutzen, um den (gesamten) Begriff zu definieren. Wie wir in Abschnitt C.§2 gesehen haben steht in der schulischen Praxis, die ja bevorzugt sich auf Phänomenen basierend dem Funktionsbegriff nähert, der Zuordnungsaspekt im Vordergrund. Der Paarmengenaspekt wird aber in den höheren Jahrgangsstufen an Relevanz gewinnen.

§4.3 Die Zusammenschau von Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Wie sieht es nun mit den Bezügen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff aus? Wie in Abschnitt C.§2 dargestellt lernen Schüler/innen das funktionale Denken in der Sekundarstufe 1 über Phänomene kennen und bauen so die Grundvorstellungen zum

Funktionsbegriff allmählich auf. Bis etwa zum Ende der Sekundarstufe 1 ist dabei eine formale Definition des Funktionsbegriffs nicht zwingend nötig. Wird dann eine formale Definition gegeben, so baut sie meist auf dem Zuordnungsaspekt auf, der sich wesentlich unmittelbarer vor allem aus den ersten beiden Grundvorstellungen ergibt und auch weniger formalen Aufwand erfordert, z. B. kann der Begriff des geordneten Paares vermieden werden.
Allerdings eignen sich beide Aspekte, den gesamten Begriff zu erfassen (vgl. 4.2.4) und insbesondere dazu *alle drei* Grundvorstellungen weiterzuentwickeln. Schematisch stellt Abbildung C.21 diese Bezüge zwischen den beiden Aspekten und den drei Grundvorstellungen dar.

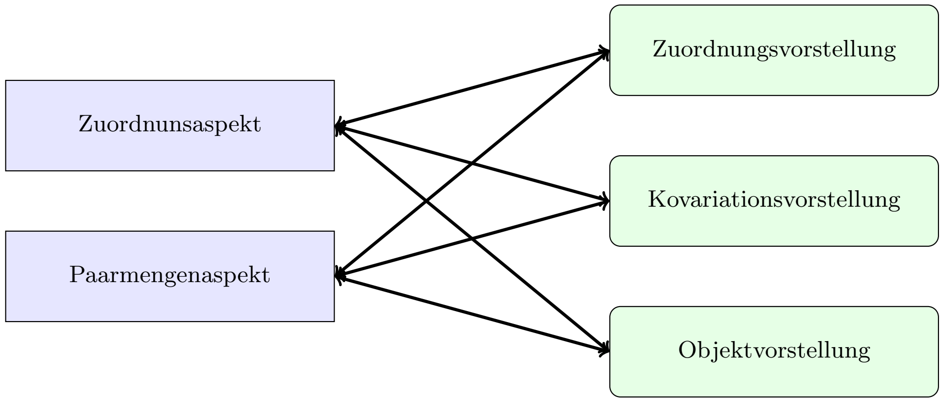


Abb. C.21: Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff und ihre wechselweisen Beziehungen