

# Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25, 4. Termin, 29.9.2025

Sonja Kramer & Roland Steinbauer

Prüfungsausarbeitung

## Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

### 1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
  - (a) [true] Eine Grundvorstellung ist eine sinnstiftende inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs.
  - (b) [true] Aspekte zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachmathematische Analyse gewonnen.
  - (c) [false] Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.
  - (d) [false] Primäre Grundvorstellungen sind immer normativ.
2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.
  - (a) [false] Im Rahmen der Zuordnungsvorstellung wird  $f$  als ein einziges Objekt gesehen, das die Zuordnung von Elementen in  $A$  zu Elementen von  $B$  als Ganzes beschreibt.
  - (b) [false] Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass  $f$  jedem  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  zuordnet.
  - (c) [true] Die Objektvorstellung ermöglicht es besonders gut, Eigenschaften der gesamten Funktion, wie etwa ihr Wachstumsverhalten zu erfassen.
  - (d) [true] Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch ihren Graphen beschrieben werden kann.
3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind sinnvolle und korrekte Be- und Umschreibungen der jeweiligen Eigenschaften?
  - (a) [false] Nach oben beschränkte Folgen besitzen ein größtes Folgenglied.
  - (b) [true] Streng monoton wachsende Folgen respektieren die  $<$ -Relation.
  - (c) [false] Nach oben unbeschränkte Folgen gehen immer gegen  $+\infty$ .
  - (d) [true] Ein Häufungswert ist ein Punkt in  $\mathbb{R}$  bei dem die Folge „egal wie spät, immer wieder (beliebig nahe) vorbeischaute“.
4. (*Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 1*) Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

$$\lim x_n = a \quad \text{falls,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

sind primär mit der Umgebungsvorstellung verbunden?

- (a) [false] Die Folge nähert sich dem Grenzwert schließlich beliebig nahe an.
  - (b) [true] In jeder Umgebung des Grenzwerts liegen fast alle Folgenglieder.
  - (c) [false] Der Grenzwert ist eine Zahl, die durch die Folge konstruiert bzw. definiert wird.
  - (d) [true] Die Folge bleibt schließlich in jeder beliebig kleinen Umgebung um den Grenzwert.
5. (*Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, 2*) Welche der folgenden (tw. ungenauen bzw. inkorrekten) Studierendenaussagen zum Grenzwertbegriff für reelle Folgen korrelieren mit der Annäherungsvorstellung?
- (a) [false] Ab einem bestimmten Index liegen alle weiteren Folgenglieder in einer beliebigen Epsilonumgebung um den Grenzwert.
  - (b) [true] Der Grenzwert ist, wohin die Folge will, wenn man sie endlos weiterspinnt.
  - (c) [false] Fast alle Folgenglieder liegen  $\varepsilon$ -nahe am Grenzwert.
  - (d) [true] Die Folge nähert sich dem Grenzwert im Unendlichen an.
6. (*Zur Differenzierbarkeit.*) Welche der folgenden Aussagen zum Begriff der Differenzierbarkeit reeller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
- (a) [false] Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten“ ist der fachmathematisch wichtigste.
  - (b) [true] Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten“ hängt primär mit den Grundvorstellungen „Lokale Änderungsrate“ und „Tangentensteigung“ zusammen.
  - (c) [true] Die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ wird von beiden Aspekten des Differenzierbarkeitsbegriffs bedient.
  - (d) [true] Im Kontext der Schulanalyse sind die Grundvorstellungen von der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung dominant.

## 2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind korrekt?
- (a) [true] Ist  $(x_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist  $(x_n)$  schon konvergent.
  - (b) [true] Wenn  $(x_n)$  konvergiert, dann gibt es genau einen Grenzwert (d.h. dieser ist eindeutig).
  - (c) [false] Wenn  $(x_n)$  beschränkt ist, dann ist  $(x_n)$  auch konvergent.
  - (d) [false] Wenn  $(x_n)$  monoton wachsend und nach unten beschränkt ist, dann ist  $(x_n)$  schon beschränkt.

8. (*Rund um die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) [false] Für das Intervallschachtelungsprinzip ist es egal, ob die Intervalle offen oder abgeschlossen sind.
  - (b) [true] Der Satz von Dedekind stellt sicher, dass der axiomatische Zugang zu den reellen Zahlen äquivalent zum konstruktiven ist.
  - (c) [true] Der Zwischenwertsatz beruht wesentlich auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .
  - (d) [true] Nach dem Cauchy-Prinzip konvergiert jede Cauchy-Folge.
9. (*Resultate über Folgenkonvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind korrekt?
- (a) [false] Die Konvergenz respektiert die  $>$ -Relation im folgenden Sinn: Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$  und  $(y_n)$  gegen  $y$  und gilt  $x_n > y_n$  für alle  $n$ , dann auch  $x > y$ .
  - (b) [true] Der Quotient konvergenter Folgen konvergiert gegen den Quotienten der Grenzwerte, falls nur die Folge im Nenner keine Nullfolge ist.
  - (c) [true] Ist  $(x_n)$  konvergent, dann ist  $(x_n)$  auch beschränkt.
  - (d) [true] Die Konvergenz respektiert Linearkombinationen im folgenden Sinn: Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$  und  $(y_n)$  gegen  $y$ , dann auch  $(ax_n + by_n)$  und zwar gegen  $ax + by$  (für beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$ ).
10. (*Funktionen & ihre Eigenschaften.*) Welche anschaulichen Aussagen über reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
- (a) [true] Knicke des Graphen von  $f$  markieren Stellen der Nichtdifferenzierbarkeit.
  - (b) [true] Ist  $f$  stetig, dann hat ihr Graph keinen Sprung.
  - (c) [false] Ist  $f$  stetig, so hat der Graph von  $f$  keine Knicke.
  - (d) [false] Ist  $f$  stetig, dann auch differenzierbar.
11. (*Differenzial- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen über reelle Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind korrekt?
- (a) [true] Ist  $f$  stetig, dann auch beschränkt.
  - (b) [true] Ist  $f$  stetig, dann auch integrierbar.
  - (c) [true] Ist  $f$  differenzierbar, dann auch integrierbar.
  - (d) [false] Ist  $f$  beschränkt, dann ist  $F(s) := \int_a^s f(x) dx$  eine Stammfunktion von  $f$ .
12. (*Rund um den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.*) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) [true]  $F(x) := \int_a^x f(s) ds$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .
  - (b) [false] Stammfunktionen sind immer eindeutig, also hat  $f$  genau eine Stammfunktion, nämlich  $F$  aus (a).
  - (c) [true] Stammfunktionen von  $f$  sind immer (sogar) stetig differenzierbar.
  - (d) [true] Falls  $G$  (beliebige) Stammfunktion von  $f$  ist, gilt  $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$ .

### 3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. (*Grenzwerte für Folgen & Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind für  $n \rightarrow \infty$  korrekt?

- (a) [true]  $\frac{n^n}{2n!} \rightarrow \infty$ .  
 (b) [false]  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}$ .  
 (c) [true]  $\frac{4n + 4n^2 - 4n^3}{-4n^3 + 4n^2 - 4} \rightarrow 1$ .  
 (d) [false]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \infty$  ( $a > 0$ ).

14. (*Rund um die geometrische Reihe.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) [true] Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert für alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ .  
 (b) [true] Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form

$$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$

mit  $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ) konvergieren.

- (c) [true]  $0.\bar{3} = 0.3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$ .  
 (d) [false]  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2$ .

15. (*Folggrenzwert konkret.*) Welche der folgenden Aussagen über die Folge

$$x_n = -1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

sind korrekt?

- (a) [true] In jeder Umgebung von  $x = -1$  liegen unendlich viele Folgenglieder.  
 (b) [false] In jeder Umgebung von  $x = 1$  liegen fast alle Folgenglieder.  
 (c) [false] In jeder Umgebung von  $x = 0$  liegen unendlich viele Folgenglieder.  
 (d) [true] In jeder Umgebung von  $x = -1$  liegen fast alle Folgenglieder.

16. (*Kurvendiskussion.*) Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ ) sind korrekt?

- (a) [false]  $f(x) = x^3$  hat in  $x = 0$  ein Extremum, weil dort die Ableitung verschwindet.  
 (b) [true]  $f(x) = x^6$  hat in  $x = 0$  ein Minimum, obwohl  $f''(0) = 0$  gilt.  
 (c) [true] Weil  $f(x) = x^3$  streng monoton wachsend ist, gilt  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x$  also auch in  $x = 0$ .  
 (d) [true] Weil  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$  gilt, ist die Tangente der Sinusfunktion in  $x_0 = 0$  die erste Mediane.

17. (*Funktionseigenschaften explizit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) [true]  $g(x) = \frac{3x^3+x^2+6}{7x^2+5}$  ist als rationale Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich stetig.
- (b) [false]  $h(x) = \sin(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist als Polynomfunktion differenzierbar.
- (c) [false]  $j(x) = e^{3x^2}$  ist nach der Kettenregel differenzierbar mit  $j'(x) = 3x^2 e^{3x^2}$ .
- (d) [true]  $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 5/2$  ist als Polynomfunktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  stetig.

18. (*Stückweise definierte Funktion.*) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) [true]  $f$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  weil  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert und gleich  $f(0) = 0$  ist.
- (b) [false]  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber nicht in  $x_0 = 0$ , weil dort die Grenzwerte nicht übereinstimmen.
- (c) [true]  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber nicht in  $x_0 = 0$ , weil der Differenzenquotient in  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$  (bzw.  $h \rightarrow 0$ ) hat.
- (d) [false] Es gilt  $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} 1 = 1$  und  $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0$  und daher ist  $f$  in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

## Teil 2: Offene Aufgaben

### 1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Rekursive versus explizite Darstellung.*

Aus

$$m_1 = r m_0 + d \quad (1)$$

$$m_2 = r m_1 + d = r(r m_0 + d) + d = r^2 m_0 + d(r + 1) \quad (2)$$

$$m_3 = r m_2 + d = r(r^2 m_0 + d(r + 1)) + d = r^3 m_0 + d(r^2 + r + 1). \quad (3)$$

können wir die folgende Darstellung für  $m_n$  ablesen

$$m_n = m_0 r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1). \quad (4)$$

Durch Verwenden der Summenformel für die endliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1) \quad \text{folgt} \quad (5)$$

$$m_n = m_0 r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) = m_0 r^n + d \sum_{k=0}^{n-1} r^k = m_0 r^n + d \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad (6)$$

also

$$\boxed{m_n = m_0 r^n + d \frac{1 - r^n}{1 - r}.} \quad (7)$$

2. *Konvergenz von Reihen.*

Dass die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden müssen, ist intuitiv klar und kann mittels des Cauchyriteriums für Reihen formal bewiesen werden. Die Umkehrung dieser Aussage ist jedoch falsch, das Erzbeispiel ist hier die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{k}$ : die Folge  $(a_k) = \frac{1}{k}$  ist klarerweise eine Nullfolge, aber die Reihe  $\sum \frac{1}{k}$  divergiert.

### 2 Aufgaben zur fachdidaktischen Reflexion und zur Unterrichtspraxis

3. *Unterrichtssequenz Kurvendiskussion.*

- (a) Tim, deine Verwirrung rührt daher, dass du die NEW-Regel in die falsche Richtung liest. Implikationen laufen nur von oben nach unten: Wenn z.B.  $f$  in einem Punkt eine Extremstelle hat, dann hat  $f'$  dort eine Nullstelle.

Umgekehrt ist eine Stelle  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$  nur Kandidat für eine Extremstelle von  $f$  und es noch zu überprüfen, ob tatsächlich eine Extremstelle vorliegt. Das ist nach Definition immer dann der Fall, wenn sich die Monotonie der Funktion in  $x_0$  ändert, also  $f'$  bei  $x_0$  das Vorzeichen wechselt.

Weil das aber nicht immer leicht zu sehen ist, kann man einfach überprüfen, ob  $f''(x_0) \neq 0$  ist, weil dann muss sich das Vorzeichen von  $f'$  bei  $x_0$  ändern. Wie haben also folgende Regel:

Wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$  ist, dann hat  $f$  in  $x_0$  ein Extremum.

[Evtl. auch: Die Sache hat nur einen Haken: Ein Vorzeichenwechsel von  $f'$  kann auch passieren, obwohl  $f''(x_0) = 0$  ist. Solche Extremstellen übersieht dann unsere Regel. Das kommt bei sehr „flachen“ Extremstellen vor, etwas beim Minimum von  $f(x) = x^4$  in 0.]

- (b) Lena, das ist etwas komplizierter. Sicher kann, eintreten, was du vermutest, es muss aber nicht immer der Fall sein: Ein Sattelpunkt ist ja ein Wendepunkt mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Tangente dort waagrecht ist. Das ist immer dann der Fall, wenn nicht nur die zweite Ableitung verschwindet (das ergibt nämlich für Polynome 3. Grades automatisch schon eine Wendestelle, weil die 3. Ableitung konstant und nicht Null ist) sondern auch die erste Ableitung, was bedeutet, dass die Tangente waagrecht ist. Es gibt aber auch Polynomfunktionen dritten Grades, wie z.B.  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  ohne Extrempunkte (das Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt keine reellen Lösungen), die aber — wie jede Polynomfunktion dritten Grades — eine Wendestelle besitzen. Das ist dann aber eine Wendestelle mit nicht waagerechter Tangente, also kein Sattelpunkt.

#### 4. Das Tangentenproblem.

Der Zugang über das Tangentenproblem ist durch drei charakteristische Spannungsfelder gekennzeichnet:

- **Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff:** Um die Tangente als Schmiegegerade verstehen zu können, muss eine konzeptuelle Umorientierung stattfinden.
- **Fehlende konzeptuelle Kontinuität:** Die Tangente wird als Grenzlage von Sekanten eingeführt, ohne dass ein nahtloser Übergang zum geometrischen Tangentenbegriff hergestellt wird.
- **Schwierigkeit des Grenzübergangs:** Die Berechnung der Tangente als Grenzwert führt zu der scheinbar widersprüchlichen Situation, dass der Differenzenquotient einen definierten Grenzwert besitzt, obwohl sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null streben.

Im Gegensatz dazu weist der Zugang über die Momentangeschwindigkeit diese drei Spannungsfelder nicht auf: Der Geschwindigkeitskontext ist Schüler:innen aus ihrer Lebenswelt vertraut, die Annäherung der Momentangeschwindigkeit durch mittlere Geschwindigkeiten ergibt sich natürlich aus dem physikalischen Kontext, und die Existenz eines Grenzwertes für die Momentangeschwindigkeit erscheint intuitiv plausibel und nachvollziehbar.

5. *Grenzwert.*

- (a) Lösung:  $G = 31$  m, weil  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,06 \cdot t} = 0$  und durch (sukzessives) Anwenden der Grenzwertsätze folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{35}{1 + 7 \cdot e^{-0,06 \cdot t}} - 4 \right) = \frac{35}{1 + 7 \cdot 0} - 4 = 31. \quad (8)$$

- (b) In der Aufgabenstellung wird der dynamische Aspekt vorrangig angesprochen. Mit diesem Aspekt ist hauptsächlich die Annäherungsvorstellung verbunden, wobei auch bei der Umgebungsvorstellung der dynamische Aspekt mitschwingt.