Kapitel D

Folgen, Grenzwert, Vollständigkeit

In diesem Kapitel befassen wir uns mit den „Herzstück“ der Analysis, dem *Grenzwertbegriff*, vgl. A1.1.4. Genauer werden wir ihm uns in seiner analytisch am einfachsten zu fassenden Form nähern, nämlich dem *Grenzwert reeller Folgen.*
Dazu diskutieren wir zunächst den Folgenbegriff, wobei wir den Schwerpunkt auf den Iterationsaspekt von Folgen legen, d.h. die Rolle von Folgen in der diskreten Modellierung iterativer Prozesse betonen. Wir stellen aber alle Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff vor und diskutieren Zugänge zu Folgen im Unterricht.
Danach lassen wir uns in natürlicher Weise vom Iterationsaspekt zum Konvergenzbegriff führen und diskutieren seine Mathematik sowie Zugänge zum Grenzwert im Unterricht inklusive des propädeutischen Grenzwertbegriffs. In einem historisch-philosophischen Exkurs diskutieren wir dynamische und statische Vorstellungen zum Grenzwertbegriff und auch die damit zusammenhängenden Vorstellungen vom „Unendlichen”. Schließlich diskutieren wir konkret die tiefsinnige Frage: Ist $0.\bar{9} = 1$? Sie wird uns auch mit dem Begriff konvergenter Reihen in Berührung bringen.
Schließlich wenden wir uns einem weiteren eng mit dem Konvergenzbegriff verbundenen Eckstein der gesamten Analysis zu: Der Vollständigkeit der reellen Zahlen, vgl. B2.1.1.

§1 Folgen

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Begriff der (unendlichen) Folgen. Wir diskutieren seine Mathematik, seine Aspekte und die damit verbundenen Grundvorstellungen sowie Zugänge im Unterricht. Hauptsächlich verwenden wir Folgen aber als Werkzeug, das uns zum zentralen Begriff der Grenzwerts führt.

§1.1 Fachliche Grundlagen

1.1.1. Was sind Folgen? Ein Enzyklopädieeintrag könnte etwa so aussehen:

> Eine Folge ist eine Auflistung von unendlich vielen[1] fortlaufend nummerierten Objekten.

[1] Es gibt auch endlich Folgen, wir werden uns aber hier nur mit sogenannten unendlichen Folgen beschäftigen und nennen sie einfach Folgen.

Die wesentliche Eigenschaft einer Folge ist, dass die Objekte, genannt *Folgenglieder*, *durchnummeriert* sind. Das steht im Gegensatz zu Objekten, die zu einer bloßen Menge zusammengefasst werden: Die Elemente einer Menge sind *nicht* nummeriert oder sonst irgendwie geordnet. (Das einzige charakteristische am Begriff einer Menge ist, dass es sich um eine Ansammlung von Objekten handelt, wobei eindeutig feststeht, weleche Objekte dazugehören und welche nicht, vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 4.1).) Wir können also salopp sagen, dass eine Menge ein „Sauhaufen“ von Objekten ist, eine Folge aber aus *durchnummerierten* Objekten besteht.

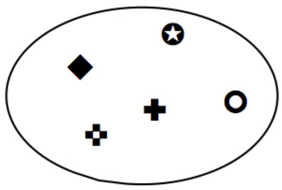

Abb. D.1: Eine Menge ist ein „Sauhaufen“ von Objekten.

Abb. D.2: Eine Folge besteht aus einer geordneten Liste von Objekten.

Ein weiterer Wesenszug einer Folge ist, dass es sich um eine Auflistung von *unendlich vielen fortlaufend* nummerierten Objekten handelt. Das bedeutet mathematisch ausgedrückt, dass es sich um *abzählbar viele* Objekte handelt, also genau um „genau so viele” Objekte, wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Elemente haben. Für Details zur Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ und dem Begriff abzählbar (unendliche) Menge siehe (Schichl and Steinbauer, 2018, Abschn. 4.4).

➤ **Video** Mächtigkeit, Teil I (Gleichmächtigkeit von Mengen)

Hier wiederholen wir nur das Wichtigste und insbesondere die mathematische Terminologie, die nämlich nicht selbsterklärend ist und das Potential hat, Verwirrung zu stiften. *Endliche Mengen* sind Mengen, die n Elemente besitzen, wobei n eine (beliebige) natürliche Zahl ist. *Unendliche Mengen* sind Mengen, die *nicht endlich* sind. Es ist eine wesentliche Tatsache der Mengenlehre, dass es „verschieden große“ unendliche Mengen gibt. Die kleinste solche ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und alle Mengen, die „gleich groß“ im Sinne der Mächtigkeit sind, heißen *abzählbar*. Diese Terminologie ist an die Idee angelehnt, dass man die natürlichen Zahlen abzählen könnte (wenn man nur genügend Zeit dafür hätte). Genauer, jede natürliche Zahl ist in endlich vielen Abzählschritten erreichbar.
Wir haben also endliche Mengen und die kleinste „Klasse“ unendlicher Mengen, die abzählbaren Mengen. Leider werden erstere auch oft *abzählbar endlich* genannt und zweitere *abzählbar unendlich*, sodass man mit der Bezeichnung „abzhählbar“ vorsichtig sein muss. Meistens (und so werden wir das immer halten) bedeutet abzählbar ohne Zusatz abzählbar undendlich.

Eine mathematische Präzisierung der obigen Beschreibung von Folgen erfolgt am bequemsten über den Funktionsbegriff. Eine Folge ist eine spezielle Funktion, nämlich eine solche mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$: Die Folgenglieder werden mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert. Wir wiederholen die formale Definition und auch die üblichen Schreibweisen für Folgen.

Mathematische Faktenbox 3: Folgen

1.1.2. Definition (Folge). Sei M eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M\,. \tag{D.1}$$

Meist werden wir den Fall $M = \mathbb{R}$ betrachten; man sagt dann, a ist eine *reelle Folge*.

1.1.3. Terminologie (Lästiges zur Definition von $\mathbb{N}$). In weiten Teilen der mathematischen Literatur herrscht Uneinigkeit darüber, ob 0 Element der natürliche Zahlen ist oder nicht. Letztlich ist das eine Geschmacksfrage und wir verwenden in diesem Skriptum $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, was auch mit der DIN-Norm 5473 konform geht. Für die positiven natürlichen Zahlen schreiben wir dann $\mathbb{N}^*$ oder $\mathbb{N}^+$.

1.1.4. Terminologie (Folgen). Zunächst ist eine Folge eine Funktion mit einem speziellen Definitionsbereich, nämlich $\mathbb{N}$. Daher ist alles, was wir über Funktionen wissen auch für Folgen gültig!
Insbesondere wird (vgl. Abschnitt C.§3.1) jeder natürlichen Zahl genau ein Folgenglied zugeordnet; also liegt es am „Kern" des Funtionsbegriffs, dass eine Folge wirklich aus abzählbare vielen durchnummerierten Objekten besteht.
Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich allerdings auch spezielle Schreibweisen eingebürgert:

(1) Statt $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, usw. schreibt man für die Funktionswerte von a meist a_0, a_1, a_2, usw. und spricht von *Folgengliedern*.
(2) Die gesamte Folge wird in der mathematischen Literatur meist mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oder kürzer $(a_n)_n$ bzw. nur mit (a_n) bezeichnet. In der Schulliteratur werden stattdessen meist Spitzklammern verwendet und Folgen meist mit $\langle a_0, a_1, \dots\rangle$ bezeichnet. Außerdem kann man auch $\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$, $\langle a_n\rangle_n$ bzw. $\langle a_n\rangle$ schreiben. Wir werden im Folgenden alle diese Schreibweisen synonym verwenden.
(3) Hin und wieder treten Folgen auf, die erst mit $n = 1$ oder „noch später" beginnen. Für diese schreiben wir dann z.B. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $\langle a_n\rangle_{n=7}^{\infty}$.
(Ja dürfen die das überhaupt? - soll heißen sind das dann überhaupt Folgen im Sinne der Definition? Ja klar, weil sei z.B. $(a_n)_{n=7}^{\infty}$, dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n-7}$ eine „echte" Folge und es zahlt sich nicht aus, zwischen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zu unterscheiden).

1.1.5. Beispiel (Folgen). Ganz einfache Beispiele von reellen Folgen sind etwa

(1) $(a_n)_n = (2n)_n = (0, 2, 4, 6, \dots)$, die Folge der geraden natürlichen Zahlen.
(2) $(b_n)_n = (x)_n = \langle x, x, x, \dots\rangle$ für ein x in $\mathbb{R}$, die konstante Folge.
(3) $(c_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

Übungsaufgabe.

$\boxed{15}$ **Zur Folgendefinition.** Suchen Sie aus zwei unterschiedlichen Schulbüchern Ihrer Wahl die Definition einer Folge heraus. Vergleichen Sie diese mit Definition 1.1.2. Welche Facetten werden betont? Arbeiten Sie wesentliche Unterschiede heraus. Können Sie schon Aspekte (im technischen Sinn von B.§1.1) des Folgenbegriffs erkennen? Welche?

1.1.6. Veranschaulichung von Folgen. Eine instruktive Art, Folgen zu veranschaulichen, ergibt sich direkt aus ihrer Definition 1.1.2. Eine Folge (a_n) kann als Spaziergang in einer Menge M aufgefasst werden. Jedem Schritt entspricht ein Folgenglied: a_0 bzw. a_1 entspricht dem nullten bzw. ersten Schritt oder auch dem nullten bzw. ersten Fußabdruck usw. siehe Abbildung D.3.

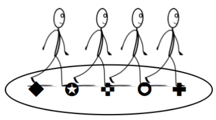

Abb. D.3: Eine Folge als Spaziergang in einer Menge.

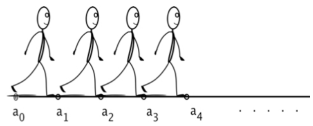

Abb. D.4: Eine reelle Folge als Spaziergang auf der Zahlengeraden.

Im Falle einer *reellen* Folge (a_n) ergibt sich in diesem Bild also ein Spaziergang auf der Zahlengeraden, vgl. Abbildung D.4, den wir veranschaulichen, in dem wir die „Schritte" a_0, a_1, usw. einzeichnen. Mathematisch gesprochen werden die Werte der Folgenglieder auf der Zahlengeraden aufgetragen, also das *Bild* (vgl. (Schichl and Steinbauer, 2018, 4.3.11 f.) ➤ **Video**) der Folge in $\mathbb{R}$ eingezeichnet, siehe Abbildung D.5. Alternativ können wir auch den Graphen der Abbildung a zeichnen. Dabei wird das n-te Folgenglied als Punkt mit den Koordinaten (n, a_n) im $\mathbb{R}^2$ dargestellt, wie wir das von Funktionen schon gewohnt sind (vgl. 3.1.4(3)), siehe Abbildung D.6.

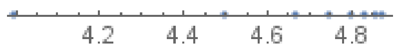

Abb. D.5: Das Bild einer reellen Folge (a_n).

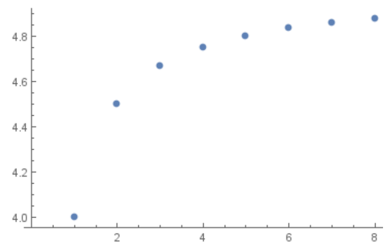

Abb. D.6: Graph einer reellen Folge (a_n).

Offensichtlich hängen die beiden Darstellungen zusammen. Aus dem Graphen in Abbildung D.6 erhält man den Spaziergang in Abbildung D.5 durch Projektion auf die y-Achse. Genauer, nimmt man diese Projektion und legt sie auf die x-Achse, so ehält man den Spaziergang, siehe Abbildung D.7

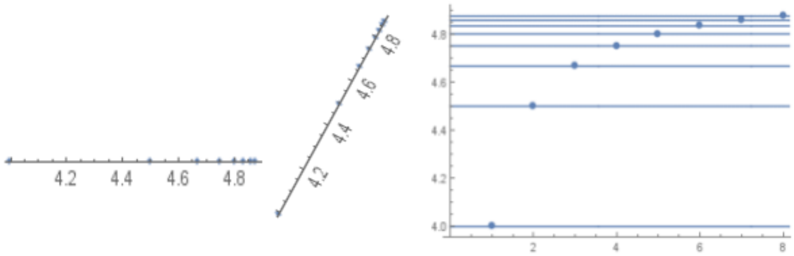

Abb. D.7: Zusammenhang der Darstellungen reeller Folgen.

Übungsaufgaben.

$\boxed{16}$ **Darstellung von Folgen, 1.** Stellen Sie (mit Technologieeinsatz) die folgenden Folgen einmal als „Spaziergang in $\mathbb{R}$“ und einmal durch ihren Graphen dar (siehe Vorlesung D 1.1.6).

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine“)

(b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von k?

(d) $d_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(e) $e_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(f) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

$\boxed{17}$ **Darstellung von Folgen, 2.** Stellen Sie (wieder mit Technologieeinsatz) die folgenden Folgen durch ihren Graphen dar $(n \geq 1)$:

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n}.$$

Gilt $a_n > b_n > c_n$ für alle $n \geq 1$?

§1.2 Rekursive Prozesse und ihre Modellierung

Wir beginnen nun den Folgenbegriff als analytisches Werkzeug zu nutzen, nämlich im Kontext der Modellierung rekursiver Prozesse. Zuvor beantworten wir aber eine Frage zur Schulanalysis.

1.2.1. Wo gehören Folgen hin? In der Schulmathematik gab es lange die Tradition den Grenzwertbegriff systematisch auf dem Folgenbegriff aufzubauen und so eine solide Basis für die Differential- und Integralrechnung zu legen, in der der Grenzwertbegriff ja die zentrale Rolle spielt. Das ist sicherlich ein mathematisch fundierter Zugang, der allerdings den Nachteil hat, dass ein „langer Marsch durch das Reich der Folgen” (vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.1)) angetreten werden muss. In einem solchen Zugang haben Folgen ihren kanonischen Platz im Curriculum. Neben dem offensichtlichen Nachteil, dass ein solcher Zugang viel Zeit in Anspruch nimmt, haben Blum und Kirsch in fachdidaktischen Arbeiten (Blum and Kirsch (1979); Blum (1979)) schon früh aufgezeigt, dass die Diferential- und Integralrechnung in „intellektuell ehrlicher Weise” (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.1) auf auf einem intuitiven Grenzwertbegriff aufgebaut werden und zugleich „der Weg für einen spätere analytische Präzisierung offen gehalten werden kann” (ebd.).
Damit ist der traditionelle Zugang nicht (mehr) alternativlos und es stellt sich die Frage, ob und wie sich Folgen als eigenständiges Thema der Schulanalysis legitimieren lassen. In dieser Frage propagieren wir im Einklang mit Danckwerts and Vogel (2006) den Standpunkt, dass

Folgen als natürliches Instrument zur Beschreibung iterativer Prozesse

einen Platz im Unterricht haben können und sollen. Damit gelingt nämlich in natürlicher Weise die Modellierung von Wachstumsprozessen (die wir im nächsten Abschnitt konkret mathematisch behandeln werden), sondern auch eine ebenso natürliche Hinführung zu Grenzwertbegriff.

Im Folgenden behandeln wir nun die Modellierung iterativer Prozesse anhand eines Beispiels, danach nehmen wir den Faden der gegenwärtigen Diskussion in 1.2.1 in informierter(er) Weise wieder auf.

1.2.2. Beispiel (Medikamentenspiegel im Körper, vgl. (Danckwerts and Vogel, 2006, Abschn. 2.1.1)). Die wirksame Anfangsdosis einem Schmerzmittels beträgt $d =$ 400 mg und wird alle 6 Stunden erneut verabreicht. Innerhalb dieser 6 Stunden werden 25% des Wirkstoffs vom Körper abgebaut. Wie entwickelt sich im Lauf der Zeit der Wirkstoffspiegel im Körper?

Lösungsvorschlag. Wir legen zunächst die Notation für unsere rekursive Beschreibung fest. Mit m_n bezeichnen wir die nach n Perioden zu 6 Stunden im Körper vorhandene Menge des Wirkstoffs in mg. Der Anfangswert ist mit

$$m_0 = d = 400 \tag{D.2}$$

festgelegt. Für m_1, also die Wirkstoffmenge nach 6 Stunden gilt

$$m_1 = \frac{3}{4}\,m_0 + d = 300 + 400 = 700. \tag{D.3}$$

Bezeichnen wir mit $r = \frac{3}{4}$ die Rate des nach 6 Stunden noch im Körper vorhandenen Wirkstoffs, so gilt des weiteren

$$m_2 = r\,m_1 + d, \quad m_3 = r\,m_2 + d \quad \text{und allgemein} \tag{D.4}$$

$$\boxed{m_{n+1} = r\,m_n + d} \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{D.5}$$

Die *rekursiv* definierte Folge $(m_n) = (m_0, m_1, \dots)$ aus (D.5) mit $m_0 = d = 400$ stellt also den gesuchten zeitlichen Verlauf des Medikamentenspiegels im Körper dar. Eine Folge (m_n) heißt dabei *rekursiv* oder rekursiv definiert, falls die Folgenglieder m_n mit Hilfe ihres Vorgängers m_{n-1} (oder manchmal auch mit Hilfe mehrere oder aller ihrer Vorgänger m_k, $0 \le k \le n-1$) definiert sind.

1.2.3. Darstellung des Prozesses — Langzeitverhalten. In natürlicher Weise ergibt sich nun die Frage nach der langfristigen Entwicklung des oben beschrieben Prozesses. Dazu können wir mittels Tabellenkalkulationsproramms eine Wertetabelle der Folge (m_n) erstellen oder sie durch ihren Graphen illustrieren. Das führt auf:

	A	B
1	0	400,0
2	1	700,0
3	2	925,0
4	3	1093,8
5	4	1220,3
6	5	1315,2
7	6	1386,4
8	7	1439,8
9	8	1479,9
10	9	1509,9
11	10	1532,4
12	11	1549,3
13	12	1562,0
14	13	1571,5
15	14	1578,6
16	15	1584,0
17	16	1588,0
18	17	1591,0
19	18	1593,2
20	19	1594,9

Abb. D.8: Wertetabelle der Folge (m_n)

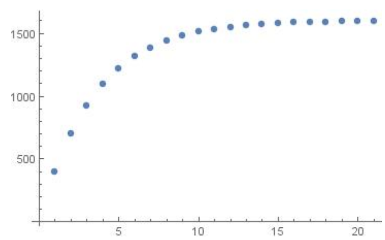

Abb. D.9: Graph der Folge (m_n)

1.2.4. Explizite Darstellung. Aus theoretischer Sicht ist es wünschenswert, neben der rekursiven Darstellung der Folge (m_n) aus Gleichung (D.5) eine *explizite Darstellung* zur Verfügung zu haben. Schließlich ermöglicht eine solche das direkte Ausrechnen des Medikamentenspiegels m_n nach n Perioden zu 6 Stunden, ohne den oben betriebenen Aufwand.
Um eine solche Darstellung zu gewinnen, starten wir mit der Rekursionsformel (D.5)

$$m_{n+1} = r\, m_n + d \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{D.6}$$

und setzen sukzessive ein wie folgt

$$m_1 = r\, m_0 + d \tag{D.7}$$
$$m_2 = r\, m_1 + d = r(r\, m_0 + d) + d = r^2 m_0 + d(r + 1) \tag{D.8}$$
$$m_3 = r\, m_2 + d = r\big(r^2 m_0 + d(r + 1)\big) + d = r^3\, m_0 + d(r^2 + r + 1). \tag{D.9}$$

Daraus können wir die folgende Darstellung für m_n ablesen

$$m_n = r^n\, m_0 + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1). \tag{D.10}$$

Jetzt können wir noch die Summenformel für die endliche geometrische Reihe[2] (siehe etwa (Forster, 2016, §1, Satz 6))

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (r \neq 1) \tag{D.11}$$

verwenden, um die rechte Seite zu vereinfachen. Die Einschränkung $r \neq 1$ spielt für unsere Überlegungen keine Rolle; das würde ja dem Fall entsprechen, dass das Medikament gar nicht abgebaut wird. Dieser Fall ist im Anwendungszusammenhang sinnlos und im Übrigen mathematisch ganz einfach zu lösen: dann gilt offensichtlich

$$m_n = m_0 + nd = (n + 1)d. \tag{D.12}$$

Da ein negatives r im gegenwärtigen Anwendungskontext ebenso sinnlos ist, wie ein $r > 1$, legen wir im Folgenden fest, dass $0 < r < 1$ gilt.
Schließlich ergibt sich die folgende explizite Darstellung für die Folge (m_n)

$$\boxed{m_n = r^n\, m_0 + d\, \frac{1 - r^n}{1 - r}.} \tag{D.13}$$

Gehen wir nun zum obigen Beispiel zurück und setzen entsprechenden ein, d.h. $r = 3/4$, $m_0 = d = 400$, so ergibt sich für den Wirkstoffspiegel

$$m_n = 400 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1600 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 400 \left(4 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right). \tag{D.14}$$

1.2.5. Diskussion des Kontexts. Zum Schluss dieses Abschnitts kommen wir zurück zur Diskussion von 1.2.1 und greifen sie im Licht der obigen Überlegungen wieder auf. Zunächst sehen wir, dass im Kontext der diskreten Modellierung der Folgenbegriff in natürlicher Weise auftritt. Weiters haben wir folgende Aspekte ebenfalls in natürlicher Weise angetroffen:

[2] Die Summenformel können *wir* an dieser Stelle im Kontext unserer „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ verwenden; im Schulkontext wäre das in geeigneter Form zu behandeln.

- Vor- und Nachteile der rekursiven und der expliziten Darstellung von Folgen,
- Umschreiben von rekursiver in explizite Darstellung von Folgen,
- die endliche geometrische Reihe im Anwendungskontext.

Außerdem tritt die Frage nach dem Langzeitverhalten bzw. dem Grenzwert von Folgen (und Reihen!) in prominenter und natürlicher Weise auf. Wir werden diese aber erst im nächsten Kapitel aufgreifen und uns im folgenden mit der Unterrichtspraxis zum Folgenbegriff beschäftigen. Auch hier werden wir an mehreren Stellen den Grenzwertbegriff am Horizont auftauchen sehen.

Schließlich werden wir in D.§1.3.2 sehen, dass die in der Schule prominenten Beispiele der arithmetischen und der geometrischen Folge sich als Spezialfälle obiger Rekursion ergeben.