

Gravitation und Raumzeitkrümmung

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

VHS, 14. November 2018

Zu den Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Laut Einstein

- fallen Dinge *nicht* deswegen nach unten, weil sie von der Erde angezogen werden,
- sondern die Erde krümmt den umliegenden Raum und die Dinge *folgen der Geometrie*.

Was bedeutet das genau?

Kleine Standortbestimmung

Die Allgemeine Relativitätstheorie

- ist die derzeit beste Beschreibung der Gravitation und
- der Wechselwirkung zwischen Materie, Raum und Zeit
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der

gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit

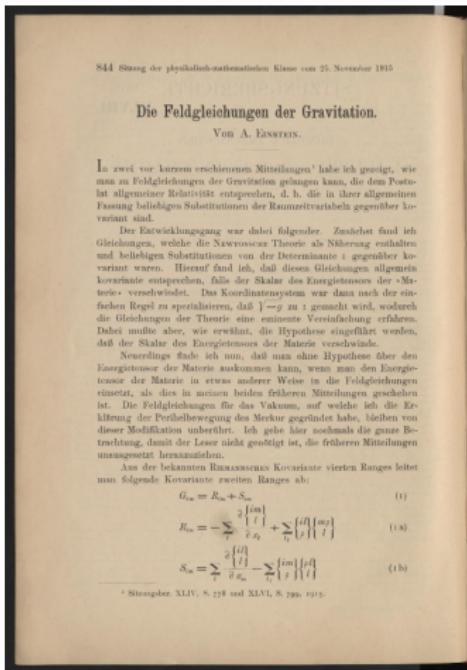
Startpunkt, November 1915:

- Veröffentlichung der Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein

Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:

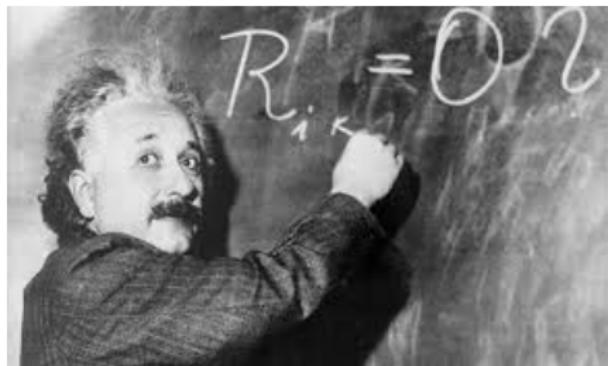
- Direkter Nachweis von Gravitationswellen (GW150914) durch LIGO

Die Einsteingleichungen (1)



¹ Sitzungsber. XLIV, S. 228 und XLVI, S. 799; 1915.

November 1915

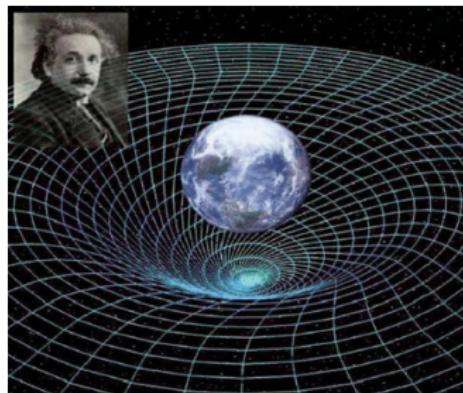


Albert Einstein,
'Zur allgemeinen Relativitätstheorie'
'Die Feldgleichungen der Gravitation'

Sitzungsberichte d. Preussischen Akad. d. Wissenschaften

Die Einsteingleichungen (2)

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine **geometrische Theorie**:
Sie verknüpft die Raum-Zeit-Geometrie mit dem Materieinhalt



$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}}_{\text{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}_{\text{Masse/Energie}}$$

Die Krümmung der Raumzeit ist proportional ihrem Energieinhalt.

Überblick

- ① **Intro:** Die Einstingleichungen

Wieso ist Krümmung der Raumzeit proportional Materieinhalt?

- ② **Geometrie:** Warum ist die Schwerkraft geometrisch?
- ③ **Krümmung:** Warum gerade die Krümmung?

Exkurs: Was ist überhaupt „die Krümmung“?

Die Konsequenzen: Grundzüge der ART

- ④ Die Geometrie lenkt das Licht ab
- ⑤ Die Geometrie bewegt Massen
- ⑥ Die Geometrie formt schwarze Löcher und Raumzeitsingularitäten

Schwerkraft als Eigenschaft des Raumes?

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?

Besser davor:



F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als

Eigenschaft des Raumes

verstanden werden?

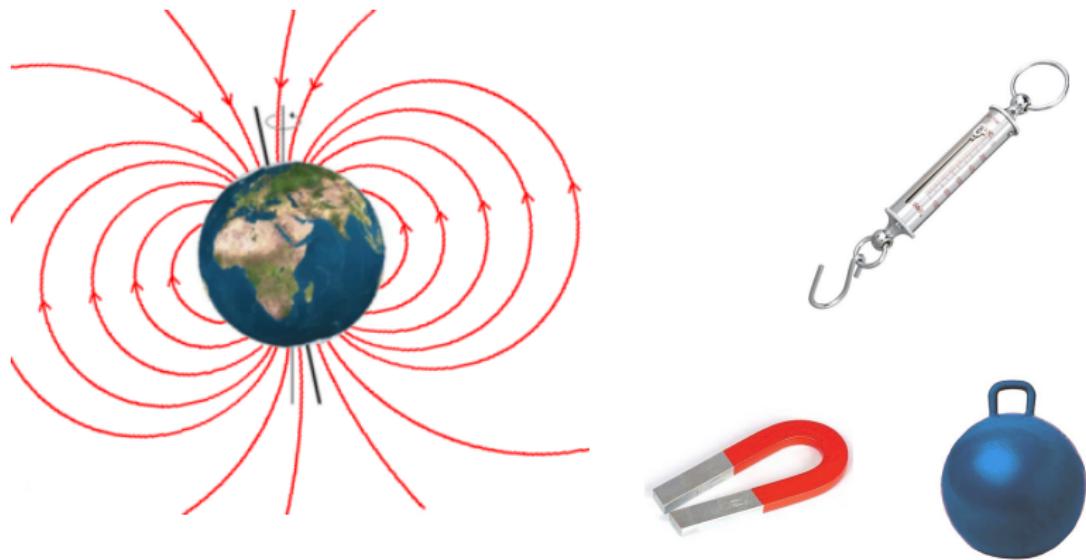
A: Wegen der

Universalität der Schwerkraft:

Die Schwerkraft wirkt auf

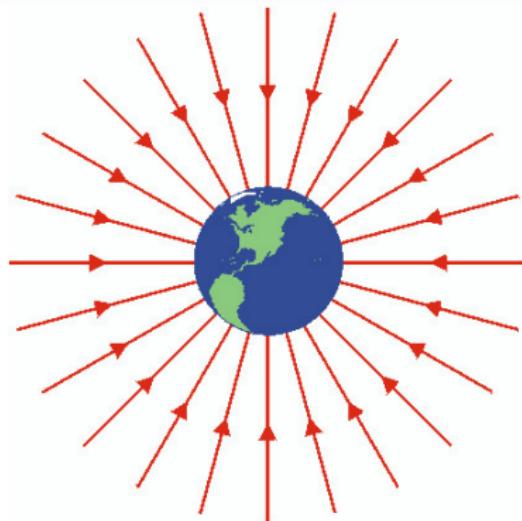
jede Form von Masse/Energie in **gleicher** Weise.

Messung eines Magnetfeldes



Messung der Kraft**differenz** auf Magneten und neutrale Masse

Messung eines Schwerefeldes



Messung der **Differenz** ↴ ↴ ↴

wovon ???

~ **Universalität** der Schwerkraft

Das Äquivalenzprinzip (1)

Galileo Galilei [1564–1642]

- Alle Körper fallen gleich schnell.

Die Fallgeschwindigkeit eines Körpers hängt **nicht** von seinem Gewicht ab.

- schwere Masse = träge Masse



Galileis Fallgesetz

$$\vec{F} = m_{\text{sch}} \cdot \vec{g} = m_{\text{tr}} \cdot \vec{a}$$

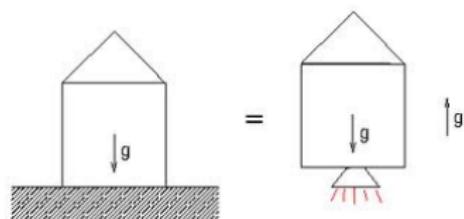
Das Äquivalenzprinzip (2)



Apollo 15: David Scott, der Hammer und die Feder

Das Äquivalenzprinzip (3)

Einstiens glücklichster Gedanke



„Upgrade“ des Äquivalenzprinzips

- vom Zusatz in der kl. Mechanik
- zum Grundbaustein der ART

Technisch:

- Ein Beobachter im geschlossenen Labor kann durch kein Experiment feststellen, ob er sich in der Schwerelosigkeit weit weg von Massen befindet oder im freien Fall nahe einer Masse.
- Im lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der SRT.

Schwerkraft ist eine Eigenschaft des Raumes!

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?

Besser davor:

F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als **Eigenschaft des Raumes** verstanden werden?

A: Wegen der **Universalität der Schwerkraft**:

Die Schwerkraft wirkt auf **jede** Form von Masse/Energie in **gleicher Weise**.



F: Aber warum gerade die Krümmung?

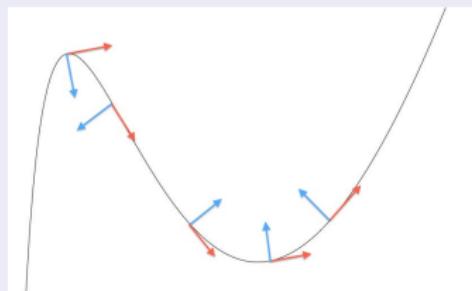
A: Das ist etwas technisch...

daher zuerst ein Exkurs: **Was ist Krümmung?**



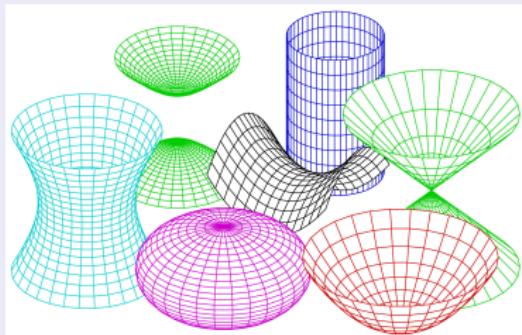
Was ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



Abweichung von der Geraden

Krümmung von Flächen



Abweichung von der Ebene

Krümmung von Flächen

F: Sind gekrümmte Flächen ungewöhnlich?

A: Nein! Wir alle leben auf einer!

F: Was sind die wichtigsten Effekte der Krümmung?



Einfache Konsequenzen

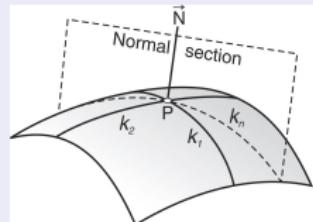


Geodäten ersetzen Geraden

- Kürzeste Verbindungen sind nicht gerade.
- Kürzeste Verbindungen können sich schneiden.

Klassische Geometrie von Flächen

Carl Friedrich Gauß [1777–1855]



In jedem Punkt einer Fläche gibt es eine Richtung mit

- **minimaler** und eine mit
- **maximaler Krümmung.**



Theorema Egregium.

Das Produkt dieser **Hauptkrümmungen**, die sogenannte **Gauß-Krümmung** ist eine Invariante.

Moderne Differentialgeometrie

F: Was benötigt man um Geometrie zu betreiben?

A1: Längen- und Winkelmessung

A2: Technisch, ein Skalarprodukt: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$

Bernhard Riemann [1826–1866]

- **Metrik:** Vorgabe eines Skalarprodukts in jedem Punkt einer n -dimensionalen Fläche
- **Krümmungstensor**

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$$



- kodiert die Abweichung von der Ebene
- fasst die 2-dim. Krümmungen zusammen

Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?



Besser davor:

F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als **Eigenschaft des Raumes** verstanden werden?

A: Wegen der **Universalität der Schwerkraft**



F: Aber warum **gerade die Krümmung**?

A: Das ist etwas technisch...

daher zuerst ein Einschub: **Was ist Krümmung**



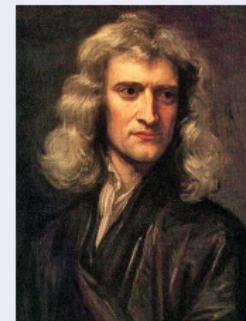
F: Jetzt aber wirklich: **Warum gerade die Krümmung?**

Newton'sche Mechanik

Isaac Newton [1664–1727]

1. Newtonsches Gesetz:

Kräftefreie Körper sind in Ruhe oder bewegen sich auf Geraden.



2. Newtonsches Gesetz:

Kraft = Masse · Beschleunigung

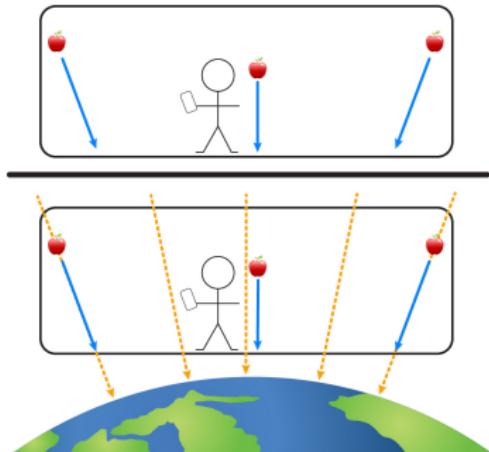
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$$



Gravitationsgesetz:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Gezeitenkräfte



Äpfel und Astronaut
fallen frei Richtung Erdmittelp.
⇒ **relative Beschleunigung**



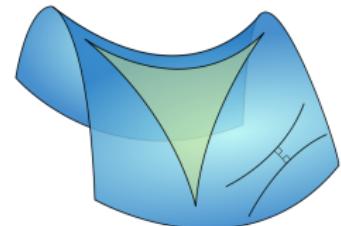
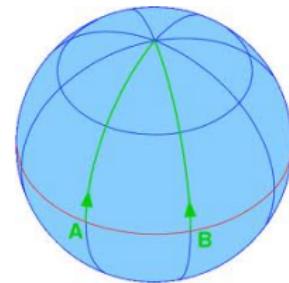
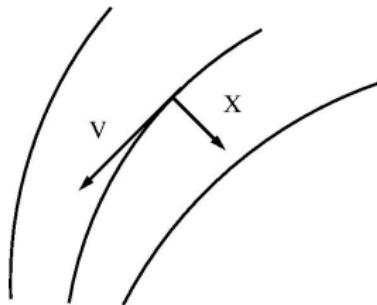
Niemand fällt!
Äpfel und Astronaut bewegen sich
auf **Geodäten** der Raumzeit.

Anwesenheit von Masse: Geodäten
nähern sich an
⇒ **relative Beschleunigung**

Riemann Geometrie: Geodätische Deviation

- **Geodäten** ersetzen gerade Linien
(minimale Krümmung,
kürzeste Verbindungen)
- Krümmung bestimmt **Abstände**
zwischen Geodäten

$$\ddot{X} = R(V, X) X$$



Krümmung und Einsteingleichungen



Newton'sche Gezeitenkräfte

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi \vec{x} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$



Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V, X)X$$



Kombiniere das!

$$R(V, X) \sim 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

⋮

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

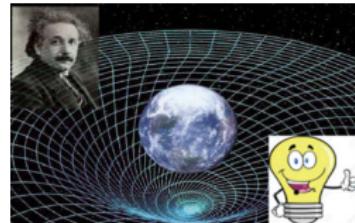


Raumzeitkrümmung, darum!

- **Fazit:** Die Schwerkraft wirkt auf alle Massen/Energien gleich.

- **Qualitativ:**

Die Schwerkraft kann als Eigenschaft des Raumes (der Raumzeit) verstanden werden.



- **Quantitativ:**

Die Krümmung der Raum(zeit) ist proportional zu ihrem Massen- und Energieinhalt.

- **Die ganze Wahrheit:**

$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}}_{\text{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}_{\text{Masse/Energie}}$$

Krümmung Masse/Energie

Inhalt

1 Die Einsteingleichungen

2 Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

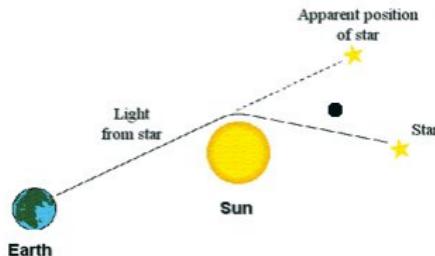
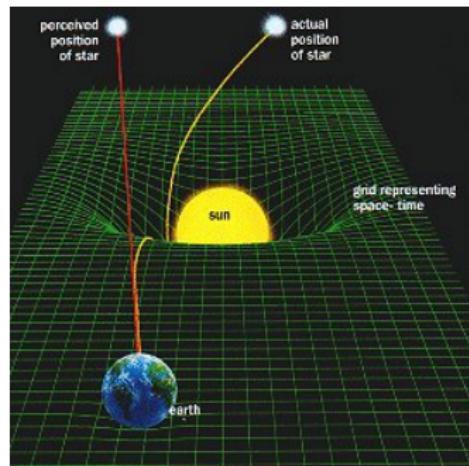
3 Warum gerade die Krümmung?

- Einschub: Was ist Krümmung?
- Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?

4 Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie

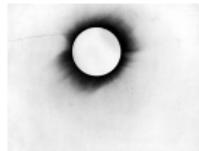
- Die Geometrie lenkt das Licht ab
- Die Geometrie bewegt Massen
- Raumzeitsingularitäten: schwarze Löcher und Urknall

Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne

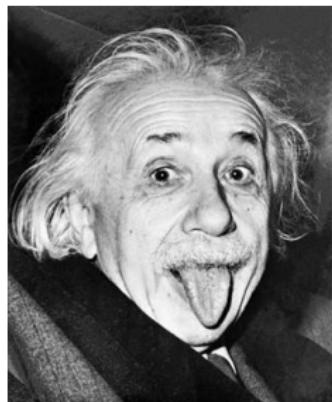
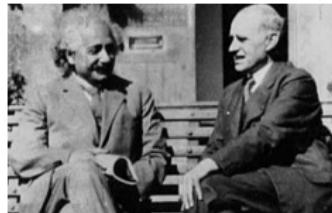
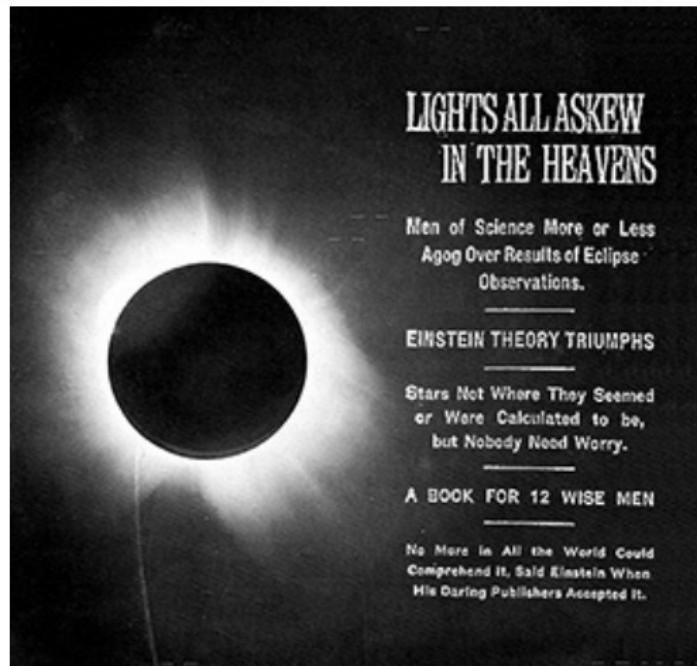


Experimentelle Bestätigung:

Arthur Eddington
Sonnenfinsternis
29. Mai 1919



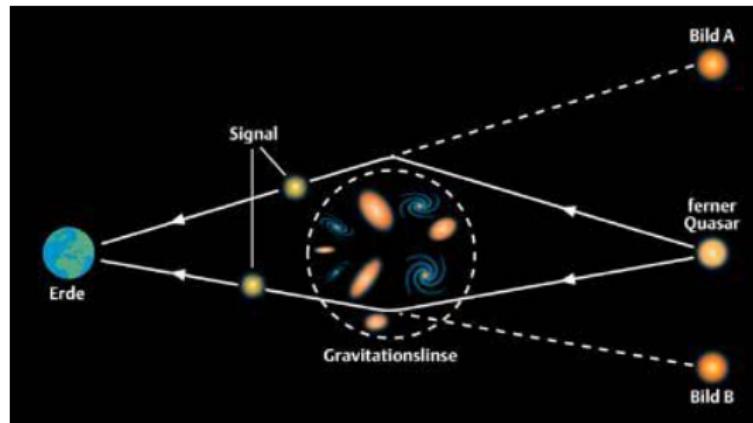
Einstein wird berühmt



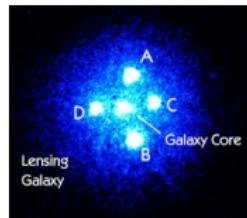
New York Times, 10. November 1919

Gravitationslinsen

Das Licht einer fernen Quelle wird im Gravitationsfeld einer dazwischenliegenden Masse (z.B. Galaxie(n Cluster)) abgelenkt. Diese wirkt wie eine **Linse** und kann das Bild verzerrn, verstärken oder sogar vervielfältigen.



Einstein Kreuz



Quasar Q2237+030
Linse ZW2237+030

Inhalt

1 Die Einsteingleichungen

2 Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

3 Warum gerade die Krümmung?

- Einschub: Was ist Krümmung?
- Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?

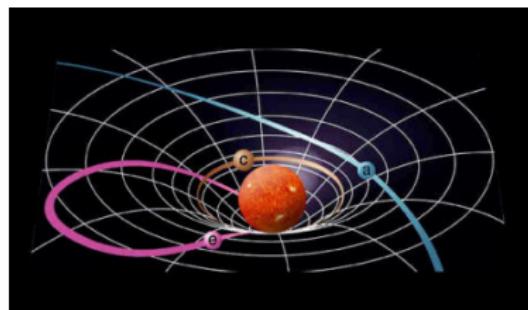
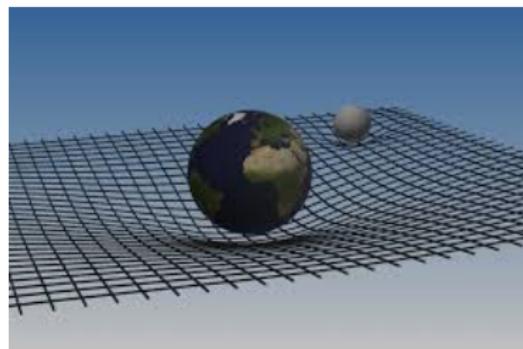
4 Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie

- Die Geometrie lenkt das Licht ab
- Die Geometrie bewegt Massen
- Raumzeitsingularitäten: schwarze Löcher und Urknall

Bewegung von Massen in der Raumzeit

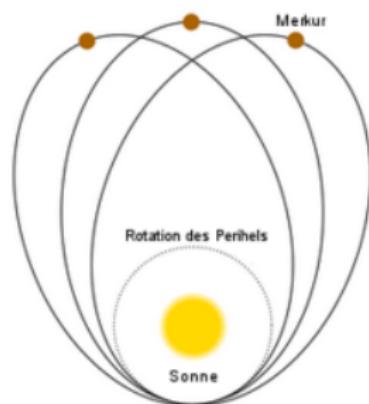
Körper bewegen sich auf Geodäten der Raumzeit.

Analogie: Roulettekugel statt „Masse am Seil“



Periheldrehung des Merkur

Klassischer Test der ART



Beiträge zur Periheldrehung

Bogensek./Jh	Ursache
531.63	andere Planeten
0.0254	Abplattung Sonne
42.98	ART
574.64	Summe
574.10 ± 0.65	beobachtet

Inhalt

1 Die Einsteingleichungen

2 Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

3 Warum gerade die Krümmung?

- Einschub: Was ist Krümmung?
- Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?

4 Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie

- Die Geometrie lenkt das Licht ab
- Die Geometrie bewegt Massen
- Raumzeitsingularitäten: schwarze Löcher und Urknall

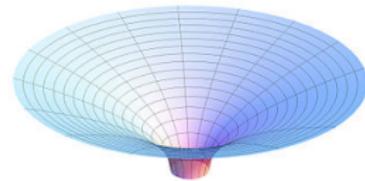
Die Schwarzschildmetrik

Karl Schwarzschild [1873–1916]

Lösung der Einstein Gleichungen

Gravitationsfeld einer nicht rotierenden Kugel

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



$$r_s = 2M$$

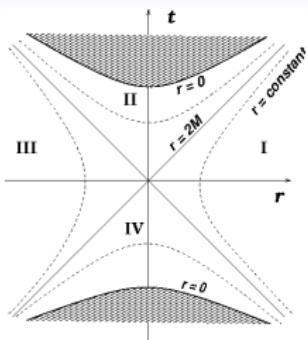
Schwarzschildradius

Außenraumlösung



Lösung für einen Stern

Gravitationskollaps, schwarze Löcher

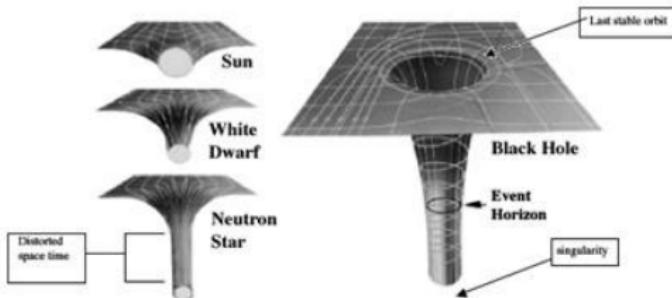


Kruskal Ausdehnung:

Maximale analytische Ausdehnung
der Schwarzschildlösung

Astrophysik: Gravitationskollaps,
Kontraktion über Schwarzschildradius
hinaus

- Stern
- Weisser Zwerg
- Neutronenstern
- Schwarzes Loch



Raumzeitsingularitäten

Singularität: kompliziert zu definieren...

falls es nicht fortsetzbare Geodäten gibt

R. Penrose & S. Hawking, 1965–70

Singularitätentheoreme:

Raumzeitsingularitäten treten generisch
(in physikalisch relevanten Modellen) auf!

Penrose: Gravitationskollaps, schwarzes Loch

Hawking: Kosmologie, Big Bang



Kosmische Zensurhypothese

Raumzeitsingularitäten sind (generisch) hinter einem Ereignishorizont verborgen, also „von Außen nicht sichtbar.“

Aktuelle Forschung: Singularitätentheoreme in niedriger Regularität

IOP Publishing

Classical and Quantum Gravity

Class. Quantam Grav. 32 (2015) 075012 (16pp)

doi:10.1088/0264-9085/32/7/075012

Hawking's singularity theorem for $C^{1,1}$ -metrics

Michael Kunzinger¹, Roland Steinbauer¹,
Milena Stojković² and James A Vickers³

¹University of Vienna, Faculty of Mathematics, Austria

²University of Southampton, School of Mathematics, UK

E-mail: roland.steinbauer@univie.ac.at, michael.kunzinger@univie.ac.at, milena.stojkovic@maths.soton.ac.uk, j.vickers@southampton.ac.uk

Received 17 November 2014, revised 15 January 2015

Accepted for publication 16 February 2015

Published 17 March 2015

Communicated by J M M Senovilla

Abstract

We provide a detailed proof of Hawking's singularity theorem in the regularity class $C^{1,1}$, i.e., for spacetime metrics possessing locally Lipschitz continuous first derivatives. The proof uses recent results in C^1 -causality theory and is based on regularisation techniques adapted to the causal structure.

Keywords: singularity theorems, low regularity, regularisation, causality theory



Commun. Math. Phys.
Digital Object Identifier (DOI) 10.1088/0264-9085/32/7/075012

Communications in
Mathematical
Physics



IOP Publishing

Classical and Quantum Gravity

Class. Quantam Grav. 32 (2015) 075012 (16pp)

doi:10.1088/0264-9085/32/7/075012

The Penrose singularity theorem in regularity $C^{1,1}$

Michael Kunzinger¹, Roland Steinbauer¹ and
James A Vickers³

¹University of Vienna, Faculty of Mathematics, Austria

²University of Vienna, Faculty of Mathematics, Austria

E-mail: michael.kunzinger@univie.ac.at, roland.steinbauer@univie.ac.at and J.A.Vickers@maths.soton.ac.uk

Received 1 February 2013, revised 12 May 2015

Accepted for publication 17 June 2015

Published 14 July 2015

Abstract

We extend the validity of the Penrose singularity theorem to spacetime metrics of regularity $C^{1,1}$. The proof is based on regularisation techniques, combined with ascent results in low regularity causality theory.

Keywords: singularity theorems, low regularity, regularisation, causality theory



The Hawking–Penrose Singularity Theorem for $C^{1,1}$ -Lorentzian Metrics

Melanie Graf¹, James D. E. Grant², Michael Kunzinger¹ , Roland Steinbauer¹

¹ Faculty of Mathematics, University of Vienna, Vienna, Austria. E-mail: melanie.graf@univie.ac.at; michael.kunzinger@univie.ac.at; roland.steinbauer@univie.ac.at

² Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK. E-mail: j.grant@surrey.ac.uk

Received: 26 June 2017 Accepted: 10 October 2017

© Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2017

Abstract: We show that the Hawking–Penrose singularity theorem, and the generalisation of this theorem due to Galloway and Senovilla, continue to hold for Lorentzian metrics that are of $C^{1,1}$ -regularity. We formulate appropriate weak versions of the strong energy condition and genericity condition for $C^{1,1}$ -metrics, and of C^0 -trapped submanifolds. By regularisation, we show that, under these weak conditions, causal geodesics necessarily become non-maximising. This requires a detailed analysis of the matrix Riccati equation for the approximating metrics, which may be of independent interest.

DANKE für die
Aufmerksamkeit!



Expendic G-02
Sculpture, Aluminium
283 x 283 x 24cm
(c) Tomas Eller, 2009