

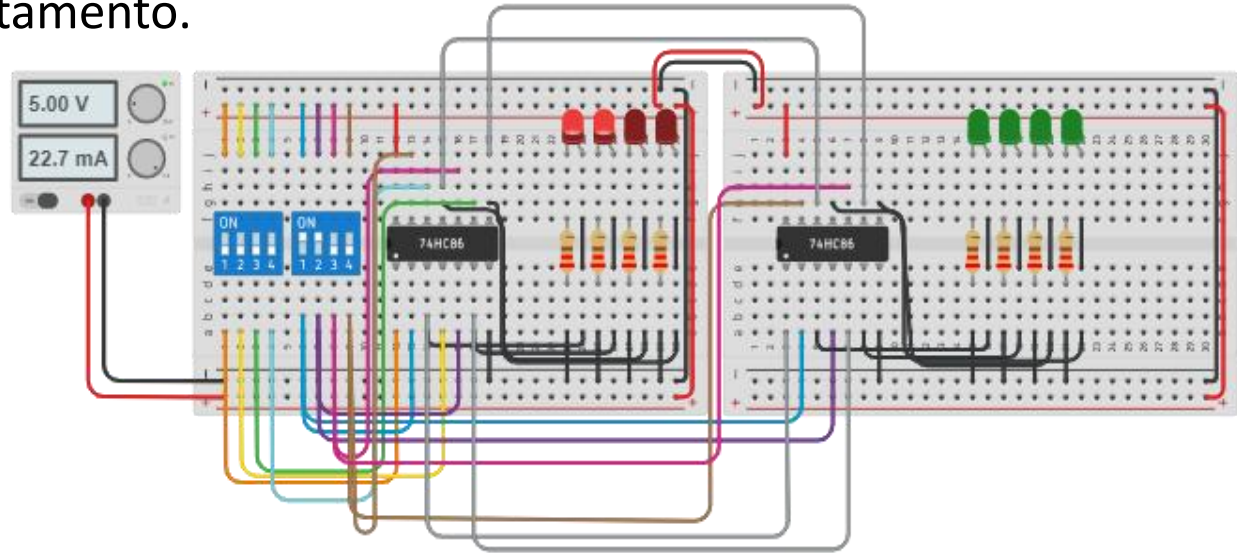
Simplificações de funções

Rafael B. Schvitz



Revisão

- Construimos circuitos desde a Tabela Verdade!
 - Podemos construir qualquer circuito, simplesmente sabendo o seu comportamento.



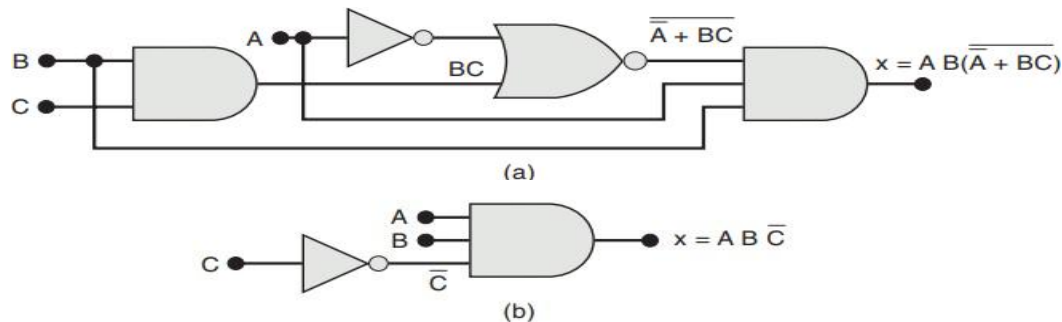
Aula de hoje

Qual a importância de simplificar um circuito?



Simplificação de funções

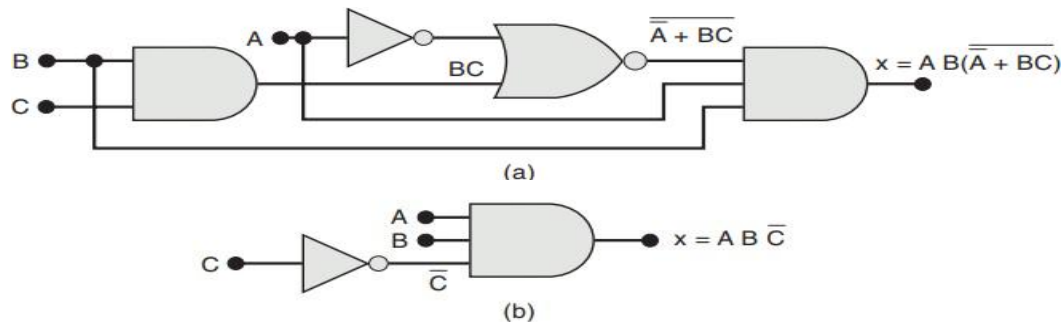
- Reduzir o número de termos ou variáveis de uma expressão
 - Circuito equivalente, mas com menos portas lógicas
- Circuitos com menos portas
 - Mais baratos (menor área ocupada)



Simplificação de funções

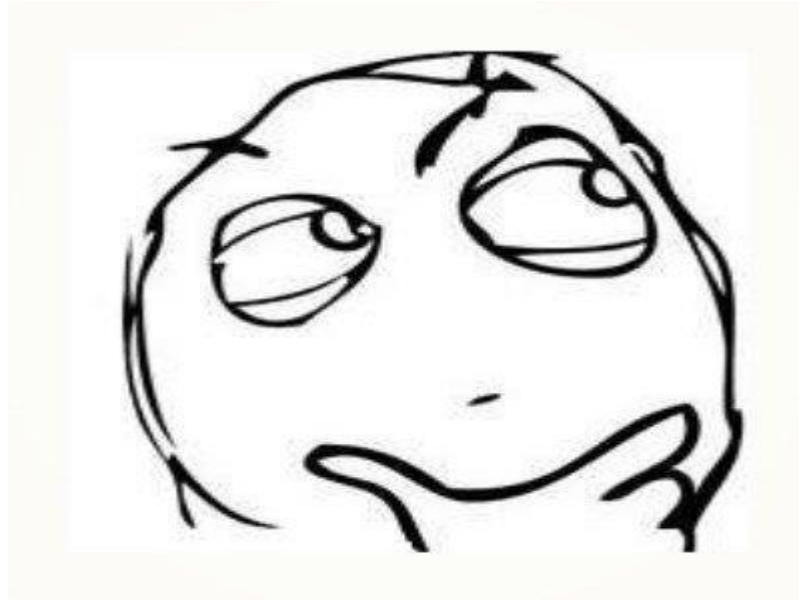
- Reduzir o número de termos ou variáveis de uma expressão
 - Circuito equivalente, mas com menos portas lógicas
- Circuitos com menos portas
 - Mais baratos (menor área ocupada)

Circuitos equivalentes
(possuem a mesma
tabela verdade)



Simplificação de funções

- Como simplificar a função para gerar circuitos menores?



Simplificação de funções

- Como simplificar a função para gerar circuitos menores?

–Fatoração booleana

–Mapas de Karnaugh



Simplificação de funções

- **Fatoração Booleana**

- Aplicação dos teoremas para fatoração da função
- Depende muito da inspiração e experiência do usuário
 - Escolha de qual teorema usar é difícil
- Método de tentativa e erro



Simplificação de funções

- **Fatoração Booleana**

- Exemplo:

Simplifique a função $\rightarrow F = A.B.C + A.C' + A.B'$



Simplificação de funções

Simplifique a função $\rightarrow F = A.B.C + A.C' + A.B'$

$$A.B.C + A.C' + A.B'$$

$$= A(B.C + C' + B')$$

Distributiva

$$= A(B.C + (C' + B'))$$

Associativa

$$= A(B.C + ((C' + B')')')$$

DeMorgan

$$= A(B.C + (C.B)')$$

Comutativa

$$= A(B.C + (B.C)')$$

Identidade da adição ($X + X' = 1$)

$$= A(1)$$

Identidade da multiplicação

$$= A$$



Simplificação de funções

- Simplifique a função

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Resposta: $A'B' + BC'$



Simplificação de funções

Simplifique a expressão $z = \overline{A}C(\overline{\overline{A}BD}) + \overline{A}B\overline{C} \overline{D} + A\overline{B}C$.



Simplificação de funções

Simplifique a expressão $z = \overline{A}C(\overline{\overline{A}BD}) + \overline{A}B\overline{C} \overline{D} + A\overline{B}C$.

$$z = \overline{A}C(A + \overline{B} + \overline{D}) + \overline{A}B\overline{C} \overline{D} + A\overline{B}C \quad (\text{passo 1})$$

$$z = \overline{A}CA + \overline{A}C\overline{B} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} \overline{D} + A\overline{B}C \quad (2)$$

$$z = \overline{A} \overline{B}C + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} \overline{D} + A\overline{B}C \quad (3)$$

$$z = \overline{B}C(\overline{A} + A) + \overline{A} \overline{D} (C + B\overline{C}) \quad (4)$$

$$z = \overline{B}C + \overline{A} \overline{D} (B + C) \quad (5)$$



Simplificação de funções

Depois da aplicação de vários teoremas em diferentes passos, você pode acabar chegando em uma função que ainda **não está completamente otimizada***

Como saber qual o teorema é o melhor a aplicar?



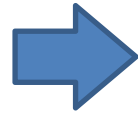
Mapa de Karnaugh

- Usado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela-verdade no circuito lógico correspondente
 - Processo simples e metódico
- Utilidade prática está limitada a quatro ou **cinco** variáveis
- Limitação pela complexidade do mapa



Mapa de Karnaugh

A	B	X
0	0	1 → $\overline{A}\overline{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB



	B'	B
A'		
A		

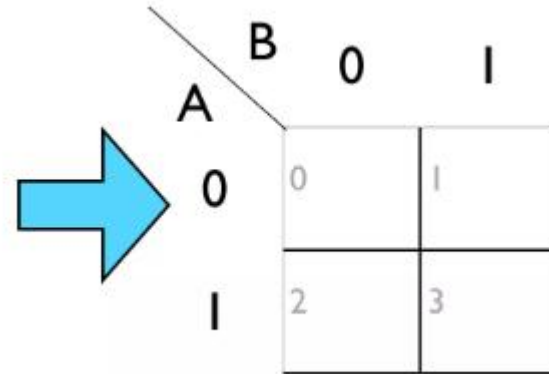
	B	
	0	1
A		
0		
1		



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

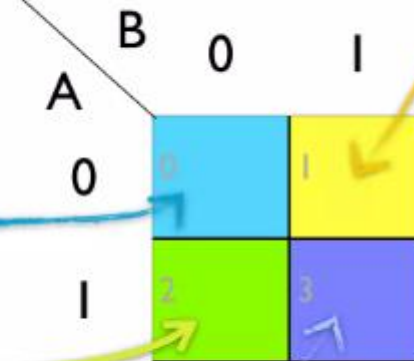
Ref	A	B	Saída
0	0	0	
1	0	1	
2	1	0	
3	1	1	



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

Ref	A	B	Saída
0	0	0	
1	0	1	
2	1	0	
3	1	1	



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

	B'	B
A'		
A		



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

A	B	X	
0	0	1	$\rightarrow \bar{A}\bar{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$\rightarrow AB$

	B'	B
A'	1	
A		



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

	B'	B
A'	1	
A		1



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

	B'	B
A'	1	0
A		1



Mapa de Karnaugh

- Cada quadrado dentro do mapa possui um índice

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

	B'	B
A'	1	0
A	0	1



Mapa de Karnaugh

— Mapa para 3 variáveis

Ref	ABC	Y
0	000	
1	001	
2	010	
3	011	
4	100	
5	101	
6	110	
7	111	

- Mapa - Opção 1 e 2:

A\BC	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

AB\C	0	1
00	m ₀	m ₁
01	m ₂	m ₃
11	m ₆	m ₇
10	m ₄	m ₅



Mapa de Karnaugh

— Mapa para 3 variáveis

Ref	ABC	Y
0	000	m ₀
1	001	m ₁
2	010	m ₂
3	011	m ₃
4	100	m ₄
5	101	m ₅
6	110	m ₆
7	111	m ₇

- Mapa - Opção 1 e 2:

A\BC	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

AB\C	0	1
00	m ₀	m ₁
01	m ₂	m ₃
11	m ₆	m ₇
10	m ₄	m ₅

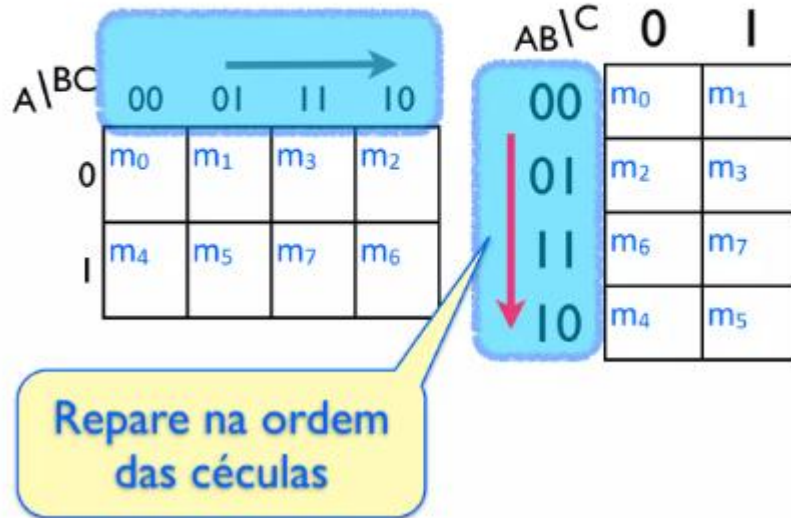


Mapa de Karnaugh

— Mapa para 3 variáveis

Ref	ABC	Y
0	000	m_0
1	001	m_1
2	010	m_2
3	011	m_3
4	100	m_4
5	101	m_5
6	110	m_6
7	111	m_7

- Ordem das células:

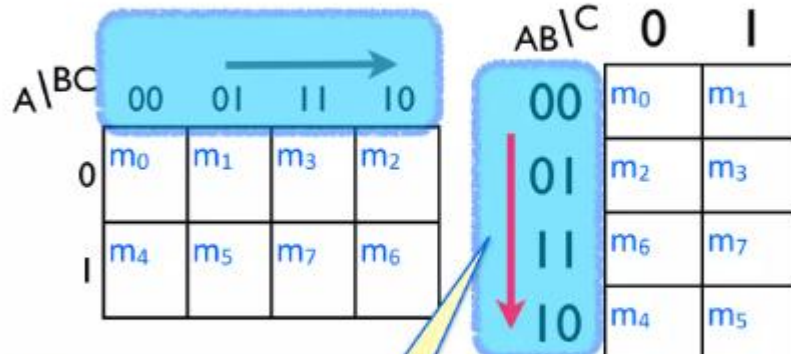


Mapa de Karnaugh

— Mapa para 3 variáveis

Ref	ABC	Y
0	000	m_0
1	001	m_1
2	010	m_2
3	011	m_3
4	100	m_4
5	101	m_5
6	110	m_6
7	111	m_7

- Ordem das células:



A ordem segue o código de gray (apenas 1 bit varia de estado entre as linhas/colunas)



Mapa de Karnaugh

- Mapa para 4 variáveis

Ref	ABCD	Y
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4	0100	
5	0101	
6	0110	
7	0111	
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	
13	1101	
14	1110	
15	1111	

- Mapa - Opção 1:

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- Mapa - Opção 2:

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



Mapa de Karnaugh

- Mapa para 4 variáveis

Ref	ABCD	Y
0	0000	m ₀
1	0001	m ₁
2	0010	m ₂
3	0011	m ₃
4	0100	m ₄
5	0101	m ₅
6	0110	m ₆
7	0111	m ₇
8	1000	m ₈
9	1001	m ₉
10	1010	m ₁₀
11	1011	m ₁₁
12	1100	m ₁₂
13	1101	m ₁₃
14	1110	m ₁₄
15	1111	m ₁₅

- Mapa - Opção 1:

AB \ CD	00	01	11	10
00	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
01	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆
11	m ₁₂	m ₁₃	m ₁₅	m ₁₄
10	m ₈	m ₉	m ₁₁	m ₁₀



Mapa de Karnaugh

- Possíveis agrupamentos no mapa

Sempre serão:

$2^1 \rightarrow 2$ células $\rightarrow 1$ var. eliminada

$2^2 \rightarrow 4$ células $\rightarrow 2$ var. eliminadas

$2^3 \rightarrow 8$ células $\rightarrow 3$ var. eliminadas



Mapa de Karnaugh

- Possíveis agrupamentos no mapa

Sempre serão:

$2^1 \rightarrow 2$ células $\rightarrow 1$ var. eliminada

$2^2 \rightarrow 4$ células $\rightarrow 2$ var. eliminadas

$2^3 \rightarrow 8$ células $\rightarrow 3$ var. eliminadas

IMPORTANTE: Não existem agrupamentos diferentes de potências de 2



Mapa de Karnaugh

- Exemplos

	C	C	
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	
$\bar{A}B$	1	0	$X = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$ $= B\bar{C}$
AB	1	0	
$A\bar{B}$	0	0	

(a)

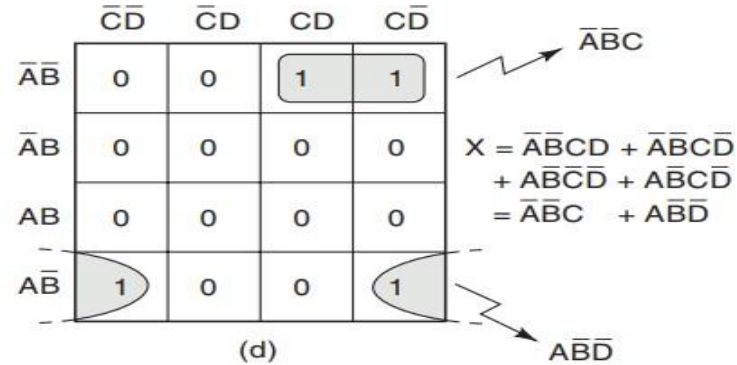
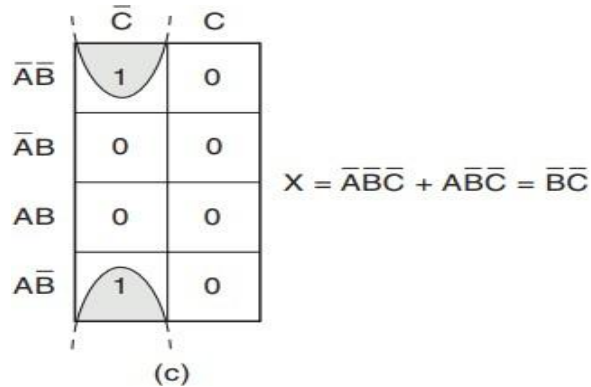
	C	C	
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	
$\bar{A}B$	1	1	$X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$ $= \bar{A}B$
AB	0	0	
$A\bar{B}$	0	0	

(b)



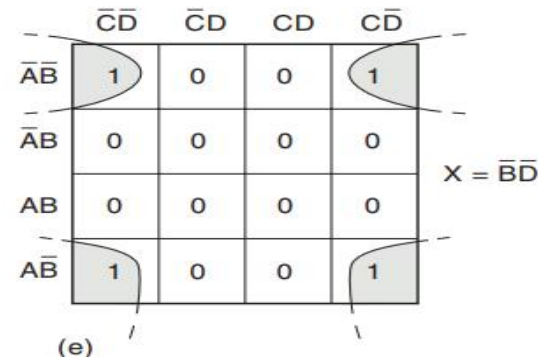
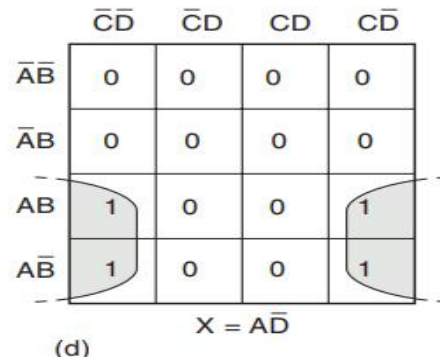
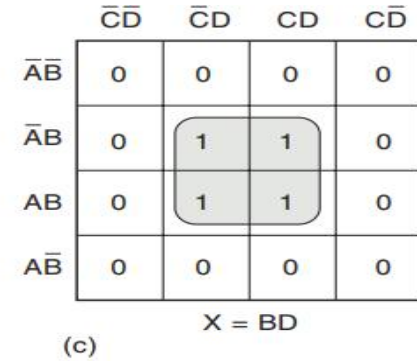
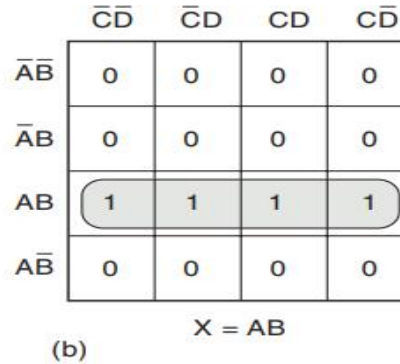
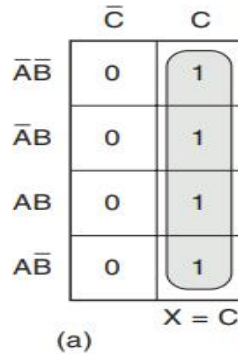
Mapa de Karnaugh

- Exemplos



Mapa de Karnaugh

- Exemplos



Mapa de Karnaugh

- Exemplos

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$X = B$
(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

$X = \bar{C}$
(b)



Mapa de Karnaugh

- Exemplos

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$X = \bar{B}$
(c)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{D}$
(d)

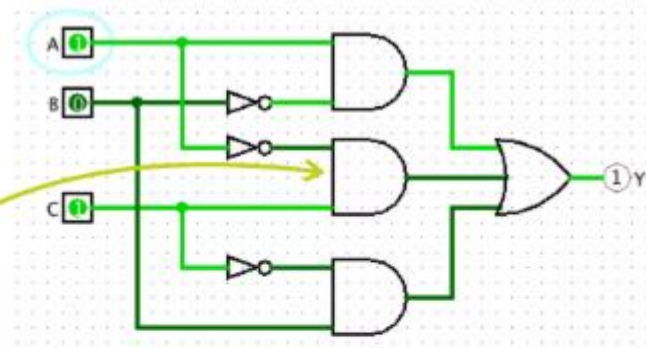


Mapa de Karnaugh

- Evitar agrupamentos redundantes!

Ref	ABC	Y
0	000	0
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	1
6	110	1
7	111	0

AB \ C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	
10	1	1

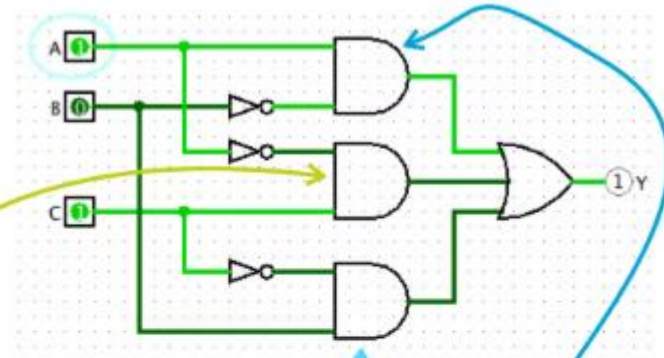


Mapa de Karnaugh

- Evitar agrupamentos redundantes!

Ref	ABC	Y
0	000	0
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	1
6	110	1
7	111	0

AB \ C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	
10	1	1

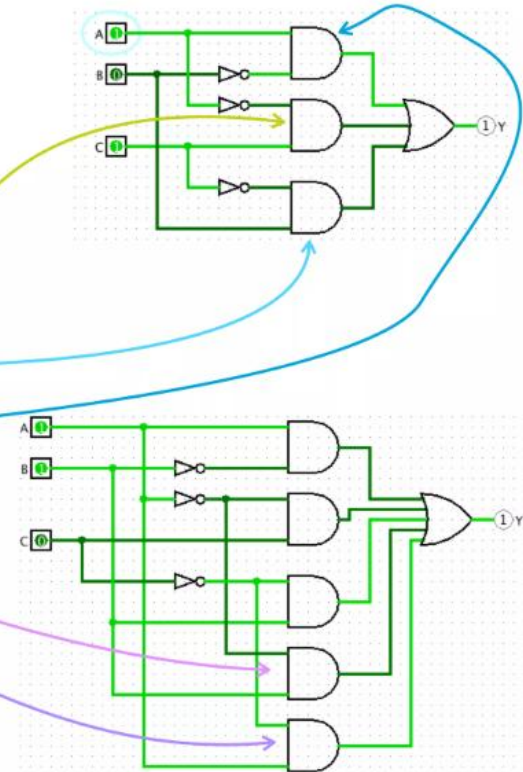


Mapa de Karnaugh

- Evitar agrupamentos redundantes!

Ref	ABC	Y
0	000	0
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	1
6	110	1
7	111	0

AB \ C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	
10	1	1

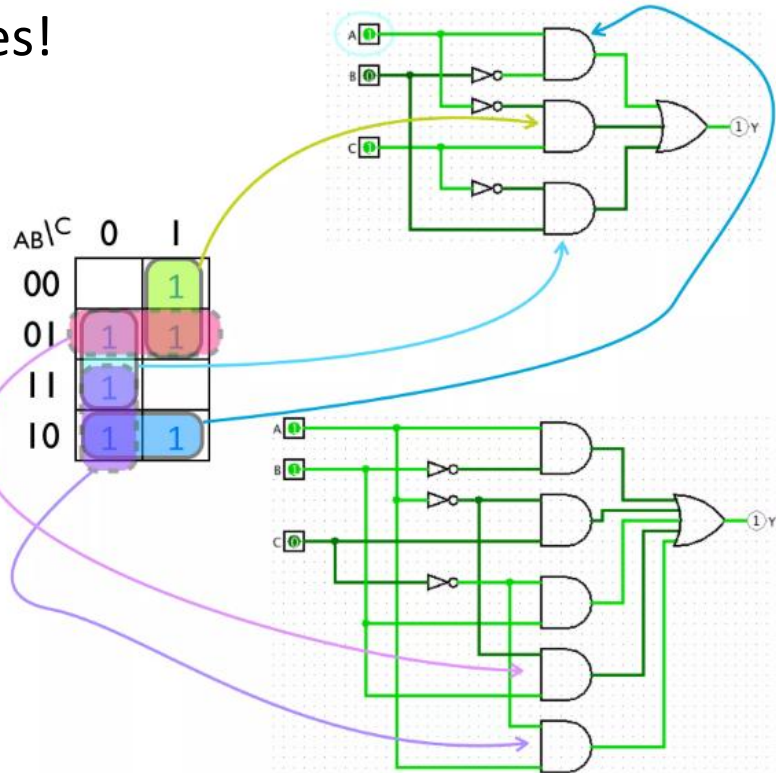


Mapa de Karnaugh

- Evitar agrupamentos redundantes!

Não resultam em erro, mas aumentam o circuito

Ref	ABC	Y
0	000	0
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	1
6	110	1
7	111	0



Mapa de Karnaugh

- De forma geral:
- Todos os “1”s devem ser “pegos” no mapa
 - A regra é montar o **menor número de grupos** de “1”, ou seja, os **maiores grupos possíveis**



Exemplo

Ref	ABC	Y
0	000	1
1	001	1
2	010	1
3	011	0
4	100	1
5	101	1
6	110	1
7	111	0

AB\ C

Resp.: $Y = \bar{B} + \bar{C}$



Exemplo 2

Ref	ABCD	Y
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	0
3	0011	0
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	0
7	0111	0
8	1000	0
9	1001	0
10	1010	0
11	1011	0
12	1100	0
13	1101	1
14	1110	0
15	1111	1

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

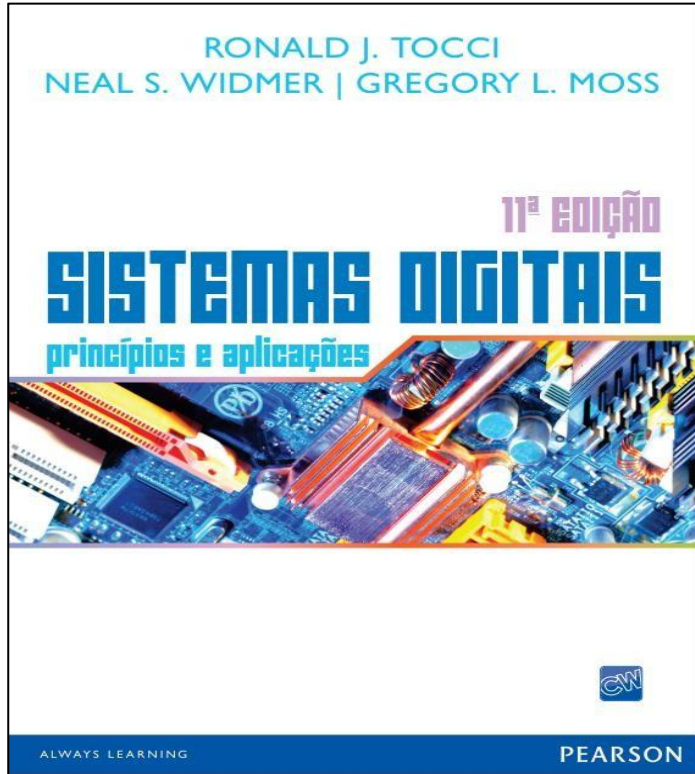


Exemplo 3

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11				1
10	1	1		1



Referências



- **Leitura obrigatória!**
- Capítulo 4

Fixação

AB\CD	00	01	11	10
00				1
01		1	1	
11		1	1	
10			1	

AB\CD	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	1
11	1	1		
10				

AB\CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10				

AB\CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

AB\CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1			1
11				
10	1		1	1

AB\CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



Fixação

1) Projete um circuito lógico com três entradas: A, B e C. A saída será nível lógico ALTO apenas quando a maioria das entradas for nível ALTO



Fixação

Simplifique a expressão $x = A\bar{B}C + \bar{A}BD + \bar{C}\bar{D}$.



Fixação

- Vamos projetar um circuito para controle da porta de um elevador em um prédio de três andares. O circuito possuirá um **senal M que define se o elevador está em movimento** (1) ou parado (0). Além disso, o circuito possuirá outros três sinais que **indicam o andar no qual o elevador está localizado**, F1, F2 e F3, que são normalmente (0), ou (1) quando o elevador está no respectivo andar.
- A saída é um sinal A (abrir), cujo valor é 0 ou 1.

