Medidas de centralidad de los nodos. Parte 5: Centralidad de Katz.

Bronquivoide

Fundamentos de la centralidad de Katz:

El hecho de que las geodésicas entre nodos pueden no ser el camino por el que fluye la información, resulta en una generalización de la centralidad de intermediación mediante la centralidad de Katz.

La idea de la centralidad de Katz es que hay una infinidad de caminos de distintas longitudes para conectar un par de nodos arbitrarios (i, j), con esto se busca tomar en cuenta todas las posibilidades de caminos y ordenarlas en una medida.

Consideramos una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < 1$ para darle un peso a los caminos. La centralidad de Katz supone que mientras más largo el camino, es menos probable que la información viaje por ahí.

Recordando que el número total de caminos de longitud p (distancia $d(i, j) = p$) es $N_{ij}^p = A_{ij}^p$, en donde A es la matriz de adyacencia, para establecer la centralidad de Katz vamos a ponderarlos haciendo el producto con α, teniendo el conjunto:

$$\{\alpha A_{ij}, \alpha^2 A_{ij}^2, \alpha^3 A_{ij}^3, \ldots, \alpha^n A_{ij}^n\} \tag{1}$$

De lo anterior, definimos el siguiente término con base a la suma:

$$S_n = I + \alpha A + \alpha^2 A^2 + \alpha^3 A^3 + \cdots + \alpha^n A^n \tag{2}$$

Que podemos expresar como sigue (I es la matriz identidad):

$$\alpha A S_n = \alpha A + \sum_{k=2}^{n+1} (\alpha A)^k \Rightarrow (I - \alpha A) S_n = I - (\alpha A)^{n+1} \tag{3}$$

Para la centralidad de Katz nos interesa el caso cuando $n \to \infty$. Si α es menor al radio espectral de la matriz tenemos que:

$$lim_{n \to \infty} (I - \alpha A) S_n = I \tag{4}$$

Por lo que se llega a que:

$$S_{n\to\infty} = (I - \alpha A)^{-1} \tag{5}$$

Denotamos la expresión anterior como S_∞, la cual es la matriz de la suma de todos los posibles caminos de un nodo arbitrario i a un nodo arbitrario j, ponderados según su longitud:

$$[S_\infty]_{ij} = (I - \alpha A)^{-1} \tag{6}$$

Definimos la centralidad de Katz para un nodo i mediante la siguiente expresión:

$$C_k(i) = \sum_j [(I - \alpha A)^{-1}]_{ij} \tag{7}$$