USTHB-FEI-Dept Informatique 14 Janvier 2014

MASTER I – SII – MEPS **Examen**

3 **Exercice 1**

Modéliser à l'aide de RdP :

1) un test « si C alors [traitement si] sinon [traitement sinon] »,
2) une boucle « pour $i = 1, N$ faire [traitement] »,
3) une boucle « tant que C faire [traitement] ».
4) une boucle « répéter [traitement] jusqu'à C ».

Note : C est une condition.

7 **Exercice 2**

Un médecin reçoit des patients sans rendez-vous. Les arrivées sont distribuées de manière Poissonnienne avec un taux $\lambda = 4$ arrivées/heure. La durée de consultation suit une loi exponentielle de moyenne 12 minutes. Bien sûr, la salle d'attente a une capacité limitée, et lorsqu'elle est pleine, les patients sont obligés d'aller ailleurs.

Le médecin voudrait assurer une qualité de service telle qu'il soit capable d'accueillir plus de 90% des patients se présentant au cabinet.

a) Après avoir précisé le modèle représentatif de cette situation (donner la notation de Kendall), déterminer la dimension de la salle d'attente de manière à atteindre la qualité de service ciblé ?

b) En fait, les patients qui arrivent alors que la salle d'attente n'est pas pleine n'entrent que s'ils jugent l'attente raisonnable. On note N la capacité du cabinet (places en consultation et en salle d'attente). Si $n < N$ est le nombre de patients dans le cabinet, un nouveau patient décide d'aller ailleurs avec une probabilité $1 - 1/(n+1)$ (et donc d'entrer dans la salle d'attente avec une probabilité $1/(n+1)$). Dans quelle proportion du temps la salle d'attente est-elle pleine ?
Faites le calcul avec la plus petite salle d'attente répondant à la question précédente.

10 **Exercice 3**

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.
a) Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.
b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?
c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Exercices corrigés

Chaînes de Markov discrètes

1. Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

a) Former, à partir de celà, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?

c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

---

a) On a l'ensemble des états suivants $E = \{BT, PL, N\}$ et le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de la période de l'année également. On a donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer P^2. Mais seule la première ligne de P^2 nous intéresse car on veut déterminer les probabilités à partir d'un jour de beau temps. On a :

$$p^{(2)}_{BT,BT} = p_{BT,BT} \times p_{BT,BT} + p_{BT,PL} \times p_{PL,BT} + p_{BT,N} \times p_{N,BT} = 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$p^{(2)}_{BT,PL} = p_{BT,BT} \times p_{BT,PL} + p_{BT,PL} \times p_{PL,PL} + p_{BT,N} \times p_{N,PL} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$p^{(2)}_{BT,N} = p_{BT,BT} \times p_{BT,N} + p_{BT,PL} \times p_{PL,N} + p_{BT,N} \times p_{N,N} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie ou la neige}}$.

c) On suppose maintenant que $E' = \{BT, MT\}$, ce qui est possible puisque la pluie et la neige se comportent de la même façon pour ce qui est des transitions. On a encore $p'_{BT,BT} = 0$ mais maintenant, $p'_{BT,MT} = p_{BT,PL} + p_{BT,N} = 1$. Pour la deuxième ligne, on a $p'_{MT,BT} = \frac{1}{4}$ car $p_{PL,BT} = p_{N,BT} = \frac{1}{4}$ et $p'_{MT,MT} = \frac{3}{4}$ car $p_{PL,PL} + p_{PL,N} = p_{N,PL} + p_{N,N} = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

n de l'exercice2 : Chez le médecin

agit d'un système M/M/1/N, avec $N-1$ places dans la salle d'attente.

tons $\tau = \lambda/\mu$. D'après le formulaire du cours, $p_N = p_0\tau^{N}$ (où $p_0 =$
$/(1-\tau^{N+1})$) est la probabilité que la salle d'attente soit pleine.
$= e^n(1-e)/(1-e^{k+1})$;
n cherche donc N tel que $(1-\tau)/(\tau^{-N}-\tau) < 0.1$. D'où $(1-0.9\tau)/0.1 <$
oit :

$$N > \frac{\log(1-0.9\tau)-\log(0.1)}{-\log(\tau)}$$

Application numérique : $\tau = 4/5$, $N > 4.61$, donc $N \geqslant 5$, d'où une salle
tente avec au moins 4 places.

Le graphe du processus de naissance et mort associé est :

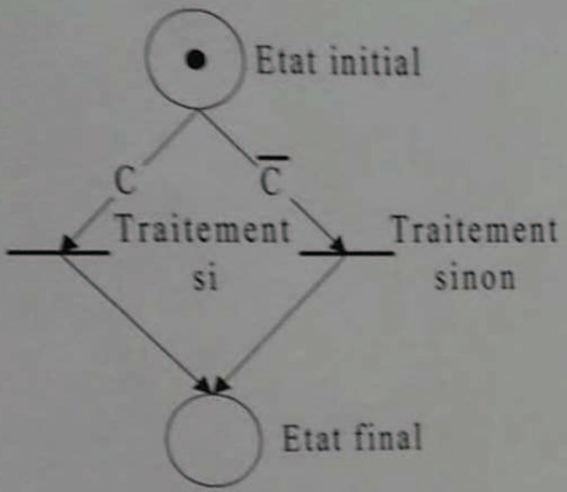
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend right, "\lambda"'] & 1 \arrow[l, bend right, "\mu"'] \arrow[r, bend right, "\lambda/2"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\mu"'] \arrow[r, bend right, "\lambda/3"'] & \cdots \arrow[l, bend right, "\mu"'] \arrow[r, bend right] & \cdots \arrow[l, bend right] \arrow[r, bend right, "\lambda/(N-1)"'] & N\text{-}1 \arrow[l, bend right, "\mu"'] \arrow[r, bend right, "\lambda/N"'] & N \arrow[l, bend right, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Avec le théorème des coupes et $\sum p_k = 1$:

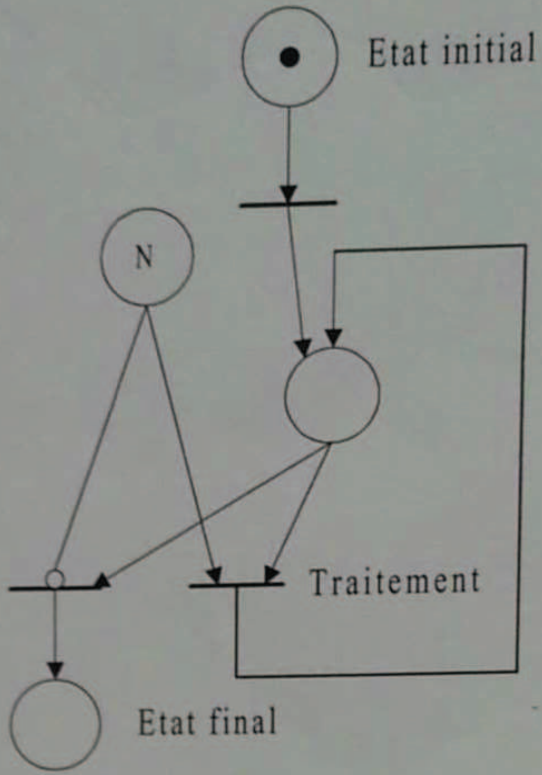
$$p_N = \frac{\tau^N/N!}{\sum_{k=0}^{N} \tau^k/k!}$$

Avec $N = 5$, $p_5 = 0.0012$: la salle d'attente est pleine dans 0, 1% des ca
comparer avec 10% dans la question précédente.)

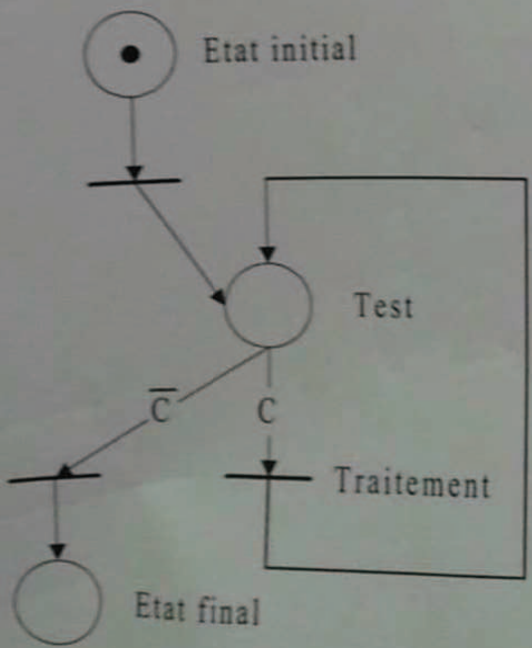
Correction



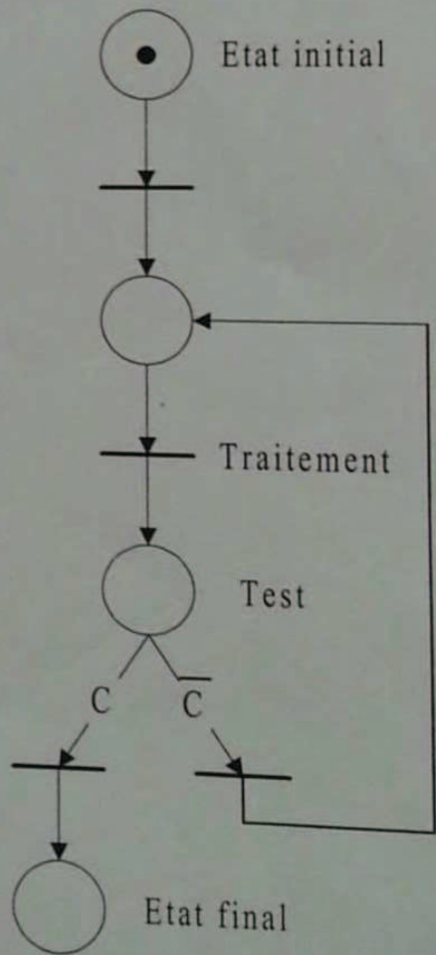
I. 1)



I. 2)



I. 3)



I. 4)