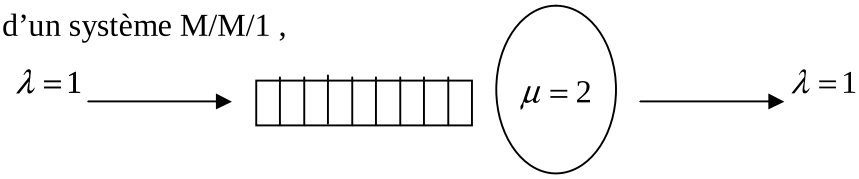
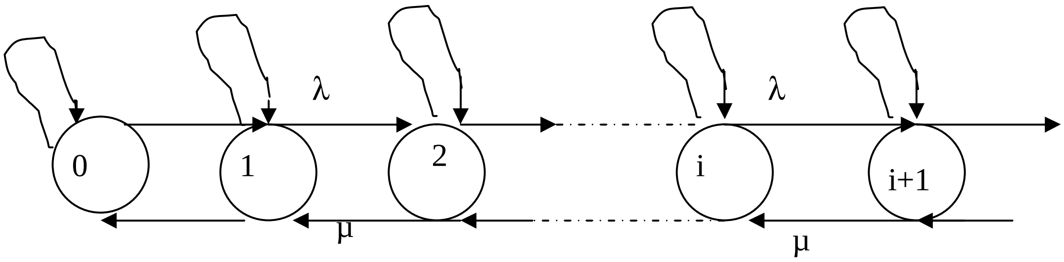
Epreuve de MEPS (janvier 2010)

Exercice 1. Cf. cours.
Exercice 2.

1. Il s'agit d'un système M/M/1 ,



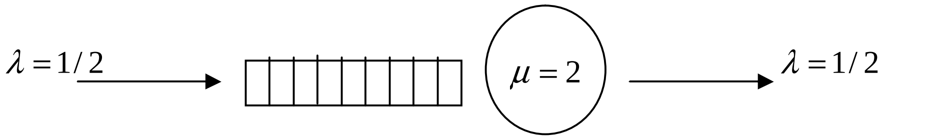
et nous avons vu que X(t)=nombre de demandes dans le système à l'instant t forme une chaîne de Markov à temps continu (car les inter-arrivées et les temps de service sont exponentiellement distribués et donc dotés d'absence de mémoire). Le graphe d'état est (cf. Cours) :

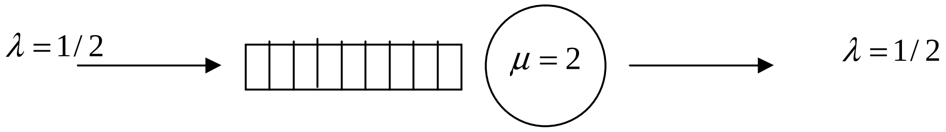


Ceci permet d'écrire les équations d'état $\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \lambda\pi_{i-1}(t) + \mu\pi_{i+1}(t) - (\lambda+\mu)\pi_i(t)$, $i = 1,2,...,$ $\frac{d\pi_0(t)}{dt} = \mu\pi_1(t) - \lambda\pi_0(t)$. Si le régime stationnaire existe (lorsque $t \to \infty$), ces équations deviennent $\lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{i+1} - (\lambda+\mu)\pi_i = 0, \quad i = 1,2,... \; \mu\pi_1 - \lambda\pi_0 = 0$. Par récurrence, on obtient $\pi_i = \rho^i \pi_0, i = 0,1,2,.... \; \rho = \lambda/\mu$ La constante inconnue s'obtient en utilisant la condition de normalisation $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. On trouve $\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right)^{-1}$. Si $\rho > 1$, la série diverge, $\pi_0 = 0$, et donc $\pi_i = 0, \forall i$ (les états sont soit tous transitoires, soit tous récurrents nuls : il n'y a pas de distribution stationnaire). Si $\rho < 1$, la série converge et $\pi_0 = 1 - \rho > 0$, tous les $\pi_i = \rho^i(1-\rho) > 0$, $i = 0,1,2,...$ (les états sont tous récurrents positifs, et il y a une seule distribution stationnaire qui est la loi géométrique de paramètre $\rho = \lambda/\mu$.

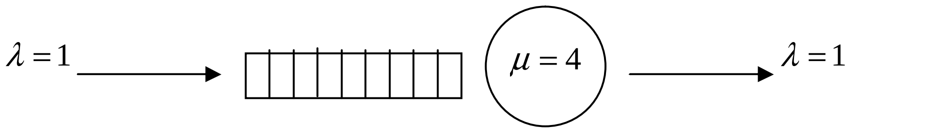
Les valeurs des probabilités stationnaires et des mesures de performance sont données dans le tableau comparatif ci-dessous avec les différentes variantes A., B et C qui s'obtiennent de la même manière (avec les formules ci-dessus,qui sont également données dans la table disponible dans votre e-boîte). Dans la variante A : on utilise les mêmes formules que ci-dessus en prenant $\lambda/2 = 1/2$ au lieu de $\lambda = 1$ pour chaque file (deux files indépendantes, chacune avec son propre serveur) , et $\mu = 2$. Dans la variante B, les mêmes formules, mais en prenant $\lambda = 1$ et $2\mu = 4$ au lieu de $\mu = 2$ (une seule file) ?Dans la variante C, il s'agit d'un modèle M/M/2 (m=2), avec $\lambda = 1, \mu = 2$ (une seule file) . Les résultats sont dans le tableau :

Variante A.

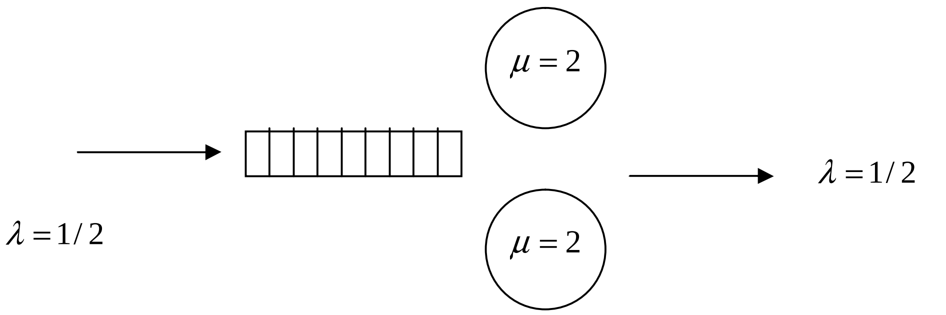




Variante B.



Variante C.



Mesure de performance	M/M/1 $\lambda=1$ $\mu=2$ Q 1, Exo2	Une file M/M/1 $\lambda/2 = 1/2$ $\mu=2$ Q2, Exo2	Les 2 files M/M/1 prises ensemble $\lambda/2 = 1/2$ $\mu=2$ Q2, Exo2	Une file M/M/1 $\lambda=1$ $2\mu=4$ Q2, Exo2	Une file M/M/2 $\lambda=1$ $\mu=2$ $m=2$ Q2, Exo2
$\rho=\lambda/\mu$, $\varphi=\lambda/\mu m$	$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}=0.5<1$	$\rho=\frac{\lambda/2}{\mu}=\frac{1}{4}=0.25<1$	$\rho=\frac{\lambda/2}{\mu}=\frac{1}{4}=0.25<1$ pour chaque file	$\rho=\frac{\lambda}{2\mu}=\frac{1}{4}=0.25<1$	$\varphi=\lambda/m\mu=1/4=0.25<1$
π_i	$(0.5)^i\times 0.5$	$(0.25)^i\times 0.75$	$(0.25)^i\times 0.75$ Pour chaque file	$(0.25)^i\times 0.75$	$\begin{cases}\frac{(0.5)^i}{i!}\pi_0, i=0,1,2\\ \frac{(0.5)^i}{2\times 2^{i-2}}\pi_0, i\geq 2\end{cases}$,
π_0	$1-\rho=0.5$	$1-\rho=0.75$	$1-\rho=(0.75)^2=0.5625$	$1-\rho=0.75$	$\left[\sum_{i=0}^{2-1}\frac{(0.5)^i}{i!}+\frac{(0.5)^2}{2!}\times\frac{1}{1-(1/2\times 2}\right.$ $=0.6$
π_1	0.25	0.1875	$0.75\times 0.1875+0.1875\times 0.75=0.28125$	0.1875	0.3
π_2	0.125	0.046875	$0.046\times 0.75+0.1875\times 0.1875$ 0.75×0.046 =0.104	0.04687	0.075
π_3	0.0625	0.0117		0.0117	0.1875
A	1	0.5	0.5+0.5=1	1	1
A'	1	1	1	1	1
$\bar{N}$	1	0.3333	0.3333+ 0.3333 =0.6666	0.3333	0.5333
$\bar{Q}$	0.5	0.0833	0.1666	0.0833	0.0333
$\bar{W}$	0.5	0.1666	0.1666	0.0833	0.0333
$\bar{V}$	1	0.6666	0.6666	0.3333	0.5333
$\bar{S}$	0.5	0.25	$0.25+0.25=0.5$	0.25	$0\times 0.6+1\times 0.3+2\times 0.075=0.45$

$C =$ coût	$c_1\mu + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 10\times 1 = 20$	$c_1\mu + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 10\times 0.333 = 13.333$	$2\times 13.333 = 26.666$	$c_1 2\mu + c_3\overline{N} = 5\times 4 + 10\times 0.333 = 23.333$	$c_2 m + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 10\times 0.5333 = 15.333$

Remarque. Doubler la capacité de service ne réduit pas forcément le temps d'attente de moitié, ni la taille moyenne de la file. Cela dépend des paramètres.
Ainsi, pour notre application numérique,
Avec la variante A, on a amélioré les performances, mais en augmentant le coût qui peut être quantifié. En revanche, les serveurs sont plus libres (56% du temps contre 50%).
Des variantes A, B et C, la meilleure est la C (du point de vue de l'attente), avec un coût plus petit, et des serveurs moins chargés que B , mais pas plus que A.
Du point de vue du nombre de demandes dans le système, la meilleure variante est le B, mais avec un serveur qui doit travailler plus vite.et un coût plus important etc….