Chaînes de Markov

Exercice 1

. Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

a) Former, à partir de celà, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?

c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Exercice 2

On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité 1/2 pour chaque voisin. Déterminer le graphe et la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue. Quelle est la période de ses états?

Exercice 3 :

On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

a) On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.

b) Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.

c) Le réparateur, de plus en plus paresseux, met maintenant 2 jours pour réparer une seule machine. Montrer que (X_n) n'est plus une chaîne de Markov, mais que l'on peut construire un espace de 5 états permettant de décrire le processus par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe des transitions. Calculer la probabilité que les 2 machines fonctionnent après n jours ($n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$) si elles fonctionnent initialement.

Exercice 4

Déterminer la matrice de transition des chaînes suivantes :

a) N boules noires et N boules blanches sont placées dans 2 urnes de telle façon que chaque urne contienne N boules. A chaque instant on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on échange les deux boules. A l'instant n, l'état du système est le nombre de boules blanches de la première urne.

b) N boules numérotées de 1 à N sont réparties dans une urne. A chaque instant, on tire un numéro i au hasard entre 1 et N et la boule de numéro i est changée d'urne. `A l'instant n, l'état du système est le nombre de boules dans la première urne.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Représenter le graphe de cette chaîne. Déterminer les classes de communication, leur nature, leur périodicité et éventuellement les sous-classes cycliques.

X b) Calculer les probabilités d'absorption des états transitoires par les classes récurrentes.

c) Déterminer les distributions stationnaires de la chaîne et le temps moyen de retour pour les états récurrents. Existe-t-il une distribution limite ?

Exercice 6

On considère un processeur pouvant se trouver à tout instant t soit en bon état, soit en panne. On définit les variables aléatoires X et Y telles que X représente la durée de bon fonctionnement jusqu'à la défaillance et Y la durée de réparation d'une panne. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre α et Y la loi exponentielle de paramètre β. Déterminer la nature de la chaîne de Markov qui modélise le système, ainsi que les distributions stationnaires si elles existent ?