MEPS

Modélisation et Evaluation de Performances des Systèmes

Sommaire

I. Introduction

I.1 Les systèmes

- Un système est un ensemble d'entités (les choses intéressantes) qui agissent entre elles, pour un objectif donné. Il est généralement dynamique; son état varie avec le temps.

- L'état d'un système est un ensemble de variables nécessaires à sa description à un instant donné.

Exemple: Considérons un système informatique du point de vue de la congestion. Les variables seraient les arrivées des informations (requêtes,…), les temps de traitement de ces informations, la discipline de service ou d'ordonnancement des tâches (FIFO, LIFO,…)

- Un système peut être discret ou continu :

. Un système discret est un système pour lequel les variables d'état changent de valeurs à des temps discrets; l'espace des états possibles est discret (fini ou dénombrable)

. Un système continu est celui où les variables varient continument dans le temps ; l'espace des états est non dénombrable, par exemple dans l'ensemble des nombres réels, (exemple: processus chimique).

I.2 Les modèles

- Un modèle est une représentation du système dans le but d'étudier le phénomène réel. C'est en général une simplification de cette représentation qui ne tient compte que des aspects essentiels du fonctionnement du système, et négligeant les facteurs les moins influents.

- Le modèle est souvent représenté par un automate décrit par un système d'équations:

$$Y=\Phi\ (X)$$

où:

. X est une variable (vecteur) représentant les paramètres d'entrée (inputs), contrôlable ou non

. Y, output ou sortie, représente les caractéristiques du système (mesures ou métriques de ses performances)

. Φ est une application plus ou moins sympatique, servant de modèle et décrit les relations logiques et ou mathématiques entre X et Y.

<u>Exemple</u>:

Pour le système informatique, les mesures de performance Y peuvent être:

. Le temps de réponse (traitement des tâches par le processeur)

. Le débit du processeur

. la sûreté de fonctionnement (fiabilité, sécurité ou disponibilité)

. le taux de probabilité de perte, ….

Il existe plusieurs types de modèles:

- Modèle **Analytique**: le comportement du système réel est décrit à l'aide de relations mathématiques, logiques ou symboliques entre les entités(objets d'intérêt)

- Modèle **Descriptif**: le système est complexe à modéliser analytiquement, on y détaille les différents événements et actions

- Modèle **Statique** (indépendant du temps) ou **Dynamique** (il décrit l'évolution du système dans le temps)

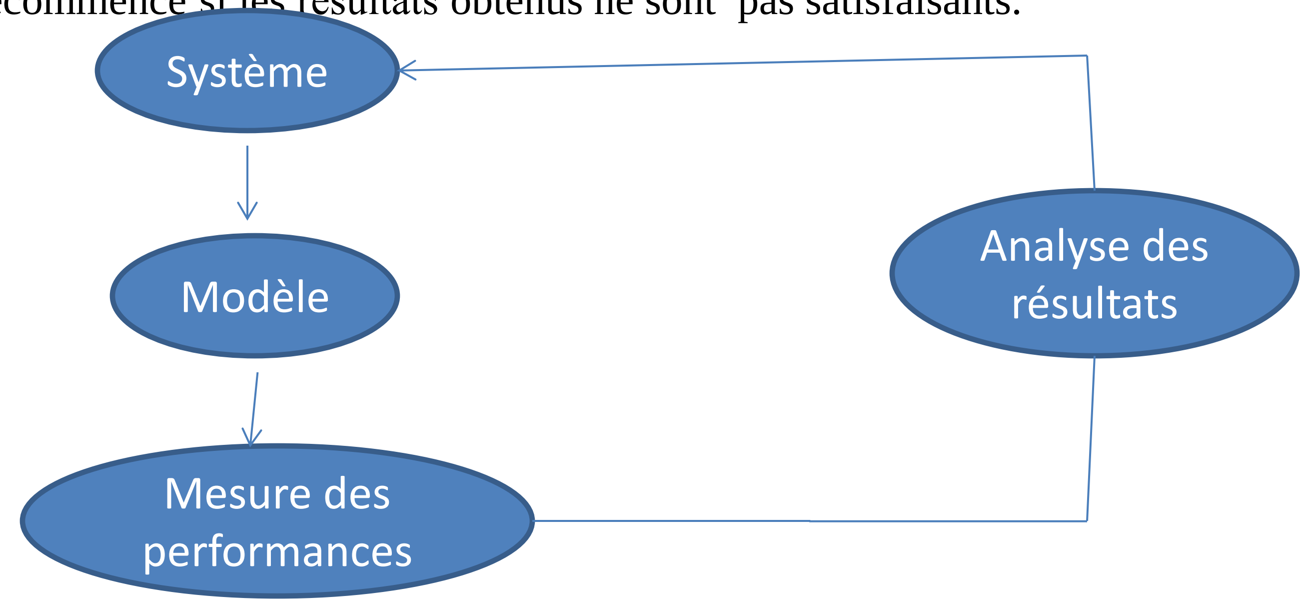
- Modèle **Déterministe** (il dépend de facteurs connus) ou **Stochastique** (il dépend de facteurs aléatoires)

- Modèle **Discret** ou **Continu**

- Modèle **Hybride** combinant plusieurs types (dynamique, stochastique,…)

I.3 Evaluation des performances

L'évaluation des performances se fait en deux étapes, l'étape de modélisation et une étape d'analyse des performances. En gros on définit le modèle adéquat, puis on fait une analyse pour calculer les paramètres (indices) de performance; on analyse alors les résultats, et on recommence si les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants.



0n distingue deux types d’analyse:

- Analyse **qualitative**: Elle permet la vérification d’une manière précise des propriétés comportementales et structurelles du système réel tel que le non blocage, la vivacité, …(Réseaux de Pétri)

- Analyse **quantitative**: Elle s’intéresse au calcul des indices de performances; Pour cela on distingue deux familles de méthodes d’analyse quantitative, par simulation et par méthode anlalytique (processus stochastiques, files d’attente,…, calcul numérique)

La **simulation** consiste à reproduire l’évolution du model pas à pas en étudiant une réalisation particulière de celui-ci ; ainsi elle conduit à réaliser des expériences sur le model.

Les langages de simulation : on peut utiliser les langages universels (C++, Java …) ou bien des

langages spécifique (GPSS, Simula, sinscript) et pour les systèmes de réseaux et télécommunications (Glomosim, NS …).

II. Rappels de probabilité (voir document)

1. **Variables aléatoires discrètes**

   Soit X une v.a. discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$

   – Loi de probabilité : $\mathsf{P}[X = n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   – Fonction de répartition (ou distribution) :

$$\mathsf{P}[X \leq n] = \sum_{k \leq n} \mathsf{P}[X = k]$$

   – Espérance :

$$\mathsf{E}[X] = \sum_{n} n\mathsf{P}[X = n]$$

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(n)\mathsf{P}[X = n]$$

   – Variance : $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])^2] = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2$

Exemples

– Poisson

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda),\ (\lambda > 0) \Leftrightarrow \mathsf{P}[X = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!,\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

– Géométrique

$$X \sim Geom(p),\ (0 \leq p \leq 1) \Leftrightarrow \mathsf{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1},\ \forall k = 1, 2, \ldots$$

– Binomiale

$$X \sim Bin(n, p),\ (0 \leq p \leq 1) \Leftrightarrow \mathsf{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. **Variables aléatoires continues**

Soit Y une v.a. continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$

- Fonction de répartition (ou distribution) : $F(y) = \mathsf{P}[Y \leq y]$
- Fonction de densité :

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y), \quad \mathsf{P}[Y \in B] = \int_B f(y)dy$$

- Espérance :

$$\mathsf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$$

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy$$

- Variance : $\mathsf{Var}[Y] = \mathsf{E}[(Y - \mathsf{E}[Y])^2] = \mathsf{E}[Y^2] - (\mathsf{E}[Y])^2$

Exemples

– Uniforme sur (a, b)

$$U \sim Unif(a,b) \Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

– Exponentielle négative

$$X \sim Exp(\lambda),\ (\lambda > 0) \Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Propriété d'oubli de l'exponentielle négative :

$$\mathrm{P}[X > s + t | X > t] = \mathrm{P}[X > s], \quad \forall s, t \geq 0$$

3. **Probabilité conditionnelle**

Soient A, B deux événements t.q. $\mathsf{P}[B] > 0$

$$\mathsf{P}[A|B] = \frac{\mathsf{P}[A \cap B]}{\mathsf{P}[B]}$$

Soit Y une v.a. discrète : $\mathsf{P}[Y = n|B] = \frac{\mathsf{P}[(Y=n)\cap B]}{\mathsf{P}[B]}$

4. **Théorème des probabilités totales**

Soient $B_1, B_2, \ldots$ des événements disjoints t.q. $\mathsf{P}[\cup_{i\geq 1} B_i] = 1$ et $\mathsf{P}[B_i] > 0$, $\forall i \geq 1$. Alors, $\forall$ événement A :

$$\mathsf{P}[A] = \sum_{i\geq 1} \mathsf{P}[A|B_i]\mathsf{P}[B_i]$$

Exemples

– Soient X et Y deux v.a. discrètes, prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{P}[X = k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{P}[X = k | Y = n] \mathsf{P}[Y = n].$$

– Soient X une v.a. discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et Y une v.a. continue prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{P}[X = k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}[X = k | Y = y] f_Y(y) dy,$$

où f_Y est la fonction de densité de Y.

5. **Espérance conditionnelle**

- Soient Y une v.a. discrète et B un événement. Alors,

$$\mathsf{E}[Y|B] = \sum_k k\mathsf{P}[Y = k|B]$$

- Soient X et Y des v.a. discrètes. Alors,

$$\mathsf{E}[Y|X = n] = \sum_k k\mathsf{P}[Y = k|X = n].$$

III. Processus Stochastiques: Quelques notions

- **Définition1:** Un processus stochastique (p.s) est une famille de v.a indicées par les éléments d'un ensemble T. On note: $\{X(t)\}t\in T$

Exemples:

1) Un joueur joue à « Pile ou Face ». Il gagne un dinar s'il obtient Face et perd un dinar s'il tire Pile. Soit X(n) la v.a: 'facture du joueur au nième tirage'. **$\{X(n)\}n\in N$ est un p.s**

2) Soit X(t) la v.a : 'Nombre de personnes en attente devant un guichet de poste à l'instant t'. **$\{X(t)\}t\in R+$ est un p.s**

3) Soit X(n) la v.a : 'le stock d'essence dans une pompe le jour n à 9h'. **$\{X(n)\}n\in N$ est un p.s**

4) Soit X(t) la v.a: 'le niveau d'eau du Hamiz à l'instant t' . **$\{X(t)\}t\in R+$ est un p.s**

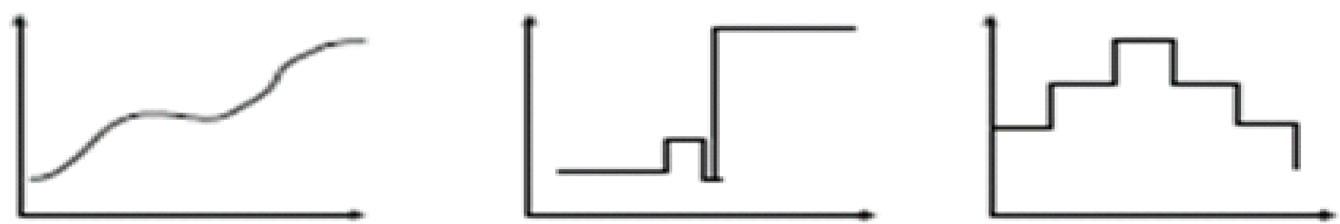
Les p.s peuvent être classés en 4 catégories:

X(t) / t	Discret	Continu
Discret	Exemple 1	Exemple 3
Continu	Exemple 2	Exemple 4

III. Processus Stochastiques: Quelques notions

Définition 2: *Un processus stochastique {X(t)} t∈T est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.*

- Un processus stochastique est donc une **famille de variables aléatoires** (non indépendantes)
- Le temps T, peut être discret ou continu
- L'ensemble E des valeurs que peut prendre X(t) est appelé ***espace d'états*** et peut être discret ou continu
- La **trajectoire** d'un processus est décrit par le couple (E,T)



- **Processus «sans mémoire» ou «markovien»**

L'évolution future du processus ne dépend pas du passé, mais uniquement du présent; c'est la propriété de Markov, qui s'écrit :

$\forall \; t_1 < t_2 <.. < t_n < t_{n+1} < \ldots \quad , \forall n$:

$$P\{ X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} / X(t_0) = x_0 ,.., \; X(t_n) = x_n\} = P\{ X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} \; / \; X(t_n) = x_n \}$$

On distingue les processus de Markov à temps continu ($t \in R$) ou à temps discret($t=0,1,\ldots$).

Si le temps est discret, on parle alors de **Chaîne de Markov.**

<u>Exemple:</u> Les processus de Poisson, Gaussiens, à accroissements indépendants sont des processus markoviens.

- Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$ est à **accroissements indépendants** si les variables aléatoires :

$$U_1 = X_{t2} - X_{t1}, \quad U_2 = X_{t3} - X_{t2}, \ldots$$

sont indépendantes, pour tout $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$

- Le **processus de Poisson** à valeurs dans N={0,1,2,…} de paramètre α, est un processus à accroissements indépendants tel que :

1. $P\{X_0 = 0\} = 1$
2. Les accroissements $(X_t - X_s)$, $0 \leq s \leq t$, suivent une loi de Poisson de paramètre $\alpha(t-s)$;

On a: $P(X_t - X_s = k) = e^{-\alpha(t-s)} (\alpha(t-s))^k / k!$; $k=0,1,2,\dots$

Exemple: - le nombre de pannes d'un système informatique durant (0,t),

- le nombre de visites d'un site web, ….

Remarque: α est le nombre moyen d'évents (pannes, appels) dans (0,t);

c'est également l'inverse du temps (moyen) qui sépare les occurrences de deux évents successifs $(E(T)) = 1/\alpha$)

- Un **processus Gaussien** est un processus à accroissements indépendants , dont les accroissements :

$$(X_t - X_s)\ ,\ \ 0 \leq s \leq t,$$

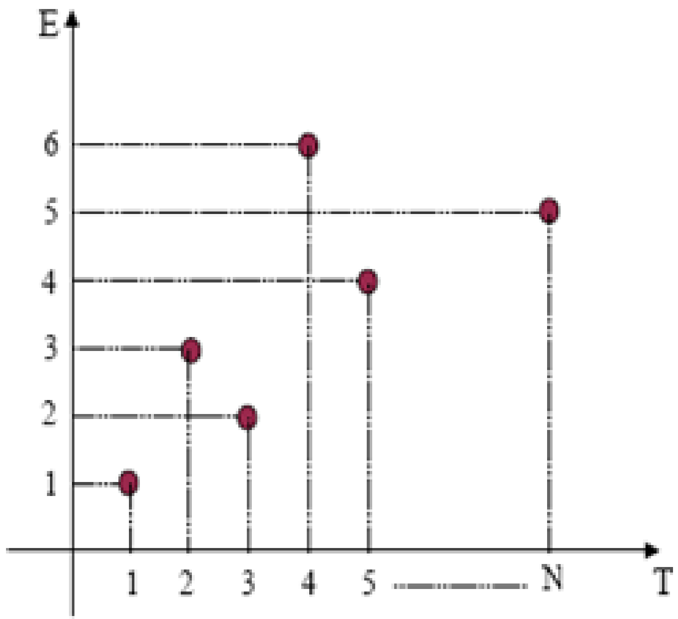
suivent une loi normale

IV. Les chaines de Markov

IV.1 Les chaînes de Markov à temps discret (CMTD)

Soit un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à temps **discret** et espace d'états discret E

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)



Processus stochastique à espace d'états discrets et temps discret

Définition

$\{X_n\}_{n\in N}$ est une CMTD ssi :

$$P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0] = P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire ! De plus :

$$P[X_n=j, X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0] = p_{i_0}^{(0)}.p_{i_0 i_1}.p_{i_1 i_2}\ldots p_{i_{n-1} i_n}$$

Restriction

On ne considère que les CMTD *homogène, ie tq :*

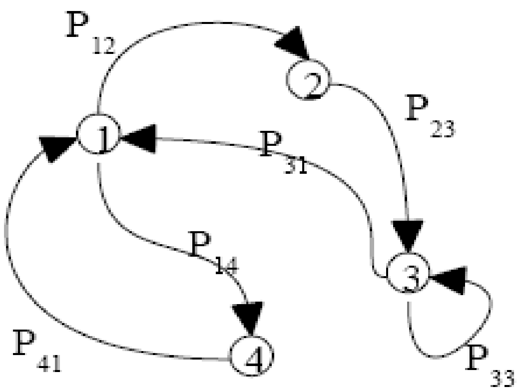
$p_{ij} = P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i] \quad \forall\, n \in N$ (les pij ne dépendent pas de n)

Remarque: $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1$

On note que: $p_{ii} \geq 0$ (il est possible de rester dans un même état i entre 2 étapes consécutives)

Représentation

CMTD = Graphe orienté



$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{cases} p_{23} = p_{41} = 1 \\ p_{12} + p_{14} = 1 \\ p_{33} + p_{31} = 1 \end{cases}$$

Matrice transition

$$P = [p_{ij}]_{i,\, j \in E}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Distribution de l'état initial:**

L'état initial d'un système est défini par le vecteur $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \ldots)$ où :

où : $\pi_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$ = la probabilité que la chaîne se trouve à l'Instant initial à l'état i.

Remarque : (le système est initialement dans l'état j) $\leftrightarrow$ ($\pi_j^{(0)} = 1$ et $\pi_i^{(0)} = 0$ pour tout $i \neq j$)

<u>Exemple :</u> On considère un processeur .

$X_n = 0$ si le processeur est en bon état le jour n

et $X_n = 1$ si le processeur est en panne le jour n

On a: E={0,1} et soit : P=

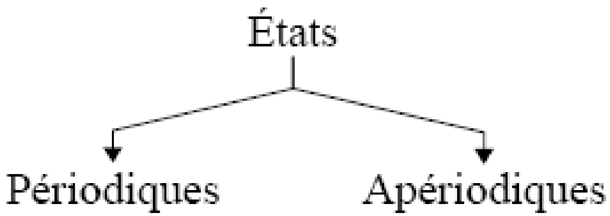
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

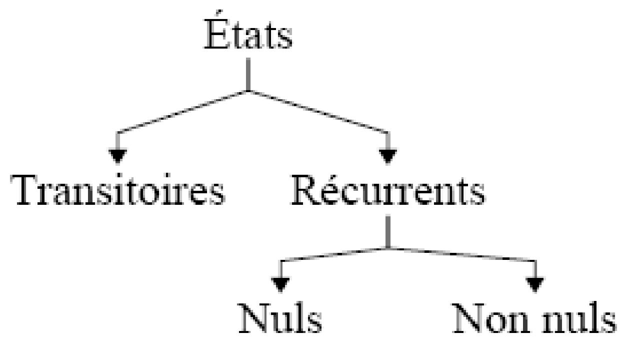
Ainsi: p01 = P[Xn=1|Xn-1=0] = 50%= : probabilitépour que le processeur tombe en panne le jour n sachant qu'il était la veille en bon état.

La distribution de l'état initial est : $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)})=(0,1)$ ou (1,0)

Analyse d’une CMTD

- Régime **transitoire**
- Distribution du temps de séjour dans un état
- Classification des états





- Régime **permanent**

Régime transitoire d'une CMTD

- But : déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilité d'états $\pi_j^{(n)} \stackrel{def}{=} P[X_n=j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ se trouve dans l'état j à la n^{ème} étape du processus :

$$\pi^{(n)} \stackrel{def}{=} [\pi_j^{(n)}]_{j\in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots]$$

- Dépend de :
  - La matrice de transition P
  - Le vecteur de probabilités initiales $\pi^{(0)}$

- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n=j] = \sum_{i\in E} P[X_n=j / X_{n-1}=i] \times P[X_{n-1}=i]$$

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i\in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij}$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$

Exemple (suite)

- Scénario 1: Processeur en bon état à l'instant n=0

  On a: $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}) = (1,0)$

  $\pi^{(1)} = \pi^{(0)} . P = (0.50 \; , \; 0.50)$ $\quad$ $\pi^{(2)} = \pi^{(1)} . P = (0.45 \; , \; 0.55)$

n	0	1	2	3	4	5
$\pi_0^{(n)}$	1	0.5	0.45	0.445	0.4445	0.4445
$\pi_1^{(n)}$	0	0.5	0.55	0.555	0.555	0.555

- Scénario 2: Processeur en panne à l'instant n=0

  On a: $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}) = (0,1)$

  $\pi^{(1)} = \pi^{(0)} . P = (0.40 \; , \; 0.60)$ $\quad$ $\pi^{(2)} = \pi^{(1)} . P = (0.44 \; , \; 0.56)$

n	0	1	2	3	4	5
$\pi_0^{(n)}$	0	0.4	0.44	0.444	0.4444	0.44444
$\pi_1^{(n)}$	1	0.6	0.56	0.556	0.5556	0.55556

Rq: L'évolution de la distribution des états $\pi^{(n)}$ dépend de la distribution initiale $\pi^{(0)}$, et les valeurs des probabilités tendent à se stabiliser.

- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij} \qquad \pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$

- Évolution globale du processus X_n :
  - Soit $p_{ij}^{(m)}$ la probabilité de transition de i vers j en m étapes :

$$p_{ij}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} P[X_{n+m}=j \,/\, X_n=i]$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m-1)} \cdot p_{kj}$$

Temps de séjour

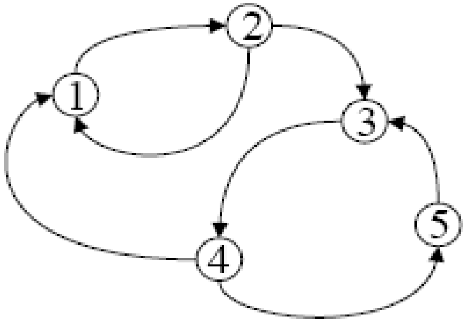
- Distribution du temps de séjour (propriété) :

  Le temps (en nombre d'étapes) passé dans un état d'une chaîne de Markov en temps discret a une distribution géométrique (de paramètre p_{jj}, pour tout état j)

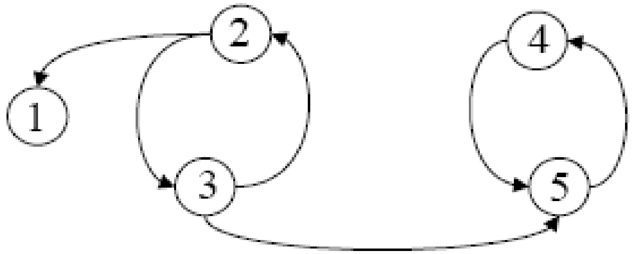
Classification d'une CMTD irréductible

- **Définition** : une CMTD est dite *irréductible* ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes) :

$$\forall i, j \in E, \exists m > 1 \ \ tel\ que\ \ p_{ij}^{(m)} \neq 0$$



- Remarque : tout chaîne non irréductible possède au moins une sous-chaîne absorbante



Classification des états d'une CMTD périodique

- **Définition** : un état j est *périodique* si on peut y revenir qu'après un nombre d'étapes multiple de k > 1

$$\exists k > 1 \text{ tel que } p_{ij}^{(m)} = 0 \text{ pour } m \text{ non multiple de } k.$$

- Remarque : la période de l'état j est alors le plus grand entier k vérifiant cette propriété
- **Définition** : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Une CTMD est dite *périodique* si sa période est supérieure à 1 (et *apériodique* si sa période est égale à 1)
- **Propriété** : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe associé

Classification des états d'une CMTD transitoire

- Soit $f_{jj}^{(n)}$ la probabilité que le premier retour en j ait lieu n étapes après l'avoir quitté.
  - Soit f_{jj}, la probabilité de revenir en j après l'avoir quitté :

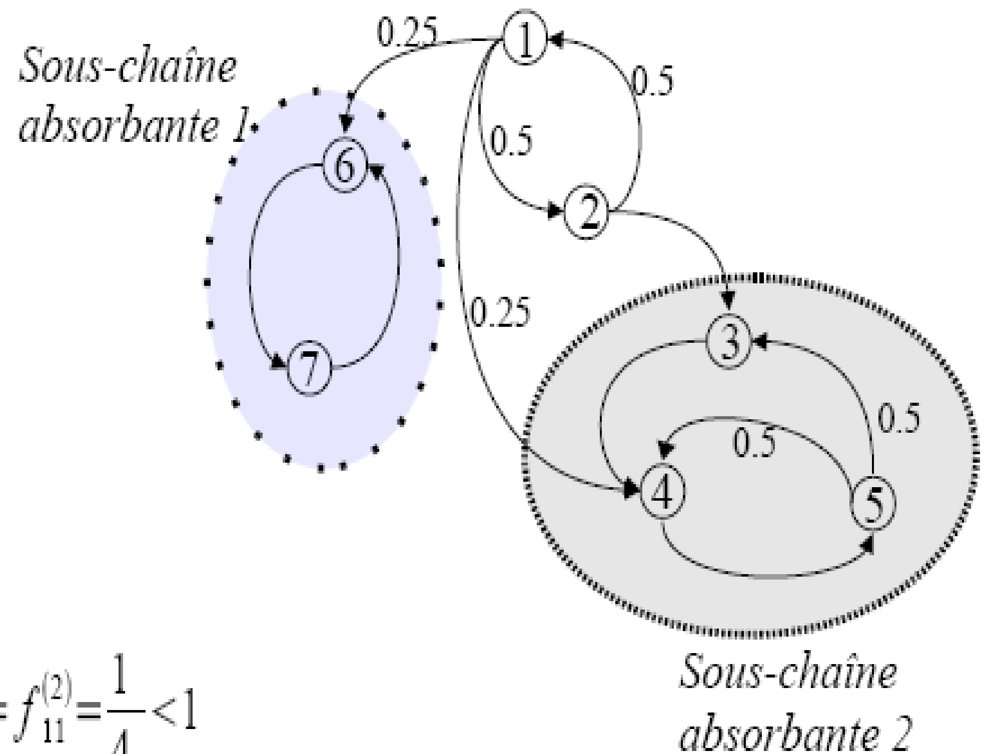
$$f_{jj} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

  - Soit M_j, le *temps* moyen de retour en j : $M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$
- **Définition** : un état j est dit :
  - Transitoire si $f_{jj} < 1$
  - Récurrent si $f_{jj} = 1$; de plus il est :
    - Récurrent nul si le temps moyen de retour est infini : $M_j = \infty$
    - Récurrent non nul si le temps moyen de retour est fini : $M_j < \infty$

- Pour résumer…Il existe trois types d'états:
  - transitoires (on n'y revient pas toujours),
  - récurrents nuls (on y revient toujours, au bout d'un temps moyen infini),
  - récurents positifs (on y revient une infinité de fois, à intervalle de temps finis, en moyenne)

- Ergodique = apériodique et récurrent non nul
- **Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible sont tous de même nature
- **Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible finie sont récurrents non nuls.

Classification d’une CMTD



Etat 1 : TRANSITOIRE car $f_{11} = f_{11}^{(2)} = \frac{1}{4} < 1$

Etat 6 : RECURRENT NON NUL car $f_{66} = f_{66}^{(2)} = 1 \ et\ M_6 = 2 < \infty$

Etat 3 : RECURRENT NON NUL car $f_{33} = 1 \ et\ M_3 = 5$

Autres paramètres de performance

- $f_{ij}^{(n)}$: proba(i → j en exactement n étapes)

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} \qquad\qquad f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$$

- f_{ij} : proba(i → j en n, quelconque, d'étapes)

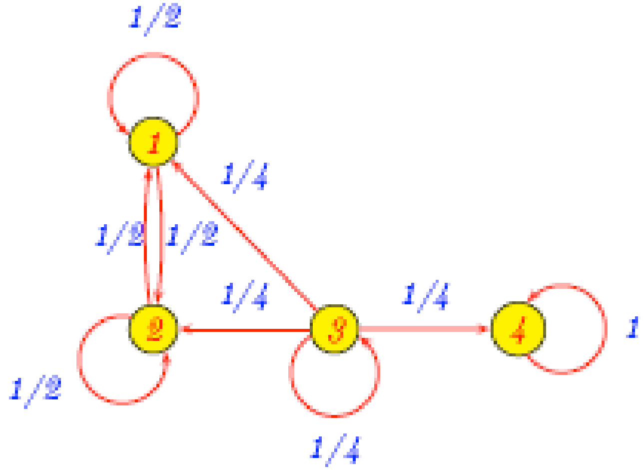
$$f_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$

- Soit R_{ij} le nombre moyen de passages par l'état j sachant que l'on vient de l'état i

$$R_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n Proba \quad (exactement\ n\ passages\ par\ j \,/\, état\ initial = i)$$

$$R_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$$

Exemple 41. *Considérons la chaîne de Markov suivante*



de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette chaîne comporte 3 classes $\{1,2\}$, $\{3\}$ *et* $\{4\}$. *L'état* $\{4\}$ *est absorbant, les classes* $\{1,2\}$ *et* $\{4\}$ *sont récurrentes et la classe* $\{3\}$ *est transiente.*

Régime permanent

- Étude d'un état *stationnaire* (s'il existe !!!)
- i.e. : on s'intéresse à la limite lorsque n $\rightarrow \infty$ du vecteur des probabilités $\pi(n)$
  - Cette limite existe-t'elle ?
  - Comment la calculer (si oui) ?

Comment analyser?

- Facile ! Il *suffit* d'étudier $\lim_{n\to\infty}[\pi^{(n)}=\pi^{(0)}P^{(n)}]$
- Mais comment faire pour calculer $P^{(n)}$?
  - Diagonalisation de *P* en : $P=U^{-1}\cdot D\cdot U$

    D est la matrice des valeurs propres, U base (inversible)

    D'où : $P^{n}=U^{-1}\cdot D^{n}\cdot U$
  - L'existence du régime stationnaire se résume à l'existence et au calcul éventuel de : $\lim_{n\to\infty}\pi^{(0)}U^{-1}\cdot D^{n}\cdot U$

- Intuitivement, on a envie de dire :
  régime permanent $\Rightarrow \pi^{n} = \pi^{n+1}$
  Donc, il faut résoudre $\pi = \pi P$
- Mais quelles sont les conditions pour que ça marche ?
  - Chaîne irréductible
  - CMTD apériodique
  - États récurrents non nuls

Régime permanent : propriétés

- Dans une CMTD irréductible et apériodique le vecteur π des probabilités limites $\pi = \lim_{n \to \infty} \pi^{(n)}$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi^{(0)}$
  - Soit tous les états sont transitoires ou récurrents nuls et $\pi_j=0$ pour tout $j \in E$
  - Soit tous les états sont récurrents non nuls et les π_j sont solutions du système :

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in E$$

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1$$

Quelques remarques:

- $$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \ \forall j \in E \ \Leftrightarrow \ \pi = \pi P$$

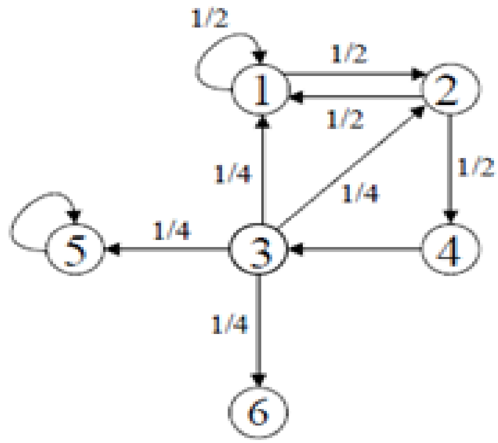
- $$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \ \Leftrightarrow \ \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in E} \pi_i p_{ij} \ \ car \sum_{i \in E} p_{ji} = 1$$
  - $\pi_j p_{ji}$ = nb moyen de transitions de j vers i par unité de temps, donc la somme (Σ) est le flux moyen de sortie de l'état j
  - Idem pour $\pi_i p_{ij}$ qui le flux moyen d'entrée dans l'état j
  - Donc en régime permanent, on peut écrire :

    Pour tout état j, flux sortant de j = flux entrant dans j

- Si les probabilités stationnaires existent, alors : $\pi_i = \dfrac{1}{M_i}$

Exercice d’application :

- On considère un système pouvant être dans un des 6 états {1, 2, …, 6] d’une CMTD représentée par le graphe :



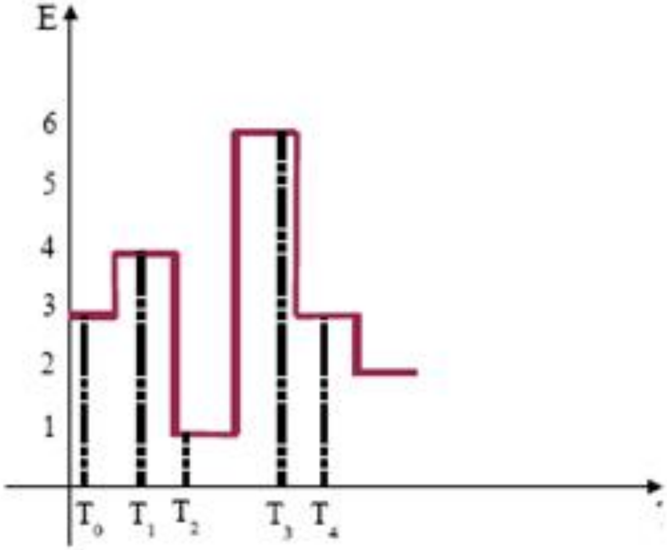
CMTD homogène

- Imaginons que le système est initialement dans l’état 2.
  - Quelle est la probabilité qu’il y soit à nouveau après 4 étapes ?
  - Combien de fois passera-t-il en moyenne par l’état 3 avant d’atteindre l’état 5 ou 6 ?
  - Quelle est la probabilité qu’il atteigne l’état 6 ?
  - Combien en moyenne changera-t-il d’états avant de revenir dans l’état 2 ?

CHAINES DE MARKOV A TEMPS CONTINU (CMTC)

Soit un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ à temps **continu** et espace d'états discret...

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)



*Processus stochastique à espace d'états discrets et temps **continu***

Le processus $\{X(t)\}$, $t \in R_+$ vérifie la propriété de Markov.

- *Définition*

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une CMTC ssi :

$$P[X(t_n)=j \,/\, X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \ldots , X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j \,/\, X(t_{n-1})=i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire !

- *Restriction*

On ne considère que les CMTC *homogène*, c'est-à-dire celles dont les probabilités p_{ij} sont indépendantes des instants d'observations, soit :

$$p_{ij}(t) \stackrel{def}{=} P[X(t+s) = j \,/\, X(s)=i] \quad \forall\, s \geq 0$$

- On décrit l'évolution d'une CMTC à l'aide des taux de transition instantanés

  - Taux de transition de l'état i vers l'état j: $\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} [P_{ii}(t, t+h) / h]$

  où: $\mu_{ij}(t).h + o(h)$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j dans (t, t+h), et o(h) : infiniment petit: $(o(h) / h) \to 0$ quand $h \to 0$

  - Si la CM est homogène:

    $P_{ij}(t, t') = P_{ij}(t' - t)$

    $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}$ (les taux de transition sont indépendants du temps)

- La classification des états s'effectue de manière similaire à celle d'une CMTD

- Soient $\pi_j(t)=P\{X(t)=j\}$, $j\epsilon E$ les probabilités d'état de la chaîne.
  Elles sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\boxed{d\,\pi_j(t)/dt = -\,\pi_j(t) \sum_{i\neq j} \mu_{ji}(t) + \sum_{i\neq j} \mu_{ij}(t)\,\pi_i(t),\ \ j\epsilon E} \qquad (*)$$

- Soit $\pi(t)=(\pi_1(t), \pi_2(t),\ldots)$ le vecteur des probabilités d'états, le système (*) peut être réécrit sous forme matricielle:

$$\boxed{d\pi(t)/dt = \pi(t)\,\Lambda(t)}$$

- La solution formelle s'écrit :

$$\boxed{\pi(t)= \pi(0)\, e^{\int_0^t \Lambda(u)du}}$$

  ou bien dans le cas homogène:

$$\boxed{\pi(t)= \pi(0)\, e^{\Lambda t}}$$

- Si le régime stationnaire existe, alors:
  le vecteur $\pi = \lim_{t\to\alpha} \pi(t)$ est solution de l'équation : $\boxed{\pi\,\Lambda=0}$

- La matrice Λ est sous la forme:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\sum_{j\neq 1} \mu_{1j} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1j} & \cdots \\ \mu_{21} & -\sum_{j\neq 2} \mu_{2j} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mu_{i1} & & & \mu_{ij} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

- **Remarque:**

Ne pas confondre la matrice Λ avec la matrice des probabilités de transition d'une chaîne discrète.

Λ n'est pas stochastique: la somme des éléments d'une ligne est nulle

- **Propriété :**

Une CMTC finie et irréductible est ergodique. Le vecteur des distributions stationnaires π existe alors et est unique; on peut l'obtenir en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi \Lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \pi i = 1 \end{cases}$$

- **Exemple :**

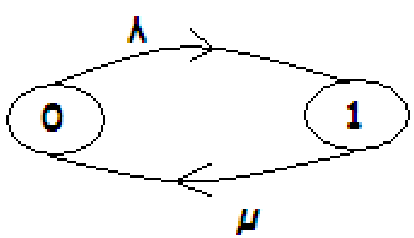
Considérons un système (processeur) pouvant se trouver dans un des 2états possibles:

$X(t) = 0$ si le processeur est en bon état à l'instant t

$X(t) = 1$ si le processeur est en panne à l'instant t

On suppose que la durée de bon fonctionnement jusqu'à la défaillance est une v.a X qui suit une loi exp de paramètre λ; la durée de réparation est aussi une v.a Y de loi exp de paramètre μ.

Le graphe des taux de transitions ainsi que la matrice infinitésimale sont:



$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

- Cette CMTC est finie et irréductible, elle est donc ergodique.
- Le vecteur de distributions stationnaires π est tq:

$$\begin{cases} \pi \Lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \pi i = 1 \end{cases}$$

$$\pi \Lambda = 0 \Leftrightarrow [\pi_0, \pi_1]\Lambda = 0 \Leftrightarrow [-\lambda \pi_0 + \mu \pi_1, \lambda \pi_0 - \mu \pi_1] = 0.$$

Donc :

$$\begin{cases} [-\lambda \pi_0 + \mu \pi_1, \lambda \pi_0 - \mu \pi_1] = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_0 - \mu \pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$\pi_0 = \mu/\mu+\lambda.$ $\pi_1 = \lambda/\mu+\lambda.$

Donc

$$\pi = [\pi_0, \pi_1] = [\mu/\mu+\lambda, \lambda/\mu+\lambda]$$

- **Equation d'états :**
  A l'état stationnaire, pour tout état i, le flux sortant de i est égal au flux entrant dans i.

Dans l'exemple précédent:

Le flux sortant de l'état 1 est : $\mu \pi_1$

Le flux sortant de l'état 0 est : $\lambda \pi_0$

Le flux entrant dans l'état 1 est : $\lambda \pi_0$

Le flux entrant dans l'état 0 est : $\mu \pi_1$

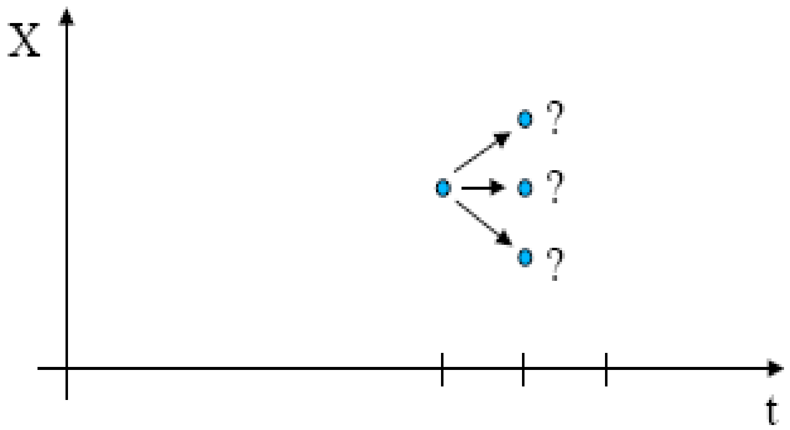
Selon l'équation d'état : à l'état stationnaire, pour tout état i, le flux sortant de i égal le flux entrant dans i. Donc :

flux sortant de l'état 1 = flux entrant dans l'état 1 ⇔ $\boldsymbol{\mu \pi_1 = \lambda \pi_0}$

flux sortant de l'état 0 = flux entrant dans l'état 0 ⇔ $\boldsymbol{\lambda \pi_0 = \mu \pi_1}$

PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

- Cas particulier des processus Markoviens tels que $\{X_n = i\}$
  - Stable => $X_{n+1} = i$
  - Mort => $X_{n+1} = i-1$
  - Naissance => $X_{n+1} = i+1$

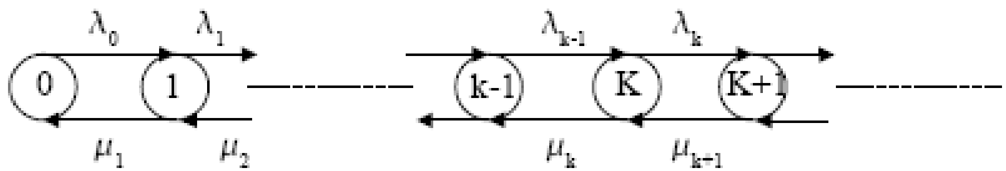


PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT (TEMPS CONTINU)

- Dans un état E_k et dans un *petit* intervalle de temps Δt seuls deux événements peuvent se produire :
  - Naissance : probabilité = $\lambda_k \cdot \Delta t$
  - Mort (si k>0) : probabilité = $\mu_k \cdot \Delta t$
  - ... et rien se produire avec une proba = $(1-(\lambda_k+\mu_k)) \cdot \Delta t$
- La matrice des taux de transition est définie par :
  - $$\begin{aligned} q_{kk} &= (\lambda_k + \mu_k) \\ q_{kk+1} &= \lambda_k \\ q_{kk-1} &= \mu_k \;\; pour\; k>0 \\ q_{kj} &= 0 \;\; sinon \end{aligned}$$

ETATS STATIONNAIRES D’UN PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

- Représentation graphique de la chaîne de Markov



- Équations d'états d'équilibre :

$$\boxed{\textit{Pour tout état } j\textit{, flux sortant de } j = \textit{flux entrant dans } j}$$

$$\mu_1\, p(1) = \lambda_0\, p(0)$$

$$(\lambda_k + \mu_k)\, p(k) = \lambda_{k-1}\, p(k-1) + \mu_{k+1}\, p(k+1),\ \ pour\ \ k > 1$$

$$\vdots$$

$$soit\ \ p(k+1) = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}\, p(k)$$

$$donc\ \ p(k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\, p(0)$$

- Condition de stabilité (ergodicité)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$$

- Une condition suffisante : à partir d'un certain état le rapport naissance / mort reste inférieur à un seuil < 1

$$\exists\ \rho<1,\ \ k_{0,}\ \ tels\,que\ k>k_0 \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leqslant \rho$$

- La formule générale : $$p(k) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}{1+\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

- Processus de Naissance Pure :
  - Pas de mort : $\mu_k=0$
  - Taux de naissance indépendant de la population : $\lambda_k=\lambda$
  - Il s'agit de... la loi de Poisson défini par : $p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

- Processus de Mort Pure :
  - Pas de naissance : $\lambda_k=0$
  - Taux de mortalité indépendant de la population : $\mu_k=\mu$
  - Il s'agit de... la loi exponentielle : $p_k(t)=e^{-\mu t}$