Epreuve de MEPS
Rattrapage

Exercice 1: Trois operateurs de telephonie mobile (D,N,M) sont en concurrence sur le marché. L operateur D lance une campagne de publicité qui dure 15 jours afin de tenter d'accroître sa part de marché. Une enquête a été réalisée le 31 janvier sur un même échantillon de 1000 clients potentiels. Il s'avère que 500 personnes restent fideles a l operateur D, 200 optent pour le produit N, et 300 pour M. Parmi 500 clients du produit D (au 15 janvier), 450 continuent de l'acheter ; 40 optent pour N et seulement 10 basculent sur M. Parmi 200 clients du produit N, 60 continuent d'utiliser N et 80 basculent sur D. Parmi un échantillon de 300 clients du produit M, 60 continuent d'utiliser M ; et 210% optent pour D , et seulement 30 choisissent N.

(1) Montrer que l'évolution du marché peut être décrite par une chaîne de Markov dont on déterminera la distribution initiale et la matrice des probabilités de transition (on admettra que les résultats de l'enquête sont toujours les mêmes ; par exemple, l'enquête du 15 février donne des résultats identiques à celle au 31 janvier, etc…(2) Déterminer l'état du marché au 31 janvier. (3) Quel serait cet état au bout d'une seconde campagne de publicité de 15 jours ? (5) Y a t-il une limite à l'état du marché au bout d'un grand nombre de campagnes de publicité ? (6) Quelle est la durée de vie moyenne du produit D sur le marché ?

Solution 8 points

Soit $\hat{\pi}_i(0)$ l'estimation de la vraie distribution initiale inconnue avant le sondage . On a $\hat{\pi}_1(0) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} = 0.5$; $\hat{\pi}_2(0) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0.2$; $\hat{\pi}_3(0) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} = 0.3$. D'où l'estimation du vecteur de la demande initiale $\hat{\pi}(0) = (0.5, 0.2, 0.3)$.

Pour que ce soit une chaîne de Markov, il faut supposer que l'évolution de la clientèle ne dépend que de l'état actuel du marché et pas du passé. L'estimation de la matrice des probabilités de transition s'effectue de la même manière que précédemment . L'estimation de p_{ij} vaut $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$ où n_{ij} est le nombre d'abonnés à l'opérateur i qui opte le mois suivant pour l'opérateur j. Par exemple, $\hat{p}_{11} = \frac{450}{500} = 0.9$, $\hat{p}_{21} = \frac{80}{200} = 0.4$, etc…Soit,

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.08 & 0.02 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.0064 & 0.0004 \\ 0.16 & 0.09 & 0.09 \\ 0.49 & 0.01 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Au 31 janvier , l'état du marché est déterminé par $\pi(1) = \pi(0)P = (0.74, 0.13, 0.13)$. Au bout de cette première période la majorité, soit 74% sont abonnés à D. La chaîne est irréductible, apériodique, finie, elle est automatiquement récurrente positive, donc ergodique. La distribution stationnaire unique vaut $\pi = (0.835962, 0.104101, 0.599369)$ ou bien environ $\pi = (0.84, 0.10, 0.6)$.

N.B. Bien entendu ses chiffres sont fictifs.

Exercice 2. **12 points**. On considère un système de files d' attente M/M/1 de taux d' arrivée α=1 et de taux de service μ=4. Evaluer les principales mesures de performance.

Afin d' améliorer le service on hésite entre les deux variantes

(i) Utiliser 4 serveurs indépendants, chacun avec sa propre file.
(ii) Utiliser un serveur plus puissant de taux de service 4μ.

Quelle est la meilleure variante ?
Solution.
Variante (i) 4 files M/M/1 avec α=1 μ=4 ;
Pour chaque file on a ρ=1/4
P0=0.75, p1=0.1875, p2=0.04,p3=0.01
Nombre moyen de clients dans un système =1/3, et donc pour l'ensemble N=4/3
Nombre moyen de client dans chaque file Q=1/12 et donc pour l'ensemble 1/3
Temps moyen d'attente dans chaque file W=1/12 (même chose pour l'ensemble)
Temps moyen de séjour dans chaque file V=1/3 (même chose pour l'ensemble)

Variante (ii) 1 seule file M/M/1 avec α=1 μ=16;
Pour chaque file on a ρ=1/16
P0=0.9375, p1=0.05 p2=0.003

Nombre moyen de clients dans un système =1/15,
Nombre moyen de client dans chaque file Q=1/240
Temps moyen d'attente dans chaque file W=1/240
Temps moyen de séjour dans chaque file V=1/15

La seconde variante est la meilleure du point de vue du temps d'attente (séjour), et nombre de clients dans la file (le système) ;