牛顿插值法的多种讲解思路分析研究

赖志柱，张云艳

（贵州工程应用技术学院理学院，贵州 毕节）

摘 要:考察国内外数值分析课程中牛顿插值法的内容,归纳得出三种常见的讲解思路,详细叙述牛顿插值法三种讲解思路,并分析研究三种授课方式对学生的接受及后续课程内容的讲解的影响,最后给出一些有益的建议。

关键词:数值分析;Newton插值;差商

中图分类号:O241.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-7059(2015)02-0144-04

一、引 言

数值分析,也称计算方法,不仅是大学数学系数学与应用数学专业、信息与计算科学专业的一门主要专业基础课程,而且很多理工科专业也开设了该门课程,它主要研究求解数学模型的算法及有关理论,是求解数学模型的不可缺少的途径和手段,它伴随计算机的发展而发展。插值法是数值分析中最基本的方法之一,其出发点是根据离散数据构造一个比较简单、易于计算的函数代替原有的较复杂函数。在已知数据点较少时,插值技术在工程实践和科学实验中有着广泛而又十分重要的应用,如建筑工程的外观设计、物理实验中的数据分析与处理、地理信息数据的处理、根据离散数据绘制光滑曲线、图形放大算法等。

一般教科书中插值问题的提法是:设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,且已知它在 $n+1$ 个互异点 x_j 上的函数值 $y_j=f(x_j)$ ($j=0,1,\cdots,n$),若存在一个次数不超过 n 次的多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\ ,\ a_i\in R,i=0,1,\cdots,n \qquad (1)$$

满足条件

$$p_n(x_j)=f(x_j)\ ,\ j=0,1,\cdots,n \qquad (2)$$

则称 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次代数插值多项式,此时 $p_n(x)$ 称为插值函数, $f(x)$ 称为被插值函数,相应的插值问题称为 n 次代数插值问题,求插值函数 $p_n(x)$ 的方法称为插值法,点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节

收稿日期: 2015-03-11
基金项目: 贵州省教育厅自然科学研究基金项目"非线性人口系统理论及其应用"研究成果之一,项目编号:黔教科2010072;贵州省科技厅、毕节市科技局、毕节学院科技联合基金项目"对两类椭圆方程解的理论研究" 研究成果之一,项目编号:黔科合J字 LKB[2013]24号;贵州省科技厅、毕节市科技局、贵州工程应用技术学院科技联合基金项目"车辆调度运输多目标模型及智能算法优化研究" 研究成果之一,项目编号:黔科合LH字[2014]7532号;毕节学院教学研究与改革课题"基于问题驱动及MATLAB的《数值分析》教学方式探究"成果之一,项目编号:JG2013042。
作者简介: 赖志柱(1980-),男,江西赣州人,贵州工程应用技术学院理学院副教授,硕士。研究方向:智能算法及其应用、多式联运、数值计算方法。

点，(2)式称为插值条件，$[a,b]$称为插值区间，点x称为插值点。

由待定系数法、Vandermonde行列式以及Cramer法则可得

定理1 满足插值条件(2)的n次代数插值问题的解是存在且唯一的。

通常，数值分析教科书中最先提出的插值法一般为拉格朗日(Lagrange)插值，该插值多项式形式上具有对称性，便于记忆和应用编制程序，但其基函数依赖于全部插值节点，当节点增加或减少时，必须重新计算，造成一定的计算浪费，而牛顿(Newton)插值法避免了这一不足之处。纵观国内外数值分析教科书，讲解Newton插值法大致上可以分为三种思路，每种思路各有千秋，但结合该门课程前后联系，则三种讲解思路在效果和后续内容的处理上有较大差别。本文主要考察Newton插值法各种讲解思路的过程以及对后续相关内容讲解的影响，通过对比给出一些有益的建议。

为行文方便，下文用$L_n(x)$表示n次拉格朗日插值多项式，而用$N_n(x)$表示n次牛顿插值多项

二、三种讲解思路的过程分析

思路一：利用插值多项式的逐次生成方式引入Newton插值法。[1][2]

通过设计插值多项式的逐次生成方式，并归纳相邻次数间插值多项式的关系，通过引入差商的概念，从而引入Newton插值法。具体过程如下：

拉格朗日插值零次式为$L_0(x)=y_0$，拉格朗日插值一次式为$L_1(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$。注意到其几何意义为过两点$(x_i,y_i)(i=0,1)$的直线，从而可将其改写为$L_1(x)=y_0+(y_1-y_0)(x-x_0)/(x_1-x_0)$。一般地，$n$次拉格朗日插值多项式可以表示为

$$L_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其系数的选取应满足插值条件(2)，即有方程组

$$\begin{cases} y_0=L_0(x)=c_0 \\ y_1=L_1(x)=c_0+c_1(x-x_0) \\ y_2=L_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ \cdots\cdots \\ y_n=L_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{cases} \tag{3}$$

不难解得$c_0=y_0=f(x_0)$，$c_1=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$。引入一阶差商的概念，则有$c_1=f[x_0,x_1]$，代入方程组(3)中第三式，得

$$c_2=\frac{y_2-y_0-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{y_2-y_1+y_1-y_0-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{y_2-y_1+f[x_0,x_1](x_1-x_0)-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{y_2-y_1-f[x_0,x_1](x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

引入二阶差商的概念，从而有$c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$。同理，当引入高阶差商的概念并依次代入可得

$$c_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_i] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

这样就得到了牛顿插值多项式

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \quad (4)$$

另外，上面讲解过程中得出了$c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$后，也可以采用“猜测—证明”的思路来引入牛顿插值多项式。

思路二：考察L_{i-1}与L_i的关系得到Newton插值法。[3]

设L_i为函数$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_i$上的i次拉格朗日插值多项式。特别地，$L_0(x) = f(x_0)$为零次多项式。考虑L_{i-1}与L_i之间的关系，利用插值条件(2)有$L_i(x_j) - L_{i-1}(x_j) = 0$，$j = 0, 1, \cdots, i-1$，从而得到$L_i(x) - L_{i-1}(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})$，其中$A_i$为待定系数。由于$L_i(x)$为$i$次多项式，而$L_{i-1}(x)$为$i-1$次多项式，故$A_i$即为多项式$L_i(x)$最高次项$x^i$的系数。由拉格朗日插值多项式可得$A_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{y_j}{\omega'_{i+1}(x_j)}$，其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$，$\omega'_{i+1}(x_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i}(x_j - x_k)$。

利用恒等式$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{i=1}^{n}[L_i(x) - L_{i-1}(x)]$，可得拉格朗日插值多项式的另一种表达形式

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{i} \frac{y_j}{\omega'_{i+1}(x_j)}\right](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1}) \quad (5)$$

此时若记$f[x_0] = f(x_0)$，$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \sum_{j=0}^{i} \frac{y_j}{\omega'_{i+1}(x_j)}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则得到形如(4)式的牛顿插值多项式。

思路三：直接引入差商概念而得到Newton插值法。[4]

该思路首先直接引入差商的概念，再证明差商的一些常用的性质，最后将差商符号引入拉格朗日插值多项式变形中从而得到牛顿插值多项式。这最后一步可以类似于思路一和思路二进行推导，也可以直接从差商可表示成$f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$的性质直接代入(5)式得到。

三、 三种讲解思路对学生接受知识及对讲解后续相关内容的影响

上述几种讲解Newton插值法的过程各有千秋，但针对不同高校的不同专业的学生而言，则效果大不相同。

讲解思路一通过讲解插值多项式的逐次生成再导入Newton插值法，具有带着问题探究的意味，学生更能感受到自然和数学统一之美。该讲解方法对于后续的数值微分、数值积分以及常微分方程初值问题的数值解法的讲解具有明显的好处，学生可以在后续内容的学习中轻松接受新知识。

讲解思路二开始就考虑相邻次数的插值多项式的关系，对于数学功底稍差的学生来说新思路不易

发现、不易接受，而且不好理解。该讲解方法对于后续方法及其变形之间的关系的解说具有一定好处，例如数值积分中代数精度的确定，对于一般的机械求解公式而言，若用Newton–Cotes公式来确定求积系数，则其代数精度最多达到$n+1$，而不可能达到更高的代数精度；为达到更高的精度，可以引导学生回忆该讲解思路二，从而很自然地引出高斯求积方法及其实现。

讲解思路三直接引入差商概念并通过拉格朗日插值多项式变形而得到牛顿插值多项式，虽然遵循了数学概念的连贯性及数学知识讲授的连贯性，但对基础较差的学生来讲就好像变戏法，有种天上掉下个林妹妹的感觉。该方法对于基础较好的学生学习可以提高他们的对数学概念联系的把握，尤其是国内一些重点大学的学生。

四、小 结

通过对比数值分析中牛顿插值法的讲解思路，数值分析任课教师可以根据所在学校及学生的基础，自由选择一种适合的讲解思路，并可根据具体情况作适当调整，以提高教学效果。

参考文献：

[1]李庆扬,王能超,易大义.数值分析(第五版) [M].北京:清华大学出版社,2008,12.

[2]伯　登.数值分析（第七版，影印版）[M].北京：高等教育出版社，2001（2010重印）.

[3]关　治,陆金甫.数值分析基础M].北京：高等教育出版社,1998,（2008重印）.

[4]张池平,施云慧.计算方法[M].北京：科学出版社,2002:125-128.

On Several Teaching Methods of Newton Interpolation

LAI Zhi-zhu, ZHANG Yun-yan

(School of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie, Guizhou551700, China;)

Abstract: To investigate Newton Interpolation in numerical analysis, we can generalize three teaching methods. Then we describe the teaching process of Newton Interpolation in detail, and comparing the influence on students of different level and follow-up course content, at last some useful suggestions are giving.

Key words: Numerical Analysis; Newton Interpolation; Divided Difference

（责 编：彭麟淋　责 校：张永光）