基于 M/G/1 和 M/G/K 排队模型的新食堂黄焖鸡排队研究

新食堂位于北京邮电大学学院内东北侧，从新食堂二楼，每天都会有大量老师和学生用餐。尤其是每天中午十一点半以及下午五点半左右，都会出现食堂点餐的高峰期。尤其是中午时，人群大量到达食堂并点餐，纵使新食堂二楼有大量的窗口和菜品，但是在这种全员吃饭的高峰期下依然会有严重的排队现象。我们研究其中的黄焖鸡窗口的排队现象，该窗口比较特殊，菜品只有一种，所以服务时间确定，并非是负指数分布。而且虽然窗口只有一个，但是该窗口具有多个灶台可以同时工作。

本文就本现象进行数学建模，并使用课本中的 M/G/1 模型对单灶台问题进行求解。随后通过查找相关文献[1]得知的 M/G/K 模型对所提出多灶台问题进行求解。

1、人群达到的分布

本文研究中午高峰期这一时段的排队情况，那么我们假设在所研究时段内人群到达的分布是平稳的，且到达分布符合泊松分布(Poisson)，即一定时间间隔内到达窗口的人数分布符合泊松流。Δt时间间隔内到达黄焖鸡窗口的人数为n的概率为：

$$p(n) = \frac{(\lambda\Delta t)^n e^{-\lambda_\Delta t}}{n!}$$

式中：λ的表示单位时间平均到达率(人／s).

2、服务时间分布

由于该窗口只服务黄焖鸡这一种菜品，所以每个灶台从顾客点餐到完成服务所需时间相同。则其服务时间分布可以表示为：

$$\mathrm{b}(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$$

其中，τ_0为每个灶台做一顿黄焖鸡米饭的服务时间。

3、求解过程

3.1 首先考虑一个灶台的情况

3.1.1 队伍平均长度

由于只有一个灶台，且顾客流为泊松流，然而服务时间分布不是负指数分布，则该问题可被分为 M|G|1 问题，进一步的，由于该灶台的服务时间固定，该问题可被进一步分为 M|D|1 问题。

根据修订版课本第 43 页到第 45 页的推导，队列的平均长度$\bar{k}$在 M|G|1 问题中有以下闭式解：

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k d_k = \left[\boldsymbol{Q}^{'}(z)\right]_{z=1}$$
$$= \rho + \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)}$$

$Q(z)$为系统方程求解过程中的母函数。

其中，ρ为排队强度，由于一个灶台单位时间内可以制作 $1/\tau_0$份黄焖鸡，所以ρ可以被表示为：

$$\rho = \lambda\tau_0$$

m_r为服务时间的二阶矩，此公式中的m_2为服务时间的二阶矩，所以m_2可以被表示为：

$$m_2 = E(\tau^2) = {\tau_0}^2$$

最终可以得到平均队长应该为：

$$\bar{k} = \frac{2\lambda\tau_0 - (\lambda\tau_0)^2}{2 - 2\lambda\tau_0}$$

其实根据课本 46 页的 M|D|1 模型中的二级结论也能得到同样的结果：

$$\bar{k} = \rho + \frac{\lambda^2 b^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)} = \frac{2\lambda\tau_0 - (\lambda\tau_0)^2}{2 - 2\lambda\tau_0}$$

3.1.2 队伍平均等待时间

首先将改模型考虑为一个 M|G|1 模型，则平均等待时间$\bar{w}$可以被表示为：

$$\bar{w} = -G^{'}(0) = \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}$$

将$\rho = \lambda\tau_0$以及$m_2 = E(\tau^2) = {\tau_0}^2$带入可得最终的队伍等待时长：

$$\bar{w} = \frac{\lambda\tau_0}{2(1-\lambda\tau_0)}\tau_0$$

同理，也可以直接使用 M|D|1 模型中的二级结论直接求解：

$$\bar{w} = \frac{\lambda b^2}{2(1-\rho)} = \frac{b}{2}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\bar{\tau}}{2}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda\tau_0}{2(1-\lambda\tau_0)}\tau_0$$

3.2 如果有多个灶台

以上是比较理想的情况，即商家只有一个灶台，这样可以直接使用 M|G|1 模型求解，但是实际情况是商家为了提高服务效率设置了多个灶台，我们这里设商家一共有 K 个灶台，则该问题转化为一个 M|G|K 问题，该模型在课本上未找到对应的求解过程和二级结论。于是通过在互联网上查阅相关资料，找到了 M|G|K 模型的平均队列长度和平均等待时长公式[2]。

3.1.1 队伍平均长度

首先考虑等效 MMK 模型下平均队伍长度的计算公式如下：

$$L_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}} = \frac{(k\rho)^k \rho}{k!\,(1-\rho)^2} P_0$$

其中：

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{k!} \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right]^{-1}$$

注意到$\mu = 1/\tau_0$，$\rho = \lambda/(k\mu)$。

根据维基百科中对于 MGK 的描述：

$$E\left[W^{\mathrm{M/G/}k}\right] = \frac{C^2+1}{2} \mathbb{E}\left[W^{\mathrm{M/M/}c}\right]$$

$$E\left[L^{\mathrm{M/G/}k}\right] = \frac{C^2+1}{2} \mathbb{E}\left[L^{\mathrm{M/M/}c}\right]$$

C为服务时间的标准差，在 MGK 系统中$C = 0$

则：

$$L_{\mathrm{q}}^{\mathrm{G}} = \frac{1}{2} L_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}}$$

3.2.2 队伍平均等待时间

首先考虑等效 MMK 模型下队伍平均等待时间的计算公式：

$$W_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}} = \frac{(k\rho)^k \rho}{k!\,(1-\rho)^2 \lambda} P_0$$

同理得：

$$W_{\mathrm{q}}^{\mathrm{G}} = \frac{1}{2} W_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}}$$

4、仿真实验

仿真部分采用 python 代码，并结合 jupyter notebook 进行数据可视化，仿真代码以及结论请见附录的 pdf。

参考文献

[1] Harutoshi YAMADA, Hiroyuki OUCHI. Applicability of AHS Service for Traffic Congestion in Sag Sections

[2] 张维戈, 陈连福, 黄彧,等. M/G/k 排队模型在电动出租汽车充电站排队系统中的应用[J]. 电网技术, 2015, 39(003):724-729.