基于M/G/1和M/G/K排队模型的新食堂黄焖鸡排队研究

新食堂位于北京邮电大学学院内东北侧，从新食堂二楼，每天都会有大量老师和学生用餐。尤其是每天中午十一点半以及下午五点半左右，都会出现食堂点餐的高峰期。尤其是中午时，人群大量到达食堂并点餐，纵使新食堂二楼有大量的窗口和菜品，但是在这种全员吃饭的高峰期下依然会有严重的排队现象。我们研究其中的黄焖鸡窗口的排队现象，该窗口比较特殊，菜品只有一种，所以服务时间确定，并非是负指数分布。而且虽然窗口只有一个，但是该窗口具有多个灶台可以同时工作。

本文就本现象进行数学建模，并使用课本中的M/G/1模型对单灶台问题进行求解。随后通过查找相关文献[1]得知的M/G/K模型对所提出多灶台问题进行求解。

## 人群达到的分布

本文研究中午高峰期这一时段的排队情况，那么我们假设在所研究时段内人群到达的分布是平稳的，且到达分布符合泊松分布(Poisson)，即一定时间间隔内到达窗口的人数分布符合泊松流。时间间隔内到达黄焖鸡窗口的人数为的概率为：

式中：的表示单位时间平均到达率(人／s)．

## 2、服务时间分布

由于该窗口只服务黄焖鸡这一种菜品，所以每个灶台从顾客点餐到完成服务所需时间相同。则其服务时间分布可以表示为：

其中，为每个灶台做一顿黄焖鸡米饭的服务时间。

## 求解过程

### 3.1 首先考虑一个灶台的情况

#### 3.1.1 队伍平均长度

由于只有一个灶台，且顾客流为泊松流，然而服务时间分布不是负指数分布，则该问题可被分为M|G|1问题，进一步的，由于该灶台的服务时间固定，该问题可被进一步分为M|D|1问题。

根据修订版课本第43页到第45页的推导，队列的平均长度在M|G|1问题中有以下闭式解：

为系统方程求解过程中的母函数。

其中，为排队强度，由于一个灶台单位时间内可以制作份黄焖鸡，所以可以被表示为：

为服务时间的二阶矩，此公式中的为服务时间的二阶矩，所以可以被表示为：

最终可以得到平均队长应该为：

其实根据课本46页的M|D|1模型中的二级结论也能得到同样的结果：

#### 3.1.2 队伍平均等待时间

首先将改模型考虑为一个M|G|1模型，则平均等待时间可以被表示为：

将以及带入可得最终的队伍等待时长：

同理，也可以直接使用M|D|1模型中的二级结论直接求解：

### 3.2 如果有多个灶台

以上是比较理想的情况，即商家只有一个灶台，这样可以直接使用M|G|1模型求解，但是实际情况是商家为了提高服务效率设置了多个灶台，我们这里设商家一共有个灶台，则该问题转化为一个M|G|K问题，该模型在课本上未找到对应的求解过程和二级结论。于是通过在互联网上查阅相关资料，找到了M|G|K模型的平均队列长度和平均等待时长公式[2]。

#### 3.1.1 队伍平均长度

首先考虑等效MMK模型下平均队伍长度的计算公式如下：

其中：

注意到，。

根据维基百科中对于MGK的描述：

为服务时间的标准差，在MGK系统中

则：

#### 3.2.2 队伍平均等待时间

首先考虑等效MMK模型下队伍平均等待时间的计算公式：

同理得：

## 4、仿真实验

仿真部分采用python代码，并结合jupyter notebook进行数据可视化，仿真代码以及结论请见附录的pdf。

## 参考文献

1. Harutoshi YAMADA, Hiroyuki OUCHI. Applicability of AHS Service for Traffic Congestion in Sag Sections
2. 张维戈, 陈连福, 黄彧,等. M/G/k排队模型在电动出租汽车充电站排队系统中的应用[J]. 电网技术, 2015, 39(003):724-729.