

LELEC1101 - Projet d'électricité

Problème 1 - Séries de Fourier, transformation non-linéaire

Groupe 3

DE BROUX Michel (0000-00-00)

COLPIN Lionel (3965-12-00)

DEPREZ Damien (2893-13-00)

MARTINELLE Thibault (8737-13-00)

PARIS Antoine (3158-13-00)

24 février 2015

Les textes écrits en bleu ont été écrits après la séance de débriefing sur le problème 1 et constitue donc une correction de ce dernier.

1 Introduction

On s'intéresse ici à un signal triangulaire $u(t)$ périodique, symétrique, de période T et de valeurs minimales et maximales V_{\min} et V_{\max} respectivement. On peut décomposer cette fonction en série de Fourier

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) \quad (1)$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation angulaire. La composante constante A_0 et les coefficients A_k et B_k sont donnés par

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (2)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt, \quad (3)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (4)$$

2 Séries de Fourier

Etablissons dans un premier temps la série de Fourier dans le cas particulier où le signal triangulaire est symétrique (i.e. $u(t) = u(-t)$) et centrée autour de l'axe du temps t . Dans ce cas particulier, on a $A_0 = 0$ et $B_k = 0$. On peut donc réécrire la décomposition en série de Fourier

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t).$$

Calculons maintenant les coefficients

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt.$$

Pour cela, on décompose $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ en deux parties

$$u(t) = \begin{cases} V_{\max} - \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 2V_{\min} + \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

On peut alors facilement décomposer l'intégrale en deux parties. On trouve donc ¹

$$A_k = \frac{2}{\pi^2 k^2} (V_{\max} - V_{\min}) (1 - (-1)^k).$$

On peut noter deux choses à partir de cette expression pour A_k :

- Les termes pour k pair sont nuls ;
- A_k décroît en $1/k^2$. On dit alors que le signal a une faible richesse harmonique. Pour un signal carré par exemple, les coefficients décroissent en $1/k$. Un signal carré a donc une plus grande richesse harmonique.

où $\cos(k\pi)$ a été remplacé par $(-1)^k$. On a finalement

$$u(t) = \frac{2}{\pi^2} (V_{\max} - V_{\min}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k) \cos(k\omega t).$$

On peut ensuite vérifier, à l'aide de MATLAB, que cette décomposition en série de Fourier converge effectivement vers le signal triangulaire. La figure 1 est la décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \dots 19$ pour $T = 1$ s et $V_{\max} = -V_{\min} = 2$ V.

Passons maintenant au cas général, c'est à dire avec une origine des temps quelconque.

Pour le cas général, c'est bien comme on le pensait, on peut simplement décaler la décomposition obtenue en effectuant une translation de Δt . Un sinus apparaît alors à nouveau en développant le $\cos(k\omega t + \Delta t)$.

La série doit maintenant s'écrire sous la forme

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}. \quad (5)$$

1. Les détails de calculs sont omis ici.

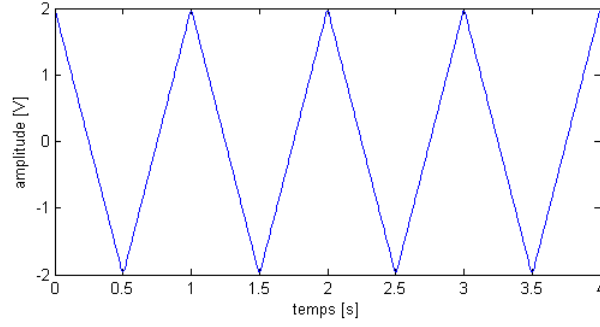


FIGURE 1: Décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \dots 19$.

Il s'agit ensuite d'exprimer C_k en fonction de A_k et B_k et de trouver une expression simple pour C_k faisant usage d'exponentielles complexes. Pour ce faire, on utilise les relations suivantes

$$\cos(k\omega t) = \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2},$$

$$\sin(k\omega t) = \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}$$

que l'on injecte dans l'équation 1. On obtient alors

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right).$$

On met un peu d'ordre dans cette expression et on l'égalise ensuite à l'équation 5

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k - jB_k)}{2} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k + jB_k)}{2} e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}.$$

De cette égalité, on retire

$$C_k = \begin{cases} A_0 & \text{pour } k = 0 \\ \frac{(A_k - jB_k)}{2} & \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{(A_{-k} + jB_{-k})}{2} & \text{pour } k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

En sachant que A_0 , A_k et B_k sont donnés respectivement par les équations 2, 3 et 4, on peut calculer C_k dans les trois cas. On montre facilement que

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega t} dt$$

dans les trois cas. Cette façon de procéder est tirée de [1]. Il ne nous reste plus maintenant qu'à prouver que $C_{-k} = C_k^*$ dans le cas d'un signal réel, c'est à dire $u(t) \in \mathbb{R}$. On trouve très facilement que

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{jk\omega t} dt. \quad (6)$$

Il reste à calculer C_k^* . En utilisant les propriétés du complexe conjugués et en sachant que $u(t) \in \mathbb{R}$, on a successivement

$$\begin{aligned} C_k^* &= 1/T \left(\int_0^T u(t) e^{-jk\omega t} dt \right)^* \\ &= 1/T \int_0^T (u(t) e^{-jk\omega t})^* dt \\ &= 1/T \int_0^T (u(t))^* (e^{-jk\omega t})^* dt \\ &= 1/T \int_0^T u(t) e^{jk\omega t} dt. \end{aligned}$$

Cette expression est effectivement égale à l'équation 6.

Il y a moyen de faire autrement mais j'ai pas noté. A voir dans les slides quand ils seront sur iCampus.

3 Transformation non-linéaire

On considère pour cette question un système non-linéaire dont le signal d'entrée est donné par x et la sortie par $h(x)$. Dans notre cas, le signal d'entrée x est $u(t)$, le signal triangulaire de la question précédente et $h(x)$ est une transformation non-linéaire donnée par son développement de Taylor jusqu'à l'ordre 3 : $h(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3$. Comme annoncé, les ordres 0 et 1 s'obtiennent trivialement. L'ordre 2 en revanche nécessite un peu plus de manipulation. Repartons de l'équation 1, que l'on élève au carré

$$\begin{aligned} u^2(t) &= A_0^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) \right)^2 \\ &\quad + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t). \end{aligned}$$

On peut mettre un peu d'ordre en utilisant des doubles sommes sur des paires d'indices (k_1, k_2)

$$\begin{aligned} u^2(t) &= A_0^2 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos(k_1\omega t) \cos(k_2\omega t) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} B_{k_1} B_{k_2} \sin(k_1\omega t) \sin(k_2\omega t) \\ &\quad + 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} A_{k_1} \cos(k_1\omega t) + 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} B_{k_1} \sin(k_1\omega t) + 2 \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} B_{k_2} \cos(k_1\omega t) \sin(k_2\omega t). \end{aligned}$$

On utilise ensuite les formules trigonométriques qui permettent de transformer un produit

de fonctions sinusoïdales en une somme de fonctions sinusoïdales

$$\begin{aligned}
u^2(t) &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 - k_2)\omega t) + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 + k_2)\omega t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} B_{k_1} B_{k_2} \cos((k_1 - k_2)\omega t) - \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} B_{k_1} B_{k_2} \cos((k_1 + k_2)\omega t) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} B_{k_2} \sin((k_1 + k_2)\omega t) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} B_{k_2} \sin((k_2 - k_1)\omega t) \\
&+ 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} A_{k_1} \cos(k_1\omega t) + 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} B_{k_1} \sin(k_1\omega t).
\end{aligned}$$

Enfin, en mettant en évidence, $u^2(t)$ devient

$$\begin{aligned}
u^2(t) &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (A_{k_1} A_{k_2} + B_{k_1} B_{k_2}) \cos((k_1 - k_2)\omega t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (A_{k_1} A_{k_2} - B_{k_1} B_{k_2}) \cos((k_1 + k_2)\omega t) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} B_{k_2} (\sin((k_1 + k_2)\omega t) + \sin((k_2 - k_1)\omega t)) \\
&+ 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} A_{k_1} \cos(k_1\omega t) + B_{k_1} \sin(k_1\omega t).
\end{aligned}$$

On voit donc facilement à partir de cette dernière équation comment calculer les coefficients de la décomposition harmonique de $u^2(t)$ à partir des coefficients de la décomposition harmonique de $u(t)$. En considérant maintenant le signal $u(t)$ symétrique, $u^2(t)$ se simplifie (car $B_k = 0$ par symétrie) et devient

$$\begin{aligned}
u^2(t) &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 - k_2)\omega t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 + k_2)\omega t) \\
&+ 2A_0 \sum_{k_1=1}^{\infty} A_{k_1} \cos(k_1\omega t).
\end{aligned}$$

Si en plus, la composante continue A_0 du signal est nulle, $u^2(t)$ se simplifie encore

$$u^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 - k_2)\omega t) + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos((k_1 + k_2)\omega t).$$

Pour calculer l'ordre 3, on multiplie $u(t)$ et $u^2(t)$ et on applique les mêmes formules trigonométriques que pour l'ordre 2.

On peut aussi décider de s'écarter de l'énoncé et de considérer plutôt la notation exponentielle

$$u(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} C_k e^{jk\omega t}.$$

(Question : quid du N alors qu'on utilise ∞ normalement ?) Calculer $u^2(t)$ et $u^3(t)$ devient alors **beaucoup** plus simple. On a en effet

$$u^2(t) = \sum_{k_1=-N}^N \sum_{k_2=-N}^N C_{k_1} C_{k_2} e^{j(k_1+k_2)\omega t}$$

que l'on peut simplifier en

$$u^2(t) = \sum_{k=-2N}^{2N} C'_k e^{jk\omega t}.$$

On utilise le même principe pour l'ordre 3.

Enfin, considérons le cas où

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{(x/s)^2 + 1}}.$$

En observant le graphe de $h(x)$ pour plusieurs valeurs de s (voir figure 2), on observe que ce paramètre règle en fait la saturation du circuit (on dit que le circuit sature quand la sortie n'augmente plus même si l'entrée augmente encore). On prouve également facilement que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = s.$$

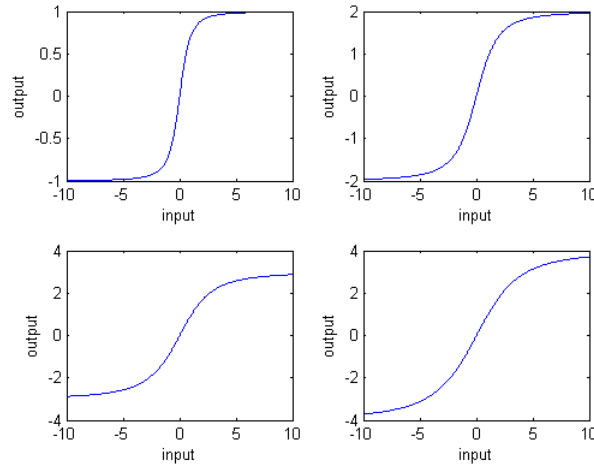


FIGURE 2: Graphe de la fonction $h(x)$ pour $s = 1 \dots 4$.

Le développement de Taylor jusqu'à l'ordre de 3 de $h(x)$ autour de $x = 0$ est donné par

$$h(x) \approx x - \frac{x^3}{2s^2}.$$

A l'aide de MATLAB, on peut vérifier que cette transformation non-linéaire permet effectivement de transformer un signal triangulaire en un signal sinusoïdal. Cette transformation est illustrée à la figure 3.

Au travers de cette transformation non-linéaire, on remarque que le signal perd en contenu harmonique. On passe en effet d'un signal triangulaire (somme de plusieurs harmoniques) à une quasi-sinusoïde (normalement une seule harmonique). Il faut cependant se rendre compte que c'est un comportement plus ou moins exceptionnel. Habituellement, une transformation non-linéaire augmente le contenu harmonique.

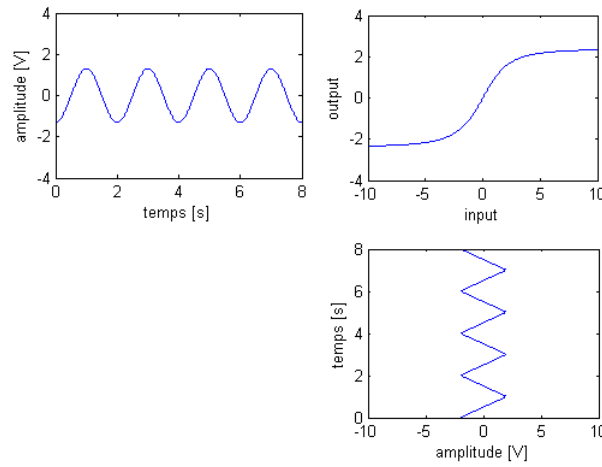


FIGURE 3: Le signal triangulaire en entrée de la transformation non-linéaire $h(x)$ pour $s = 2.4$ permet effectivement d'obtenir un signal sinusoïdal en sortie.

Cherchons maintenant un rapport V/s , où V est l'amplitude du signal d'entrée du système, tel que la saturation soit "très légère". Pour répondre à cette question, nous devons définir de manière plus précise ce qu'on appelle une saturation "très légère". Nous avons choisis, arbitrairement, la définition suivante : la saturation est très légère lorsque l'amplitude de sortie vaut 95% de l'amplitude maximale de sortie².

$$h(V) = 0.95s.$$

On trouve alors que la saturation est légère pour

$$\frac{V}{s} \approx 3.$$

2. Nous aurions également pu choisir une définition faisant intervenir la dérivée de $h(x)$, et indiquer que la saturation est légère lorsque $\frac{dh}{dx} \approx 0.1$ par exemple, c'est à dire quand la pente de $h(x)$ devient faible.

Il est toutefois important de noter que ce rapport dépend de la définition de saturation “légère” choisie.

Il fallait en fait considérer que lorsque la saturation est légère, la transformation est linéaire. Le rapport V/s doit alors être choisi de telle sorte que seule la zone linéaire de la transformation est utilisée. En considérant le développement de Taylor jusqu’à l’ordre 3, on pouvait trouver

$\frac{V}{s}$ proche mais inférieur à 1.

Références

- [1] Richard Prager. *First Year Engineering Mathematics*, pages 111–128. University of Cambridge, 2009.