LELEC1101 - Problème 1

Groupe 3
de Broux Michel (0000-00-00)
Colpin Lionel (0000-00-00)
Deprez Damien (2893-13-00)
Martinelle Thibault (0000-00-00)
Paris Antoine (3158-13-00)

9 février 2015

On s'intéresse ici à un signal triangulaire $u(t)$ périodique, symétrique, de période T et de valeurs minimales et maximales $V_{\min}$ et $V_{\max}$ respectivement. On peut décomposer cette fonction en série de Fourier

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t). \tag{1}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation angulaire. La composante constante A_0 et les coefficients A_k et B_k sont donnés par

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

1 Question 1

Etablissons dans un premier temps la série de Fourier dans le cas particulier où le signal triangulaire est symétrique (i.e. $u(t) = u(-t)$) et centrée autour de l'axe de t. Dans ce cas particulier, on a $A_0 = 0$ et $B_k = 0$. On peut donc réecrire la décomposition en série de Fourier

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t).$$

Calculons maintenant les coefficients

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on décompose $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ en deux parties

$$u(t) = \begin{cases} V_{\max} - \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 2V_{\min} + \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

On peut alors facilement décomposer l'intégrale en deux parties. On trouve donc[1]

$$A_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}(V_{\max} - V_{\min})(1 - (-1)^k).$$

1. Les détails de calculs sont omis ici.

où $\cos(k\pi)$ a été remplacé par $(-1)^k$. On a finalement

$$u(t) = \frac{2}{\pi^2}(V_{\max} - V_{\min}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(1 - (-1)^k)\cos(k\omega t).$$

On peut ensuite vérifier, à l'aide de MATLAB, que cette décomposition en série de Fourier converge effectivement vers le signal triangulaire. La figure 1 est la décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \cdots 10$ pour $T = 1$ s et $V_{\max} = -V_{\min} = 5$ V.

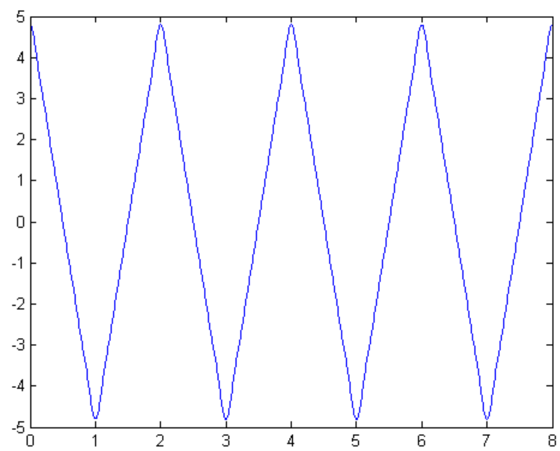

FIGURE 1 – Décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \cdots 10$.

Passons maintenant au cas général, c'est à dire avec une origine des temps quelconque. La série doit maintenant s'écrire sous la forme

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}. \tag{5}$$

Il s'agit ensuite d'exprimer C_k en fonction de A_k et B_k et de trouver une expression simple pour C_k faisant usage d'exponentielles complexes. Pour ce faire, on utilise les relations suivantes

$$\cos(k\omega t) = \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2},$$

$$\sin(k\omega t) = \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}$$

dans l'équation 1

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}\right).$$

On met un peu d'ordre dans cette expresion et on l'égalise ensuite à l'équation 5

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k - jB_k)}{2} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k + jB_k)}{2} e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}.$$

De cette égalité, on retire

$$C_k = \begin{cases} A_0 & \text{pour } n = 0 \\ \frac{(A_k - jB_k)}{2} & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{(A_{-k} + jB_{-k})}{2} & \text{pour } n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

En sachant que A_0, A_k et B_k sont donnés respectivement par les équations 2, 3 et 4, on pour calculer C_k dans les trois cas. On montre facilement que

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t$$

dans les trois cas. Cette façon de procéder est tirée de [1]. Il ne nous reste plus maintenant qu'à prouver que $C_{-k} = C_k^*$ dans le cas d'un signal réel, c'est à dire $u(t) \in \mathbb{R}$. On trouve très facilement que

$$C_{-k} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{jk\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Il reste à calculer C_k^*

$$\begin{aligned} C_k^* &= 1/T\left(\int_0^T u(t)e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t\right)^* \\ &= 1/T\int_0^T \left(u(t)e^{-jk\omega t}\right)^*\,\mathrm{d}t \\ &= 1/T\int_0^T (u(t))^*(e^{-jk\omega t})^*\,\mathrm{d}t \\ &= 1/T\int_0^T u(t)e^{jk\omega t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Cette expression est effectivement égale à l'équation 6.

Références

[1] Richard Prager. *First Year Engineering Mathematics*, pages 111–128. University of Cambridge, 2009.