LELEC1101 - Problème 1

Groupe 3
de Broux Michel (0000-00-00)
Colpin Lionel (0000-00-00)
Deprez Damien (0000-00-00)
Martinelle Thibault (0000-00-00)
Paris Antoine (3158-13-00)

5 février 2015

On s'intéresse ici à un signal triangulaire $u(t)$ périodique, symétrique, de période T et de valeurs minimales et maximales $V_{\min}$ et $V_{\max}$ respectivement. On peut décomposer cette fonction en série de Fourier

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega t).$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation angulaire. La composante constante A_0 et les coefficients A_k et B_k sont donnés par

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t,$$
$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

1 Question 1

Etablissons dans un premier temps la série de Fourier dans le cas particulier où le signal triangulaire est symétrique (i.e. $u(t) = u(-t)$) et centrée autour de l'axe de t. Dans ce cas particulier, on a $A_0 = 0$ et $B_k = 0$. On peut donc réecrire la décomposition en série de Fourier

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t).$$

Calculons maintenant les coefficients

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on décompose $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ en deux parties

$$u(t) = \begin{cases} V_{\max} - \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 2V_{\min} + \frac{2(V_{\max}-V_{\min})}{T}t & \text{pour } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

On peut alors facilement décomposer l'intégrale en deux parties. On trouve donc[1]

$$A_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}(V_{\max} - V_{\min})(1 - (-1)^k).$$

1. Les détails de calculs sont omis ici.

où $\cos(k\pi)$ a été remplacé par $(-1)^k$. On a finalement

$$u(t) = \frac{2}{\pi^2}(V_{\max} - V_{\min}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(1 - (-1)^k) \cos(k\omega t).$$

On peut ensuite vérifier à l'aide de Matlab que que cette décomposition en série de Fourier converge effectivement vers le signal triangulaire. La figure 1 est la décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \cdots 10$ pour $T = 1$ s et $V_{\max} = -V_{\min} = 5$ V.

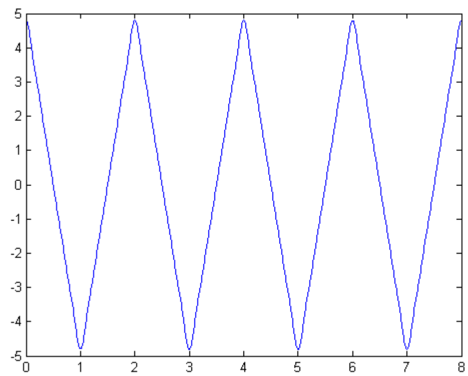

Figure 1 – Décomposition en série de Fourier pour $k = 1 \cdots 10$.