

第一章 邏輯與推論

★邏輯定義：邏輯是應用一些規則來做推論，形式邏輯 (formal logic) 或符號邏輯 (symbolic logic) 是可應用在任可觀念上的推論方法。我們僅討論命題邏輯 (propositional logic) 及述詞邏輯 (predicate logic)。

1.1 邏輯運算

(1) 命題可以經由邏輯運算 (logical operations) 產生新的命題

- ① **“非” (not)**: 命題 p 的否定命題 (negation), 為 “非 p ”, 以 $\neg p$ 表示之。
(T 表真, F 表假)

p	$\neg p$
T	F
F	T

- ② **“且” (and)**: 命題 “ p 且 q ”, 稱 “合取命題” (conjunction), 以 $p \wedge q$ 表示之。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- ③ **“或” (or)**: 命題 “ p 或 q ”, 稱 “選言命題” (disjunction), 以 $p \vee q$ 表示之。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- ④ “**若...則...**” (if... then...): 命題若 “p 則 q” , 稱蘊涵式 (implication) 或條件句 (conditional), 以 $p \rightarrow q$ 表示之。其中 p 稱為前提 (premise) 或假設(hypothesis), q 稱為結論 (conclusion)

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- ⑤ “**若且唯若**” (if and only if): 命題 “p 若且唯若 q” , 為命題 $p \rightarrow q$ 及其逆命題(converse) $q \rightarrow p$ 所結合而成的雙條件句 (biconditional), 以 $p \leftrightarrow q$ 表示之。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(2)邏輯運算符號的優先順序

運算符號	優先順序
\neg	1
\wedge	2
$\vee \oplus$	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

1.2 命題邏輯的應用

(1)將日常語句翻譯成邏輯符號

※例題 1-1: 只有戶籍在永康的新生與外籍生才可以申請住學校宿舍。

(令 n 表示「你是新生」、t 表示「你的戶籍在永康」、f 表示「你是外籍生」、d 表示「你可以申請住學校宿舍」。)

$$d \rightarrow n \wedge \neg t \vee f$$

1.3 邏輯等價

- (1) 當 p, q 兩個命題有相同的真假值時, 即 p 值為真時 q 值為真, p 值為假時 q 值為假, 反之亦然, 則稱 p, q 為邏輯等價或簡稱等價, 表示為 $p \equiv q$ 。例如, “A 君身高超過 180 公分” 與 “A 君身高不在 180 公分以下” 是等價的。

※例題 1-2: 只有兩位老耆, 一個說 “好東西不會便宜”, 另一位說 “便宜的東西不會好”, 這兩句話的意思是否等價。

令 p 表命題 “東西是好的”, q 表命題 “東西便宜”, 故第一位說的是 $p \rightarrow \neg q$, 而第二位說的是 $q \rightarrow \neg p$, 由真值表可知其等價。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

※例題 1-3 試証以下的命題為等價:

1. 若週末天氣晴朗且無事情, 我將去百貨公司。
2. 若週末天氣明朗, 則若無事情, 我將去百貨公司。

定義 p, q, r 如下:

p : 週末天氣晴朗

q : 無事情

r : 我將去百貨公司

則第一個命題表為 $(p \wedge q) \rightarrow r$, 第二個命題表為 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, 由真值表可知兩者等價。

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

(2)邏輯等價之命題

①同一律 (identity laws)

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

②支配律 (domination laws)

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

③冪等律 (Idempotent Laws)

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

④雙否定律 (Double negation law)

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

⑤交換律 (Commutative laws)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

⑥結合律 (Associative laws)

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

⑦分配律 (Distributive laws)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

⑧笛摩根定律 (De Morgan' s laws)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

⑨吸收律 (Absorption laws)

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

⑩否定律 (negation laws)

$$p \vee \neg p \equiv T$$

$$p \wedge \neg p \equiv F$$

⑪ 逆反命題之等價

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

⑫ 其他

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \rightarrow p \equiv T$$