

FI2003 – MÉTODOS EXPERIMENTALES

Apuntes del curso

Elaborado por: María Luisa Cordero, Claudio Falcón,
Marcos Flores, Rafael Pujada.

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Semestre Primavera 2012

Guía teórica N°1 – Corriente continua

1. Objetivos

- Familiarizarse con normas de seguridad básicas en el laboratorio.
- Familiarizarse con el uso apropiado de fuentes de corriente continua y el multímetro.
- Reconocer los conceptos de campo eléctrico, diferencia de potencial, intensidad de corriente, resistencia y potencia eléctrica.
- Estudiar la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff.
- Estudiar la caída de voltaje en elementos óhmicos y no óhmicos.

2. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio. Un tratamiento más detallado deberá ser buscado en libros de electricidad y magnetismo.

I) Fuerza de Coulomb

En 1785, Charles Coulomb describió la fuerza que existe entre cargas estáticas, dándole su nombre. Si tenemos dos partículas estáticas de cargas q_1 y q_2 , separadas por una distancia r , se encuentra que la fuerza debido a sus cargas cumple con:

$$|\vec{F}| \propto \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1)$$

Si esta relación se expresa en unidades del Sistema Internacional de medidas (S.I.), o sea, cargas en Coulomb, C, distancia en metros, m, y fuerza en Newton, N, encontramos que en el vacío:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (2)$$

en donde $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, y ϵ_0 se conoce como la permitividad del espacio vacío.

Consideremos que q_2 está fija y que se coloca q_1 a una cierta distancia de manera que ésta puede moverse bajo una fuerza, en particular nos interesa la fuerza que q_2 ejerce sobre ella. Vectorialmente, la expresión anterior la podemos escribir como

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (3)$$

válida en el S.I.¹, donde \vec{r}_{12} es el vector posición, desde q_2 hacia q_1 . Así, \vec{F}_{12} es la fuerza que ejerce q_2 sobre q_1 . Si las cargas son de signo contrario, $q_1 q_2 < 0$, entonces la fuerza apunta desde q_1 hacia q_2 , por lo tanto es atractiva; en caso contrario, apunta desde q_2 hacia q_1 , y es repulsiva. Por supuesto que por acción y reacción $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

II) Campo eléctrico

Coloquemos una carga puntual q_2 en el espacio, la cual dejaremos fija como en el párrafo anterior. El entorno de la carga se ve modificado por la aparición de un campo, conocido como campo eléctrico. Dicho campo eléctrico queda definido por la siguiente expresión, que permite interpretarlo como fuerza por unidad de carga:

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_{12}, \quad (4)$$

donde \vec{E}_{12} es el campo eléctrico en la posición de q_1 debido a la presencia de q_2 . De esta expresión, podemos obtener el campo eléctrico generado por la carga puntual q_2

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (5)$$

donde otra vez \vec{r}_{12} es el vector posición, desde la carga q_2 hacia la q_1 . Si ubicamos q_2 , que ahora llamaremos Q , en el origen, la expresión queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad (6)$$

donde $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ es el vector unitario que apunta desde el origen, donde colocamos la carga Q , hacia un punto del espacio dado por el vector posición \vec{r} . Aquí se ha simplificado la notación, $\vec{E}_{12} = \vec{E}(\vec{r})$.

Finalmente, si cambiamos la partícula de carga Q , por un continuo de carga de densidad $\rho = dq/dV$ en un volumen V , obtenemos que el campo es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}. \quad (7)$$

En el S.I., la unidad de medida del campo eléctrico es N/C, que, como se verá más adelante, equivale a V/m (volt por metro).

¹En otros sistemas de unidades la forma de la ley es la misma, pero la constante $1/(4\pi\epsilon_0)$ cambia.

III) Diferencia de potencial

Al mover una carga q entre dos puntos a y b en una zona con un campo eléctrico \vec{E} , se realiza un trabajo W_{ab} . Como consecuencia, la energía potencial eléctrica se verá modificada en $-W_{ab}$. Se define la diferencia de potencial eléctrico como el cociente entre el cambio de energía eléctrica debido al movimiento de la carga q , y su valor q . La definición formal de la diferencia de potencial es:

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} = \frac{-1}{q} \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$

La unidad de medida en el S.I. de la diferencia de potencial eléctrico es el Volt, V. Habitualmente, al trabajar en circuitos, se usan los términos *caída de voltaje* o *caída de tensión eléctrica* para referirse a la diferencia de potencial. Podemos definir el término potencial eléctrico en un punto, como la diferencia de potencial entre este punto e infinito, en donde consideramos que el potencial eléctrico es cero:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (9)$$

En circuitos eléctricos, un aparato capaz de generar una diferencia de potencial eléctrico entre dos terminales (como por ejemplo, una pila) se denomina fuente de voltaje continuo y se simboliza como en los esquemas de la figura 1. La diferencia de potencial generada por estos dispositivos se denomina *fuerza electromotriz* ε .

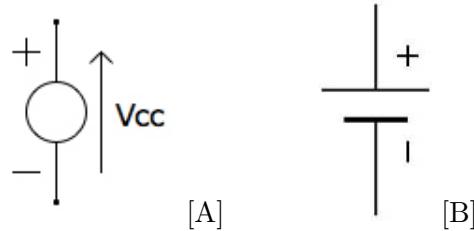


Figura 1: [A] y [B] Representaciones de una fuente de poder.

IV) Corriente eléctrica

Al aplicar una diferencia de potencial sobre un conjunto de cargas generamos un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (10)$$

A la vez, este campo genera una fuerza sobre las cargas y su aceleración correspondiente. Definimos la corriente eléctrica como la variación de la cantidad de carga en el tiempo:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (11)$$

Si las cargas están en unidades de Coulomb, C, y el tiempo en segundos, s, la unidad de medida del S.I. para corriente eléctrica, es el Ampere, A = C/s.

V) Potencia eléctrica

Es importante determinar cuánta energía puede entregar un circuito eléctrico y de qué depende. Considerar un circuito como el de la figura 2, en el cual se tiene algún elemento activo que genera una diferencia de potencial (como por ejemplo, una pila, una fuente, etc), y una “caja” que representa algún elemento que va a utilizar la energía. El terminal *a* está a mayor potencial que el terminal *b*. Al mover un elemento de carga dq de *a* hacia *b*, esta carga disminuirá su energía potencial en dqV_{ab} , es decir

$$dU = dqV_{ab} = IdtV_{ab}. \quad (12)$$

La potencia eléctrica estará dada por la cantidad de energía consumida por la caja por unidad de tiempo

$$P = \frac{dU}{dt} = IV_{ab}. \quad (13)$$

Si en la fórmula anterior *I* está en Ampere y V_{ab} en Volt, la potencia eléctrica se mide en Watt, $W = A \cdot V$. La ecuación anterior es válida para corriente continua, es decir constante en el tiempo. Despues veremos que también es válida en cualquier instante para corriente alterna, es decir para una corriente que varía con el tiempo.

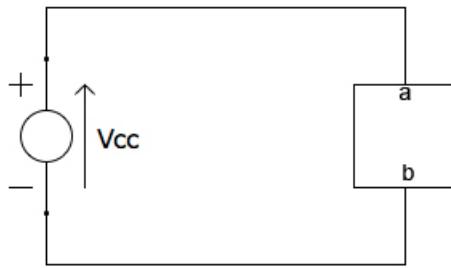


Figura 2: Esquema de un circuito compuesto por una fuente de voltaje continuo y una “caja” que utiliza la energía eléctrica.

VI) Resistencia eléctrica

Un conductor eléctrico contiene portadores de carga (iones, electrones, etc.) libres de movimiento, es decir, no enlazados a ningún átomo en particular. Si se aplica un voltaje (diferencia de potencial) entre los dos extremos de un trozo de metal, los electrones libres se moverán bajo la influencia del campo eléctrico. El flujo de electrones es obstaculizado por colisiones con desórdenes en la red del metal, átomos de otro material, superficies, etc. Estas colisiones producen calor (efecto Joule), o sea, la energía se disipa térmicamente. La oposición a la movilidad de los electrones se conoce como resistencia eléctrica (R), y está definida por la relación:

$$R = \frac{V}{I} \quad (14)$$

en donde V representa el voltaje e I la corriente. Si las unidad de medida de V es Volt y de I es Ampere, entonces la resistencia eléctrica se mide en Ohm y se simboliza por Ω . En un circuito eléctrico, una resistencia tiene un símbolo como el que se presenta en la figura 3.

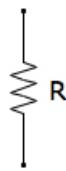


Figura 3: Representación de una resistencia eléctrica.

Las resistencias que se emplean en circuitos eléctricos se fabrican con valores que cubren un amplio rango. Para caracterizarlas, además del símbolo Ω se usan los prefijos griegos:

nano (n) $\rightarrow \times 10^{-9}$

micro (μ) $\rightarrow \times 10^{-6}$

mili (m) $\rightarrow \times 10^{-3}$

Kilo (k) $\rightarrow \times 10^3$

Mega (M) $\rightarrow \times 10^6$

Giga (G) $\rightarrow \times 10^9$

El valor nominal de la resistencia aparece etiquetado sobre la resistencia con bandas de color según un código. Los dos primeros colores indican dígitos, y el tercero el exponente de la potencia de 10 por la cual se multiplica el número anterior. Una cuarta banda se agrega para indicar la tolerancia (porcentaje máximo de error) del valor nominal. La equivalencia entre colores y números la encontrará en el laboratorio en tablas pegadas en la muralla. El valor real de la resistencia es el medido por el multímetro.

VII) Ley de Ohm

Si la variación del voltaje sobre un dispositivo genera una variación linealmente dependiente en la corriente, decimos que el dispositivo se encuentra en el rango óhmico o que sigue la ley de Ohm, esta ley queda expresada por la relación:

$$V = IR \quad (15)$$

VIII) Asociación de componentes

Cuando hay dos o más elementos formando un circuito, se puede diferenciar dos maneras comunes de conectarlos: en serie y en paralelo. Conectar en serie quiere decir que entre cada par de elementos existe un solo punto común, y sin conexión al resto. Una conexión en paralelo quiere decir que a ambos lados de cada elemento existe un punto común, a todo el resto. Un ejemplo de conexión en serie está dado en la figura 4[A] con dos resistencias. En la figura 4[B] se muestra una conexión en paralelo de dos resistencias.

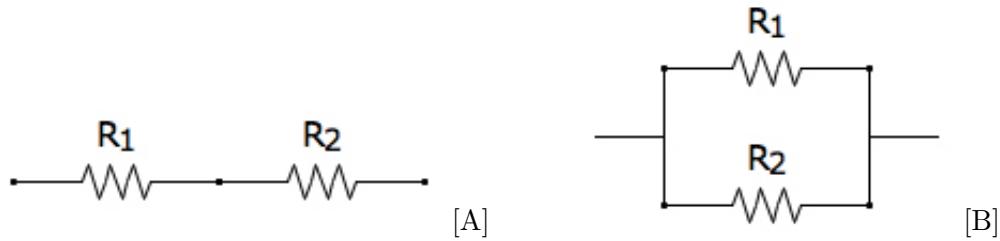


Figura 4: [A] Resistencias en serie. [B] Resistencias en paralelo

IX) Las leyes de Kirchhoff

Estas leyes tratan sobre el comportamiento de circuitos eléctricos con asociaciones de componentes. La base para una deducción rigurosa de estas leyes está en la conservación de la carga eléctrica y la energía.

La primera ley se conoce también como la ley de las corrientes. Ésta dice que la suma de intensidades de corriente que llegan a un punto común es igual a la suma de intensidades que salen de él. Si consideramos positivas las corrientes que llegan y negativas las que salen, esta ley establece que la suma algebraica de las intensidades de todas las corrientes sobre un punto común es cero.

$$\sum_i I_i = 0. \quad (16)$$

La segunda ley se conoce también como la ley de los voltajes. Ésta dice que en un circuito cerrado, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión, entonces:

$$\sum \varepsilon = \sum \text{caida de voltaje} \quad (17)$$

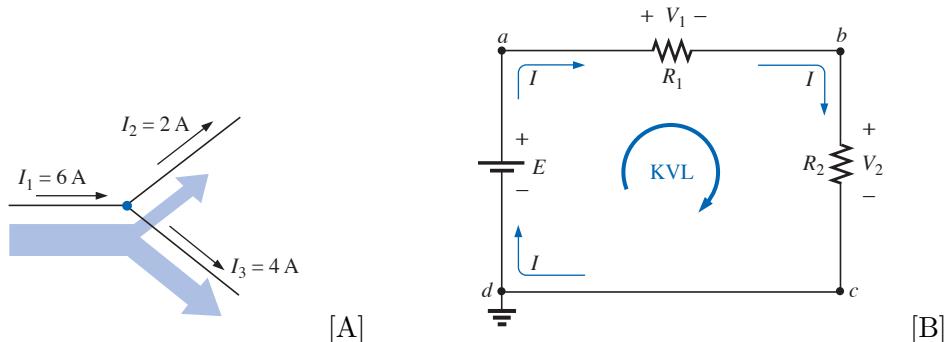


Figura 5: [A] Aplicación de la primera ley de Kirchhoff a un nodo, en este ejemplo $I_1 = I_2 + I_3$ se cumple que $-6\text{ A} + 4\text{ A} + 2\text{ A} = 0$. [B] Aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff a un circuito en serie, en este ejemplo se tiene $E = V_1 + V_2$ por lo que se cumple que $-E + V_1 + V_2 = 0$.

X) Aplicaciones de las leyes de Kirchhoff y de Ohm

- Mediciones de corriente:

El aparato que mide corriente se llama amperímetro. Para medir la corriente que pasa por alguna componente, basta conectar en serie el amperímetro con la componente. Un amperímetro ideal tiene resistencia cero para no afectar al circuito.

- Mediciones de voltaje:

El aparato que mide voltaje se llama voltímetro. Para medir la caída de voltaje que produce alguna componente, basta conectar en paralelo el voltímetro a la componente. Un voltímetro ideal, tiene resistencia infinita para no afectar al circuito.

- Resistencia equivalente:

Llamamos resistencia equivalente a una resistencia imaginaria, que puede reemplazar a una serie de otras interconectadas, logrando la misma corriente de alimentación del circuito. Por ejemplo, al conectar en serie n resistencias R_1, R_2, \dots, R_n , su resistencia equivalente vale:

$$Req_{serie} = \sum_{k=1}^n R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n.$$

Si en vez de conectarlas en serie, lo hacemos en paralelo, entonces, obtenemos

$$\frac{1}{Req_{paralelo}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Guía de laboratorio N°1 – *Corriente continua*

1. Resumen

En esta actividad práctica se realizan mediciones de voltaje (V) y corriente (I) sobre circuitos eléctricos de corriente continua en serie y paralelo, ocupando el multímetro en modo de voltímetro para medir el voltaje, en modo de amperímetro para medir la corriente y en modo de óhmetro para medir resistencia. Se establece la relación entre el voltaje y la corriente para elementos pasivos como resistencias y ampolletas. Se verifican las leyes de Ohm y de Kirchhoff.

2. Objetivos

- Entender los conceptos básicos de circuitos eléctricos.
- Familiarizarse con el uso del multímetro en modo de voltímetro, de amperímetro y de óhmetro.
- Verificar la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff.

3. Materiales

- Fuente de poder.
- Multímetros.
- Tablero.
- Componentes eléctricos.

4. Actividad práctica

Ley de Ohm

- a) Arme el circuito como lo muestra la figura 1 donde $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ (*No encienda la fuente de poder todavía*)

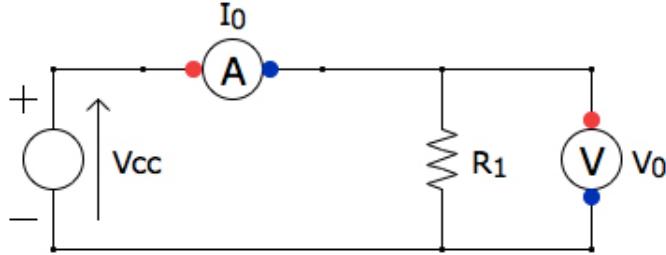


Figura 1: Diagrama del circuito, V_{cc} representa el voltaje entregado por la fuente de poder, I_0 representa la corriente medida con el amperímetro A y V_0 representa el voltaje medido con el voltímetro V , R_1 representa la resistencia.

- b) Antes de añadir la resistencia al circuito, mida su valor con el multímetro (en modo de óhmmetro Ω) y anote su valor. Si el valor de la resistencia es muy bajo, el multímetro puede emitir un sonido al momento de la medición.

$R_{nominal}$	R_{medida}	error %

- c) Luego de verificar que las conexiones están correctas encienda la fuente de poder V_{cc} (si el multímetro emite un sonido (bip) es porque está en una escala de medición incorrecta o está mal conectado). Varíe el voltaje de la fuente de poder, para 10 valores distintos (correlativos) entre 0 y 12 V. Note que la lectura de la fuente es solamente referencial, siendo la lectura del multímetro la que debe ponerse en la tabla. Complete una tabla de acuerdo a la siguiente información:

V_0	I_0	V_0/I_0

- d) Calcule la media \bar{x} y la desviación estándar σ para la relación V_0/I_0 de los datos medidos. En Matlab puede calcular σ con la función **std()**

$$\bar{x} = \sum(V_0/I_0)/N \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}$$

- e) Con el programa Matlab realice un gráfico de voltaje (V_0) v/s corriente (I_0) con la función **plot($I_0, V_0, '-o'$)**, luego identifique los coeficientes con la función **polyfit($I_0, V_0, 1$)** y obtenga la relación entre voltaje y corriente. Indique si la resistencia cumple con la ley de Ohm (también puede realizar la operación en Excel). Imprima el gráfico.

- f) Reemplace la resistencia R_1 por una ampolleta, como lo muestra la figura 2 y repita los pasos anteriores c), d) y e). Nota: las ampolletas no tienen $R_{nominal}$ y no soportan voltajes mayores a 12 V.

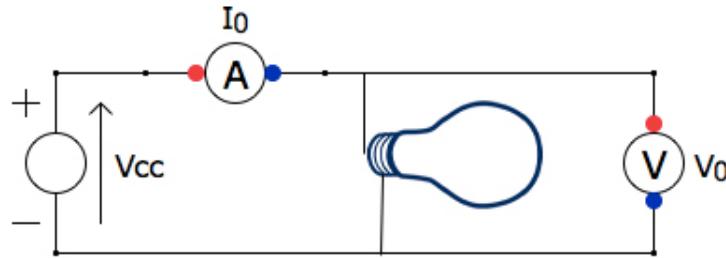


Figura 2: Diagrama del circuito similar a la figura 1, donde R_1 es reemplazado por una ampolleta

Leyes de Kirchhoff

g) Seleccione tres resistencias y mida sus valores con el mutímetro, complete una tabla de acuerdo a la siguiente información:

$R_{nominal}$	R_{medido}	error %

h) Calcule la resistencia equivalente (con los valores de la medición) en serie y paralelo para las resistencias seleccionadas

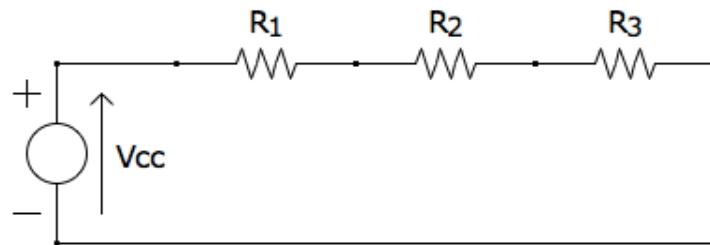
$R_{eqparalelo}$	$R_{eqserie}$

Nota: las resistencias en serie y paralelo se calculan como:

$$R_{serie} = \sum_{k=1}^n R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

$$\frac{1}{R_{paralelo}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

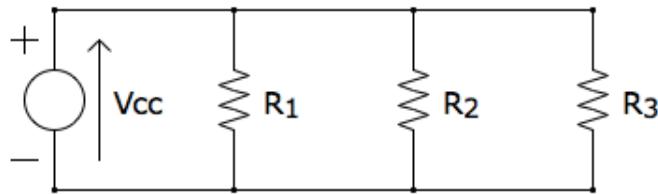
i) Arme el circuito en serie como lo muestra la figura a continuación, con las resistencias seleccionadas:



j) Fije un valor para el voltaje entregado por la fuente de poder V_{cc} , mida la corriente I_0 en el circuito y el voltaje V_{R1} , V_{R2} y V_{R3} sobre la resistencia que se desea medir, es decir, sobre R_1 , R_2 y R_3 respectivamente, reemplazando el voltímetro según sea necesario. Indique si se cumple con la ley de voltaje de Kirchhoff (2^a ley). Complete la siguiente tabla:

V_{cc}	V_{R1}	V_{R2}	V_{R3}	I_0

k) Arme el circuito en paralelo como lo muestra la figura a continuación, con las resistencias seleccionadas:



l) Fije un valor para el voltaje entregado por la fuente de poder V_{cc} , mida el voltaje V_0 sobre el circuito y la corriente I_{R1} , I_{R2} y I_{R3} sobre la resistencia que se desea medir, es decir, sobre R_1 , R_2 y R_3 respectivamente, reemplazando el amperímetro según sea necesario. Indique si se cumple o la ley de corriente de Kirchhoff (1^a ley)

V_{cc}	I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	V_0

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

5. Referencias

- Introducción al análisis de circuitos, Robert L. Boylestad, décima edición 2004, Pearson.
- Circuitos Eléctricos, James W. Nilsson, séptima edición 2005, Pearson.
- Physics for Science & Engineering, Serway, Jewett, octava edición 2009, Brooks Cole

Guía teórica N°2 – Condensadores

1. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio. Un tratamiento más detallado deberá ser buscado en libros de electricidad y magnetismo.

I) Condensador

El condensador es un dispositivo que puede almacenar carga eléctrica y energía. La forma más simple de un condensador consiste en dos placas conductoras paralelas. La energía es almacenada en el campo eléctrico entre las placas. El símbolo que se emplea en los circuitos eléctricos para describir un condensador es:

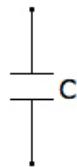


Figura 1: Representación de un condensador eléctrico.

La capacidad o capacitancia de un condensador se define por la relación:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad (1)$$

donde Q es la cantidad de carga acumulada y ΔV la diferencia de potencial entre sus placas. Si la carga se mide en Coulomb, y la diferencia de potencial en Volt, la capacidad se mide en Faradios (o Farad) F . La capacidad se define como una magnitud positiva.

II) Circuito RC

Debido al tiempo que el condensador tarda en cargarse y descargarse, podemos considerar dos estados diferentes en un circuito RC . El estado transiente corresponde al período después de conectar o desconectar el circuito, mientras el condensador se carga o descarga, respectivamente. El estado estacionario corresponde al comportamiento del circuito una vez que ha pasado suficiente tiempo desde la conexión o la desconexión y el condensador ha llegado a un estado de carga constante en el tiempo.

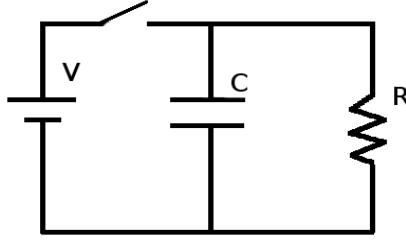


Figura 2: Representación de un circuito RC

En esta guía estudiaremos el estado transiente. Considere el circuito de la figura 2. El interruptor está inicialmente cerrado, de manera que el condensador está cargado con el voltaje de la fuente V . La magnitud de la carga en cada placa es $Q_0 = CV$. Entonces se abre el interruptor. El condensador empieza inmediatamente a descargarse, generándose una corriente eléctrica desde una placa del condensador, a través de la resistencia, hasta la otra placa. La correspondiente disminución de la carga en las placas del condensador hace que el voltaje V disminuya, con lo cual también disminuye la corriente. Así, la carga disminuye rápidamente al principio y después más y más lentamente.

La corriente que fluye por el circuito se debe a la descarga del condensador, entonces:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (2)$$

y por Ley de Ohm la corriente que pasa por la resistencia está dada por

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}. \quad (3)$$

Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene que la caída de tensión en la resistencia es $V(t) = Q(t)/C$, de manera que:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \quad (4)$$

Se desprende que la tasa de disminución de la carga, en cualquier momento, es simplemente proporcional a la carga restante. La única función que tiene esta propiedad es la exponencial, de manera que la solución de la ecuación anterior es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

El producto RC se llama la constante de tiempo τ del circuito. Para el tiempo $t = \tau$, la carga ha disminuido a una fracción $Q/Q_0 = e^{-1} = 0,368$ del valor original. Si se considera que la carga (o descarga) del condensador es suficientemente completa cuando se haya acumulado (o perdido) un 99 % de la carga, es fácil verificar que ello ocurre luego de un tiempo t del orden de 5τ . La evolución en el tiempo del voltaje y la corriente pueden obtenerse de la ecuación anterior

$$V(t) = V e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (6)$$

e

$$I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}. \quad (7)$$

II) Asociación de condensadores

Llamamos capacidad equivalente a un condensador imaginario que puede reemplazar a una serie de otros interconectados. Por ejemplo, al conectar en serie n condensadores de capacidades C_1, \dots, C_n , su capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (8)$$

Si en vez de conectarlos en serie, se hace en paralelo, entonces se obtiene:

$$C_{\text{equivalente}} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (9)$$

Note que nomencláticamente la forma de las capacidades equivalentes es al revés que en el caso de las resistencias. O sea, si se quiere aumentar la capacidad, se debe conectar más condensadores en paralelo. En cambio, si se quiere aumentar la resistencia, se deben agregar más resistencias en serie.

II) Analogías electromecánicas

Hay muchas analogías interesantes y útiles entre circuitos eléctricos y sistemas mecánicos. Uno de los más simples es la relación del circuito RC con el sistema mecánico que se muestra en la figura 3, que es una versión simplificada del amortiguador de un automóvil.

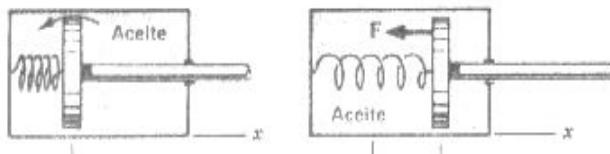


Figura 3: Amortiguador, pistón mecánico

El pistón está perforado, y el aceite pasa por los agujeros cuando el pistón se mueve. El resultado es que el pistón experimenta una fuerza opuesta al movimiento, la que depende de la velocidad, por la viscosidad del aceite. Para velocidades moderadas, esta fuerza es proporcional a la velocidad y puede expresarse como: $F = -bv$, donde b es una constante de proporcionalidad y el signo negativo indica que la fuerza siempre se opone al movimiento. El resorte ejerce también una fuerza sobre el pistón en movimiento. Cuando se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza $F = -kx$, donde k es la constante del resorte. La suma de estas dos fuerzas sobre el pistón debe ser igual a la masa del pistón multiplicada por su aceleración (de acuerdo con la segunda ley de Newton). Si la masa es despreciable, la suma de las dos fuerzas es cero, y se tiene:

$$-kx - bv = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{b}x \quad (10)$$

Esta ecuación diferencial tiene exactamente la misma forma que la ecuación de la descarga de un condensador, ecuación 4. El desplazamiento x corresponde a la carga Q y la velocidad v corresponde a la corriente I . Hay relaciones similares entre los parámetros de los componentes correspondientes: la constante de amortiguamiento b corresponde a la resistencia R , y la constante k del resorte es el

inverso de la capacidad C . Así, este análisis demuestra inmediatamente que si al amortiguador se le da un desplazamiento inicial x_o fuera del equilibrio, vuelve exponencialmente al equilibrio, según la ecuación:

$$x = x_o e^{-kt/b} \quad (11)$$

Guía de laboratorio N°2 – *Condensadores*

1. Resumen

En esta actividad práctica se realizan mediciones de voltaje sobre un condensador de capacidad C . El voltaje sobre el condensador o sobre un conjunto de condensadores de capacidad equivalente será denotado V_c . Se analizarán circuitos de configuración en serie y/o en paralelo, compuestos por resistencias y condensadores, lo que se conoce como circuitos RC . Las mediciones se realizan en el estado transiente de los circuitos en función del tiempo. Es importante destacar que los estados transientes que analizaremos corresponden a transiciones entre un voltaje constante (y por lo tanto de corriente continua) a otro voltaje constante. Por último, el objetivo es determinar experimentalmente la relación entre el voltaje V_c y el tiempo t para el proceso de carga y descarga de un condensador.

2. Objetivos

- Obtener la relación entre V_c y t para el proceso de carga y descarga de un condensador.

3. Materiales

- Fuente de poder
- Multímetro
- Cronómetro
- Resistencias
- Condensadores

4. Actividad práctica

Asociación de condensadores

- a) Seleccione tres condensadores del tablero y mida la capacidad de cada uno con el multímetro. Realice las siguientes conexiones: a) tres en paralelo, b) tres en serie, c) dos en serie y uno en paralelo, y d) dos en paralelo y uno en serie.
- b) Mida la capacidad equivalente con el multímetro en cada configuración.
- c) En el informe dibuje un esquema de los circuitos utilizados, indicando los valores de los componentes.
- d) En el informe, compare los resultados obtenidos en la medición con la fórmula. Comente sobre el error asociado a la medición con el multímetro.

Carga de un condensador

- e) Descargue el condensador. Para ello ponga sus dos terminales en contacto con un cable sin que haya otro elemento conectado al condensador. Arme el circuito como lo muestra la figura 1 donde $R = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$ y $V = 12 \text{ V}$. (*No alimente el circuito aún*).

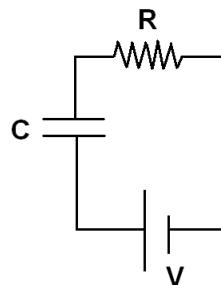


Figura 1: Diagrama del circuito, V representa el voltaje entregado por la fuente de poder. R representa la resistencia y C el condensador

- f) Utilizando un cronómetro y el multímetro mida el voltaje de forma simultánea sobre el condensador y la resistencia en función del tiempo, cada 5 segundos, durante 60 segundos. Considere $t = 0$ al conectar el cable de alimentación a la fuente. En la pagina web del curso podrá encontrar un cronómetro online, en la sección software (<http://www.dfi.uchile.cl/~metodos>).

g) Grafique la corriente y el voltaje sobre el condensador en función del tiempo. En Matlab puede ocupar la función **plot**(x,y ,'-o'). Imprima su gráfico.

h) Explique brevemente el comportamiento de ambos gráficos. ¿A qué valor tienden el voltaje y la corriente para $t = 5 \text{ RC}$ y $t = 10 \text{ RC}$?

i) ¿Cómo se modificarían las curvas anteriores si se cambiara el condensador por uno de $4,7 \mu\text{F}$?

j) ¿Cómo se modificarían las curvas anteriores si se cambiara el voltaje de la fuente a 5 V?

Estudio de un circuito RC

- k)** Descargue los condensadores. Arme el circuito como lo muestra la figura 2 donde $R = 1 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 4,7 \mu\text{F}$ y $V = 12 \text{ V}$. (*No alimente el circuito aún*).

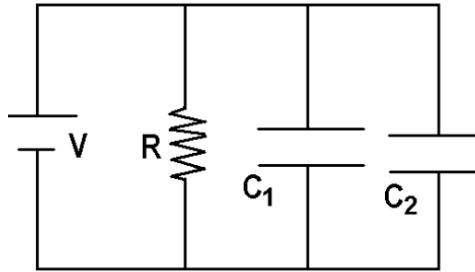


Figura 2: Diagrama del circuito, V representa el voltaje entregado por la fuente de poder. R representa la resistencia; C_1 y C_2 representan los condensadores.

- l)** Utilizando un cronómetro y el multímetro mida el voltaje a través la asociación de condensadores $C_{equivalente}$ en función del tiempo, durante 60 segundos, cada 5 segundos, de la siguiente forma: en $t = 0$ conecte la alimentación, en $t = 30 \text{ s}$ desconecte uno de los cables que va a la alimentación.
- m)** Con los valores registrados, grafique el voltaje a través del condensador C_1 , la corriente a través de la resistencia R y la potencia disipada por la resistencia en función del tiempo. Imprima sus gráficos.
- n)** A partir de sus gráficos explique el comportamiento de las cantidades medidas.
- o)** Explique en qué cambia cada gráfico si se reemplaza el condensador C_1 por uno de $4,7 \mu\text{F}$.

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

Guía teórica N°3 – Corriente alterna

1. Objetivos

- Familiarizarse con el manejo de un generador de ondas y un osciloscopio.
- Introducción al estudio de circuitos de corriente alterna.
- Introducción al estudio de una inductancia.

2. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio. Un tratamiento más detallado deberá ser buscado en libros de electricidad y magnetismo.

I) Corriente alterna

La potencia eléctrica que se distribuye para usos domiciliarios e industriales es casi universalmente una señal que tiene variación sinusoidal con el tiempo. Se denomina corriente alterna (abreviado CA o AC en inglés).

El suministro de potencia eléctrica en el laboratorio es en corriente alterna de una frecuencia de 50 Hz, es decir, tiene una forma de onda sinusoidal de periodo 20 milisegundos ($T = 1/f$). Una manera de caracterizar su voltaje es midiendo la diferencia entre un máximo y un mínimo de la onda, lo que se conoce como voltaje de extremo a extremo o *peak-to- peak* V_{PP} (el uso del anglicismo está generalizado). Si la onda es simétrica, la amplitud A de la onda corresponde a la mitad del voltaje *peak-to- peak*, como lo muestra la figura 1.

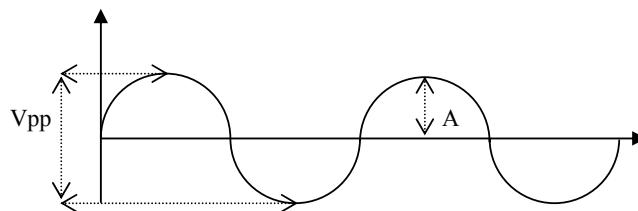


Figura 1: Demostración de V_{pp} , A .

Otra manera más habitual es expresar el voltaje a través del valor eficaz, en inglés *Root Mean Square*

o RMS. Este valor es la raíz cuadrada del promedio del cuadrado del valor instantáneo del voltaje. Por ejemplo, para un voltaje sinusoidal de amplitud A, es decir, $V(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$:

$$V(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) \quad (1)$$

$$\overline{V(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A \operatorname{sen}(\omega t))^2 d(\omega t) = \frac{1}{2} A^2 \quad (2)$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Análogamente

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{I(t)^2}} \quad (4)$$

La red eléctrica, por ejemplo, tiene una amplitud máxima de $A = 311$ V y un valor eficaz de 220 V_{rms}. Se puede demostrar que para una onda cuadrada simétrica $V_{\text{rms}} = A$, y para una triangular simétrica $V_{\text{rms}} = A/\sqrt{3}$. Para ilustrar el significado del término *valor eficaz* considere la potencia disipada térmicamente en una resistencia. La potencia disipada se obtiene sustituyendo $R = V/I$ en la ecuación de la potencia:

$$P(t) = I^2 R \quad (5)$$

Se ve que la potencia promedio disipada para una corriente alterna $I(t) = A \cos(\omega t)$ es:

$$\overline{P(t)} = \overline{I^2(t)}R = I_{\text{rms}}^2 R \quad (6)$$

La corriente alterna de magnitud I_{rms} tiene el *efecto* de una corriente continua de la misma magnitud en el sentido de que la potencia disipada promedio es la misma para ambas. De esta manera, desde un punto de vista energético, es mejor hablar de voltaje RMS que de *peak-to-peak*.

II) Inductancia

En 1831 Michael Faraday descubrió que el cambio del flujo magnético a través de un circuito cerrado induce un voltaje en el mismo, es decir, una fuerza electromotriz. Este descubrimiento conectó dos campos hasta entonces separados, la electricidad y el magnetismo, lo cual produjo una revolución en el desarrollo de máquinas eléctricas, motores y generadores. La relación entre flujo magnético Φ a través de una trayectoria cerrada y la fuerza electromotriz ε alrededor de la misma trayectoria se denomina Ley de Faraday y en el caso de un circuito puede escribirse como:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (7)$$

La constante L, definida como la constante de proporcionalidad en la relación anterior, se denomina autoinductancia (generalmente se habla solo de inductancia). La ecuación 7 muestra que un cambio de la corriente a través de una inductancia induce una fuerza electromotriz proporcional a dI/dt , opuesta al cambio. El análogo mecánico de la inductancia es la masa: una inductancia se comporta como un objeto masivo cuya inercia se opone a cualquier cambio de la velocidad (análogo mecánico de la corriente eléctrica).

Al igual que un condensador (el cual almacena energía en el campo eléctrico) una inductancia puede almacenar energía en el campo magnético generado por el flujo de corriente eléctrica. Para introducir un valor de inductancia en un circuito se usan dispositivos diseñados para maximizar la interacción entre corriente eléctrica y campo magnético. El método más común es geométrico: se enrolla alambre conductor en forma de un solenoide de modo que las contribuciones al campo magnético de un alambre largo se concentran en un espacio pequeño. Si se agrega un núcleo de algún material con alta permeabilidad magnética, tal como el hierro o la ferrita, el valor de la inductancia aumenta. La unidad de inductancia es el Henry, abreviado H. Una corriente que cambia a razón de 1 Ampere/segundo, induce una fuerza electromotriz de 1 Volt a través de una bobina de 1 H. Normalmente se usan submúltiplos tales como el mH (10^{-3} H) y el μ H (10^{-6} H), mili y micro Henry respectivamente.

III) Circuito RL

Aplicando las leyes de Kirchhoff para el circuito de la figura 2 se obtiene:

$$V - I \cdot R - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (8)$$

Resolviendo esta ecuación, imponiendo como condición inicial la conexión del circuito ($i(t=0)=0$), se obtiene la solución para la corriente:

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$

donde $\tau = L/R$. A partir de esta relación se puede obtener el valor en el tiempo de los voltajes sobre los diferentes componentes.

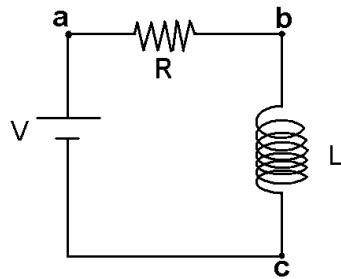


Figura 2: Circuito RL

IV) Observaciones sobre el osciloscopio

Desde ya se describen dos puntos que generan errores en el trabajo de laboratorio, con el fin de tenerlos en cuenta y evitarlos:

- Para medir una diferencia de potencial o voltaje, se mide entre dos puntos. Sin embargo, al medir con la punta de prueba del osciloscopio, sólo se toma un punto, ¿cuál es el otro? Los dos canales del osciloscopio tienen un retorno común. Eso significa que las partes de afuera metálicas, en la entrada de los conectores BNC, están conectadas entre los dos canales. Por lo tanto, con la punta de prueba se mide la diferencia de potencial entre la punta y el retorno del osciloscopio que está conectado al circuito a través del otro canal, mediante la banana que va al BNC que introduce la señal del generador. Este comentario es de gran relevancia, ya que permite entender qué es lo que está midiendo el osciloscopio.

b) En el osciloscopio existen tres formas de visualizar: AC, *Ground* y DC. Siempre, antes de medir, se recomienda usar el modo *Ground* para centrar la señal sobre el eje X de la pantalla. Posteriormente al medir se elige AC o DC, dependiendo si se desea visualizar la parte alterna o continua de la señal.

Guía de laboratorio N°3 – *Corriente alterna*

1. Objetivos

- Familiarizarse con el manejo del generador de señales y del osciloscopio.
- Introducción al estudio de circuitos de corriente alterna.
- Introducción al estudio de una inductancia.

2. Materiales

- Generador de señales
- Osciloscopio
- Multímetro

3. Actividad práctica

A) Práctica con el osciloscopio y el generador de funciones

Montaje A

- 1.- Conecte la salida del generador de funciones a la entrada del canal 1 del osciloscopio.
- 2.- Introduzca una señal triangular de alrededor de 500 Hz y 2 V_{pp}.

Medida A

- 1.- Mida el período de oscilación de la señal triangular a través de la señal observada en el osciloscopio.

Análisis A

- 1.- A partir del periodo medido, calcule la frecuencia y compare con el valor mostrado por el generador de señales.
- 2.- Practique con el osciloscopio, cambiando las escalas vertical y horizontal, pruebe el efecto de cambiar el disparo (trigger). Practique con el generador cambiando la amplitud y frecuencia de la señal, observe cómo cambia la señal en la pantalla.

B) Rango de validez del multímetro

Montaje B

- 1.- Prepare el multímetro para medir diferencia de voltaje alterno.
- 2.- Conecte la salida del generador de funciones con una T-BNC, al osciloscopio y al multímetro.

Medida B

- 1.- Introduzca una señal sinusoidal de 2 V_{pp} y 50 Hz. Varíe la frecuencia (unos diez datos) entre 50 Hz y 2 kHz. Genere una tabla que muestre el valor que mide el multímetro para esas frecuencias
- 2.- Repita el punto anterior con señales triangulares y cuadradas.
- 3.- Repita el punto 1, con el multímetro preparado para medir voltaje continuo.

Análisis B

1.- ¿Qué mide el multímetro: V_{pp} , V_{rms} o amplitud?

2.- La medición del multímetro depende de la frecuencia y a la forma de la señal. Para cada forma, explique cómo depende la lectura del voltímetro con la frecuencia. Indique cuándo esta medida es confiable (defina Ud. un criterio de confiabilidad).

C) Carga y descarga de un condensador

Montaje C

1.- Descargue el condensador.

2.- Arme el circuito de la figura 1 con $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10\,000 \text{ pF}$, la X en el círculo representa al osciloscopio. El sinusoide en el círculo representa al generador de señales con una señal cuadrada de 1 kHz y 2 V_{pp} . Recuerde que el signo "+" indica la entrada de la señal, y el "-" el retorno. Note que en esta configuración el osciloscopio recibe dos señales simultáneamente. Una de ellas es la señal directamente entregada por el generador de funciones, en el canal 1. El canal 2 registra la diferencia de potencial entre el punto "b" del circuito y el punto común (el "negativo" de la fuente); para que esta señal sea correctamente desplegada Ud, debe colocar la punta de prueba del osciloscopio en el punto "b".

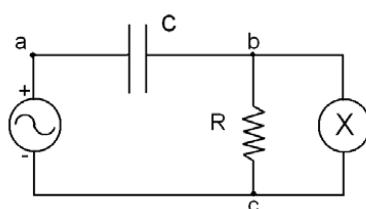


Figura 1: Circuito RC

Medida C

- 1.- Asegúrese de que en ausencia de señal ambas trazas del osciloscopio (canales 1 y 2) aparecen centradas. A esta operación se la denomina "centrar las tierras" del osciloscopio.
- 2.- En modo DC, observe la señal en el osciloscopio.

3.- Observe la señal en el osciloscopio al intercambiar en el circuito (con el generador de señales) la entrada de la señal por el retorno (o sea, “+” por “-”).

Análisis C

1.- Interprete la forma de la señal en el osciloscopio. ¿Cuál es la carga y cuál la descarga del condensador?

2.- Estime el valor de τ a partir de lo medido en el osciloscopio, y compare con el obtenido de multiplicar RC . Una forma eficiente de hacerlo es graficar la curva de voltaje versus tiempo en el computador y ajustarla con una curva apropiada.

3.- Explique el cambio observado al intercambiar la entrada. ¿Qué está midiendo en cada caso?.

4.- ¿Qué ocurre si la punta de prueba del osciloscopio se coloca en el punto “a” del circuito?

5.- ¿Qué ocurre si la punta de prueba del osciloscopio se coloca en el punto “c” del circuito?

D) Carga y descarga de una inductancia

Montaje D

1.- Arme el circuito de la figura 2 con $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, el sinusoide en el círculo representa al generador de señales con una señal cuadrada de 1 kHz y 2 V_{pp} .

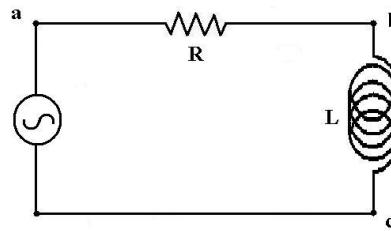


Figura 2: Circuito RL

Medida D

1.- Centre las tierras en el osciloscopio.

2.- En modo DC, observe el comportamiento del voltaje a través de la inductancia.

3.- En modo DC, observe el comportamiento del voltaje a través de la resistencia.

4.- Mida la resistencia interna de la inductancia.

Análisis D

1.- Interprete la forma de la señal en el osciloscopio. ¿Cuál es la carga y cuál la descarga de la inductancia?, ¿Por qué los valores finales de cada ciclo no son cero?

2.- Estime el valor de τ a partir de lo medido en el osciloscopio y compare con el obtenido de dividir L/R .

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

Guía teórica N°4 – *Filtros*

1. Objetivos

- Introducción al concepto de impedancia.
- Análisis de circuitos de corriente alterna.
- Filtros pasa alto y pasa bajo.
- Análisis de un circuito LRC en serie.
- Introducción al concepto de resonancia.

2. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio. Un tratamiento más detallado deberá ser buscado en libros de electricidad y magnetismo.

I) Estado transiente y estacionario

En el experimento de la guía 2 se estudió la respuesta transiente de un circuito RC, o sea, lo que ocurre durante el corto período de tiempo después que se ha aplicado un voltaje al circuito. Si se aplica un voltaje alterno y por lo tanto una corriente alterna (CA), en vez de un voltaje continuo, se observa una combinación de dos efectos: la respuesta transiente de corta duración y una de larga duración, que es la respuesta del estado estacionario. En esta ocasión se estudiará el estado estacionario.

En el estado estacionario son de particular interés las diferencias en amplitud y fase de los voltajes alternos a través de los elementos del circuito. Estas diferencias varían como una función de la frecuencia. En este experimento se estudiará la amplitud de los voltajes en el estado estacionario.

Considerar un circuito simple que consiste en una fuente de voltaje alterno, una resistencia y un condensador (Fig. 1). La ley de Kirchhoff de los voltajes se expresa:

$$\varepsilon_t = V_R + V_c \quad (1)$$

En el experimento de la guía 2 se vio que el tiempo requerido para cargar un condensador a un voltaje aplicado está dado por el tiempo característico $\tau = RC$. En el caso en que el período de oscilación T del voltaje alterno es corto ($T \ll RC$), la polaridad del voltaje se invierte antes de que el condensador adquiera una carga significativa. Luego los voltajes deben depender de la frecuencia

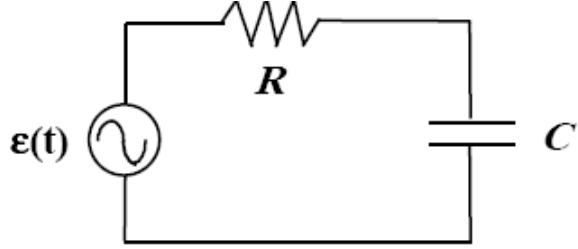


Figura 1: Circuito RC.

de la CA. Para calcular los valores de V_C y V_R en la respuesta de estado estacionario se usa el formalismo de impedancia.

II) Formalismo de impedancia

El formalismo de impedancia simplifica bastante el análisis, en comparación con la resolución por métodos generales de la ecuación diferencial del circuito (por ejemplo, la ecuación [1]). Sin embargo, sólo es aplicable a circuitos de CA con un forzamiento sinusoidal y en estado estacionario, o sea, después que la respuesta transiente ha diminuido a un nivel insignificante.

Primero se debe extender el concepto de resistencia para incluir condensadores e inductancias. Esta resistencia generalizada se denomina impedancia, se denota por Z y se define por la relación:

$$Z = \frac{V}{I} \quad (2)$$

El voltaje V y la corriente I son sinusoidales y pueden representarse en forma de exponentiales complejas como $V(t) = V_0 \exp(i\omega t)$ e $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$, siendo $i = \sqrt{-1}$, V_0 y I_0 las amplitudes y ω la frecuencia angular. Las cantidades físicas medibles corresponden a las partes reales de este tipo de expresiones.

Con las consideraciones anteriores se encuentra que:

1. Para una resistencia no hay cambio, su impedancia es :

$$Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R \quad (3)$$

2. Para un condensador se obtiene la impedancia utilizando la relación $Q = CV_C$. Suponiendo que $V_C(t) = V_0 \exp(i\omega t)$, se tiene:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t},$$

$$Z_C = \frac{V_C}{I} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{i\omega C V_0 e^{i\omega t}},$$

y por lo tanto,

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (4)$$

Se observa que un condensador se comporta como un corto circuito ($Z_C \rightarrow 0$) a frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$), y como un circuito abierto ($Z_C \rightarrow \infty$) a frecuencias bajas ($\omega \rightarrow 0$).

3. Para una inductancia se obtiene la impedancia utilizando la relación $V_L = LdI/dt$. Suponiendo que $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$, se tiene

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t},$$

$$Z = \frac{V_L}{I} = i\omega L.$$

Se observa que una inductancia se comporta como un corto circuito ($Z_L \rightarrow 0$) a frecuencias bajas ($\omega \rightarrow 0$), y como un circuito abierto ($Z_L \rightarrow \infty$) a frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$).

Una conexión en serie de dos impedancias tiene una impedancia equivalente que es la suma de las dos impedancias, como en la combinación en serie de dos resistencias. Por ejemplo, la impedancia equivalente de una resistencia en serie con un condensador es $R + 1/(i\omega C)$. En general, $Z_{\text{equiv}} = Z_1 + Z_2$, pero como las impedancias son complejas, puede suceder que $|Z_{\text{equiv}}| \neq |Z_1| + |Z_2|$. De manera también análoga a la asociación de resistencias en paralelo, la impedancia equivalente de dos elementos en paralelo es $Z_{\text{equiv}}^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$.

III) La respuesta de estado estacionario del circuito RC

Analizando el circuito de la Fig. 1 por el método de impedancias, la ley de Kirchhoff de los voltajes (ecuación [1]) se convierte en:

$$\varepsilon_t = V_R + V_C = I(Z_R + Z_C).$$

El circuito se reduce a un tipo de divisor de voltaje con dos elementos de impedancia en serie, parecidos a la combinación en serie de resistencias estudiada en el experimento de la guía 1. Entonces,

$$I = \frac{\varepsilon_t}{Z_R + Z_C}$$

y la caída de voltaje a través del condensador está dada por el análogo de la ley de Ohm,

$$V_C = IZ_C = \varepsilon_t \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}.$$

Sustituyendo Z_C y Z_R de las ecuaciones [3] y [4],

$$V_C = \varepsilon_t \left(\frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} \right) = \varepsilon_t \left(\frac{1}{1 + i\omega RC} \right). \quad (5)$$

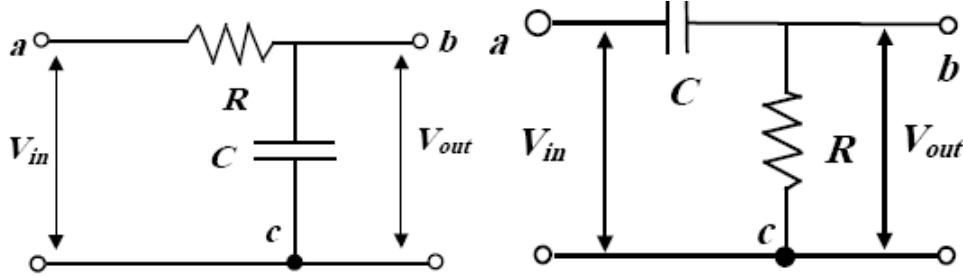


Figura 2: Izquierda: Filtro pasa bajos. Derecha: Filtro pasa altos.

IV) Filtros de frecuencia

El circuito en la Fig. 2-izquierda es igual al recién analizado, salvo que ahora se identifican ε_t con V_{in} , el voltaje de una señal de entrada, mientras que V_C se identifica como V_{out} , el voltaje de una señal de salida. Este circuito es un filtro pasa bajos, lo que se define como un circuito que “deja pasar” una señal de baja frecuencia sin alterar su amplitud ni su fase. La impedancia del condensador Z_C es grande para bajas frecuencias, entonces V_{in} pasa hacia V_{out} con poca atenuación. Al revés, Z_C es pequeño para frecuencias altas, así que las frecuencias altas son efectivamente bloqueadas en la salida. Lo que ocurre es que la señal de alta frecuencia es cortocircuitada a tierra (el punto c) por el condensador. (La división entre dominios de alta y baja frecuencia ocurre aproximadamente alrededor de $\omega = 1/RC$). En este experimento interesa la magnitud de V_{out} en relación con V_{in} . De la ecuación [5]:

$$\left| \frac{V_C}{\varepsilon_t} \right|^2 = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|^2 = \left(\frac{1}{1 + i\omega RC} \right) \left(\frac{1}{1 + i\omega RC} \right)^*$$

Donde el asterisco (*) representa el complejo conjugado. Entonces,

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \left| \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (6)$$

La razón $T(\omega) = |V_{out}/V_{in}|$ dada por la ecuación [6] se llama la función de transferencia del filtro pasa bajos.

Ahora, cambiando al circuito de la Fig.2-derecha, se identifica V_R como el voltaje de salida V_{out} . Este circuito es un filtro pasa alto. Para altas frecuencias el condensador tiene una impedancia muy baja y casi no cae voltaje a través suyo. Por lo tanto, V_{out} es casi igual a V_{in} . A baja frecuencia, la impedancia del condensador es muy grande y casi todo el voltaje cae a través suyo, siendo V_{out} muy pequeño. Es decir, las frecuencias altas “pasan” a través del filtro, mientras las frecuencias bajas no. La magnitud V_{out} en relación a V_{in} es

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \left| \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}},$$

donde

$$V_R = IZ_R = \varepsilon \left(\frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \right)$$

V) El circuito LC

Este circuito consiste en una inductancia (L) y un condensador (C). Al plantear la ley de Kirchhoff para los voltajes se obtiene inmediatamente la ecuación diferencial que rige el sistema:

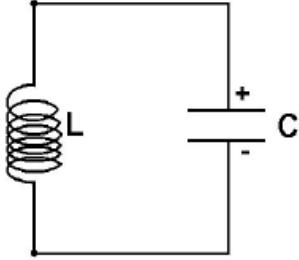


Figura 3: Circuito LC.

$$V_C + V_L = 0,$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 &\iff \frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \\ &\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos(\omega_o t + \phi) \end{aligned}$$

con

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC},$$

que es la frecuencia de resonancia del circuito LC.

El sistema LC es un oscilador eléctrico, análogo a su par mecánico, pero que transfiere energía desde el campo eléctrico del condensador hacia el campo magnético de la inductancia, y viceversa. Como no hay disipación vía una resistencia, estas oscilaciones son indefinidas, como las de un oscilador mecánico sin disipación, y su frecuencia de oscilación ω_o es la frecuencia natural del circuito.

VI) El circuito RLC y el factor de calidad

Si al circuito anterior se le agrega una resistencia en serie se forma un circuito RLC. En este caso, la resistencia hace que la energía del circuito se disipe térmicamente. Como consecuencia las oscilaciones se amortiguan (Fig. 4). Si se considera “E” como la energía total y “ ΔE ” la pérdida de energía por ciclo, se define el *factor de calidad* Q^* como:

$$Q^* = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (7)$$

Esto significa que un circuito donde las pérdidas de energía sean pequeñas se puede considerar como de alta calidad ($Q^* \gg 1$).

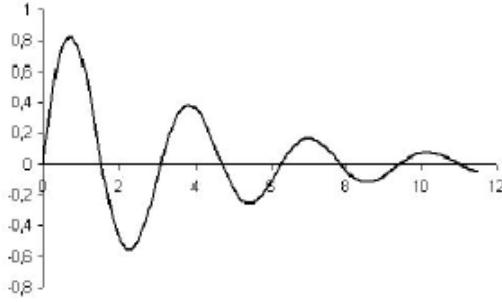


Figura 4: Oscilaciones amortiguadas.

VII) El circuito RLC forzado sinusoidalmente.

Cuando se lo excita por una fuente de voltaje alterno sinuosidal, un circuito LRC se comporta como una combinación de circuitos RC y LR. La impedancia total es

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}, \quad (8)$$

cuya magnitud es

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (9)$$

A frecuencias bajas el circuito se comporta como uno RC, y a frecuencias altas, como un circuito RL. Por otra parte, para frecuencias cercanas a la frecuencia natural ω_0 del circuito LC, las contribuciones de la inductancia y del condensador a la impedancia total (ecuación [9]) se cancelan y la corriente queda limitada solo por la resistencia R: la corriente es $I = V_{in}/R$. Si R es suficientemente pequeño, la corriente puede ser muy grande en un intervalo estrecho de frecuencias cercanas a ω_0 . Este fenómeno se llama resonancia (ver Fig. 5).

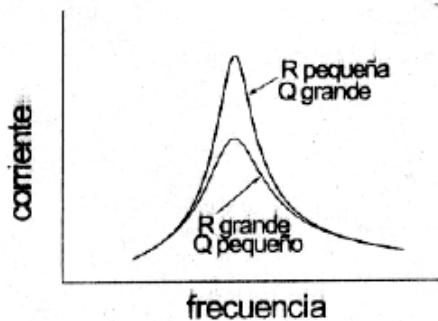


Figura 5: Curva de resonancia del sistema.

El voltaje a través de la inductancia a la frecuencia ω_0 es:

$$|V_L| = |IZ_L| = |I|\omega_0 L = |V_{in}| \frac{\omega_0 L}{R} \quad (10)$$

El voltaje a través del condensador, V_C , tiene la misma magnitud que V_L pero de fase opuesta, de manera que se cancelan. Cuando R es pequeño ($R \ll \omega_0 L$), los voltajes V_L y V_C pueden ser mucho

más grandes que el voltaje de la fuente, V_{in} . La razón de voltajes $|V_L|/|V_{in}|$ es una medida de la “calidad” del circuito resonante. De la ecuación [10] se ve que es igual a $\omega_0 L/R$. Esto entrega otra forma de calcular el factor de calidad Q^* definido en la ecuación [7]

$$Q^* = \omega_o \frac{L}{R}. \quad (11)$$

VIII) La respuesta transiente de un circuito RLC.

Cuando se aplica bruscamente un voltaje al circuito LRC, hay tres posibilidades dependiendo de la resistencia en el circuito. Se define una resistencia crítica:

$$R_{crítica} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C \quad (12)$$

se consideran los tres casos de $R < R_C$, $R = R_C$ y $R > R_C$.

Oscilaciones amortiguadas. Para $R < R_C$:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau'} e^{i\Omega t} \quad (13)$$

La corriente en el circuito oscila sinusoidalmente con una amplitud que disminuye (ver Fig. 4) con un tiempo característico τ' :

$$\tau' = 2\frac{L}{R} \quad (14)$$

La frecuencia Ω depende de ω_o y τ' . Para resistencias bajas, en la práctica, $\Omega \approx \omega_o$. Esto implica que para el circuito LC ideal, $R \rightarrow 0$ y $\tau' \rightarrow \infty$, el circuito oscila indefinidamente a su frecuencia natural ω_o . El parámetro τ' está relacionado con Q^* por

$$Q^* = \tau \frac{\omega_o}{2}. \quad (15)$$

Sobreamortiguamiento también llamado *amortiguamiento supercrítico*: Para $R > R_C$ la resistencia es tan grande que impide completamente las oscilaciones. La corriente decae exponencialmente con el tiempo en la forma $I(t) = A \exp(-a_1 t) + B \exp(-a_2 t)$ donde $a_1 = -1/\tau + (1/\tau^2 - \Omega_o^2)^{1/2}$ y $a_2 = -1/\tau - (1/\tau^2 - \Omega_o^2)^{1/2}$

Amortiguamiento crítico: Es el caso límite entre los dos comportamientos. La resistencia $R = R_C$ es suficiente para impedir las oscilaciones. La corriente decrece exponencialmente de una forma ligeramente diferente al caso sobreamortiguado: $I(t) = (A + Bt) \exp(-t/\tau')$.

VIII) El estado estacionario.

Cuando el circuito se fuerza con un voltaje sinusoidal $V_{in}(t) = V_o \exp(i\omega t)$, la corriente será también sinusoidal $I(t) = I_o \exp(i\omega t)$. Su magnitud en estado estacionario es $|I| = |V_{in}/Z|$ donde la impedancia total está dada por la ecuación [9]. Ésta pasa por un mínimo cuando se alcanza la frecuencia natural ω_o . Reemplazando este valor en la impedancia total se puede obtener la siguiente expresión para la corriente:

$$|I_o(\omega)| = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}. \quad (16)$$

Esta expresión tiene un máximo en $\omega = \omega_o$, que es la corriente de resonancia. En perfecta analogía con un oscilador armónico forzado, la resonancia ocurre cuando el circuito se excita por una fuente de voltaje alterno a la frecuencia natural de oscilación.

La “agudeza” de la resonancia tiene interés. Cuando R es pequeño, el máximo es agudo. Con valores mayores de R , el máximo es más ancho. Para R fijo, a los dos valores de ω en que $|\omega L - 1/\omega C| = R$, la corriente $I(\omega)$ decrece en el factor $1/\sqrt{2}$ desde su valor máximo $I(\omega_0)$. Definiendo esas frecuencias como $\omega_0 \pm \Delta\omega$ (ver figura 6) encontramos que $\Delta\omega$ es aproximadamente

$$\Delta\omega = \frac{R}{2L}. \quad (17)$$

El ancho de la curva de resonancia está relacionado con los parámetros previamente definidos para definir las oscilaciones amortiguadas. Si se nota que:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau'}, \quad (18)$$

y

$$Q^* = \frac{\omega_o}{2\Delta\omega}, \quad (19)$$

se ve que hay un estrecho puente entre la resonancia y las oscilaciones amortiguadas que ocurren en la respuesta transiente del circuito.

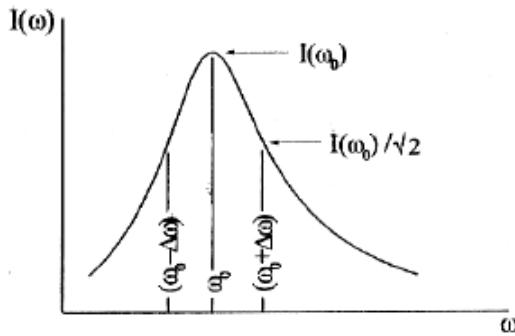


Figura 6: Ancho de la curva de resonancia.

Guía de laboratorio N°4 – *Filtros*

1. Materiales

- Osciloscopio
- Generador de funciones

2. Actividad práctica

A) Filtros pasa-alto y pasa-bajo

Montaje A

1.- Arme el circuito de la figura 1 con $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 10\,000 \text{ pF}$.

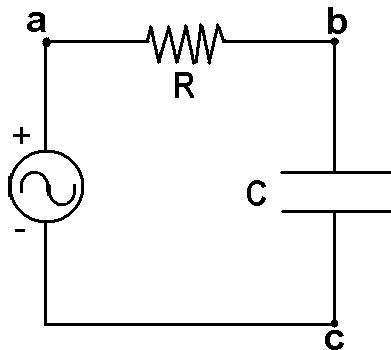


Figura 1: Circuito RC

Medida A

1.- Para este filtro estime la frecuencia de corte ω^* como $\omega^*\tau \approx 1$, con τ la constante de tiempo del circuito RC. A continuación mida la función transferencia del filtro como función de la frecuencia, considerando al menos unas 15 frecuencias en un rango que incluya la frecuencia de corte.

Nota: ω es la frecuencia angular expresada en radianes por segundo [rad/s], las mediciones deben ser expresadas en Hertz [Hz] por lo que debe convertir las unidades.

Análisis A

1.- Grafique la función transferencia en doble escala logarítmica (función loglog en matlab), ¿es un filtro pasa-bajo o pasa-alto?

Montaje B

1.- Arme el circuito de la figura 2 con $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 10\,000 \text{ pF}$.

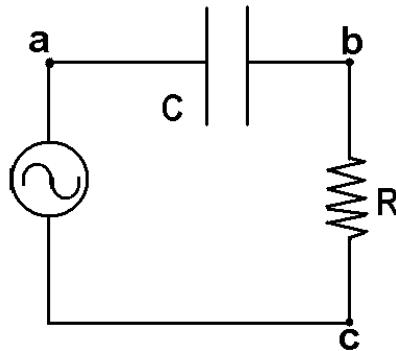


Figura 2: Circuito RC

Medida B

1.- Mida la función transferencia del filtro como función de la frecuencia de manera análoga a lo realizado en la medida A.

Análisis B

1.- Grafique la función transferencia en escala logarítmica, ¿es un filtro pasa-bajo o pasa-alto?

B) Filtro pasa–banda

Montaje A

1.- Arme el circuito de la figura 3 con $C = 3300 \text{ pF}$ y $L = 22 \text{ mH}$. R representa la suma de la resistencia de la bobina y la resistencia interna de la fuente (50Ω), esto significa que no debe agregar otra resistencia al circuito.

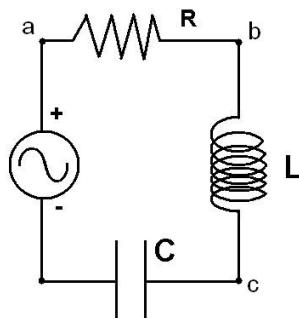


Figura 3: Circuito RLC

Medida A

1.- Mida la función transferencia del filtro como función de la frecuencia. Tenga presente de que las medidas se deben realizar entorno a la frecuencia natural del circuito $\omega_o = \sqrt{1/(LC)}$.

Análisis A

1.- Grafique la función transferencia en escala logarítmica.

Montaje B

1.- En el circuito de la figura 3, reemplace R por una resistencia variable (potenciómetro) de 10 k Ω .

Medida B

1.- Introduzca una señal cuadrada de 2 V_{PP} y 200 Hz.

Análisis B

1.- Cambiando el valor de la resistencia, estudie los distintos tipos de amortiguamiento. Estime el valor de “ L ”.

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

Guía teórica N°5 – *Diodos*

1. Objetivos

- Circuitos rectificadores
- Estudio de una aplicación práctica: la fuente de corriente continua.
- Práctica con el osciloscopio.

2. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio. Un tratamiento más detallado deberá ser buscado en libros de electrónica, física electrónica o (algunos) electromagnetismo.

I) El diodo

Esta es la primera actividad en que se trabajará con semiconductores, considerando el diodo como primer ejemplo.

Los dispositivos semiconductores se fabrican de silicio (principalmente, aunque también se usan otros semiconductores), al cual se le agregan cantidades pequeñas de impurezas apropiadas que alteran las propiedades originales del material. Un átomo de impureza que reemplaza un átomo en un cristal de silicio puede producir localmente un exceso o un déficit de electrones, dependiendo del número de electrones de valencia que tenga la impureza. Los electrones en exceso pueden migrar, produciendo portadores negativos, como en la conducción eléctrica de los metales. Los electrones en déficit, llamados huecos, también pueden migrar, produciendo portadores positivos. Los materiales semiconductores con impurezas que producen electrones libres se llaman semiconductores tipo *n*. Por otra parte, los semiconductores que tienen impurezas que producen huecos se llaman semiconductores tipo *p*. Un diodo semiconductor consiste en un trozo de material tipo *n* en contacto con un trozo de material tipo *p* (Fig. 1).

En una zona cercana al área de contacto (conocida como la “juntura”) los electrones libres y los huecos se neutralizan. Si se aplica un campo eléctrico que produzca la migración de otros electrones y huecos hacia la juntura, también se recombinan y así fluye la corriente. Por otra parte, si el campo eléctrico tiene dirección contraria, de manera que los electrones y los huecos se mueven alejándose de la juntura, la corriente se anula. De esta manera, la juntura *n-p* actúa como una válvula que permite el paso de la corriente en una dirección solamente. Un comentario adicional: la juntura no es un

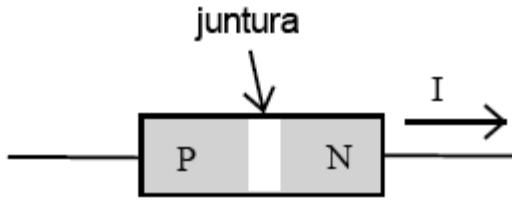


Figura 1: Diodo semiconductor de juntura.

“terreno plano”, en el sentido que para que un electrón pueda cruzar esa zona debe gastar un poco de su energía cinética. Así, la juntura resulta ser una brecha de potencial y tiene un valor característico que dependerá del tipo de semiconductor que se use, por ejemplo para el silicio esa brecha es de casi 1 V. Si la diferencia de potencial aplicada es menor a la de la brecha, no habrá corriente eléctrica. La Fig. 2a representa el esquema de un diodo tal como se emplea en los diagramas de los circuitos. La Fig. 2b muestra el aspecto externo de un diodo. Hay una banda pintada a un costado del cilindro, para indicar la polaridad del diodo. En las Fig. 2a y 2b, la flecha indica la dirección de la corriente según la convención estándar, o sea, una corriente positiva fluye desde los puntos de potencial más alto a los puntos de potencial más bajo.

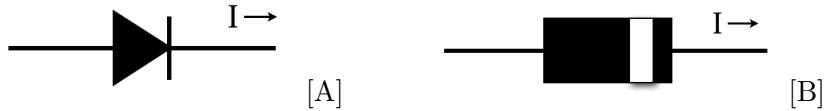


Figura 2: [A] Representación de un diodo. [B] Aspecto externo.

I) Circuito rectificador de media onda

Considerar un circuito compuesto por un diodo y una resistencia conectados a un voltaje sinusoidal, como se muestra en la figura 3 (derecha). Durante el semiciclo positivo del voltaje aplicado el diodo queda polarizado en directo, permitiendo el paso de la corriente a través de él. Si el diodo se considera como ideal, éste se comporta como un cortocircuito, (Fig. 3), entonces toda la tensión aparecerá a través de la resistencia.

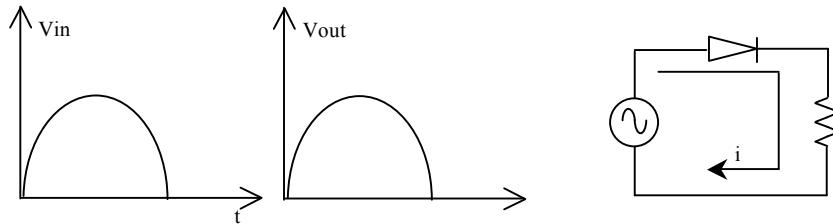


Figura 3: Polarización directa. (Izquierda) V_{in} y V_{out} en función del tiempo. (Derecha) Circuito con un diodo y una resistencia. En esta parte del ciclo circula una corriente I no nula.

Durante el semiciclo negativo, la corriente entregada por el generador de funciones querrá circular en sentido opuesto a la flecha del diodo. Si el diodo se considera como ideal entonces éste actúa como un circuito abierto y no habrá flujo de corriente (Fig. 4). Los diodos reales presentan una pequeña

corriente de fuga el ser polarizados en inversa.

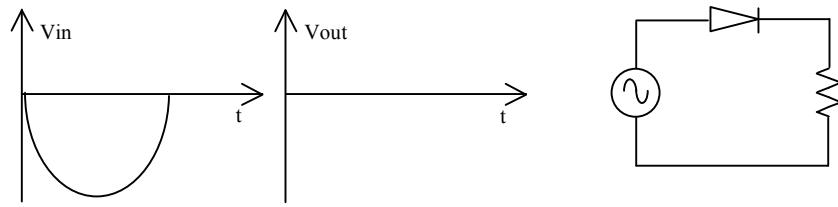


Figura 4: Polarización inversa. (Izquierda) V_{in} y V_{out} en función del tiempo. (Derecha) Circuito con un diodo y una resistencia. En esta parte del ciclo no circula corriente, por ello V_{out} es nulo.

La forma de onda de salida de un rectificador de 1/2 onda será como se muestra en la figura 5.

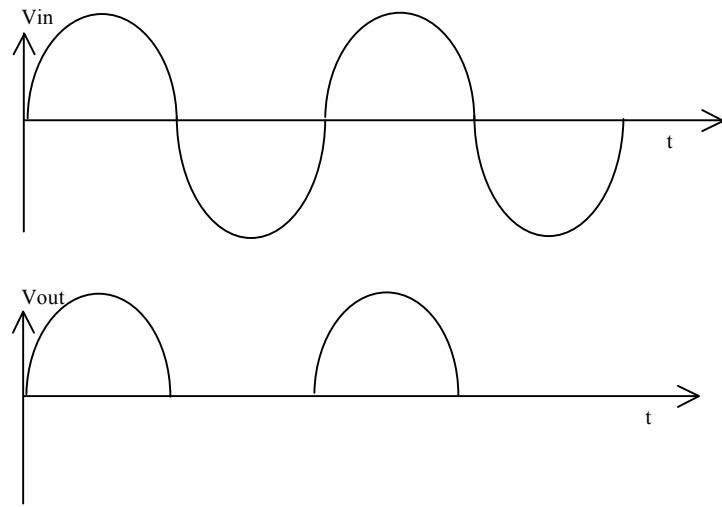


Figura 5: Rectificador de media onda.

Efecto de un condensador en paralelo: suavización de la respuesta

Suponer que al circuito anterior se le agrega un condensador en paralelo con la resistencia, como se muestra en la figura 6 (izquierda). Cuando el diodo conduce el condensador se carga al voltaje máximo V_{max} . Después de esto se descargará con una constante de tiempo $\tau = RC$. Si este tiempo es corto (nulo en el límite $C \rightarrow 0$), entonces V_{out} será igual a V_{in} como antes. Pero en el caso más general $C > 0$, si C es suficientemente grande, el tiempo de descarga podría ser mayor a la mitad del período de voltaje de entrada, como se muestra en la figura 6 (derecha). El condensador no alcanza a descargarse completamente antes de ser forzado otra vez por V_{in} . Se pueden imaginar el circuito como el forzamiento mediante vibraciones de una pelota que descansa sobre un plato que oscila sinusoidalmente inmerso en un fluido viscoso. Suponiendo que la pelota despegue cuando se alcanza la altura máxima (lo que no es realmente cierto), lo cual corresponde a V_{max} en este circuito, ésta caerá lentamente hasta ser atrapada otra vez por el plato que vibra sinusoidalmente.

II) Fuente de corriente continua.

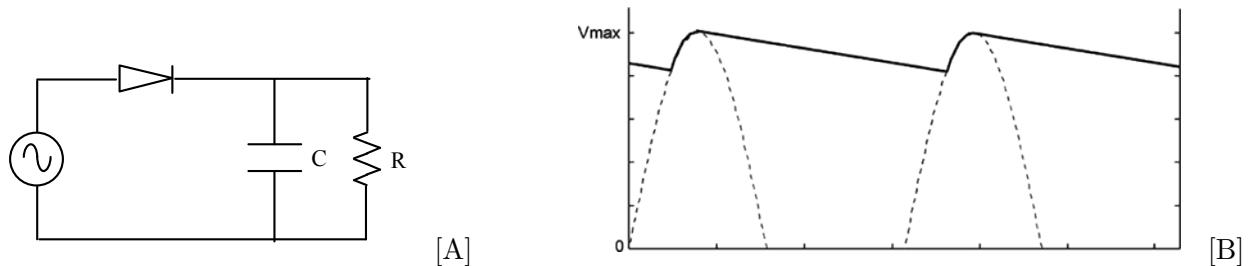


Figura 6: [A] y [B] Representaciones de una fuente de poder.

Un circuito rectificador convierte voltaje alterno en una señal de voltaje continuo. En realidad, la señal de salida es solo aproximadamente continua, con una pequeña oscilación pero con un valor promedio (parte continua) importante. Por ejemplo, un circuito rectificador puede convertir el voltaje alterno de la red, el que tiene voltaje promedio cero, a una señal con voltaje promedio 12 V, permitiendo reemplazar una batería. Muchas fuentes de poder de equipos eléctricos (como computadores portátiles) funcionan de esta manera. Otro ejemplo lo representa una fuente de corriente continua, como la ocupada en los primeros experimentos, la cual se conecta al voltaje alterno de la red.



Figura 7: Circuito rectificador

Dentro de un circuito rectificador existen una serie de componentes que son comunes a cualquier circuito de este tipo. Algunos de ellos ya los conocemos y se estudiará su comportamiento dentro de esta aplicación particular. Otros exceden los contenidos de este curso, por lo que solamente serán nombrados.

Algunos componentes comunes a un circuito rectificador son: transformador, puente de diodos, condensadores y regulador de voltaje.

En este experimento el transformador está incorporado dentro de las fuentes de voltaje alterno. El regulador de voltaje será omitido en esta ocasión. En lo inmediato se debe entender qué es un puente de diodos.

Rectificador de onda completa con puente de diodos.

Es un elemento formado por cuatro diodos conectados como se muestra en la figura 8. Entre los puntos “a” y “b” se introduce la señal de entrada. Los puntos “c” y “d” son las salidas, indicando con un símbolo “+” o “-”, si es positiva o negativa.

La forma física de un puente varía desde un cuadrado con un dibujo en su base igual a la figura, hasta un ordenamiento lineal de las salidas.

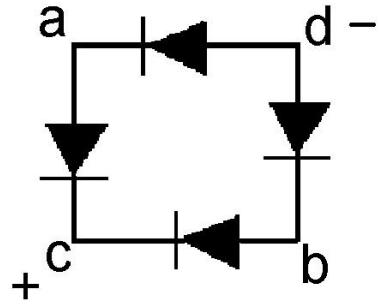


Figura 8: Puente de diodos.

Para identificar los terminales en los cuadrados se rotula como + aquel donde confluyen las corrientes en polarización directa, el punto *c* en la figura. El punto opuesto (*d* en la figura) será el negativo y los otras dos (*a* y *b* en la figura) las entradas. En los puentes con ordenamiento de terminales de forma lineal, habitualmente se indica el “+”, en un extremo, en el centro las entradas y el “-” en el otro extremo.

Los diodos D_1 y D_3 se polarizan en directo en el semiciclo positivo, durante el cual los diodos D_2 y D_4 están polarizados en sentido inverso. La corriente siempre pasará por la resistencia en el mismo sentido. La situación se invierte simétricamente durante el ciclo negativo.

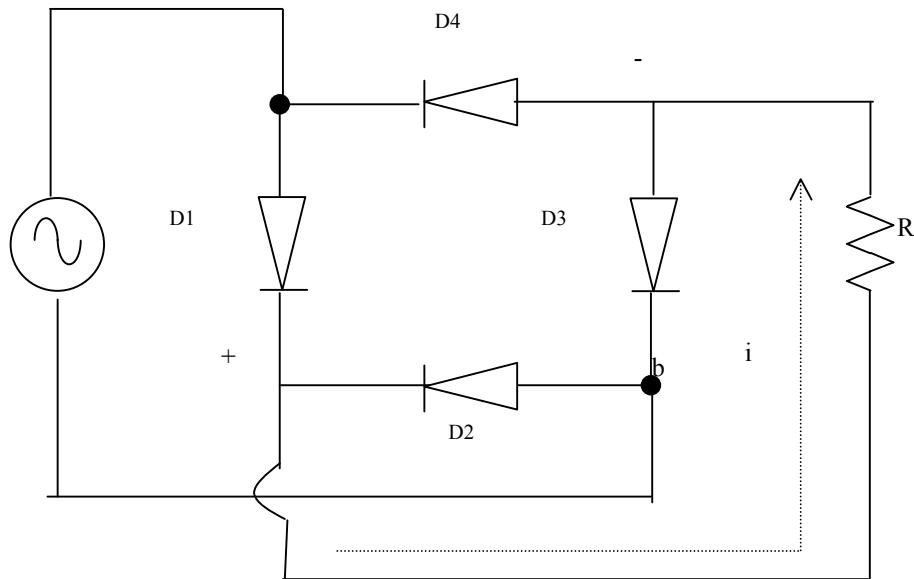


Figura 9: Circuito rectificador de onda completa.

II) Consideraciones experimentales.

Acoplamiento AC/DC en el osciloscopio.

Para observar una señal en el osciloscopio se puede ver su “componente continua” o su “componente alterna”. Para explicar mejor esto conviene pensar en una señal sinusoidal de amplitud 1 V, que oscila en torno a 5 V, con respecto a alguna tierra. Si se pide al osciloscopio mostrar la parte continua (acoplamiento DC), aparecerá la señal sinusoidal, 5 V sobre la tierra. Si en cambio se pide la parte alterna (acoplamiento AC), aparecerá el sinusoide de 1 V de amplitud, centrado en torno a la tierra.

Medidas con el osciloscopio en circuitos diferentes.

Recordar que las dos entradas del osciloscopio tienen tierra común, luego basta con conectar una de las tierras y automáticamente se estará midiendo el voltaje entre la punta y la tierra ya conectada. Así por ejemplo, cuando se conecta el generador de ondas, y puesto que éste va conectado al osciloscopio, la punta de prueba mide el voltaje entre ella y la tierra del generador de ondas. En un caso más general se puede querer medir la diferencia de voltaje entre dos puntos arbitrarios. En ese caso se debe agregar una segunda punta al osciloscopio (desconectando un canal que esté conectado al generador de funciones, por ejemplo) y medir los dos voltajes con el osciloscopio, uno con cada canal. En este caso se pueden restar las señales usando la opción de operación matemática del osciloscopio (MATH, botón rojo).

Guía de laboratorio N°5 – Diodos

1. Materiales

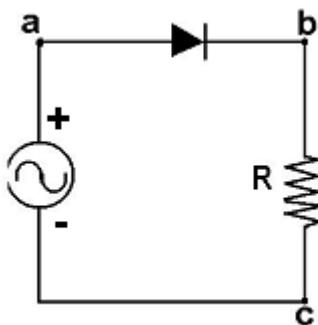
- Fuente (generador de funciones o fuente de tensión alterna)
- Osciloscopio
- Multímetro

2. Actividad práctica

A) Rectificador de media–onda

Montaje A

1.- Arme el circuito de la figura con $R = 1 \text{ k}\Omega$, el generador de señales y el diodo.



Medida A

- 1.- Introduzca una señal sinusal de 4 V_{PP} y 200 Hz si se usa el generador de funciones, o el voltaje que se indique en la pizarra si se usa una fuente de tensión alterna.
- 2.- Centre la tierra del osciloscopio y observe la señal entregada por el generador con acoplamiento AC y DC (cámbielo en el menú del canal).
- 3.- Centre la tierra del osciloscopio y observe la señal a través de la resistencia con acoplamiento AC y DC.
- 4.- Observe en el osciloscopio el efecto de invertir la polaridad del diodo y de invertir la polaridad de la señal de entrada.

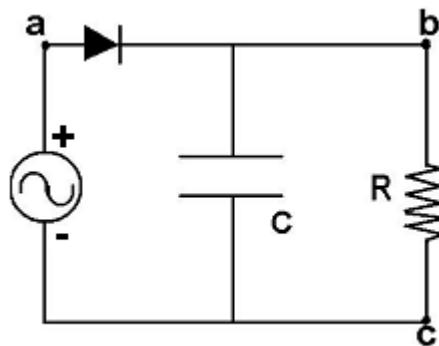
Análisis A

1.- Dibuje la señal de entrada y la señal a través de la resistencia con acoplamiento DC, observadas en el osciloscopio.

2.- Explique las diferencias entre ellas, las diferencias de amplitud, el efecto del acomplamiento AC/DC y el efecto de invertir polaridad tanto en el diodo como en el generador.

Montaje B

1.- Arme el circuito de la figura con $R = 1 \text{ k}\Omega$ y C un condensador a indicar.



Medida B

1.- Introduzca una señal sinusoidal de 4 V_{PP} y 200 Hz si se usa el generador de funciones, o el voltaje que se indique en la pizarra si se usa una fuente de tensión alterna.

2.- Con el osciloscopio, en acoplamiento DC y AC, note el cambio en la señal a través de la resistencia al conectar y desconectar el condensador de $4,7 \mu\text{F}$.

3.- Con el osciloscopio, en acoplamiento DC y AC, note el cambio en la señal a través de la resistencia al conectar y desconectar un condensador de $10 \mu\text{F}$.

Análisis B

1.- Dibuje la señal a través de la resistencia cuando el condensador de $10 \mu\text{F}$ está conectado.

2.- Explique la forma de esta señal a partir de los conceptos de carga y descarga del condensador. Estime el correspondiente τ .

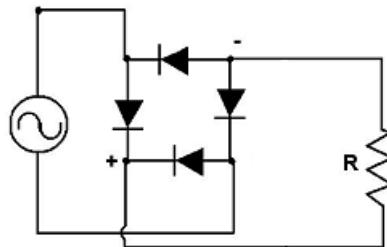
3.- Explique cómo se vería afectada la señal a través de la resistencia si se aumenta o disminuye la frecuencia de la señal del generador (si es que lo usa) y justifique por qué ocurre esto.

B) Rectificador de onda completa

En esta parte, al medir con el osciloscopio sobre el circuito, debe desconectar la fuente (generador de señales o fuente alterna) del osciloscopio desconectando el cable BNC o los banana de la fuente.

Montaje A

1.- Arme el circuito de la figura con el puente de diodos, sea cuidadoso al conectarlo. Use $R = 1 \text{ k}\Omega$.



Medida A

1.- Introduzca una señal sinusoidal de 4 V_{PP} y 200 Hz.

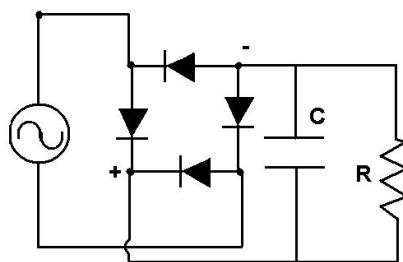
2.- Con el osciloscopio, en acoplamiento DC, observe la señal a través de la resistencia. Este es un caso donde se va a medir la diferencia de voltaje entre dos puntos arbitrarios. Para ello, agregue una segunda punta de prueba al osciloscopio, o un cable BNC y un adaptador BNC-Banana (desconectando un canal que este conectado al generador de funciones por ejemplo) y mida los dos voltajes simultáneamente con el osciloscopio, uno con cada canal. A continuación, reste las señales de los canales CH1 y CH2 usando la opción de operación matemática del osciloscopio (MATH, botón rojo).

Análisis A

1.- Dibuje la señal a través de la resistencia y explique su forma en función del puente de diodos.

Montaje B

1.- Arme el circuito de la figura con el puente de diodos. sea cuidadoso al conectarlo (que no haya corte entre medio). Use $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 10 \mu\text{F}$.



Medida B

1.- Introduzca una señal sinusoidal de 4 V_{PP} y 200 Hz si se usa el generador de funciones, o el voltaje que se indique en la pizarra si se usa una fuente de tensión alterna.

2.- Con el osciloscopio observe la señal a través de la resistencia con acoplamiento AC y DC (previamente centre las tierras).

3.- Con el multímetro mida en modo AC y DC, el voltaje de la señal de entrada y el voltaje a través de la resistencia.

Análisis B

- 1.- Dibuje la señal a través de la resistencia con acoplamientos AC y DC, explique su forma en función de los componentes del circuito (cómo afecta cada elemento la señal).
- 2.- Explique los resultados de la medición con el multímetro.

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

Guía Teórica N°6 – Tarjeta de Adquisición

1. Objetivos

- Familiarizarse con el manejo de una tarjeta de adquisición y con la conversión analógica- digital.
- Introducción al uso de programas de adquisición y tratamiento de datos.

2. Introducción

La siguiente guía es una referencia rápida a los conceptos usados en este laboratorio.

I) Conversión analógica-digital

En ingeniería y ciencias se trata constantemente con señales analógicas, como la fuerza aplicada sobre un pilar, la tensión de la red eléctrica, la velocidad de un flujo hidrodinámico, etc. Estas señales que varían continuamente en el tiempo son analizadas y medidas a través de diversos instrumentos, que pueden ser analógicos o digitales. Los primeros hacen medidas en base a respuestas obtenidas a partir de la señal eléctrica original, como el movimiento de una aguja en un amperímetro como respuesta al campo magnético producido por una corriente directa. Los instrumentos digitales, por otro lado, tales como el multímetro y el osciloscopio digital, transforman las señales eléctricas a un conjunto finito de datos para que estos sean procesados. Para hacer eso, las señales son discretizadas usando diferentes parámetros. Principalmente ellos son:

- La frecuencia de muestreo, también llamada frecuencia de adquisición o “sampling frequency” en inglés, es la cantidad de muestras por segundo que se toman de la señal analógica para su conversión digital. Es entonces el inverso del intervalo temporal que hay entre dos medidas consecutivas de una señal. Como ejemplo, si un instrumento tiene una frecuencia de muestreo de 10 kS/s (10 kilo “samples” por segundo), o también denotado como de 10 kHz, entonces es capaz de medir 10 000 datos en un segundo. A veces esta frecuencia de muestreo es fija, y otras veces es variable, es decir controlable por el usuario, pero con una cota superior, la cual está indicada en la documentación del instrumento.
- La resolución de la tarjeta es la diferencia mínima entre dos diferencias de voltaje de la señal digitalizada. Este valor está asociado directamente a los valores máximo y mínimo que se desea medir y a la cantidad de información que puede guardarse en cada medida (bits). Por ejemplo, un instrumento de 8 bits divide el rango máximo de medida en $2^8 = 256$ “pedazos”, o datos

posibles discretos. Así, para un rango de 10 V, para un instrumento que mide entre -5 y $+5$ V, la resolución será de $10/256$ V $\approx 0,039$ V. Una manera equivalente de expresarlo es que se mide el valor absoluto entre entre 0 y 5 V, usando 7 bits en lugar de 8, o sea con $2^7 = 128$ datos, pero se guarda un bit para el signo (+ o -). Esto puede hacerse para cualquier número N de bits. En este caso se divide el rango de medición entre -2^{N-1} y $+2^{N-1} - 1$ en escala binaria.

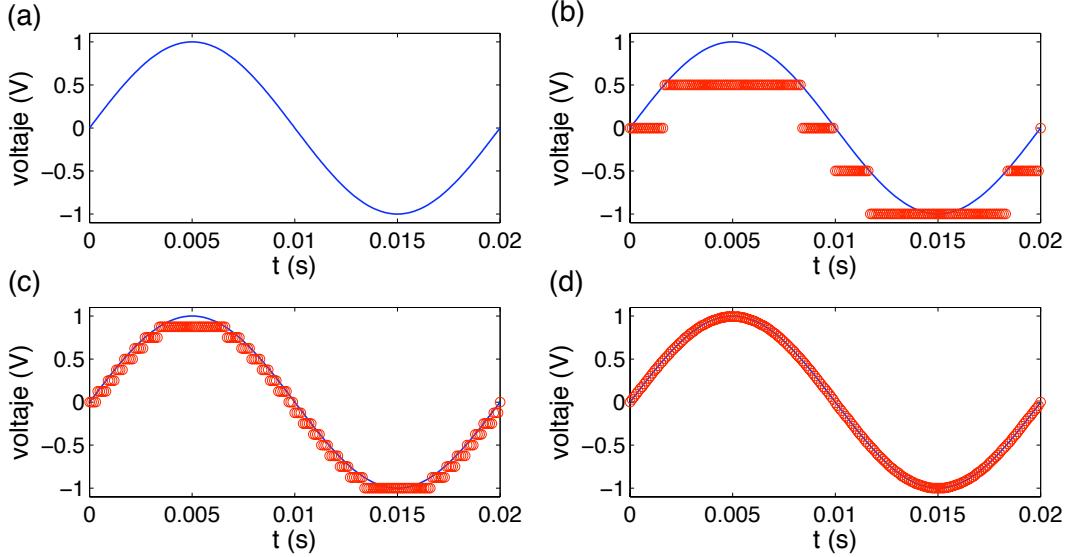


Figura 1: Ejemplos de conversión analógica/digital (círculos rojos). La figura (a) muestra la señal real con una curva continua (línea azul), que corresponde a una oscilación sinusoidal a 50 Hz entre -1 y $+1$ V. Las figuras (b), (c) y (d) muestran la conversión usando $N = 2, 4$ y 8 bits respectivamente.

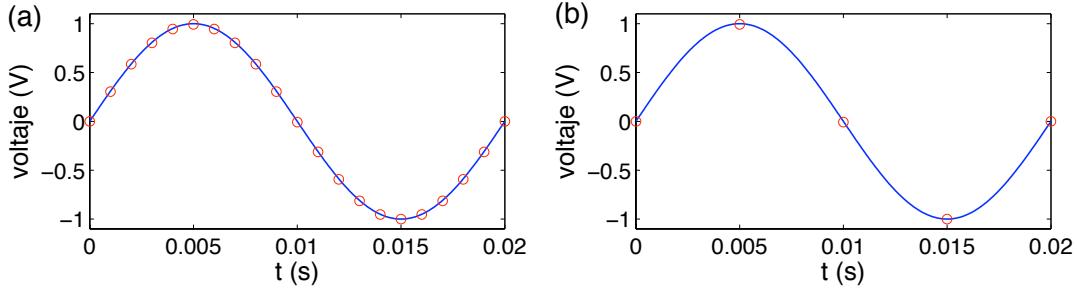


Figura 2: Ejemplos de conversión analógica/digital (circulos rojos) de la misma señal real de la figura 1. En ambos casos se usa $N=8$. (a) y (b) muestran el uso de frecuencias de muestreo de 1 kHz y 200 Hz respectivamente.

La figura 1(a) muestra una oscilación de una señal de voltaje periódica de 50 Hz, que varía entre -1 y $+1$ V. La figura 1(b) muestra su conversión digital (círculos rojos) con una frecuencia de adquisición de 10 kHz pero usando $N = 2$, es decir $2^2 = 4$ bits. Las figuras 1(c) y 1(d) muestran conversiones similares pero con $N=4$ y $N=8$, es decir 16 y 256 bits, respectivamente. Es claro a partir de estos ejemplos que cuando N es mayor, la aproximación de la señal real continua por una digital es mejor.

Vale la pena mencionar que en estos casos se ha supuesto que el instrumento tiene como rango de medida -1 a $+1$ V, pero en una medida real podría ocurrir (y en general es así) que la señal sea de una cierta amplitud A pero que la escala del instrumento es entre un valor $-B$ y $+B$ de voltaje. La cuantificación, o digitalización, de la señal se hace en la escala del instrumento, no automáticamente según la escala de la señal. Es por ello que es importante tratar de ajustar la escala del instrumento (cuando es posible) a una lo más cercana posible, pero mayor, a la de la medida.

Las figuras 2(a) y 2(b) muestran la señal analógica (círculos rojos) en comparación con la señal real (línea azul) usando 2^8 bits pero con frecuencias de muestreo (o adquisición) de 1 kHz y de 200 Hz respectivamente. En el primer caso el tiempo entre medición es de $1/1000$ s = 1 ms, es decir hay 20 intervalos entre el primer y último dato (por lo tanto 21 datos). En el segundo caso este tiempo es de $1/200$ s = 5 ms, por lo que hay 4 intervalos entre el primer y último dato (5 datos en total).

En este curso, el paso de una señal analógica a digital, se realizará con el uso de una tarjeta de adquisición marca National Instruments, modelo USB-6008, y un programa de adquisición de datos llamado SignalExpress. La tarjeta tiene una frecuencia máxima de muestreo de 10 kHz, y es de 12 bits. Encontrará más detalles de esta tarjeta en su documentación publicada en la página del curso.

II) Submuestreo de una señal: Aliasing

Un fenómeno importante a considerar respecto al uso de la tarjeta de adquisición es el hecho de no usar una frecuencia alta comparada con la frecuencia de la señal que se quiere medir. Si esto ocurre se observará el fenómeno de submuestreo: aparecerá en la medida una señal de mucho menor frecuencia que la de la señal real. Una ilustración de esto se muestra en la figura 3. La señal continua de 50 Hz es la curva azul. Si se mide esta señal con una frecuencia cercana, se medirá una señal ficticia de frecuencia menor a la real. En los ejemplos de esta figura, las frecuencias de muestreo de 60 y 55.56 Hz (símbolos rojo y verde respectivamente) producen señales ficticias de 10 y 5.56 Hz respectivamente.

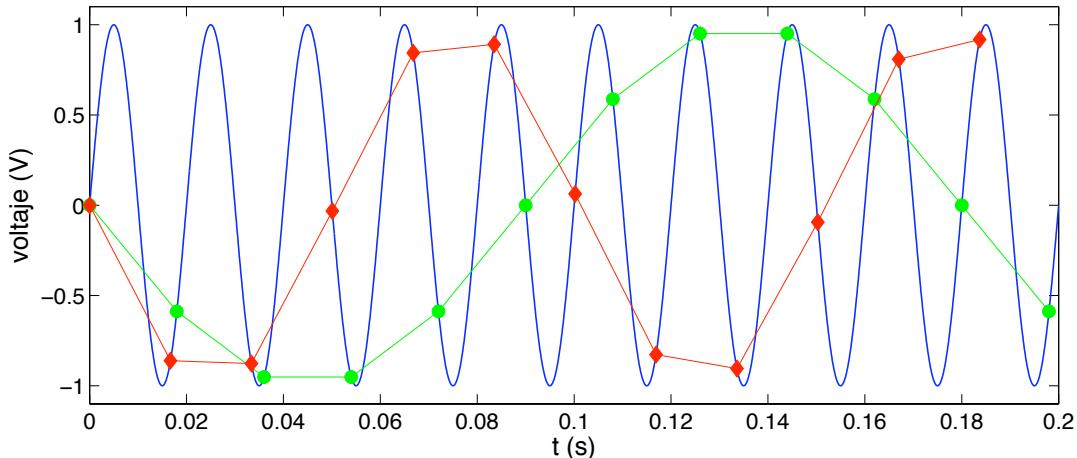


Figura 3: Ejemplo de submuestreo de una señal. La señal original de 50 Hz se muestra en azul. Los datos con símbolos en rojo y verde corresponden a frecuencias de muestreo de 60 y 55.56 Hz respectivamente.

III) Impedancia de entrada de una tarjeta de adquisición

Ya se ha mencionado que un instrumento digital tiene una frecuencia de muestreo y una capacidad de conversión digital dada por la cantidad de bits en la cual divide la señal. Otra característica importante, y de cualquier instrumento de medición, es su impedancia de entrada. Hemos discutido en guías anteriores que cuando se trata de señales sinusoidales la impedancia de un elemento es como una resistencia, salvo que compleja, la que cuantifica la relación entre voltaje y corriente. Para que un equipo sea un buen instrumento de medida éste debe perturbar lo menos posible el circuito al cual se conecta. En el caso de un amperímetro, que debe ser conectado en serie, su resistencia interna debe ser casi nula. En el caso de un voltímetro o un osciloscopio que se conecta en paralelo, éste debe tener una impedancia alta para perturbar lo menos posible el circuito. La tarjeta de adquisición que se usará en la guía práctica funciona como un voltímetro que puede hacer medidas discretas con un intervalo de tiempo dado. Ésta tiene una impedancia de entrada del orden de $144\text{ k}\Omega$, lo cual es bastante bajo comparado con los $10\text{ M}\Omega$ que tiene la mayoría de los osciloscopios más básicos. Esto significa que esta tarjeta no puede ser usada para hacer medidas en circuitos con altas impedancias pues la corriente va a preferir pasar por la tarjeta en lugar de seguir pasando por el circuito. Esto explica por qué las resistencias son bajas en el circuito a estudiar.

IV) Uso de la tarjeta de adquisición

Para registrar una señal temporal continua en el tiempo se usará una tarjeta de adquisición NI-USB6008. El manual de la tarjeta está en la página del curso.

Lo primero que se debe hacer para comenzar a usar de la tarjeta de adquisición es conectarla y verificar que ella está adquiriendo correctamente los datos de la señal analógica que se desea digitalizar. Se usará la tarjeta principalmente para medir una o más señales de voltaje. Como se explicó en guías anteriores, lo que se mide es la diferencia de voltaje entre dos puntos de un circuito, por ello hay dos formas de medir esta diferencia.

- Modo simple (RSE): En el modo simple se toma la diferencia de potencial entre la entrada y un punto donde el potencial es 0, llamado “tierra” o “ground”. En la tarjeta las posibles entradas se llaman AI#, donde # va desde 0 hasta 7.
- Modo diferencial (Differential): En el modo diferencial, se toma la diferencia entre dos entradas en la tarjeta, por ejemplo, AI0 y AI4 o AI1 y AI5, etc.

Para verificar el correcto funcionamiento de la tarjeta se usará el programa *Measurement and Automation*, ubicado generalmente en la carpeta *National Instruments*, como se muestra en la figura 4. Con este programa se puede comprobar que la tarjeta de adquisición está funcionando y probar diferentes frecuencias de muestreo, número de datos y valores máximos y mínimos de adquisición.

Al abrir la Barra del Menú Principal, seleccione *Configuration*, luego *Devices and Interfaces*, luego *NI-DAQmx* y finalmente *NI USB-6008*: “*Dev n*”, siendo *n* un número, normalmente 1. Seleccione *Self-Test*, la respuesta debe ser “*The device has passed the self-test*”, de otra forma existe un problema de conexión o de configuración (pida ayuda a un profesor auxiliar en este caso). Para realizar una medida con la tarjeta seleccione *Analog Input*. Se sugiere usar los siguientes parámetros de adquisición:

- Mode: Continuous

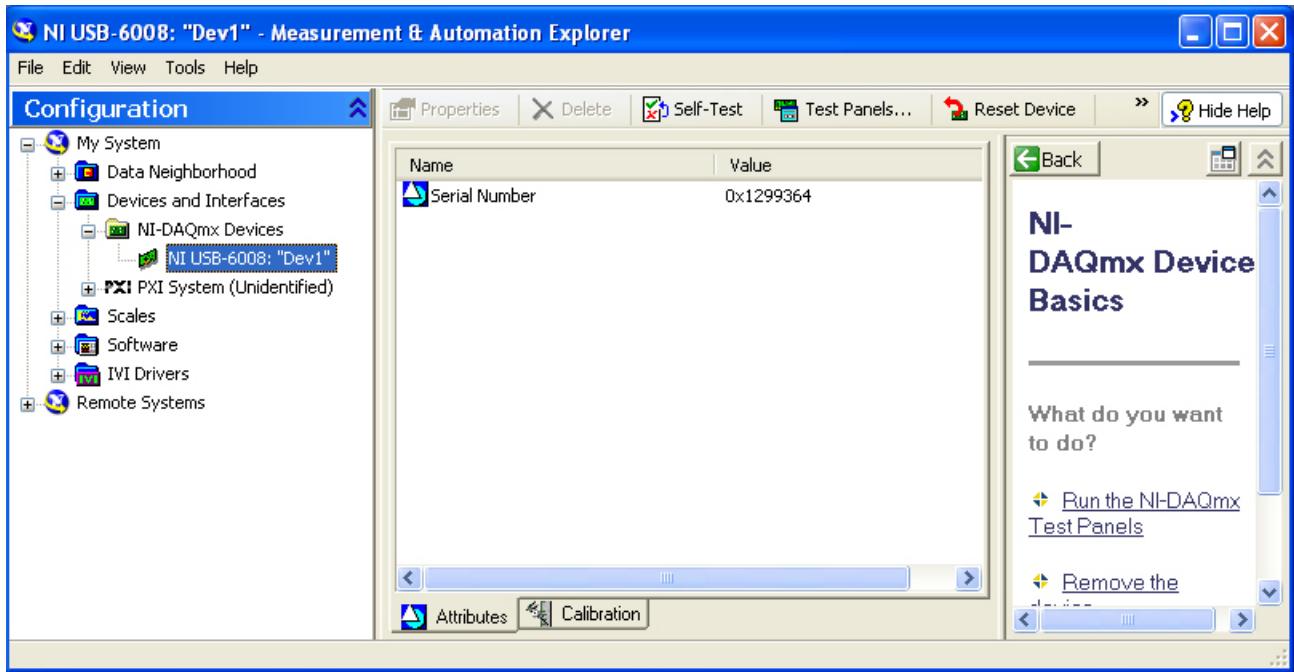


Figura 4: Measurement and Automation

- Max Input Limit: +10 V, Min Input Limit: -10 V
- Configuration: RSE
- Channel Name: AI0 o a elección
- Rate (Hz): 1000 o a elección
- Samples to read: 1000 o a elección

Lance la medida presionando sobre el botón *Start*. Como un ejemplo puede medir con la tarjeta el voltaje de la salida analógica del generador de funciones.

V) Programa de adquisición de datos: SignalExpress

Ahora se verificará que el programa *SignalExpress* funciona adecuadamente. Con esta aplicación se pueden hacer diversas operaciones con señales de voltaje y grabarlos en su PC en formato de un archivo de texto.

Abra el programa, que está en la carpeta *National Instruments*. Para adquirir señales, agregue la botonera *DAQmx Acquire* usando *Add Step* o el botón derecho del ratón como muestra la Fig. 6 y seleccione las entradas que desea (una para modo simple o más para modo diferencial). Así puede configurar los parámetros de la adquisición, como máximo y mínimo de voltaje, número de datos a adquirir o frecuencia de muestreo. Con las botoneras *Analog Output* y *Analog Input* se configuran las salidas y entradas de una manera muy similar a lo que se hace con el programa *Measurement and Automation* que usó en el curso Sistemas Newtonianos (Figuras 4 y 5).

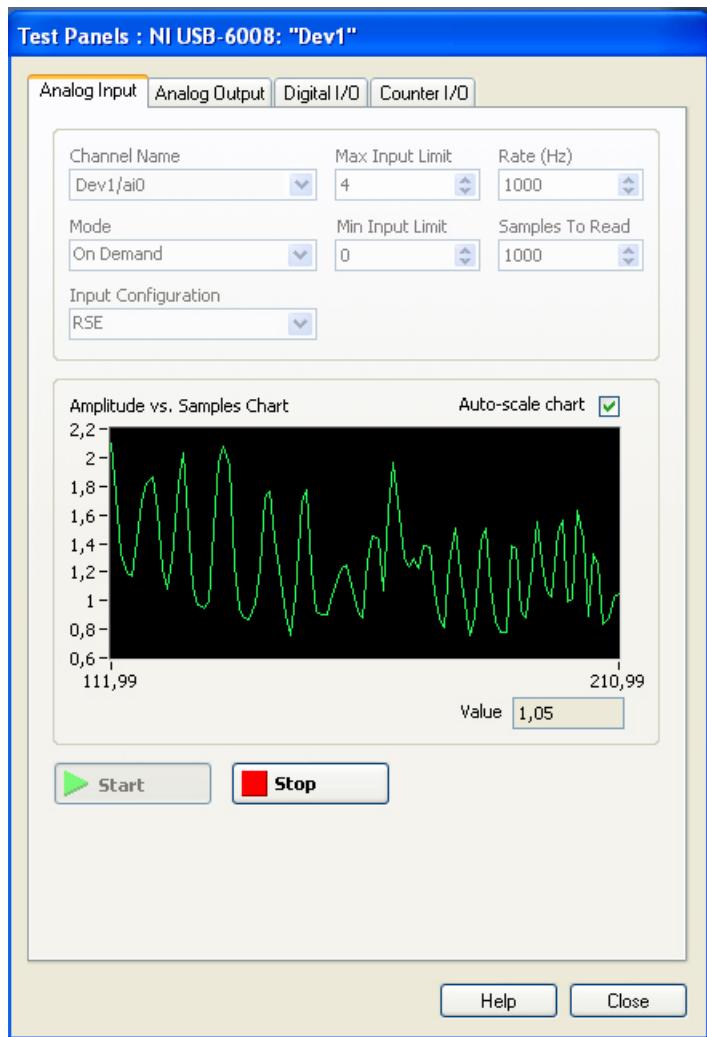


Figura 5: Test Panel de Measurement and Automation

Se pueden realizar operaciones matemáticas con las señales adquiridas por la tarjeta, usando las botones *Arithmetic* o *Statistics*. En las figuras 7 y 8 se dan ejemplos de adquisiciones de dos señales y de operaciones. En la figura 9 se muestra un ejemplo de análisis estadístico. A veces conviene hacer medidas diferenciales entre dos señales, por lo que se hace la simple resta entre ellas. También se puede calcular algunas propiedades estadísticas de las señales, como sus desviaciones estándar o promedios, como se muestra en las figuras 8 y 9. Para mayor información sobre diversas usos y aplicaciones de SignalExpress, pueden ver el video demostrativo en el sitio <http://zone.ni.com/wv/app/doc/p/id/wv-325>

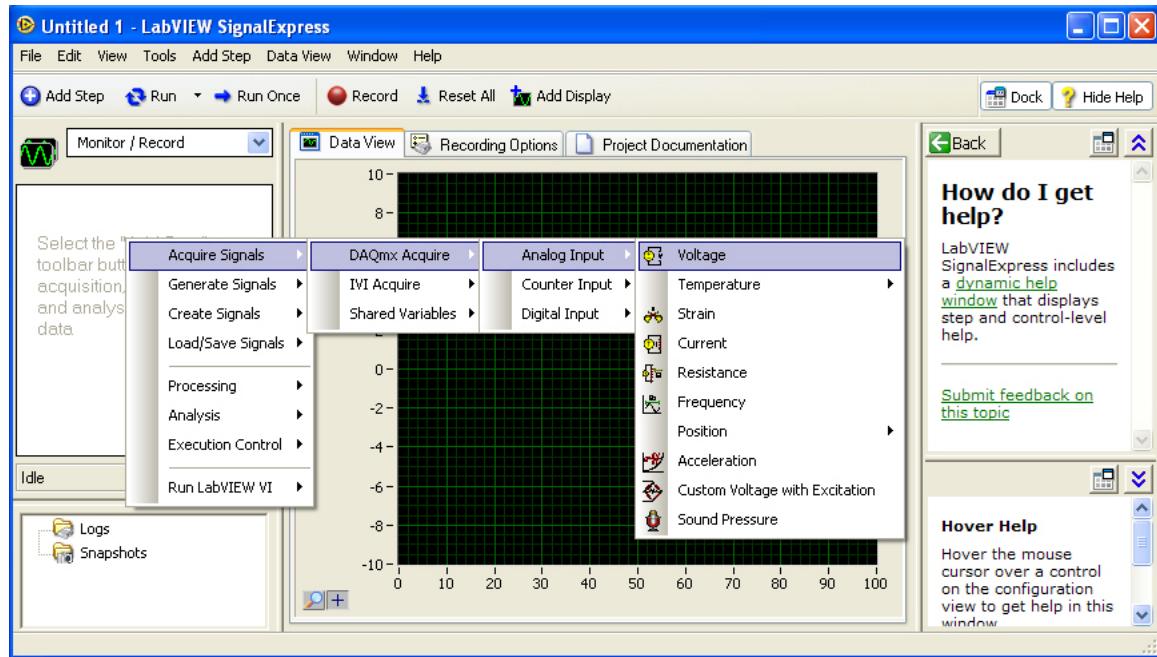


Figura 6: Adquisición de datos con SignalExpress.

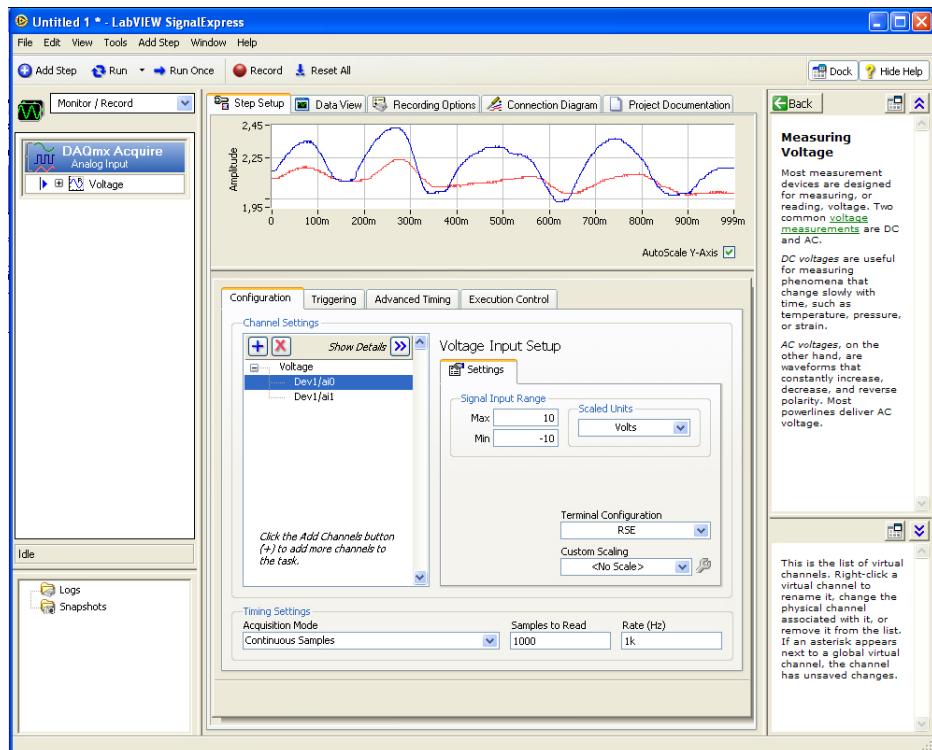


Figura 7: Adquisición de dos señales.

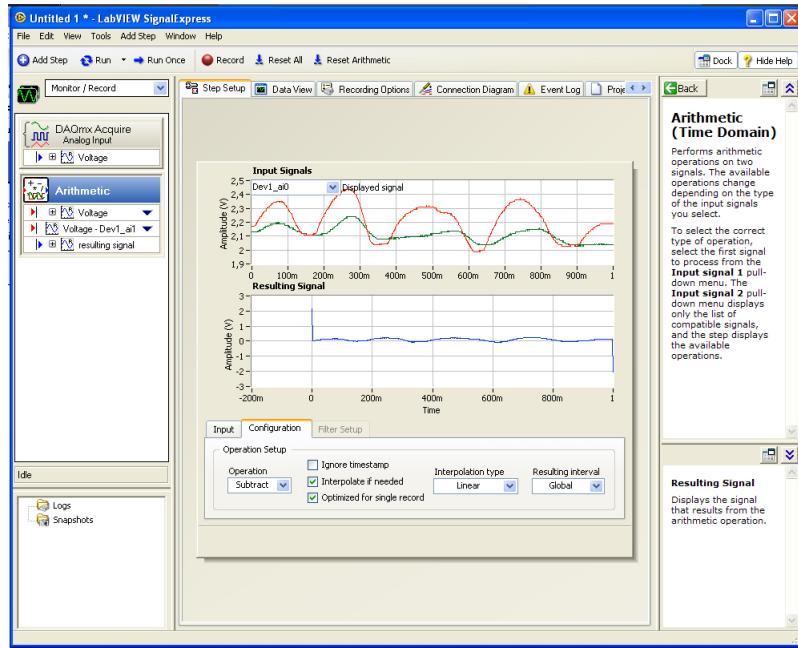


Figura 8: Operaciones Aritméticas con SignalExpress.

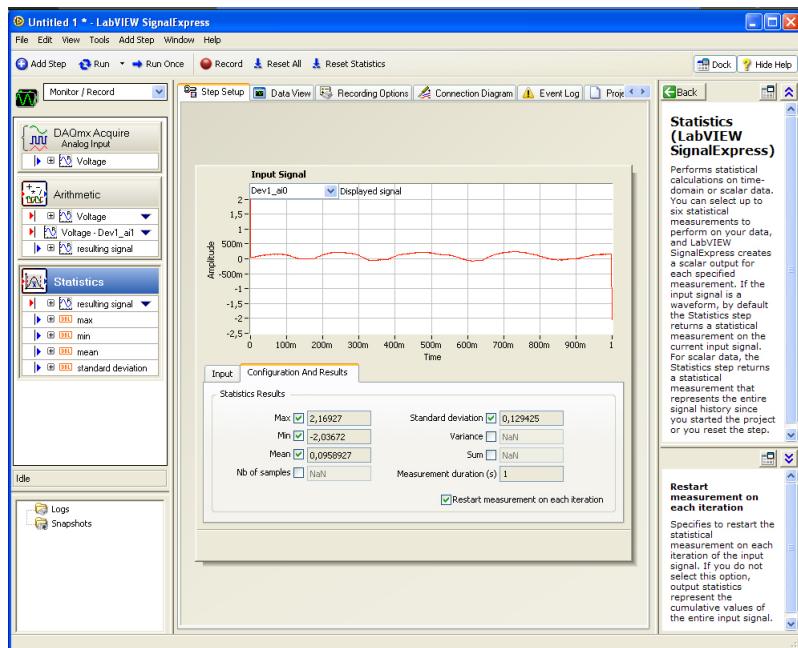


Figura 9: Estadística con SignalExpress.

Guía de laboratorio N°6 – Tarjeta de Adquisición

1. Objetivos

- Familiarizarse con el manejo de una tarjeta de adquisición y con la conversión analógica-digital.
- Introducción al uso de programas de adquisición y tratamiento de datos.

2. Materiales

- Osciloscopio
- Generador de funciones
- Tarjeta de adquisición

3. Actividad práctica

I) Práctica con el generador de funciones y la tarjeta de adquisición

Montaje A

1.- Conecte la salida del generador de funciones a un adaptador BNC-Banana. Conecte la tarjeta en modo simple (RSE). Entradas AI0 y GND en la tarjeta de adquisición. Para más detalles de las conexiones vea el anexo 1.

2.- En el generador de funciones fije una señal triangular de 50 Hz y 2 V_{PP}.

3.- Abra el programa *Measurement and Automation* de *National Instruments* y verifique el correcto funcionamiento de la tarjeta, como está explicado en la guía teórica. Luego de esto, cierre el programa.

4.- Abra el programa *SignalExpress*. Adquiera la señal temporal enviada por el generador de funciones. Fije la frecuencia de adquisición (“Rate”) a 500 Hz y el número de datos adquiridos a esa frecuencia (“Samples to Read”) en 2000. Fije el tipo de adquisición en RSE (modo simple).

Medida A

1.- Mida el período de oscilación de la señal triangular a través de la señal observada en la pantalla. Puede también hacerlo en la sección *Data View*. Para ello, exporte la señal a esta pantalla usando el botón derecho del mouse *signal* luego *add signal* y luego *dev1*.

Análisis A

1.- A partir del periodo medido, calcule la frecuencia y compare con el valor mostrado por el generador de señales.

2.- Practique con la tarjeta, cambiando la frecuencia de adquisición entre 200 a 2000 Hz, el número de datos que toma y el voltaje máximo y mínimo que puede registrar, manteniendo constantes los valores en el generador de funciones. Luego practique con el generador cambiando la amplitud y frecuencia de la señal, observe cómo cambia la señal en la pantalla.

3.- ¿Qué ocurre cuando cambia el tipo de adquisición de simple (RSE) a diferencial?

Nota: para medir en modo diferencial deben conectar las entradas AI0 y AI4 o AI1 y AI5, etc.

II) Rango de validez de la tarjeta de adquisición

Montaje B

1.- Prepare el osciloscopio para medir diferencia de voltaje alterno (acoplamiento CC).

2.- Conecte la salida del generador de funciones con una T-BNC, al osciloscopio y a la tarjeta de adquisición.

Medida B

1.- Configure una señal sinusoidal de 2 V_{PP} en el generador de funciones. Fije la frecuencia del generador en 100 Hz, 500 Hz y 5000 Hz respectivamente. Para cada frecuencia fija del generador de funciones varíe la frecuencia de muestreo de la tarjeta de adquisición a 150 Hz, 550 Hz y 2000 Hz y varíe el número de datos a adquirir a 100 y 1000 en cada caso. Genere una tabla que muestre el valor peak-peak que mide la tarjeta de adquisición.

Análisis B

1.- ¿Cuál es el rango de validez de la medida de la tarjeta con respecto a la frecuencia y a la forma de la señal? En particular justifique porque la tarjeta no puede ser usada para una frecuencia de adquisición menor a cierto valor, el cual depende de la frecuencia de la señal que se mide. También justifique porque no se puede medir bien una señal que tiene una frecuencia superior a un valor específico (que depende esta vez solo de la tarjeta en particular).

III) Carga y descarga de un condensador

Montaje C

1.- Descargue el condensador.

2.- Arme el circuito de la figura 1 con $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$. La “X” en el círculo es la tarjeta de adquisición, conectada en modo simple (RSE). Para ello conecte el punto **b** en la entrada AI0 y el punto **c** en GND. Coloque además la punta de un cable del osciloscopio en el punto **b**. Conecte el generador de funciones con una señal cuadrada de 50 Hz y 2 V_{PP} . Recuerde que el signo “+” indica la entrada de la señal, y el “-” el retorno.

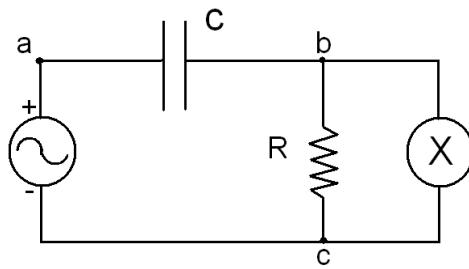
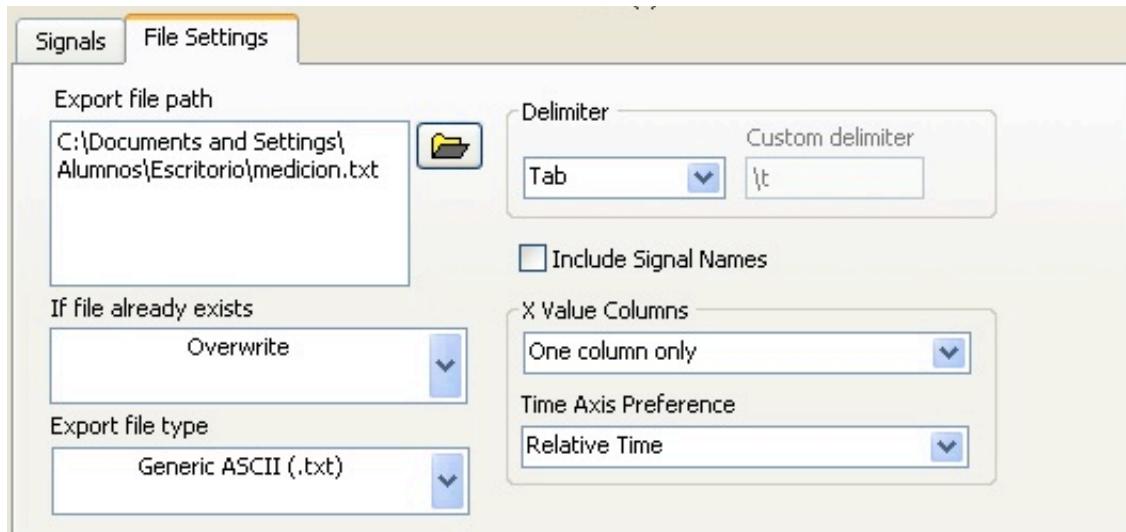


Figura 1: Diagrama de un circuito RC, ocupando la tarjeta de adquisición

Medida C

- 1.- Centre las tierras en el osciloscopio.
- 2.- En modo DC, observe la señal en el osciloscopio.
- 3.- Adquiera la señal con el programa *SignalExpress*. Use una frecuencia de adquisición de 10 kHz y un número de datos igual a 1000.
- 4.- Guarde los datos con el programa, para ello debe agregar una etapa escogiendo
Add Step ▶ Load/Save Signals ▶ Analog Signals ▶ Save to ASCII/LVM
 en la configuración debe seleccionar el destino y el nombre del archivo. Se sugiere usar la configuración que aparece en la siguiente imagen.



Análisis C

- 1.- Interprete la forma de la señal en el osciloscopio. ¿Cuál es la carga y cuál la descarga del condensador?
- 2.- Determine el valor de la constante de tiempo τ a partir de los datos medidos con la tarjeta. Realice un ajuste lineal usando polyfit en Matlab (o ajuste lineal en Excel). El análisis debe considerar solo los datos que tienen un decaimiento exponencial. Los datos tienen una columna de tiempo y otra de

voltaje, debe tomar el log del voltaje y hacer el ajuste lineal.

Montaje D

1.- Descargue el condensador.

2.- En el mismo circuito conecte el generador de funciones con una señal cuadrada de 50 Hz y 2 V_{PP}. Mida la diferencia de tensión enviada por la fuente de poder y la tensión medida en los bordes de la resistencia, es decir mida la diferencia de voltaje entre los puntos **a** y **b**. Para ello, haga una medida diferencial con la tarjeta. Conecte la entrada AI0 en el punto **a** y la entrada AI4 en **b**. Adquiera ambas señales con el programa *SignalExpress*. Recuerde que el signo “+” indica la entrada de la señal, y el “-” el retorno.

Medida D

1.- Centre las tierras en el osciloscopio.

2.- En modo DC, observe la señal en el osciloscopio.

3.- Adquiera las señales con el programa *SignalExpress*. Use una frecuencia de adquisición de 5 kHz y un número de datos igual a 1000.

3.- Compare estas señales con la del osciloscopio. Con la botonera *Arithmetic* calcule la diferencia entre ambas señales, para ello use la botonera *Add Step*, luego *Processing*, luego *Analog Signal* y finalmente *Arithmetic*. Calcule su período, frecuencia y tiempo de decaimiento

Análisis D

1.- Interprete la forma de la señal en el osciloscopio. ¿A qué diferencia de tensión corresponde en este circuito?

2.- ¿Qué ocurriría si el voltaje de entrada no estuviera centrado en cero? ¿Cambiaría la diferencia de tensiones?

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

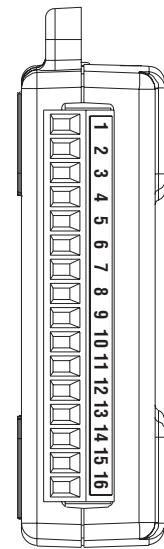
ANEXO 1 - Conexiones de la tarjeta de adquisición

La tarjeta de adquisición de datos posee diferentes entradas y salidas de señal de voltaje para señales analógicas y digitales, en nuestro caso se usa la entrada de señal analógica. Existén dos formas de realizar las conexiones en la tarjeta, en modo simple (RSE) y en modo diferencial. En modo simple se debe conectar la tarjeta usando algún terminal de entrada AI# (analog input) y un terminal de tierra GND (ground), por ejemplo AI0 y GND. En el modo diferencial se debe conectar la tarjeta usando dos terminales de entrada AI# que estén pareados, por ejemplo AI0 y AI4, en este caso la adquisición toma la diferencia entre los dos terminales de entrada.

Las entradas y salidas de la tarjeta de adquisición aparecen detalladas en las siguientes imágenes:

GND	+ AI0 -	GND	+ AI1 -	GND	+ AI2 -	GND	+ AI3 -	GND	AO0	AO1	GND	
GND	AI0	AI4	GND	AI1	AI5	GND	AI2	AI6	GND	AI3	AI7	GND

Module	Terminal	Signal, Single-Ended Mode	Signal, Differential Mode
		GND	GND
	1	GND	GND
	2	AI 0	AI 0+
	3	AI 4	AI 0-
	4	GND	GND
	5	AI 1	AI 1+
	6	AI 5	AI 1-
	7	GND	GND
	8	AI 2	AI 2+
	9	AI 6	AI 2-
	10	GND	GND
	11	AI 3	AI 3+
	12	AI 7	AI 3-
	13	GND	GND
	14	AO 0	AO 0
	15	AO 1	AO 1
	16	GND	GND



Guía Teórica N°7 – *Análisis de Fourier*

1.1. Fundamentos de elasticidad lineal

El concepto de sólido rígido es válido como una aproximación, muy útil para estudiar cierto fenómenos donde la eventual deformación del sólido es poco importante. Específicamente, un sólido rígido se define como un material donde cada par de elementos que lo componen está separado por una distancia que no cambia en el tiempo.

Sin embargo, los sólidos sí pueden deformarse. Lo más simple es considerar sólidos homogéneos e isótropos. La primera condición se refiere a que las propiedades mecánicas del sólido, como rigidez o densidad, son iguales en todas partes. La segunda condición se refiere a que estas propiedades son iguales independientemente del *ángulo* con el que se mira el sólido.

Entonces, la elasticidad lineal de sólidos homogéneos e isótropos describe las posibles deformaciones en el límite de desplazamientos muy pequeños de los elementos que componen el material con respecto a las dimensiones características de éste. Se define usualmente el vector desplazamiento

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (1)$$

donde \vec{r}' es la nueva posición de un elemento que se encontraba originalmente en una posición \vec{r} . Luego, la condición para que la elasticidad lineal sea válida es que para todo \vec{r} que describa un elemento del material, entonces $|\vec{u}| \ll L_x, L_y, L_z$, donde L_x, L_y y L_z corresponden a las dimensiones espaciales del material. Es importante notar que al igual que para el modelo de una cuerda, se considera al sólido como un medio continuo (\vec{r} es una variable real) de manera que existen muchos elementos (átomos) en un elemento de volumen, el cual es pequeño comparado con el sólido y que tiene posición \vec{r} tal que tiene sentido definir cantidades físicas para este elemento.

Se define el esfuerzo aplicado sobre un material como la fuerza aplicada por unidad de área. El esfuerzo puede ser de compresión, de estiramiento, o de cizalle¹. Las posibles combinaciones de los esfuerzos posibles, como también los resultados de las deformaciones inducidas, hacen que el tratamiento matemático de un sólido elástico sea bastante más complejo que el de una simple cuerda bajo tensión. Luego, por el momento no se detallará la descripción matemática de un sólido elástico.

Un ejemplo sencillo que puede ser abordado es el de la deformación homogénea de un sólido como el que se muestra en la figura 1. Inicialmente las dimensiones de este paralelepípedo son L_x, L_y y L_z . Se aplica entonces un esfuerzo de tipo estiramiento tal que $L_x \rightarrow L_x + \delta L_x$, con $\delta L_x \ll L_x$. Si en cambio se aplica un esfuerzo de compresión, solo hay que cambiar δL_x por $-\delta L_x$.

¹El simple hecho de romper un papel es un ejemplo de un esfuerzo de cizalle — también conocido como esfuerzo de corte — es tan grande que el material se fractura, se rompe, donde la elasticidad lineal ha dejado de ser válida por supuesto.

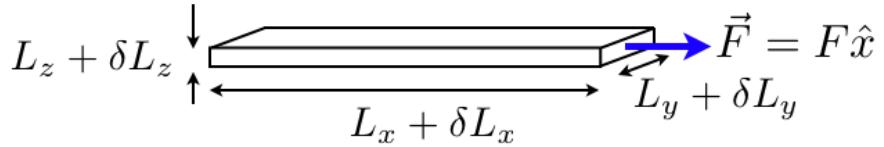


Figura 1: Esquema de un sólido elástico que se estira con un esfuerzo F/A , donde F es la fuerza aplicada y A el área sobre el cual se aplica. El sólido elástico se estira una distancia δL_x a lo largo de la dirección del esfuerzo. En principio, el sólido debe modificar sus otras dimensiones también.

Dos preguntas muy simples son entonces: i) ¿Cuál es el valor de δL_x ? ii) ¿Qué pasa en las direcciones transversales al estiramiento? Las respuestas son relativamente simples, aunque considerando lo que ya se argumentó, no son directos de demostrar. En teoría de la elasticidad se establece que:

$$\frac{\delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E A}, \quad (2)$$

$$\frac{\delta L_y}{L_y} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}, \quad (3)$$

$$\frac{\delta L_z}{L_z} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}. \quad (4)$$

Aquí se han introducido dos propiedades mecánicas del material, el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν . El módulo de Young tiene, como otras constantes elásticas, unidad de presión. Es el equivalente de la rigidez de un resorte frente a una compresión o un estiramiento, siendo siempre $E > 0$. Por otro lado, el coeficiente de Poisson nos dice que las deformaciones transversales se relacionan con la deformación de estiramiento mediante un factor que depende del material. Se sabe que ν está acotado entre -1 y $1/2$, aunque en general es > 0 . Esto implica que las dimensiones transversales se contraen cuando el sólido se estira en la dirección del esfuerzo. Por último, estas tres ecuaciones no son otra cosa que una versión de la Ley de Hooke para un sólido elástico, pues todas dicen que la deformación es proporcional a la fuerza aplicada.

Al igual que un fluido, un sólido elástico puede propagar ondas. Un ejemplo son las ondas sísmicas en la Tierra. La ecuación dinámica para la deformación de un sólido elástico está dada por la ecuación de Newton. Esta ecuación tiene una forma matemática similar a la ecuación de ondas, pero dada la naturaleza tridimensional del problema y a los diferentes tipos de esfuerzos que pueden producir deformaciones diferentes, su forma es más complicada. En resumen se puede decir que al igual que una cadena de resortes, un sólido elástico puede propagar ondas de longitudinales (es decir de compresión y estiramiento) donde la dirección de propagación es paralela a la dirección de deformación, como también ondas transversales (de cizalle) donde la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de deformación.

1.2. Modos de resonancia de una barra elástica

Describiremos las deformaciones elásticas de una barra en el cuadro de la elasticidad lineal, válido para deformaciones muy pequeñas respecto a las dimensiones características del sistema. Tal como en una cuerda de cierta densidad lineal bajo una tensión con condiciones de borde dadas, un tubo

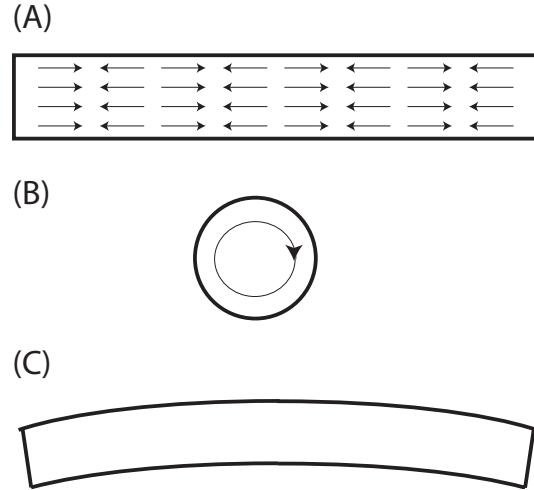


Figura 2: Posibles modos de vibración de una barra delgada, en este caso un cilindro. (A) Modo longitudinal; (B) Modo de torsión; (C) Modo de flexión.

lleno con un gas o un instrumento musical (de aire o de cuerda), una barra metálica presenta modos propios de vibración, y por ende frecuencias naturales de oscilación.

Se sabe que una barra sólida tiene diversos tipos de modos de vibración. En el caso de una *barra delgada* estos modos pueden clasificarse de la siguiente manera: de flexión, de torsión, o de deformaciones longitudinales. Estos modos se muestran en la figura 2. Cada modo tiene a su vez un conjunto de frecuencias asociadas, según las longitudes de onda que pueden estar presentes. Por ejemplo, un modo de vibración longitudinal puede tener una longitud de onda igual al largo de la barra, a un medio, a un tercio o a un cuarto de longitud de la barra, como el que se muestra en la figura 2a, etc. El conjunto de frecuencias de todos estos modos de vibración es lo que llamaremos espectro de frecuencias de resonancia de un sólido. El hecho que sea una barra delgada significa que las deformaciones no tienen una dependencia en las coordenadas transversales de la barra. Esta aproximación es importante desde el punto de vista analítico pues, como veremos luego, en este caso se pueden obtener fórmulas analíticas para las frecuencias de los diferentes tipos de modos.

Es importante notar que al igual que para una cuerda, las frecuencias de resonancia dependen de las condiciones (generalmente de borde) que se aplican a una barra. Para los modos longitudinales y de torsión las condiciones de borde son las usuales: libres o fijas. Para los modos de flexión se debe especificar además si el extremo está *empotrado o no*, lo que equivale a imponer si la derivada de la deformación con respecto a la coordenada a lo largo de la barra es constante (por ejemplo cero) o libre.

La ecuación de onda que describe deformaciones $u_x(x)$ de una barra de dimensiones transversales pequeñas comparadas con su largo se escribe

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

donde se ha supuesto que las deformaciones sólo van en la dirección del eje de la barra (eje x) y que sólo dependen de esta coordenada, es decir $\vec{u}(x, y, z) = u_x(x)\hat{x}$. De esta ecuación se reconoce una

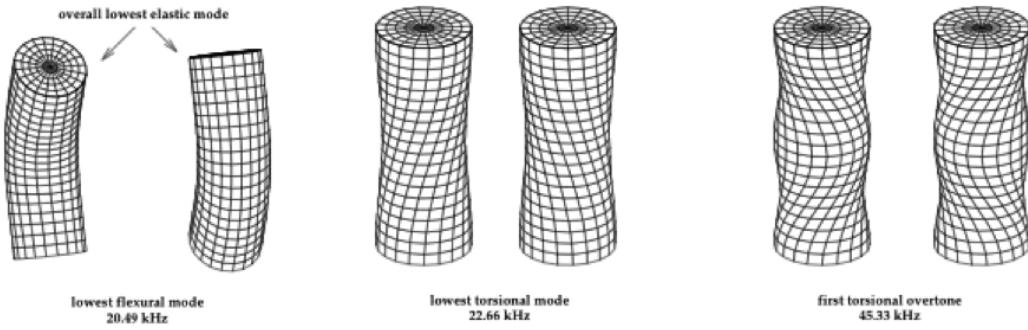


Figura 3: Ejemplos de modos de vibración (Referencia: Tesis de Brian Zadler, Colorado School of Mines). Primer modo de flexión (izquierda), primer modo de torsión (centro) y segundo modo de torsión (derecha).

velocidad de onda efectiva $c = \sqrt{E/\rho}$.

En lo que sigue nos preocuparemos de condiciones de borde simples, similares a las de una cuerda. El espectro de frecuencias de resonancia de los modos longitudinales de una barra completamente libre² está dada por la relación

$$f_n^L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{n}{2L}, \quad (6)$$

donde E es el módulo de Young, ρ la densidad de masa y L el largo de la barra. Por lo tanto el modo fundamental correspondiente a $n = 1$ tiene una frecuencia de resonancia $f_1 = \sqrt{(E/\rho)/(2L)}$, lo que corresponde a una longitud de onda igual a 2 veces el largo de la barra ($f_n \lambda_n = c$). En el caso de una barra delgada de acero de 1 m de largo, $E \approx 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, y $\rho \approx 8 \text{ g/cm}^3 = 8000 \text{ kg/m}^3$, por lo tanto el primer modo longitudinal ($n=1$) tendrá una frecuencia $f_1 \approx 2500 \text{ Hz}$.

A su vez, los modos de torsión para una barra libre de esfuerzos tienen frecuencias dadas por

$$f_n^T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \frac{n}{2L}. \quad (7)$$

Por último, los modos de flexión para la misma barra libre tienen frecuencias dadas por

$$f_n^B = \frac{\pi R}{16L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot (2n+1)^2, \quad (8)$$

con R el radio de la barra.

1.3. Series de Fourier

En muchas situaciones se tiene una señal temporal no sinusoidal que se desea analizar. Sin embargo, para ciertos tipos de análisis, por ejemplo un oscilador forzado, un filtro de frecuencia u otro circuito

²se puede pensar que de alguna manera la barra está suspendida en el espacio sin esfuerzos aplicados.

eléctrico, se considera que la señal que se impone (de forzamiento en el caso del oscilador o de voltaje en un circuito) es sinusoidal. Esto se debe a que el tratamiento matemático es más simple, pero también a que gracias al teorema de Fourier se tiene que cualquier señal periódica puede ser descompuesta en una serie de funciones sinusoidales. Si el sistema que se está estudiando es lineal, de modo que se cumple el principio de superposición, entonces este teorema es de gran utilidad pues al estudiar la respuesta a una frecuencia, se puede construir la respuesta más general como la superposición de las respuestas individuales.

El teorema de Fourier establece que una función periódica $F(t)$, tal que $F(t + T) = F(t)$, puede ser descompuesta en la serie

$$F(t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f_o t) + B_n \sin(2\pi n f_o t)), \quad (9)$$

donde $f_o = 1/T$ es la frecuencia más baja y $A_o/2$ es la componente continua (constante) de la señal. Esta definición es consistente con otras definiciones que aparecen en la literatura, como

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)), \quad (10)$$

donde $A_n = a_n + a_{-n}$ y $B_n = b_n - b_{-n}$.

La figura 4 muestra un ejemplo de tal descomposición. Una señal cuadrada de frecuencia f se representa como la suma de sinusoides de frecuencia f y $3f$ (figura 4a), como la suma de sinusoides de frecuencias f , $3f$ y $5f$ (figura 4b) y finalmente como suma de sinusoides de frecuencia f , $3f$, $5f$, $7f$ y $9f$ (figura 4c), siendo que la verdadera señal cuadrada tiene todas las componentes.

En la práctica es de gran utilidad realizar esta descomposición, de manera de obtener las amplitudes A_n y B_n para una señal dada. Esto es cierto incluso para señales que no son periódicas. Esto se logra repitiendo la señal a analizar muchas veces usando ventanas de empalme, de modo que la señal sea periódica.

Para poder realizar la descomposición de una señal cualquiera $F(t)$ en amplitudes de Fourier A_n y B_n , es importante usar la ortogonalidad de las funciones sinusoidales. Esto se traduce en las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0. \quad (13)$$

Aquí, $n \neq m$. En el caso de que $n = m$, las primeras dos ecuaciones son

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

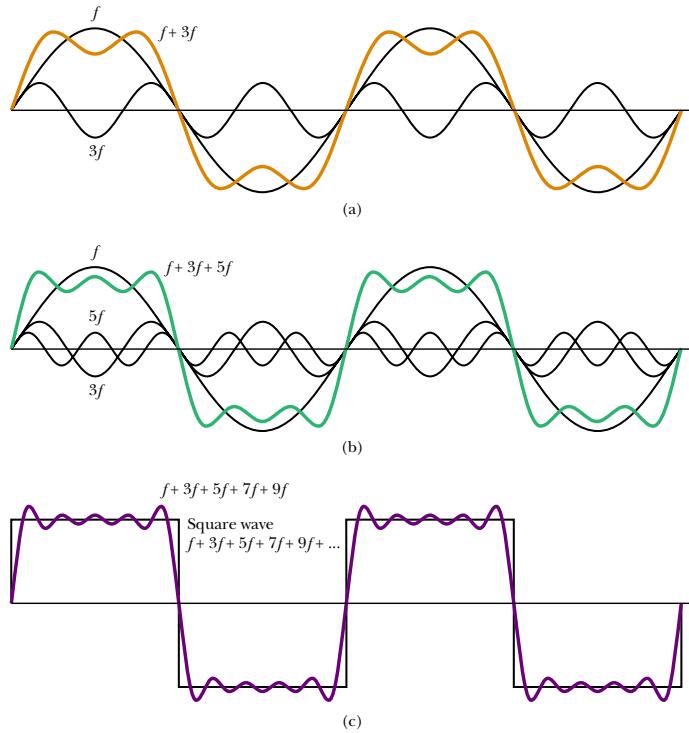


Figura 4: Ejemplo de descomposiciones de una señal cuadrada en una suma finita de sinusoides de frecuencias impares. Mientras más términos se consideran, mejor es la descomposición.

Usando estas relaciones y la serie (10), es directo demostrar

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \cos(2\pi n f_o t) dt, \quad (16)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \sin(2\pi n f_o t) dt. \quad (17)$$

En la práctica se suele usar una notación compleja, de manera que

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i f_o t}, \quad (18)$$

donde C_n es un número complejo, de modo que $C_n = C_{-n}^*$ para que $F(t)$ sea real. Luego, la relación inversa es

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot e^{-2\pi i n f_o t} dt. \quad (19)$$

Esta definición tiene la ventaja de tratar con una sola amplitud, pero compleja. Tiene por lo tanto asociada un valor absoluto y una fase.

Los algoritmos numéricos usan una versión de esta última definición. Deben tratar con señales discretas por lo que hay una cota superior al número n para la serie dada por la ecuación (10). Esta cota está dada por la frecuencia de adquisición de la señal a analizar. Si se toman N datos con un intervalo de tiempo Δt (frecuencia de adquisición $f_s = 1/\Delta t$), entonces la frecuencia

mínima es $f_o = 1/T = 1/(N\Delta t)$, la máxima es $f_{n_{\max}} = 1/(2\Delta t)$. La resolución en frecuencia es $\Delta f = f_{n+1} - f_n = f_o$.

1.4. Ejemplo de uso de series de Fourier

En la guía práctica asociada a esta unidad se analizará el espectro de resonancia de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Se trata de dar un golpe a una barra suspendida (como el golpe a una campana) lo cual puede considerarse como una excitación impulsiva. El límite de esta excitación corresponde a un impulso instantáneo, de duración nula y de intensidad infinita, de modo que su integral es finita. Matemáticamente esto corresponde a considerar la *distribución de Dirac* o simplemente *delta de Dirac* $\delta(t)$, objeto matemático abstracto, muchas veces erróneamente definida como

$$\delta(t) = 0, \text{ si } t \neq 0, \quad (20)$$

$$\delta(t) = \infty, \text{ si } t = 0, \quad (21)$$

$$(22)$$

Para efectos de este curso es conveniente imaginar que ese objeto se asemeja a una función nula excepto en las cercanas de $x=0$ y que satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (23)$$

Usando esta última expresión y la ecuación (19), es simple demostrar que $C_n = 1$ para todo n . Luego, en nuestro ejemplo, un golpe excita todas las frecuencias, y las que se amplifican son aquellas que corresponden a frecuencias de resonancia de la barra. Éstas frecuencias serán las que sobresalen en un análisis de frecuencia de cualquier señal que se mida en la barra (oscilación, deformación, aceleración o el sonido emitido como se propone en la guía de laboratorio).

Guía de Laboratorio N°7 – *Análisis de Fourier*

1.1. Resumen

En esta sesión se estudiarán las resonancias de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Se suspende una barra de duraluminio mediante dos soportes universales. Con un martillo se da un golpe (excitación impulsiva). El análisis del espectro de Fourier de la señal acústica correspondiente permite medir las frecuencias de resonancia de la barra (oscilaciones libres amortiguadas).

1.2. Objetivos

- Estudio de las resonancias de oscilación de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Análisis del espectro de Fourier de una señal acústica detectada por las oscilaciones libres y amortiguadas de la barra.
- Manejo de la tarjeta de adquisición. Usar *SignalExpress* para el análisis de Fourier. Usar el oscilloscopio para el análisis de Fourier.
- Familiarizarse con el uso del oscilloscopio, un amplificador de audio y un micrófono.

1.3. Materiales

- Tres barras de duraluminio, de 60, 120 y 150 cm de longitud, 1.3 cm de diámetro
- Micrófono de audio, amplificador, oscilloscopio
- Tarjeta de conversión A/D NI-USB6008.
- Soportes universales, hilo y martillo
- *SignalExpress*

1.4. Montaje experimental

A continuación se explicará la técnica de impulsión. Se debe colgar la barra metálica con hilo a dos soportes universales (ver figura 1A). La idea es que la barra quede lo más libre posible, como una campana. Por lo tanto preocúpese de que no esté en contacto con algo a su alrededor. La técnica de impulsión consiste en excitar muchas frecuencias en un sistema y observar la respuesta de éste. El hecho de golpear la barra con un martillo es como inducir en el sistema una impulsión casi

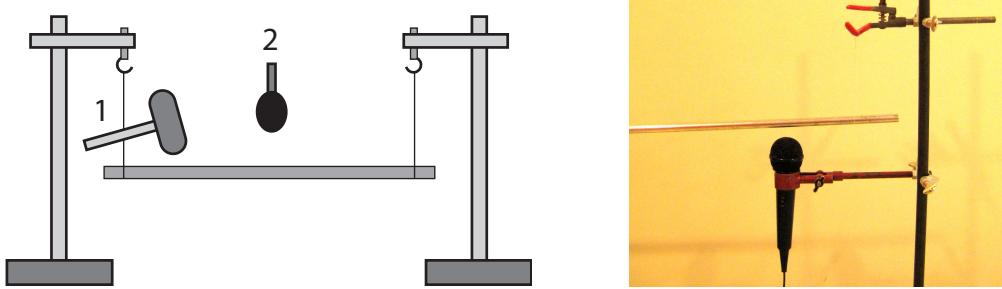


Figura 1: Izquierda: Esquema del montaje experimental para la técnica de impulsión. Una barra metálica se suspende con dos hilos a dos soportes universales. Se debe dar un golpe a la barra con el martillo (1) y medir las emisiones acústicas resultantes con un micrófono (2). Derecha: Posición del micrófono usando una de las pinzas sujetas a una de los soportes universales. El hilo del cual cuelga la barra no se ve debido al fondo claro.

instantánea. Como el sistema tiene frecuencias de resonancia, éstas serán las que sobresalen en un análisis de frecuencia de cualquier señal que se mida en la barra (oscilación, deformación, aceleración o el sonido emitido como se propone en esta guía).

Para escuchar las emisiones acústicas de la barra coloque el micrófono cerca de ella, separado por solo algunos milímetros, sujeto por una pinza a uno de los soportes universales (ver figura 1B). El micrófono debe estar conectado al amplificador de audio (figura 2A), con el volumen ajustado aproximadamente a un cuarto del máximo. A su vez, debe conectar la salida del amplificador a la tarjeta de adquisición (figura 2B). Use el modo de medida de referencia simple, conectando uno de los cables de salida al canal AI0 y el otro a GND.

Use el programa *SignalExpress* para medir algunos segundos de la señal acústica del micrófono, con la frecuencia de adquisición igual al máximo posible con la tarjeta. Recuerde que, a partir de un programa en blanco, para hacer esta medición usted debe agregar una etapa (add step) escogiendo

Add Step ▶ Acquire Signals ▶ DAQmx Acquire ▶ Analog Input ▶ Voltage.

Recuerde también que debe hacer la medida en modo simple, es decir *Terminal Configuration ▶ RSE*. Después debe agregar otra etapa, escogiendo una transformada de Fourier, en realidad un espectro de potencia que muestra el cuadrado de cada amplitud de Fourier. Para ello siga los siguientes pasos

Add Step ▶ Analysis ▶ Frequency-Domain Measurements ▶ Power Spectrum.

En el anexo se muestran fotografías del programa SignalExpress siguiendo estos pasos.

No debe golpear la barra demasiado fuerte pues perturbará posibles medidas de grupos vecinos. De hecho, es recomendable golpear la barra con el mango de madera del martillo. Se recomienda además coordinar con sus vecinos más próximos la toma de medidas, es decir coordinar de modo que no golpeen al mismo tiempo las barras. Como resultado de esta parte se pide determinar los valores de las frecuencias de modos de resonancia de la barra cuya frecuencia sea mayor a 1 kHz y menor a 5 kHz. Dependiendo del cuidado con el que se realizan las medidas y las observaciones, el número de frecuencias a determinar puede llegar hasta 12 aproximadamente.

Atención que en una observación más detallada (usando el zoom con el espectro de Fourier) algunas

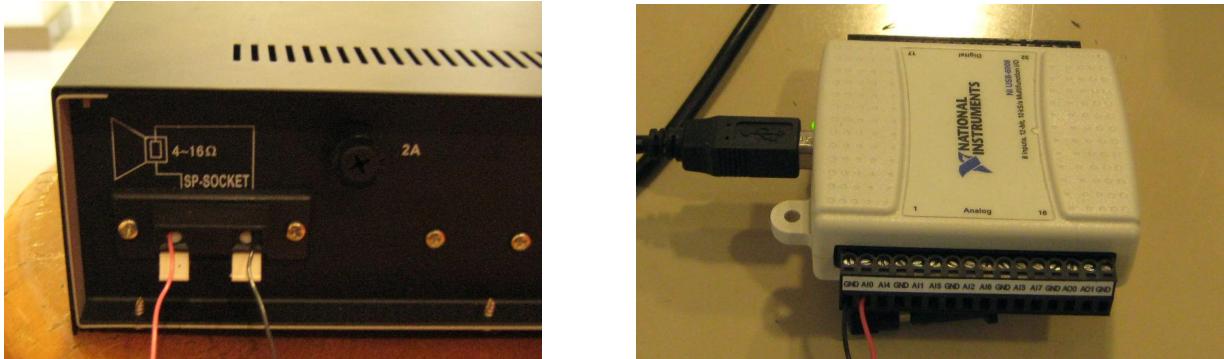


Figura 2: Izquierda: Conexión de salida del amplificador, que puede ir hacia la tarjeta de adquisición o al osciloscopio. Derecha: Conexión de cables con la tarjeta de adquisición, en modo referencia simple (usando canales GND y AI0 por ejemplo).

de las frecuencias pueden estar en pares con diferencias de frecuencia muy pequeñas, del orden de 1 Hz. Esto corresponde a modos que debiesen tener la misma frecuencia (modos degenerados) pero que debido a una ligera perturbación de la barra de su forma circular se separan en valores de frecuencias muy cercanos.

Al final de esta práctica deberá usar el osciloscopio para medir la frecuencia del primer modo longitudinal a partir del espectro de Fourier de la señal del micrófono. Para ello conecte la salida del amplificador de audio a uno de los canales del osciloscopio. Fije la escala de tiempo de modo de tener 250 ms de adquisición en pantalla (25 ms por división, lo que corresponde a 500 Hz por división en el modo FFT). Defina la función FFT en el modo matemático (MATH, botón rojo), asociado por supuesto al canal utilizado. Para tomar un espectro de frecuencia golpee la barra, después presione START, deje pasar uno o dos segundos y presione STOP para congelar el espectro en pantalla. Usando el cursor podrá explorar el espectro medido.

1.5. Medidas mediante técnica de impulsión

Parte A: Use la barra de $L = 120$ cm. Conectando la salida del amplificador a la tarjeta A/D, realice algunas pruebas para determinar una configuración óptima de la posición del micrófono, el volumen del amplificador, la intensidad del golpe y el procedimiento de medida en general.

Anote en el mini-informe la configuración final que usará para sus medidas. Esta configuración le servirá para las próximas sesiones de esta unidad.

Parte B: Con la misma barra realice una medida de la señal del micrófono usando la tarjeta de adquisición. Para ello comience a grabar con el programa *SignalExpress* (en modo *run once*), espere aproximadamente 1 a 2 s, y después golpee suavemente la barra con el martillo. Describa cualitativamente la forma de la señal acústica.

A través de un análisis de modos de Fourier para cada una de estas medidas determine el valor de las frecuencias de resonancia cuya frecuencia sea mayor a 1 kHz y menor a 5 kHz. Recuerde: dependiendo del cuidado con el que se realizan las medidas y las observaciones, el número de frecuencias a determinar puede llegar hasta 12 aproximadamente.

Parte C: Mida la masa de la barra, su longitud y diámetro. Para ello use una balanza, una huinchita y un pie de metro disponible en el laboratorio. Determine la densidad de la barra con su error absoluto. Realice una tabla con los valores medios y sus errores absolutos y adjúntela al mini-informe.

Usando la relación $f_n = \sqrt{E/\rho} (n/2L)$ para los modos de resonancia longitudinales, identifique cuáles de las frecuencias corresponden a los primeros dos modos de oscilación de este tipo ($n = 1$ y $n = 2$). Use como aproximación $E = 69$ GPa para el Módulo de Young.

Parte D: De ser posible identifique los dos primeros modos longitudinales de vibración en las barras de largo $L = 60$ y 150 cm. Use la misma densidad obtenida de la barra de 120 cm y la misma adivinanza para el módulo de Young que la parte C.

Parte E: Usando el osciloscopio, mida el valor de la frecuencia del primer modo longitudinal para al menos dos de las barras utilizadas. ¿Cuáles son sus diferencias relativas a los valores determinados con las medidas hechas con la tarjeta de adquisición?

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

1.6. Anexo: SignalExpress paso a paso para la transformada de Fourier

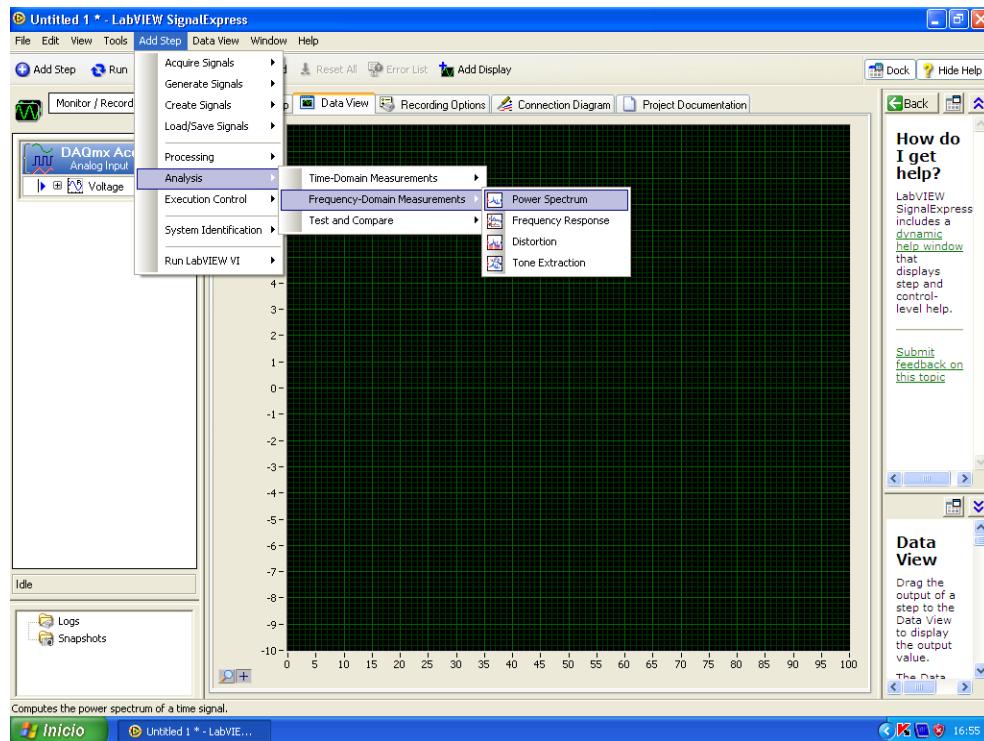


Figura 3: Primera etapa para agregar el espectro de potencia.

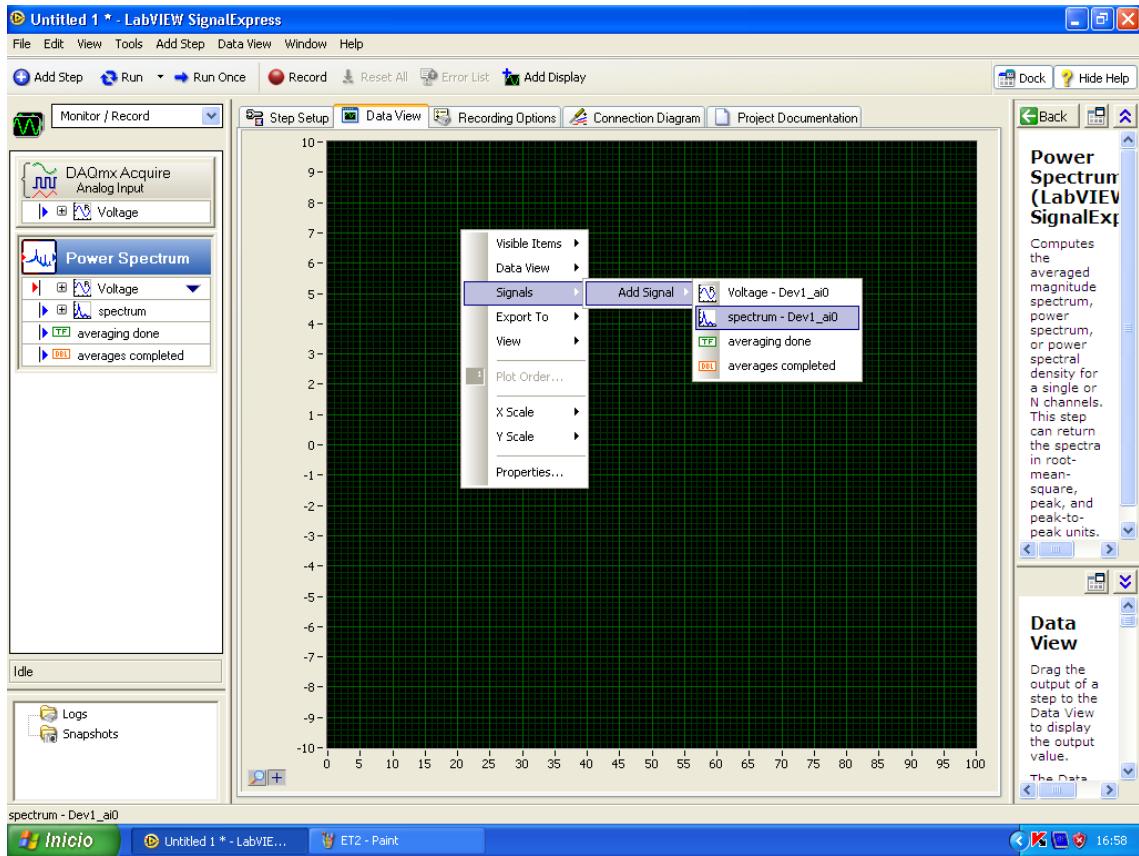
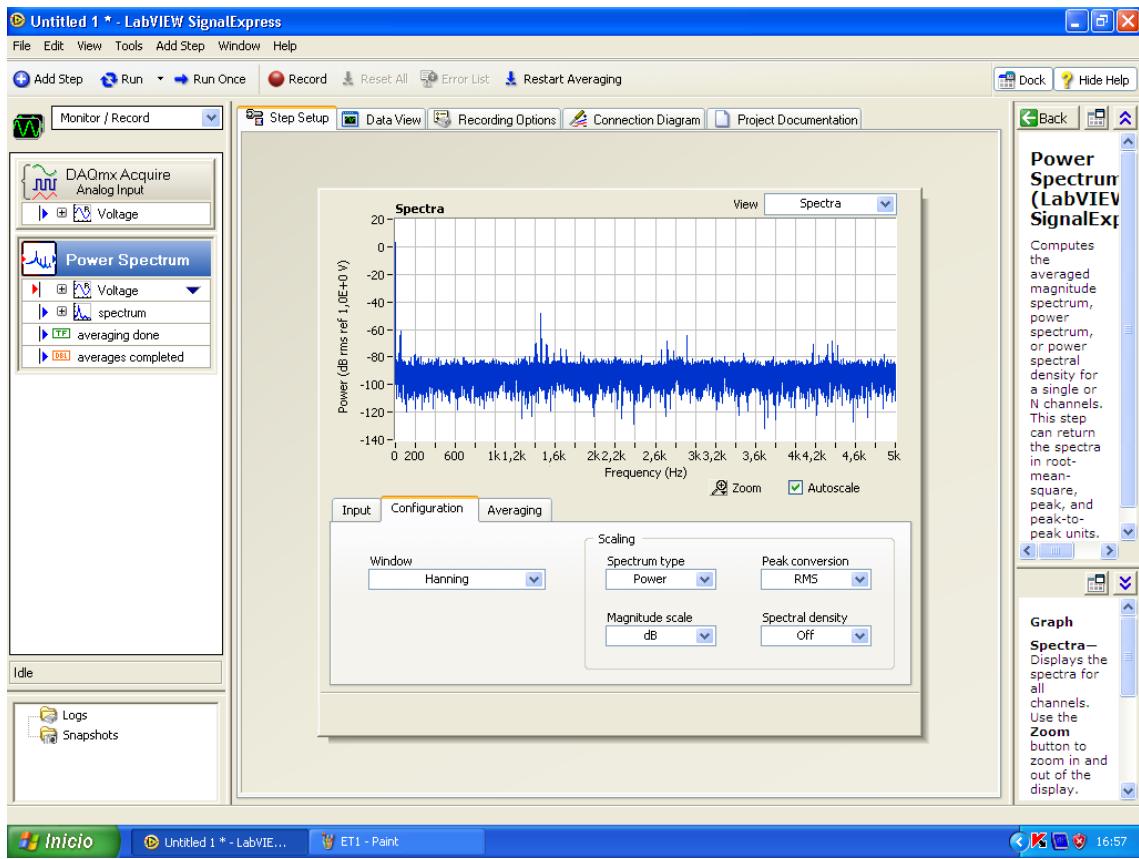


Figura 4: Arriba: Resultado después de agregar el espectro de potencia. Abajo: Se sugiere agregar en *Data View* el resultado del espectro de potencia.

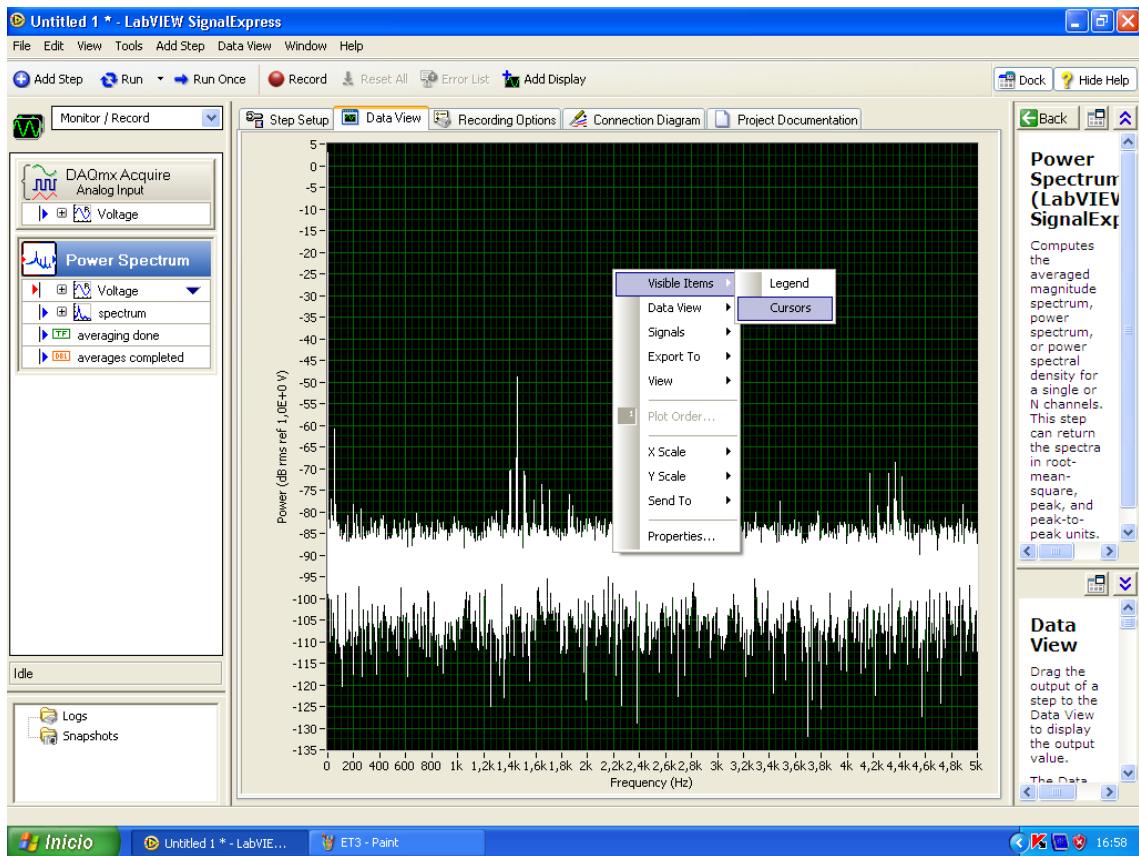


Figura 5: Visualización del espectro de potencia en *Data View*, se sugiere agregar cursores para poder determinar precisamente los valores de las frecuencias de resonancia.

Guía Teórica N°8 - Regresión lineal y ajuste de modelos

1.1. Regresión lineal

En la sesión práctica asociada a esta guía se estudiarán las resonancias de modos de flexión en una barra de duraluminio mediante la técnica de impulsión. Usando una estimación del módulo de Young se determinarán las frecuencias de algunos modos de flexión. Realizando una regresión lineal en escala log-log de estas frecuencias versus el número n de cada modo se obtendrá una medición precisa del módulo de Young del material utilizado.

Es necesario revisar entonces la metodología de regresión lineal de un conjunto de datos. En la figura 1 se presenta una serie de medidas (puntos rojos) de una cierta cantidad y en función de otra cantidad x . Supondremos que se dispone de N datos, de modo que los resultados a analizar serán denotados como (x_i, y_i) con $i = 1 \dots N$. En la misma figura se muestra además una línea continua que pretende describir los resultados con el modelo lineal $y = a \cdot x + b$. La pregunta fundamental que nos concierne es cómo determinar los valores a y b que mejor describen las medidas obtenidas.

Para ello se define $y_i^m = a \cdot x_i + b$ como el valor de la cantidad y dado por nuestro modelo evaluado

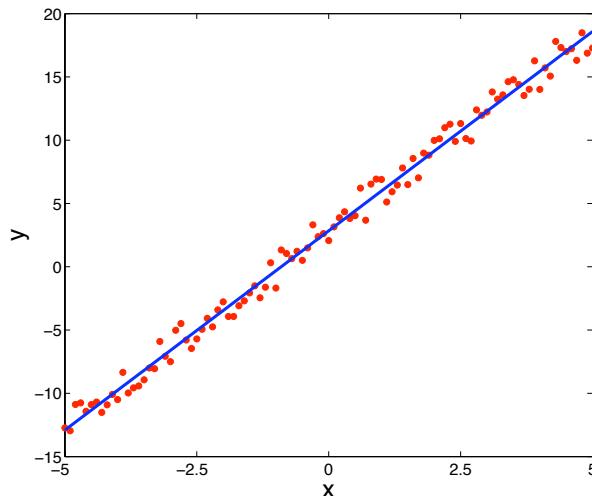


Figura 1: Ejemplo de conjunto de datos a los cuales se desea ajustar un modelo lineal $y = a \cdot x + b$. El método de regresión lineal permite encontrar los valores a y b que mejor se ajustan a los datos experimentales como también entregar una medida de lo bueno que es el ajuste mediante el parámetro R^2 . En este caso los parámetros ajustados dan $a = 3,15$ y $b = 2,84$, con $R^2 = 0,992$.

en la cantidad x_i . Esto corresponde a los puntos sobre la curva continua de la figura 1 evaluados en los puntos x_i . Luego, en general, se cumple $|y_i^m - y_i| \neq 0$ para todo $i = 1...N$.

La búsqueda de los mejores valores de a y b se traduce entonces en minimizar estas cantidades $|y_i^m - y_i|^2$. Para ello se define

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^m - y_i)^2, \quad (1)$$

la cual se busca minimizar. En el caso del modelo lineal se tiene

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (a \cdot x_i + b - y_i)^2. \quad (2)$$

Para minimizar esta cantidad podemos comenzar por dar una interpretación geométrica. Para un conjunto de datos (x_i, y_i) se puede considerar χ^2 como una función de a y b , lo que puede ser considerado como una superficie: en el plano (a, b) la posición de la superficie corresponde al valor de χ^2 . Un ejemplo de esta interpretación se presenta en la figura 2a. Luego, el minimizar χ^2 se traduce en buscar los valles de esta superficie. La figura 2b muestra la coordenada de este mínimo (intersección de dos líneas punteadas).

Matemáticamente se obtiene el par de valores a y b que minimizan χ^2 imponiendo las condiciones

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0. \quad (3)$$

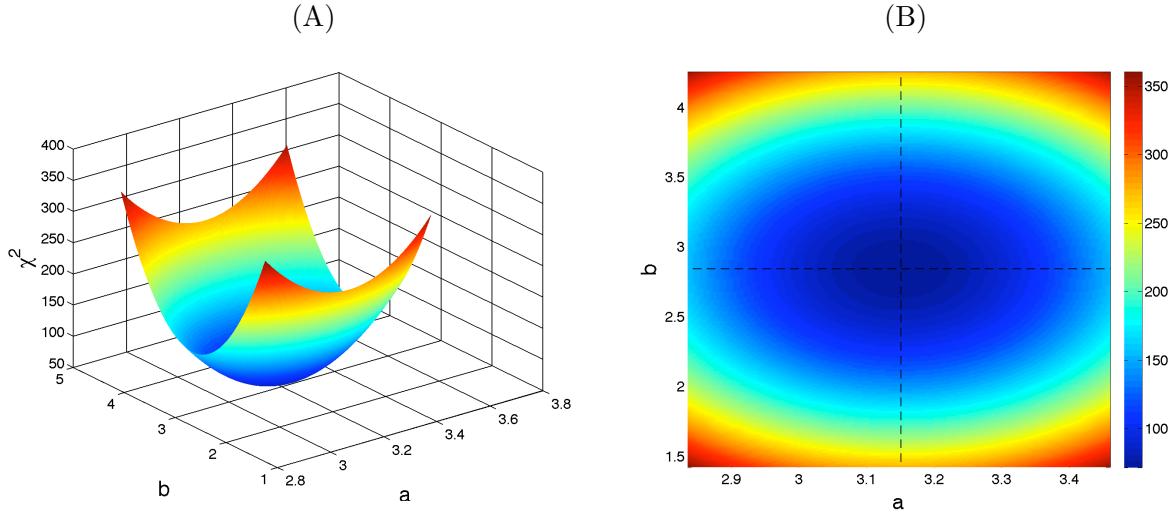


Figura 2: Superficie χ^2 versus a y b usando los datos (x_i, y_i) de la figura 1. El mínimo se obtiene para $a = 3,15$ y $b = 2,84$, con $R^2 = 0,992$. La figura (A) muestra la superficie en una representación 3D y la figura (B) muestra la misma pero en una representación de colores, siendo azul oscuro el mínimo. La intersección de las líneas punteadas muestra el mínimo de χ^2 en $a = 3,15$ y $b = 2,84$.

Luego, usando la definición (2), se obtiene el par de ecuaciones

$$a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i = 0, \quad (4)$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N - \sum_{i=1}^N y_i = 0. \quad (5)$$

Finalmente se puede despejar a y b :

$$a = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N x_i} - \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \right)}{\left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\sum_{i=1}^N x_i} - \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)}, \quad (6)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} - a \cdot \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (7)$$

Para terminar definimos el coeficiente de regresión R^2 como una medida cuantitativa de lo acertado del ajuste. Así, un valor R^2 cercano a 1 indica que el ajuste es bueno. La definición precisa es

$$R^2 = 1 - \frac{\chi^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}, \quad (8)$$

donde

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (9)$$

es el promedio de los datos y_i .

1.2. Casos especiales

El método de regresión lineal se puede aplicar a otros modelos de interés físico. Revisaremos los tres casos más comunes.

1. Caso semilog-y: Se trata de modelos que tienen la forma

$$y^* = A \cdot e^{\alpha x}. \quad (10)$$

En este caso se toma logaritmo a ambos lados de la ecuación, resultando

$$\log(y^*) = \log(A) + \alpha \cdot x. \quad (11)$$

Se identifica entonces $y = \log(y^*)$, $a = \alpha$ y $b = \log(A)$, y se procede como se describió en la sección anterior. Al graficar los datos originales en un gráfico semilog-y (eje y logarítmico, eje x lineal) se obtiene una línea recta. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función `semilogy(x,y*)` (Atención, esto es con los datos originales x e y^*).

2. Caso semilog-x: Se trata de modelos de la forma

$$y = A \cdot \log(\alpha x^*). \quad (12)$$

Usando la propiedad de logaritmos de productos se obtiene

$$y = A \cdot \log(\alpha) + A \cdot \log(x^*). \quad (13)$$

Se identifica entonces $x = \log(x^*)$, $a = A$ y $b = A \cdot \log(\alpha)$, y se procede como en la sección anterior. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función *semilogx(x*,y)* (Atención, esto es con los datos originales x^* e y).

3. Ley de potencia: Se trata de modelos de la forma

$$y^* = A \cdot (x^*)^\alpha. \quad (14)$$

Otra vez se toma logaritmo a ambos lados de esta ecuación y se obtiene

$$\log(y^*) = \log(A) + \alpha \cdot \log(x^*). \quad (15)$$

Se identifica en este caso $y = \log(y^*)$, $x = \log(x^*)$, $a = \alpha$ y $b = \log(A)$. Al graficar los datos originales en un gráfico log-log, se obtiene una línea recta. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función *loglog(x*,y*)* (Atención, esto es con los datos originales x^* e y^*). Este último caso es de interés para el objetivo de la sesión práctica asociada a esta guía.

Guía de Laboratorio N°8 - *Regresión lineal y ajuste de modelos*

1.1. Resumen

En esta sesión se estudiarán las resonancias de modos de flexión en una barra de duraluminio mediante la técnica de impulsión. Usando una estimación del módulo de Young se determinarán las frecuencias de algunos modos de flexión. Realizando una regresión lineal en escala log-log de estas frecuencias versus el número n de cada modo se obtendrá una medición precisa del módulo de Young del material utilizado.

1.2. Objetivos

- Estudio de las resonancias de oscilación de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Análisis del espectro de Fourier de una señal acústica detectada por las oscilaciones libres y amortiguadas de la barra.
- Uso de regresión lineal con un conjunto de datos experimentales.
- Determinar el módulo de Young del duraluminio mediante la medida de algunas frecuencias de modos de flexión de la barra.

1.3. Materiales

- Una barra de duraluminio de 150 cm de longitud, 1.3 cm de diámetro
- Micrófono de audio, amplificador, soportes universales, hilo y martillo.
- Tarjeta de adquisición A/D NI-USB6008 y SignalExpress.

1.4. Montaje experimental

El montaje experimental es el mismo utilizado en la guía n°7. Siga las mismas instrucciones que se dan en esa guía para el montaje de la barra, la excitación con el martillo, la detección de la señal acústica con el micrófono, y su posterior análisis usando la tarjeta de adquisición y *SignalExpress*.

En esta sesión se pretende medir un número de frecuencias de resonancia de algunos modos de flexión en la barra, aproximadamente entre 5 y 8 valores diferentes (ojalá 10).

1.5. Medida del módulo de Young del material

Parte A: Realice algunas pruebas para revisar la configuración óptima de la posición del micrófono, el volumen del amplificador, la intensidad del golpe y el procedimiento de medida en general que se determinó en la sesión de la guía n°7.

Parte B: Realice una medida de la señal del micrófono usando la tarjeta de adquisición. A través de un análisis de modos de Fourier para cada una de estas medidas y usando la relación

$$f_n^B = \frac{\pi R}{16L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot (2n + 1)^2, \quad (1)$$

para los modos de resonancia de flexión, identifique cuáles de estas frecuencias corresponden a modos de flexión y determine el número del modo n para cada una de ellas. Haga una tabla donde informe los modos n y las frecuencias medidas y predichas f_n^B . Si hay algún n que no aparece en la medida, deje este espacio en blanco en la tabla. Use como aproximación $E = 69$ GPa para el módulo de Young del duraluminio. Use la densidad medida en la sesión de la guía n°7.

Parte C: A continuación se obtendrá una medida más precisa del módulo de Young del duraluminio utilizando mediante una regresión lineal de los datos medidos. En particular, se tomará $x_i = \log_{10}(2n + 1)$ e $y_i = \log_{10}(f_n^B)$, tal que $y_i = ax_i + b$, pues se desea ajustar los datos con un modelo de ley de potencia, específicamente según la ecuación (1) anterior.

A partir de los datos de la tabla anterior llene la tabla n°2 y adjúntela a su informe. Con la materia vista en la guía teórica asociada a esta guía, obtenga los valores de los coeficientes a y b como también del parámetro de regresión lineal R^2 . Reporte estos datos en su informe.

¿Es $a \approx 2$? ¿Cómo se relaciona b con el módulo de Young E ? En su informe entregue el valor de E medido y diferencia relativa con la aproximación $E = 69$ GPa. Conociendo los errores asociados a ρ , L y R ¿Cuál es el error asociado a E medido?

Haga un gráfico de f_n^B versus $(2n + 1)$ en escala log-log y adjúntelo al informe. Se recomienda graficar y_i versus x_i en escala lineal usando la función `plot()` en Matlab o directamente f_n^B versus $(2n + 1)$ usando la función `loglog()`. Sobre este gráfico [use `hold on`] grafique la recta obtenida con el ajuste lineal [`plot(x_a, y_a, '-')`, donde x_a e y_a son los datos del ajuste lineal]. Para los datos utilice símbolos ('o'), y para el modelo una línea continua ('-').

Nota: en esta guía se sugiere el uso de Matlab aunque el gráfico puede ser hecho con otro programa, por ejemplo Excel.

$x_i = \log_{10}(2n + 1)$	$y_i = \log_{10}(f_n^B)$	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
$\sum_{i=1}^N x_i$	$\sum_{i=1}^N y_i$	$\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i$	$\sum_{i=1}^N x_i^2$

Tabla 2: Preparación de datos para una regresión lineal, con N el número de frecuencias de flexión medidas (entre 5 y 8, ojalá 10!).

Al término del laboratorio debe dejar los equipos apagados y su puesto de trabajo ordenado y limpio.

EJEMPLO DE INFORME.

A continuación se presenta una serie de **sugerencias** (escritas en rojo) para la realización y correcta presentación de sus informes. Es **ALTAMENTE RECOMENDABLE** que estas sugerencias sean tomadas en cuenta por el alumno.

Carolina Espinoza Oñate.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2003-8 Métodos Experimentales

← ESTO DEBE IR

Laboratorio Nº1 ← NO ESCRIBA "TÍTULO"

Introducción al estudio de corriente continua.

← EN CASO DE
UTILIZAR HOJAS DE
CUADERNO, CORTE
LOS FLEQUILLOS,
por favor...

← INTENTE CREAR UN
TÍTULO ADECUADO
PARA LA EXPERIENCIA
REALIZADA, NO
NECESARIAMENTE EL
MISMO QUE
PROPONE LA GUÍA.

Integrantes: Claudia Alarcón
Camilo Barra
Profesor: Nicolás Mujica
Auxiliares: Carolina Espinoza
Felipe Isaule
Paula Rivera
Fecha de entrega: 21-03-2012

ORDENE ALFABÉTICAMENTE, SEGÚN
APELIDO, INTEGRANTES Y
AUXILIARES →

EL INFORME DEBE SER ESCRITO A MANO. RECUERDE CUIDAR SU REDACCIÓN Y ORTOGRAFÍA.

Resumen

En el presente informe se pretende... Los principales objetivos son... La experiencia se llevó a cabo utilizando... Las conclusiones más importantes obtenidas...

UN RESUMEN CORRECTO DEBE PERMITIRLE A UN LECTOR CUALQUIERA HACERSE UNA IDEA GENERAL DE LOS **OBJETIVOS DEL TRABAJO REALIZADO, LA METODOLOGÍA **EXPERIMENTAL** Y LAS **CONCLUSIONES** OBTENIDAS. LAS CONCLUSIONES DEBEN SER PRESENTADAS DE MANERA CUANTITATIVA, EVITANDO EXPRESIONES COMO “RESULTADOS MUY CERCANOS A LOS ESPERADOS” Y UTILIZANDO POR EJEMPLO “SE OBTUVO RESULTADOS EXPERIMENTALES CON UN ERROR DEL % CON RESPECTO A LO PREDICHO TEÓRICAMENTE”.**

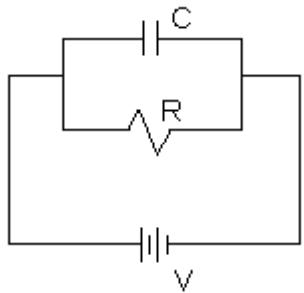
ES RECOMENDABLE QUE EL RESUMEN SEA BREVE, NO MENOR A MEDIA PLANA NI MAYOR A UNA PÁGINA.

SECCIONES COMO PORTADA, RESUMEN (SIN CONCLUSIONES, ESAS DEBEN AÑADIRSE LUEGO DE REALIZADA LA EXPERIENCIA), DESCRIPCIÓN, PUEDEN SER ADELANTADAS PREVIAMENTE POR EL ALUMNO.

Descripción

Con el objetivo de... se realizaron diversos montajes experimentales que permitieron medir...

En primer lugar se armó el circuito de la figura 1...



← SIEMPRE ES ÚTIL ADJUNTAR IMÁGENES EN LA SECCIÓN DE DESCRIPCIÓN. NOMBRE Y CITE LAS FIGURAS DE LA FORMA “FIGURA Nº”. AGREGUE UNA PEQUEÑA DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES (VALOR DE RESISTENCIAS, CAPACITANCIAS, VOLTAJE APLICADO, ETC).

Figura 1: Circuito RC con una resistencia de...

Luego se procedió a... como muestra la Figura 2...

EL LECTOR DE ESTA SECCIÓN DEBE QUEDAR ABSOLUTAMENTE CAPACITADO PARA REPRODUCIR LA EXPERIENCIA. SE DEBEN DETALLAR LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS COMPONENTES UTILIZADOS Y LA MANERA EN QUE ESTOS SE DISPONEN ENTRE SÍ.

DESCRIBA LAS ELECCIONES DE PARÁMETROS O VALORES UTILIZADOS EN LA EXPERIENCIA.

DESCRIBA TODOS LOS MONTAJES DE LA EXPERIENCIA EN ESTA SECCIÓN.

NO COPIE TEXTUALMENTE EL PROCEDIMIENTO SUGERIDO EN LA GUÍA.

Resultados, análisis y discusión.

Resultados

A través del primer montaje realizado se obtuvieron los datos mostrados en la tabla 1

Medición del rango de validez del multímetro.	
Frecuencia (Hz)	Voltaje (V)
40	0.715
50	0.716

Tabla 1

← UTILICE TABLAS PARA PRESENTAR LOS DATOS OBTENIDOS.
LAS TABLAS DEBEN TENER TÍTULO, SER NOMBRADAS Y CITADAS AL IGUAL QUE LAS FIGURAS. SI CONSIDERA NECESARIO, AGREGUE UNA DESCRIPCIÓN.
iiiNO OLVIDE PONER UNIDADES!!!

← LOS GRAFICOS DEBEN SER NOMBRADOS Y CITADOS COMO FIGURAS, CON UNA PEQUEÑA DESCRIPCIÓN SOBRE LO QUE SE GRAFICA. DEBEN AÑADIRSE EJES Y UNIDADES (CON LETRA CLARA).

El gráfico mostrado en la figura 3...

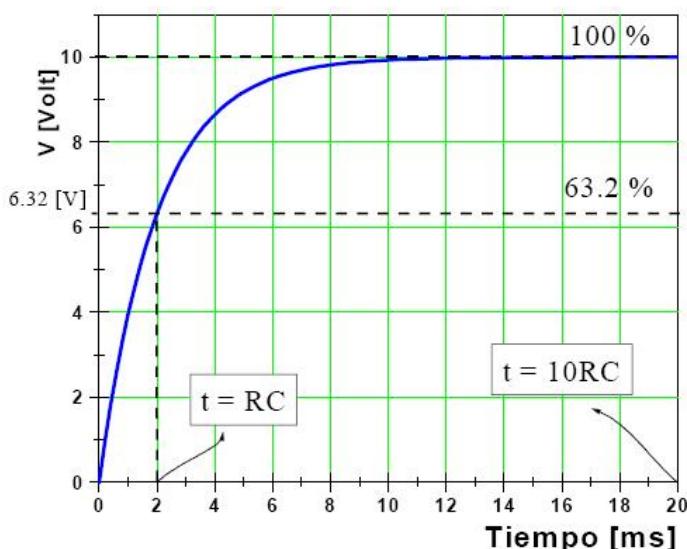


Figura 3: Gráfico de voltaje en el condensador en función del tiempo, para un condensador de...

Análisis

De la tabla... se puede observar que... Esto es claro al mirar el gráfico de la figura...

En contraposición con lo esperado se obtuvo... con un error del % con respecto a... De acuerdo con lo esperado por la ley...

SE DEBE REALIZAR UN ANÁLISIS DE LOS DATOS EXPUESTOS, DONDE SE LLEVEN A CABO OBSERVACIONES SOBRE ERRORES Y CONSISTENCIA CON LA TEORÍA.

Discusión

Es posible que los errores obtenidos se deban a... tales resultados podrían mejorar si... Se pudo corroborar que... Por otra parte se observó un comportamiento contrario a lo esperado...

EN ESTA PARTE SE DEBE PLANTEAR EL CUMPLIMIENTO (O NO) DE LOS OBJETIVOS

SE DEBEN PROPONER POSIBLES CAMBIOS A LA EXPERIENCIA QUE PERMITAN MEJORAR RESULTADOS.

EL ALUMNO DEBE SER CAPAZ DE SEÑALAR DIFICULTADES PROPIAS DE LA ACTIVIDAD.

Conclusiones

A partir de la experiencia realizada se pudo concluir que... con un error de % con respecto a la teoría... se corroboró...

LAS CONCLUSIONES SE DEBEN EXPONER LOS RESULTADOS MÁS IMPORTANTES OBTENIDOS, AQUELLOS QUE SE RELACIONAN CON LOS OBJETIVOS PLANTEADOS EN EL RESUMEN.

NUEVAMENTE, SE DEBEN MOSTRAR RESULTADOS DE FORMAS CONCRETAS, NO SIMPLES APRECIACIONES SOBRE LO SATISFACTORIO QUE NOS PARECEN O LO GRATIFICANTE DE LA EXPERIENCIA. LAS CONCLUSIONES DEBEN PRESENTARSE DE MANERA OBJETIVA.

UNA CORRECTA PRESENTACIÓN DE CONCLUSIONES PERMITIRÁ DETERMINAR CUÁL ES EL APRENDIZAJE DE LA EXPERIENCIA. SE DEBE NOTAR QUE NO EXISTEN BUENAS O MALAS CONCLUSIONES A PRIORI, SOLAMENTE QUE ESTAS DEBEN SER CONSISTENTES CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Puntuación de los informes

Cada sección de un informe tiene la siguiente asignación de puntos:

1. - Portada: 0.5 pts
2. - Resumen: 0.5 pts
3. - Descripción: 1.0 pt
4. - Resultados, análisis y discusión: 3.0 pts
5. - Conclusiones: 1.0 pt

Adicionalmente, se asignarán puntos negativos por mala presentación en los siguientes aspectos:

- mala redacción (una o más frases que no sean comprensibles): -0.5 pts
- error ortográfico: -0.1 pts por cada error (con un tope 20 errores por informe).
- mala presentación (ilegible, sucio, desordenado): -0.5 pts
- entrega atrasada: -1 pt.