Ricerca Operativa

Massimo Pappalardo
Dipartimento di Informatica
Largo B. Pontecorvo 3, Pisa
massimo.pappalardo@unipi.it

Laurea in Ingegneria Informatica
Universitá di Pisa
A.A. 2023/'24

Riferimenti

Massimo Pappalardo

Dipartimento di Informatica

Largo B. Pontecorvo 3 - Pisa

Edificio C - studio 289DE

tel. 050 2212750

e-mail: massimo.pappalardo@unipi.it

ricevimento: controllare le info sul canale Teams

Orario del corso

- lunedí 10.30-12.30
- martedí 8.30-10.30
- mercoledí 8.30-10.30
- giovedí 8.30-10.30

Materiale per il corso

Consultare pagina Teams del corso

Testi

- M.Pappalardo, M.Passacantando, Ricerca Operativa, Edizioni Plus, 2010.
- F.S.Hillier, G.J.Lieberman, Ricerca Operativa, McGraw Hill, 2010.

Esame

Prova scritta e prova orale.

Conoscenze richieste

- Operazioni tra matrici: somma, moltiplicazione e prodotto per uno scalare.
- Matrice Inversa.
- Sistemi lineari.
- Autovalori di una matrice.
- Derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, matrice hessiana.
- Insiemi del piano definiti da curve di livello.

Obiettivo

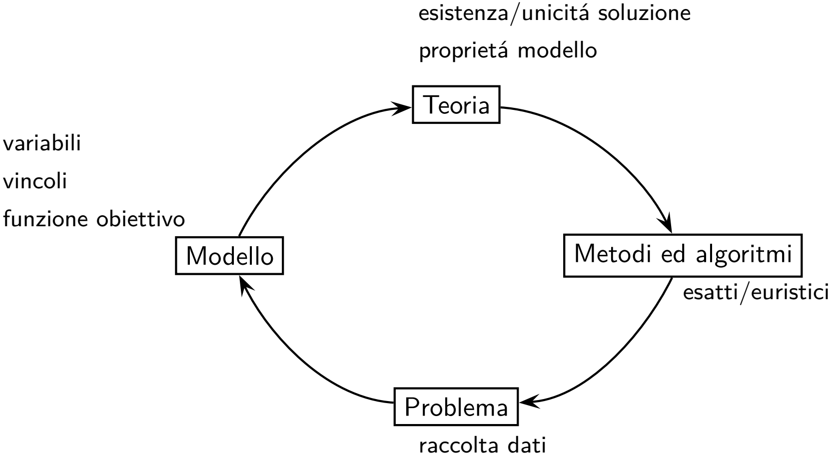
Fornire conoscenze e metodi per la formulazione e risoluzione di problemi di ottimizzazione.

Argomenti

- Modelli matematici di ottimizzazione per processi decisionali di ottimizzazione.
- Teoria e metodi di Programmazione Matematica: Lineare (PL), Lineare Intera (PLI), Lineare su Reti e Non Lineare (PNL).
- Toolbox Optimization di MATLAB per la risoluzione di problemi di ottimizzazione.

- Produzione.
- Assegnamento.
- Trasporto.
- Caricamento.
- Localizzazione.
- "Bin packing".
- Commesso viaggiatore.
- Flusso di costo minimo su reti.
- Cammini minimi.
- Flusso massimo.

Il processo decisionale



Modelli matematici di problemi decisionali

- Raccolta dati.
- Variabili decisionali, funzione obiettivo, vincoli.
- Costruzione del modello matematico.
- Teoria, metodi e algoritmi per la risoluzione del modello matematico.
- Software per la soluzione.
- Controllo della soluzione.

Un problema di ottimizzazione

Un contadino ha 12 ettari di terra per coltivare pomodori e patate.

Ha anche 70 kg di semi di pomodoro, 18 t di tuberi e 160 t di letame.

Il guadagno per ettaro é 3000 euro per i pomodori e 5000 euro per le patate.

I pomodori necessitano di 7 kg di semi e 10 t di letame per ettaro, mentre le patate richiedono 3 t di tuberi e 20 t di letame per ettaro.

Per massimizzare il guadagno come dividere la terra tra pomodori e patate?

Raccolta dati

Dati

- 12 ettari di terra.
- 160 t di letame, 70 Kg di semi, 18 t di tuberi.
-

	profitto/ett.	semi/ett.	letame/ett.	tuberi/ett.
pomodori	3000	7 kg	10 t	
patate	5000		20 t	3 t

- Come decidere?
  Quanti ettari devono essere assegnati ai pomodori e quanti alle patate.
- Quale é il nostro obiettivo? Massimizzare il guadagno.
- Quali sono le richieste per avere una soluzione ammissibile?
  Limiti sulle risorse disponibili.

Cosa si deve decidere? $\rightarrow$ variabili decisionali

- x_T = ettari di pomodori
- x_P = ettari di patate

Massimizzare il guadagno $\rightarrow$ funzione obiettivo

Guadagno $= 3000x_T + 5000x_P$
Massimizzare il guadagno $\rightarrow$ max $3x_T + 5x_P$

Modello

Richieste e disponibilitá di risorse $\rightarrow$ vincoli

- Disponibilitá di terreno: $x_T + x_P \leq 12$
- Semi di pomodoro disponibili: $7x_T \leq 70 \rightarrow x_T \leq 10$
- Tuberi di patate disponibili: $3x_P \leq 18 \rightarrow x_p \leq 6$
- Letame disponibile: $10x_T + 20x_P \leq 160 \rightarrow x_T + 2x_P \leq 16$
- Variabili non negative: $x_T \geq 0$, $x_P \geq 0$

Forma matriciale

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_T + 5x_P \\ & x_T + x_P \le 12 \\ & x_T \le 10 \\ & x_P \le 6 \\ & x_T + 2x_P \le 16 \\ & -x_T \le 0 \\ & -x_P \le 0 \end{aligned}$$

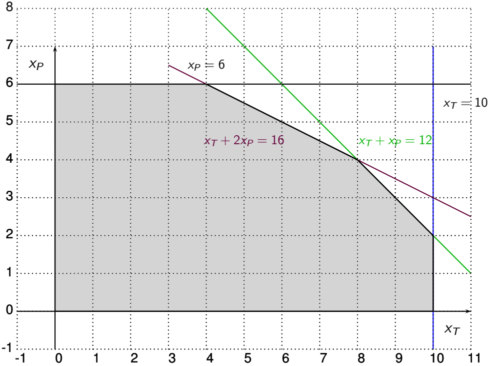
$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$m =$ numero di vincoli
$n =$ numero di variabili
A matrice $m \times n$
b vettore m componenti
c vettore n componenti

Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{array}{rl}
\max \; 3x_T + 5x_P & \\
x_T + x_P & \leq 12 \\
x_T & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_T + 2x_P & \leq 16 \\
-x_T & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{array}
$$



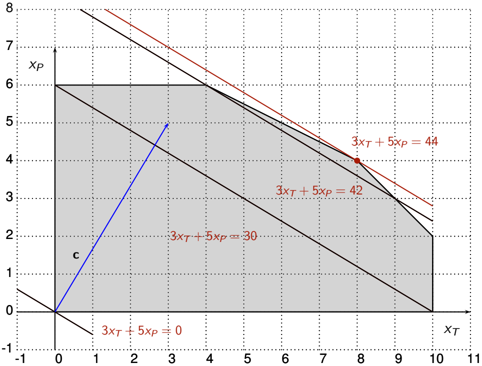
Soluzione grafica della PL per n=2

Le linee di isocosto o isoguadagno sono

$$L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$$

dove $v \in \mathbb{R}$ é un numero reale.

$$\begin{aligned} \max \;\; & 3x_T + 5x_P \\ x_T + x_P &\leq 12 \\ x_T &\leq 10 \\ x_P &\leq 6 \\ x_T + 2x_P &\leq 16 \\ -x_T &\leq 0 \\ -x_P &\leq 0 \end{aligned}$$



Soluzione ottima $x_T = 8, x_P = 4$

PL e la sua forma standard

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare soggetta ad un insieme finito di vincoli lineari di disuguaglianza o di uguaglianza:

$$\begin{cases} \max(\min)\ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

Definizione

Un problema nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ A x \leq b \end{cases}$$

é detto problema di PL in formato primale standard.

PL e formato primale standard

Osservazione

Ogni problema di PL puó essere equivalentemente scritto in formato primale standard.

Dimostrazione. $\min\ c^T x = -\max\ (-c^T x)$

$a^T x \geq b$ é equivalente a $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$ é equivalente a $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$.

Definizione

Un poliedro P é l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi o, equivalentemente, l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

DATI: Un'azienda deve produrre due tipi di tessuto.

Per produrre un quintale del primo tessuto servono 28 kg di lana e 7 kg di cotone.

Per il secondo tipo servono 7 kg di lana e 14 kg di cotone.

Per produrre i tessuti servono 3 ore di lavoro di un operaio specializzato per ogni quintale da produrre.

Ogni settimana sono disponibili 168 kg di lana, 84 kg di cotone e 42 ore di lavoro.

Siano 20 e 10 euro i guadagni (per quintale) per il tessuto 1 e per il tessuto 2.

VARIABILI: Indichiamo con x_1 e x_2 i quintali prodotti del primo e del secondo tessuto.

Problema di produzione

$$\begin{cases} \max\ 20\,x_1 + 10\,x_2 \\ 28\,x_1 + 7\,x_2 \leq 168 \\ 7\,x_1 + 14\,x_2 \leq 84 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 \leq 42 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima é: (36/7, 24/7) per un guadagno di 137,14 euro.

Qualora il bene da produrre fosse stato un vestito anziché un chilogrammo di tessuto, la soluzione trovata non era ammissibile e si sarebbe dovuto aggiungere il vincolo di interezza.

In tal caso la soluzione ottima sarebbe stata (5,3) con un guadagno di 130 euro.

Problema di produzione

Supponiamo che si debbano produrre n oggetti, ognuno composto da m diverse materie prime.

Sia data una matrice di composizione A. In tale matrice l'elemento a_{ij} rappresenta la quantitá di materia prima i che serve per produrre l'oggetto j.

Sia dato il guadagno c_j ottenuto vendendo l'oggetto j e la disponibilitá b_i della materia prima i.

Introducendo le variabili x_j, che rappresentano le quantitá prodotta dell'oggetto j, il problema viene formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \max \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \text{per ogni } i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 & \text{per ogni } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Problema di assegnamento

- Date n persone e n lavori.
- Ogni lavoro deve essere fatto da *esattamente una* persona.
- Ogni persona puó fare *al piú* un lavoro.
- Il *costo* della persona $j = 1, \ldots, n$ che fa il lavoro $i = 1, \ldots, n$ é c_{ij}.
- Vogliamo trovare un *assegnamento di costo minimo*.
- Possiamo associare una variabile 0-1 x_{ij} ad ogni possibile assegnamento(vale 1 se lavoro i assegnato alla persona j, 0 altrimenti).

Problema di assegnamento

Assegnamento non cooperativo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1,\dots,n) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,\dots,n) \\
& x_{ij} \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

Assegnamento cooperativo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1,\dots,n) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,\dots,n) \\
& x_{ij} \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Problema di assegnamento

Un assegnamento non cooperativo é una permutazione.

Un problema di assegnamento non cooperativo é un problema di PLI; cioè un problema di PL in cui le variabili sono ristrette ad essere intere. La PLI sarà trattata nella seconda parte del corso.

Un problema di assegnamento cooperativo é un problema di PL.

Problema di trasporto

Supponiamo di avere m luoghi di produzione collegati con n luoghi di raccolta.

Per fissare le idee si può pensare alla distribuzione giornaliera su un territorio di un prodotto come ad esempio un carburante.

Supponiamo che siano note le capacità produttive o_i, per $i = 1, \dots, m$, le domande d_j, per $j = 1, \dots, n$, ed il costo di trasporto da ogni luogo di produzione ad ogni luogo di destinazione.

Si voglia determinare un piano di trasporto compatibile con la produzione e con la richiesta e che minimizzi il costo totale.

Problema di trasporto

Supponiamo che il costo di spedizione sia proporzionale (lineare) e quindi esista il costo unitario c_{ij} del trasporto da i a j.

Indichiamo con x_{ij} la quantità di merce da trasportare da i a j.

Fissato j, sommando su i le x_{ij} si ottiene la quantità di merce che arriva al luogo di raccolta j e viceversa, fissato i, sommando su j le x_{ij} si ottiene la quantità di merce spedita dal luogo di produzione i.

Problema di trasporto

Il modello matematico è il seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Naturalmente il problema potrebbe non avere alcuna soluzione qualora

$$\sum_{j=1}^{n} d_j > \sum_{i=1}^{m} o_i,$$

cioè se la domanda totale supera l'offerta totale. Nel caso in cui ci sia, invece, un eccesso di produzione, cioè

$$\sum_{j=1}^{n} d_j < \sum_{i=1}^{m} o_i,$$

si può pensare di aggiungere un luogo di raccolta fittizio a cui spedire (a costo nullo) l'eccesso di produzione.

A meno di aggiungere un nodo fittizio di raccolta, potremmo supporre che nel modello precedente i vincoli di produzione e di domanda siano tutti vincoli di uguaglianza, cioè:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Problema di trasporto

È evidente che il modello é compatibile con il trasporto di merce che sia divisibile (tipo carburante), in quanto la soluzione del modello matematico potrebbe non essere a componenti intere anche con vettori $(o_1, \dots, o_m)$ e $(d_1, \dots d_n)$ a componenti intere.

Se il bene da trasportare fosse indivisibile (tipo elettrodomestici, mobili, etc.) bisognerebbe aggiungere nel problema il vincolo

$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n.$$

Esempio

Un'azienda elettrica ha tre stabilimenti che devono soddisfare le esigenze di 4 cittá.

Ogni stabilimento puó fornire un certo numero di kWh di elettricitá: 35 milioni lo stabilimento 1, 50 milioni lo stabilimento 2 e 40 milioni lo stabilimento 3.

Il picco di domanda delle cittá che avviene verso le 2 del pomeriggio é di 45 milioni per la cittá 1, 20 milioni per la cittá 2, di 30 milioni per la cittá 3 e di 30 milioni per la cittá 4.

Il costo per mandare 1 milione di kWh dipende dalla distanza che l'elettricitá deve percorrere ed é indicato nella tabella seguente:

	cittá 1	cittá 2	cittá 3	cittá 4
stabilimento 1	8	6	10	9
stabilimento 2	9	12	13	7
stabilimento 3	14	9	16	5

Esempio

Sia x_{ij} il numero di kWh (in milioni) prodotto dallo stabilimento i per la cittá j.

$$\begin{cases} \min \; 8\,x_{11} + 6\,x_{12} + 10\,x_{13} + 9\,x_{14} + 9\,x_{21} + 12\,x_{22} + 13\,x_{23} + 7\,x_{24} + \\ \qquad + 14\,x_{31} + 9\,x_{32} + 16\,x_{33} + 5\,x_{34} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima é:

$$\begin{array}{llll} x_{11} = 0 & x_{12} = 10 & x_{13} = 25 & x_{14} = 0 \\ x_{21} = 45 & x_{22} = 0 & x_{23} = 5 & x_{24} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 10 & x_{33} = 0 & x_{34} = 30 \end{array}$$

ed il costo totale é di 1020 milioni di euro.

Definizione

Un punto x di un poliedro P é un vertice se non esistono due punti di P differenti da x tali che x appartenga al segmento generato da essi.

Esempi.

Vertici di $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x_1 \le 4, \quad 1 \le x_2 \le 3\}$ sono $(1,1)$, $(1,3)$, $(4,1)$ e $(4,3)$.

Vertici di $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 1, \quad x_1 + x_2 \ge 3\}$ sono $(1,2)$ e $(2,1)$.

$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x_2 \le 1\}$ non ha vertici.

Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma primale standard:

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \end{cases} \qquad (P)$$

Teorema fondamentale della PL

Se P é limitato e non vuoto, allora un vertice di P é ottimo.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max \ -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

La soluzione ottima é $(2, 1)$.

Come riconoscere una soluzione ottima?

Teorema

Una soluzione $\bar{x}$ é ottima se e solo se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}^m_+$ tale che

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \quad \text{(scarti complementari)} \end{cases}$$

Esempio. Consideriamo il problema di PL

$$\begin{cases} \max \ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = (1, 1)$ é ottima perché $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$ risolve il sistema.
$\bar{x} = (0, 0)$ non é ottima perché il sistema non ha soluzione.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P é ottimo.

Come trovare un vertice ottimo? Sevono proprietá algebriche dei vertici

Consideriamo un problema

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Definizione

Una base é un insieme B di n indici di riga tali che $\det(A_B) \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

Data una base B, il vettore $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ é detto soluzione di base primale.

$\bar{x}$ é ammissibile se $A_N \bar{x} \leq b_N$.

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2\}$ é una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertibile.

La soluzione corrispondente é $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ é ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$.

$B = \{1, 3\}$ non é una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non é invertibile.

$B = \{2, 4\}$ é una base e la corrispondente soluzione di base é inammissibile:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N.$$

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

$\bar{x}$ é un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ é una soluzione di base ammissibile.

Esempio. Consideriamo il precedente problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = (2, 1)$ é una soluzione di base ammissibile corrispondente alla base $B = \{1, 2\}$.

Al problema primale in forma standard

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \end{cases} \tag{P}$$

associamo il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min \ y^{\mathsf{T}} b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}}, \quad y \geq 0\} \end{cases} \tag{D}$$

che sará chiamato problema duale in forma standard.

Il valore ottimo del problema (D) verrá indicato con $v\,(D)$.

Poiché ogni problema di PL si puó trasformare in un problema primale standard, allora ogni problema di PL ha un suo problema duale.

Osservazione

Ogni problema di PL si puó trasformare in un duale standard.

Dimostrazione. Una disuguaglianza

$$A_i^\mathsf{T} x \leq b_i$$

si puó trasformare nell'uguaglianza

$$A_i^\mathsf{T} x + s_i = b_i,$$

aggiungendo i vincoli $s_i \geq 0$, dove le s_i sono dette variabili di scarto.

Ogni numero reale é la differenza di due numeri non negativi quindi si puó sempre introdurre il vincolo di positivitá sulle variabili spezzando ogni variabile non vincolata in segno nella differenza di due variabili vincolate in segno e porre

$$x = x^+ - x^- \qquad \text{con} \qquad x^+ \geq 0, \quad \text{e} \quad x^- \geq 0.$$

Teorema

(Dualitá forte) Se i poliedri P e D sono non vuoti, allora

$$-\infty < v(P) = v(D) < +\infty$$

Soluzioni di base duali

Data una base B, definiamo:

Soluzione di base duale: $$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^{\mathsf{T}} = c^{\mathsf{T}} A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

Una soluzione di base duale puó essere:

	$\bar{y}$
ammissibile	per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \geq 0$
non ammissibile	esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i < 0$
degenere	esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$
non degenere	per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \neq 0$

Teorema

Due soluzioni di base complementari $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono in scarti complementari.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\bar{y}^{\mathsf{T}}(b - A\,\bar{x}) &= (\bar{y}_B^{\mathsf{T}}, \bar{y}_N^{\mathsf{T}}) \begin{pmatrix} b_B - A_B\,\bar{x} \\ b_N - A_N\,\bar{x} \end{pmatrix} \\
&= (c^{\mathsf{T}} A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} b_B - A_B\,A_B^{-1}\,b_B \\ b_N - A_N\,A_B^{-1}\,b_B \end{pmatrix} \\
&= (c^{\mathsf{T}} A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N\,A_B^{-1}\,b_B \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dal teorema precedente e dal teorema degli scarti complementari possiamo dedurre le seguenti condizioni sufficienti di ottimalitá.

Teorema*(Condizioni sufficienti di ottimalitá per soluzioni di base)*

Date due soluzioni di base complementari $\bar{x}$ e $\bar{y}$, si ha:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \text{ é ammissibile per } (P) \\ \text{e} \\ \bar{y} \text{ é ammissibile } (D) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \text{ é ottima per } (P) \\ \text{e} \\ \bar{y} \text{ é ottima } (D) \end{bmatrix}$$

Algoritmo del simplesso

1. Trova una base B tale che la corrispondente soluzione di base $\bar{x} := A_B^{-1}\, b_B$ sia ammissibile.
2. Calcola
$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \qquad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$
3. **se** $\bar{y}_B \geq 0$ **allora** STOP ($\bar{x}$ é ottima) **altrimenti** trova l'indice uscente
$$h := \min\{ i \in B : \ \bar{y}_i < 0 \}$$
poniamo $W := -A_B^{-1}$, denotiamo W^h la h–ma colonna di W.
4. **se** $A_i\, W^h \leq 0$ per tutti gli indici $i \in N$ **allora** STOP (ottimo di (P) é $+\infty$)
altrimenti calcola $\vartheta := \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} : \quad i \in N, \ A_i\, W^h > 0 \right\}$,
trova l'indice entrante
$$k := \min \left\{ i \in N : \ A_i\, W^h > 0, \ \frac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} = \vartheta \right\},$$
aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, vai al passo 2.

Teorema

L'algoritmo del simplesso risolve (P) in un numero finito di iterazioni.

Esempio. Partendo dalla base $B = \{3, 4\}$, risolviamo il problema:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ammissibile.
$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,
$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$,
$k = 2$.
Iterazione 3. $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1, 1) \geq 0$ stop $\bar{x}$ é ottima.

Simplesso duale

Descriviamo l'algoritmo del simplesso duale per risolvere un duale standard:

$$\begin{cases} \min \; y^{\mathsf{T}} b \\ y^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}} \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

L'algoritmo é analogo al simplesso primale con la differenza che ad ogni passo si mantiene ammissibile la soluzione di base duale e si controlla l'ammissibilitá di quella primale.

Se la soluzione di base primale é ammissibile, allora abbiamo trovato una coppia primale/duale di soluzioni ottime.

Il cambio di base é definito in modo che, se la nuova soluzione di base duale é diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo diminuisce.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO DUALE

1. Trova una base B che genera una soluzione di base duale ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ e la soluzione di base duale

$$\bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N), \qquad \text{con} \quad \bar{y}_B^\mathsf{T} = c^\mathsf{T} A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

3. **Se** $b_N - A_N\,\bar{x} \geq 0$ **allora** STOP ($\bar{y}$ é ottima per (D) e $\bar{x}$ é ottima per (P)).
   altrimenti calcola l'indice entrante

$$k = \min\{i \in N : \ b_i - A_i\,\bar{x} < 0\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$

   poni $W = -A_B^{-1}$ ed indica con W^i la i–esima colonna di W.
4. **Se** $A_k\,W^i \geq 0$ per ogni $i \in B$ **allora** STOP ((D) ha valore $-\infty$).
   altrimenti calcola

$$\vartheta = \min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k\,W^i} : \quad i \in B,\ A_k\,W^i < 0 \right\},$$

   calcola l'indice uscente

$$h = \min\left\{ i \in B : \quad A_k\,W^i < 0,\ \frac{\bar{y}_i}{-A_k\,W^i} = \vartheta \right\} \quad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

Teorema

Il simplesso duale risolve (D) in un numero finito di iterazioni.

Illustriamo ora una risoluzione di un problema di PL applicando il simplesso duale.

Esempio. Risolviamo il seguente problema

$$\begin{cases} \min\ 13\,y_3 + 9\,y_4 + 7y_5 \\ -y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\ -y_2 + 2\,y_3 + y_4 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

con il simplesso duale partendo dalla base $B = \{2, 3\}$.

Iterazione 1.

La matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y}_B^{\mathsf{T}} = (3, -4) A_B^{-1} = (10, 3), \qquad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^{\mathsf{T}},$$

e quella primale é $\bar{x} = (13, 0)^{\mathsf{T}}$ che non é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 13, \qquad b_4 - A_4\,\bar{x} = -4, \qquad b_5 - A_5\,\bar{x} = -6,$$

quindi l'indice che entra in base é 4. Calcoliamo i prodotti

$$A_4\,W^2 = -1, \qquad A_4\,W^3 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4\,W^2} = 10, \qquad \frac{\bar{y}_3}{-A_4\,W^3} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base é 3.

Iterazione 2.

La nuova base é $B = \{2, 4\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)^T,$$

e quella primale é $\bar{x} = (9, 0)^T$ che non é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 9, \qquad b_3 - A_3\,\bar{x} = 4, \qquad b_5 - A_5\,\bar{x} = -2,$$

quindi l'indice che entra in base é 5. Calcoliamo i prodotti

$$A_5\,W^2 = -1, \qquad A_5\,W^4 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_5\,W^2} = 7, \qquad \frac{\bar{y}_4}{-A_5\,W^4} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base é 4.

Iterazione 3.

La nuova base é $B = \{2, 5\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)^{\mathsf{T}},$$

e quella primale é $\bar{x} = (7, 0)^{\mathsf{T}}$ che é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 7, \qquad b_3 - A_3\,\bar{x} = 6, \qquad b_4 - A_4\,\bar{x} = 2,$$

quindi $(0, 4, 0, 0, 3)$ é la soluzione ottima del problema.

Problema ausiliario duale

Consideriamo il problema in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min \ y^{\mathsf{T}} b \\ y^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}} \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

Senza ledere la generalitá della trattazione possiamo supporre che $c \geq 0$, cambiando eventualmente segno alle equazioni.

Per trovare una base ammissibile di (D) che sia la base di partenza del simplesso duale si costruisce il problema ausiliario duale:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \\ y^{\mathsf{T}} A + \epsilon^{\mathsf{T}} = c^{\mathsf{T}} \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D}_{aux})$$

La base formata dagli indici relativi alle variabili ausiliarie $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, con la matrice identitá come matrice di base, é una base ammissibile per il problema ausiliario, infatti la corrispondente soluzione di base é $\bar{y} = 0$, $\bar{\epsilon} = c \geq 0$.

A partire da tale base ammissibile, possiamo applicare il simplesso duale per risolvere il problema ausiliario.

Il valore ottimo del problema ausiliario stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema (D).

Teorema

1. Se il valore ottimo di (D_{aux}) é > 0 allora (D) non ha soluzioni ammissibili.
2. Se il valore ottimo di (D_{aux}) é $= 0$ allora c'é una base ammissibile per (D) che si costruisce a partire da una base ottima per (D_{aux}).