

# Informe Tarea 8 - Métodos Numéricos

Bruno Quezada

23 de noviembre

**Asignatura:** Métodos Numéricos - FI 3104-1  
**Profesor Cátedra:** Valentino González  
**Auxiliares:** José Vines, Jou-Hui Ho

## 1. Introducción

Se busca resolver la evolución de cierta población regida por la ecuación diferencial de Fischer-KPP:

$$\frac{dn}{dt} = \gamma \nabla n + \mu n - \mu n^2 \quad (1)$$

Donde  $n(x, t)$  es la densidad de población. El problema se plantea en su versión unidimensional de modo que  $\nabla n = \frac{dn}{dx}$ .

Las condiciones iniciales del problema son:

$$n(x, t = 0) = e^{\frac{-x^2}{0.1}}$$

Las condiciones de borde del problema son:

$$n(x = 0, t) = 1$$

$$n(x = 1, t) = 0$$

Se busca resolver el problema con una discreción espacial con  $x \in [0, 1]$  e integrando hasta al menos  $t = 4$ .

## 2. Procedimiento

En primer lugar, se divide el problema en 2, para resolver el término difusivo ( $\frac{d^2n}{dx^2}$ ) con el método de Crank-Nicolson y los términos reactivos ( $\mu n - \mu n^2$ ) con Euler explícito. Para cada iteración se calculan ambas componentes por separado y se suman para estimar  $n(x, t)$ .

El paso espacial está dado por  $h = \frac{1}{500}$  y el paso temporal queda definido como  $\epsilon = \frac{h^2}{2\gamma} \cdot 0.9$

### 2.1. Difusion

Para este término el avance del algoritmo, utilizando Crank Nicolson, queda de la forma:

$$n(x_i, t_j) = \alpha_i \cdot n(x_{i+1}, t_{j-1}) + \beta_i \quad (2)$$

Donde:

$$\alpha_i = \frac{s}{-s \cdot \alpha_{i-1} + 2 \cdot s + 1} \quad (3)$$

$$\beta_i = \frac{b_i + s \cdot \beta_{i-1}}{-s \cdot \alpha_i + 2 \cdot s + 1} \quad (4)$$

$$b_i = s \cdot n(x_{i+1}, t) + (1 - 2 \cdot s) \cdot n(x_i, t) + \quad (5)$$

$$s = \frac{\gamma \epsilon}{2h^2} \quad (6)$$

$$\alpha_0 = 0 \quad (7)$$

$$\beta_0 = 1 \quad (8)$$

El  $\beta$  de la ecuación 8 queda definido por las condiciones de borde del problema y  $s$  en la ecuación 6 tiene  $\gamma$  absorbido.

### 2.2. Reacción

Para este término el avance del algoritmo queda de la forma:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(x_i, t_{i+1}) - n(x_i, t_i)}{\epsilon} = \mu n(x_i, t_i) - \mu n^2(x_i, t_i) \quad (9)$$

De donde se despeja  $n(x_i, t_{i+1})$ .

### 2.3. Implementación

Para implementar ambos algoritmos se crean las funciones *avanza\_euler()* y *avanza\_CN*, las cuales cada una por separado dan un paso temporal para los términos reactivos y el término difusivo, respectivamente. Esto se repite para todas las iteraciones hasta alcanzar  $t = 8$ .

### 3. Resultados

En la figura 1 se presentan las condiciones iniciales de la densidad de población, se observa que parte en 1 y decae a 0.

En la figura 2 y en la 3 se muestra los resultado del modelo considerando únicamente términos de difusión o de reacción en el modelo, respectivamente. Se observa que en el modelo reactivo la densidad de población converge al equilibrio estable  $n = 1$ , mientras que el modelo difusivo la función densidad de población se suaviza lentamente.

En la figura 4 se presenta el modelo completo, en donde se observa que converge a un estado en donde la densidad es uno exepto en las cercanías de la condición de borde en  $x = 500$ .

En la figura 5, se presenta un modelo con paso temporal inestable, mil veces mayor que el paso límite ( $\epsilon = 1000 \cdot \epsilon^*$ ). Se observa que la densidad de población tiene comportamiento errático.

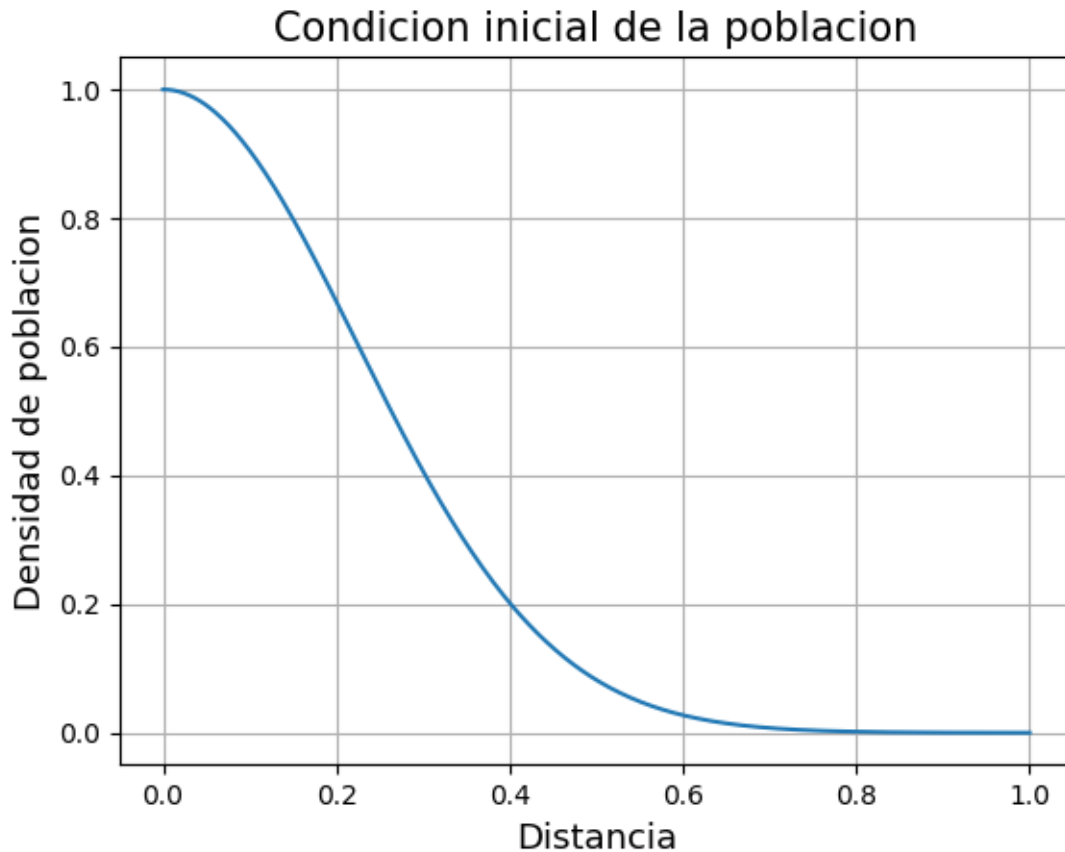


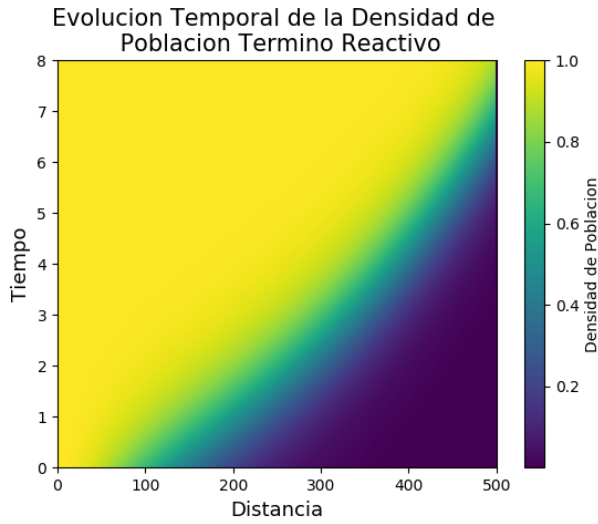
Figura 1: Condiciones iniciales de la densidad de población

### 4. Análisis y Conclusiones

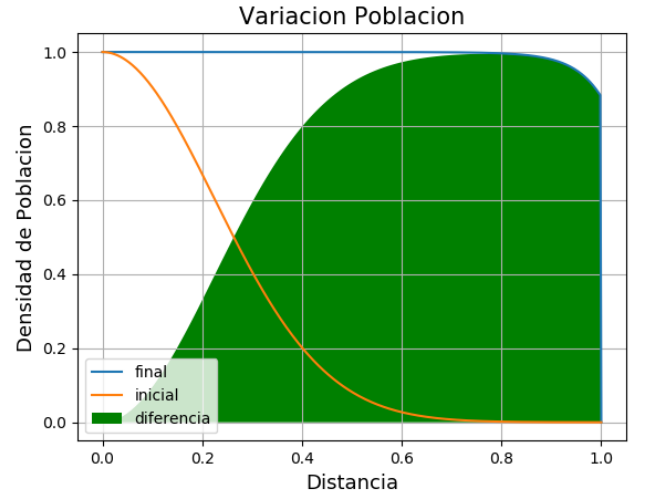
Al observar la figura 2 se observa que la población se acerca a  $n = 1$  el cual es el punto de estabilidad. Esto representa la competencia que existe por los recursos al plantear los términos reactivos, en donde el equilibrio se alcanza cuando los recursos están sosteniendo a la mayor densidad de población estable posible.

Al observar la figura 3 se observa que la densidad de población se suaviza a lo largo del tiempo. Este término representa las migraciones de población en el modelo, en donde el laplaciano de la densidad población representa la curvatura la cual se está minimizando. Esto quiere decir que para zonas muy pobladas con respecto a sus vecinos existirá migración hacia las zonas despobladas.

Por ende, en la solución final (figura 4), en donde se modela la densidad de población como la suma de los términos reactivos con el difusivo, se ve que la población se acerca a su punto de estabilidad -debido a la componente reactiva- pero, al llegar a las cercanías de la condición de borde  $n = 0$ , los términos difusivos imponen suavidad de la solución por lo que la densidad decae en forma más suave que en comparación con el caso reactivo puro.

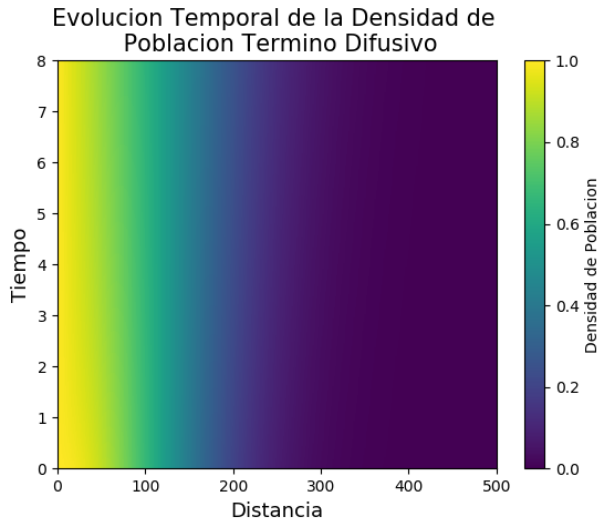


(a) Evolución temporal de la población

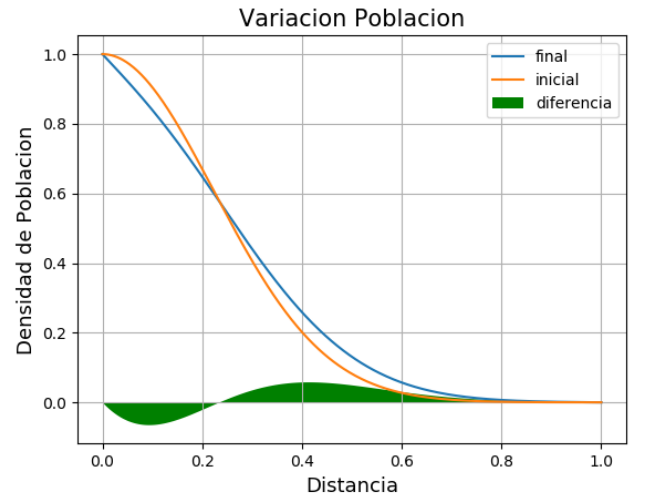


(b) Diferencia entre las densidades de población inicial y final

Figura 2: Evolución del modelo, considerando términos reactivos



(a) Evolución temporal de la población

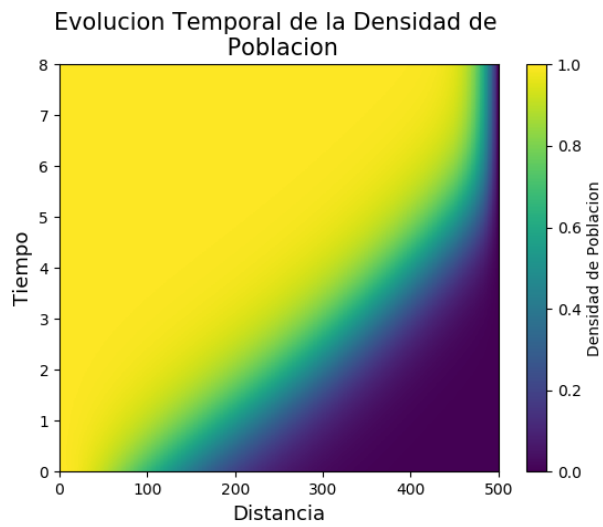


(b) Diferencia entre las densidades de población inicial y final

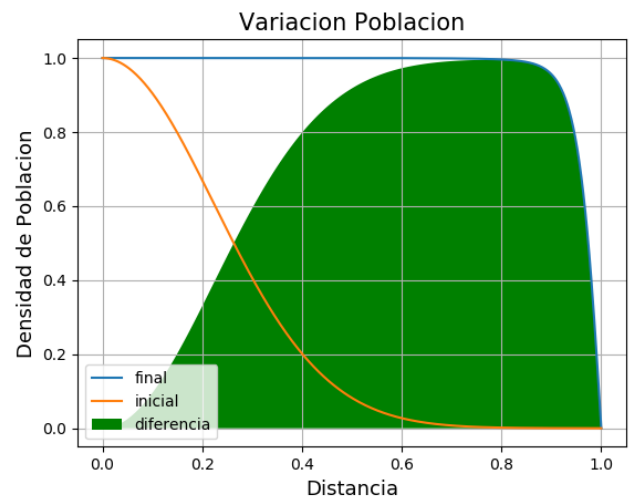
Figura 3: Evolución del modelo, considerando términos difusivos

El caso del punto de equilibrio inestable  $n = 0$  representa que una zona sin población no tiene tasa de crecimiento  $\frac{dn}{dt} = 0$ . Esto implica que no existe generación espontánea de vida.

Con respecto al modelo con paso temporal inestable en la figura 5, se observa claramente que la solución es errónea, ya que presenta oscilaciones de la densidad y una región con densidad negativa. Por ello se considera preferible no trabajar con métodos explícitos, ya que acotan el paso temporal. Al tener desratizaciones de alta resolución espacial será necesario realizar muchas iteraciones para avanzar en el tiempo para tener una solución estable.



(a) Evolución temporal de la población



(b) Diferencia entre las densidades de población inicial y final

Figura 4: Evolución del modelo, considerando términos reactivos y difusivos

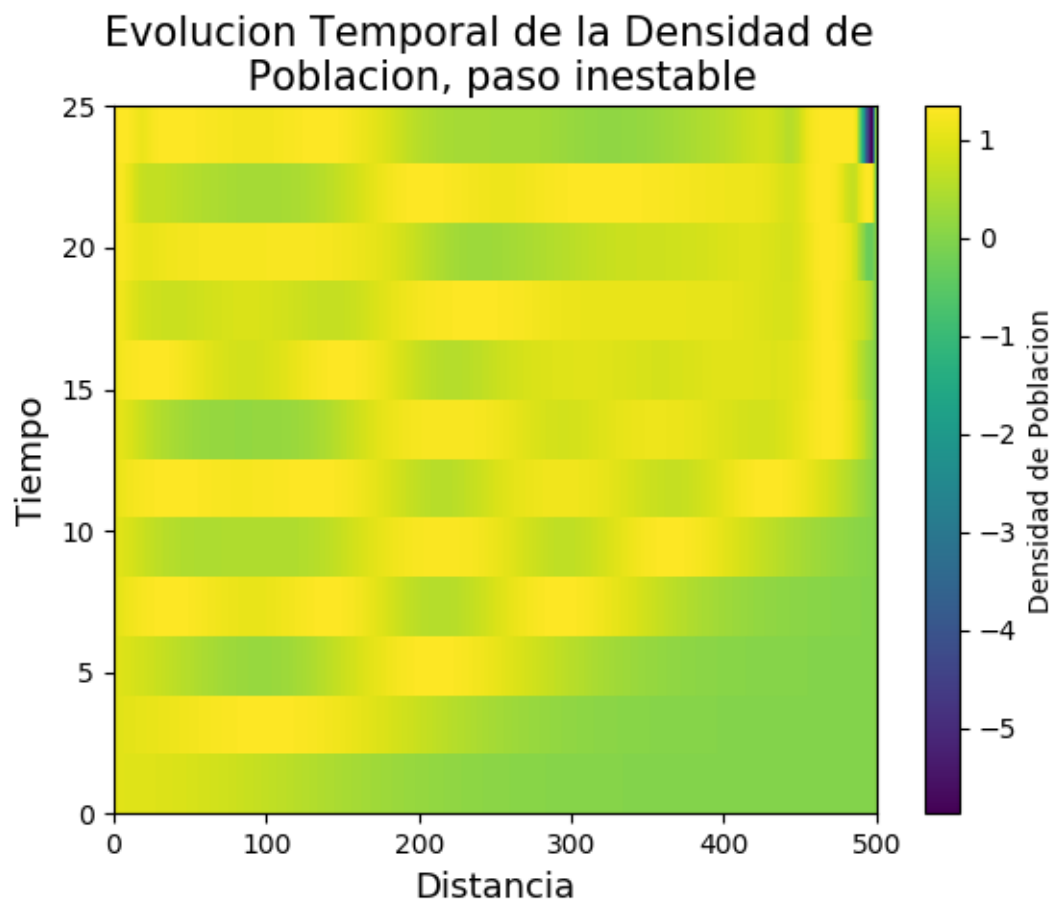


Figura 5: Condiciones iniciales de la densidad de población