2016 年国考题 -组合优化部分讲解

第一部分 数学基础课

(共 40 分)

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1. 所有正数都可以开平方(注：所设论域均为包含一切事物的集合，下同)。
2. 没有最大的自然数。

答：离散数学的题（略）

二、填空题（第1小题2分，其他每小题3分，共14分）

1、如果 $\frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，则$a^k$=__________

答：代公式法

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$$

$$a_k x^k = C(2+k-1,k)\left(2x\right)^k = C(k+1,k)2^k x^k$$

$$= C(k+1,k)2^k x^k = (k+1)2^k x^k$$

$$a_k = (k+1)2^k$$

2、n 个男同学和 n 个女同学参加舞会，

当第一首舞曲响起时，每个男同学要找一位女同学跳舞，n 个男同学一共有______种方法选择女同学。

当第二首舞曲响起时，要求每个人都要更换舞伴，这时 n 个男同学选择女同学的方法数是______。

答：根据完全错排

- **我们再重申一下，排列$i_1i_2\ldots i_n$是排列$12\ldots n$的一个错排当且仅当$i_1\neq 1$, $i_2\neq 2$, …, $i_n\neq n$.**
- **我们曾把n个元素全部不同错排的数目记为D_n. 当时得到的结论如下.**

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{n!}\right)$$

3、设 G 是 n 个顶点的简单连同平面图且每个面的度数（也称次数）都是 3，则此图的边数是___________.

[定理6] （欧拉定理） 设有一个连通的平面图G，共有v个结点e条边和r个面，则欧拉公式v—e＋r=2成立。

点 - 边 + 面

$$n-e+r=2 \qquad \Rightarrow n-e+\frac{2}{3}e=2$$

$$3r=2e$$

$$\Rightarrow e=3n-6$$

4、设 G 是有 n 个顶点的圈，如果 n 是奇数，则 G 的正常边着色数是___________.

答：3

（思路：n 为奇数， 三角形，五角形，均着 3 个色。 另，边染色难于点染色。）

5、设 a_n 满足的递推关系和初始条件分别为 $a_n=3a_{n-1}+1$，$a_1=2$，则 a_n 的精确表达式是___________.

答：根据母函数 $a_2=3*2+1$　$a_3=3*3+2+3*1+1$　　$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}+3^{n-1}$

$a_1=2, a_2=7, a_3=22, a_4=67\ldots$

$a_1=2;$

$a_2=3\times 2+1;$

$a_3=3^2\times 2+3+1;$

$a_4=3^3\times 2+3^2+3+1;$

$a_n=3^{n-1}\times 2+3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+1=3^{n-1}\times 2+\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$

三、计算题（共 12 分）

1. (3 分) 设集合 A={1,2} , B={a,b,c} 。

　(1)问从 A 到 B 有多少个单射函数。

　(2)试写出从 A 到 B 所有非单射的函数。

2. (3 分)已知集合 A={1,2,⋯,6}上的等价关系 R 定义为：

$R=I_A\cup\{<1,5>,<5,1>,<2,3>,<3,2>,<2,6>,<6,2>,<3,6>,<6,3>\}$ 求出由 R 诱导的 A 的划分(即由 R 的商集诱导的划分)。

3. (6 分)已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合，设%为 A 上的整除关系。

　(1)画出偏序集<A，%>的哈斯图。

　(2)确定 A 中最长链的长度，并按字典序写出 A 中所有最长的链。

　(3)A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，并完整写出这些反链。

答：离散数学的题（略）

四、解答题（每小题 5 分，共 10 分）

1、求方程 $t_1+t_2+t_3+t_4=20$ 整数解的个数，其中 $t_1\geq 3$，$t_2\geq 1$，$t_3\geq 0$，$t_4\geq 5$

答：根据母函数，整数分解

$$
\begin{aligned}
G(x)&=(x^3+x^4+x^5+\cdots)(x+x^2+x^3+\cdots)\\
&\qquad(1+x+x^2+\cdots)(x^5+x^6+x^7+\cdots)\\
&=x^9(1+x+x^2+\cdots)^4\\
&=x^9\left(\frac{1}{1-x}\right)^4=x^9(1-x)^{-4} \qquad \Leftarrow (1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k\\
&=x^9\sum_{k=0}^{\infty}C(4+k-1,k)x^k
\end{aligned}
$$

$$C(4+11-1,11)=C(14,11)=C(14,3)=\frac{14\times 13\times 12}{3!}=364$$

2、设S={∞·2，∞·4，∞·5，∞·7，∞·9}
是给定的重集，其中2,4,5,7,9是S中的五个不同元素，且每个元素在集合中可以有无穷多。
设h_n表示从S中取n个元素（可以重复取）且要求2和4出现偶数次的排列数，求h_n

例5.3由1，2，3，4，5五个数字组成的n位数，求其中4，5出现偶数次，1，2，3出现次数不限的数的个数a_n。