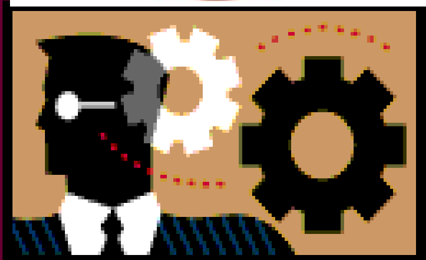
离散数学



李昊
信息楼312

命题逻辑等值演算

本章的主要内容：

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集

本章与其他各章的联系

- 是第一章的抽象与延伸
- 是后续各章的先行准备

第一节 等值式

一、等值式与基本的等值式

1、等值式

定义2.1 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

注意：$\Leftrightarrow$ 不是联结词！

几点说明：

- 定义中，$A, B, \Leftrightarrow$均为元语言符号
- A或B中可能有哑元出现. 例如，在

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$$

中，r为左边公式的哑元.

- 用真值表可验证两个公式是否等值

请验证：$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

判断方法：

1、利用真值表。

利用真值表证明：

$\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等值，是等值式.

Table 2

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

放在同一个表中，两个公式的真值相同，则称这两个公式等值。

利用真值表证明：

$p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 逻辑等值，是等值式.

TABLE 3

Truth Tables for $\neg p \vee q$ and $p \rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

TABLE 4

A Demonstration That $p \lor (q \lor r)$ and $(p \lor q) \land (p \lor r)$ Are Logically Equivalent.

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

判断方法：

1、利用真值表。

（计算量太大）

2、利用已知定律。

基本的等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律　$A\vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律　$A\vee 0 \Leftrightarrow A$. $A\wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律　$A\vee\neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律　$A\wedge\neg A \Leftrightarrow 0$

蕴涵等值式　$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

等价等值式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

假言易位　$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$

等价否定等值式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬论　$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意：要牢记各个等值式，这是继续学习的基础

二、等值演算与置换规则

1、等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2、等值演算的基础：

（1）等值关系的性质：自反、对称、传递性

（2）基本的等值式

（3）置换规则（见3）

3、置换规则

设$\Phi(A)$是含公式A的命题公式，$\Phi(B)$是用公式B置换了$\Phi(A)$中的所有的A后得到的命题公式，若$B \Leftrightarrow A$，则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

三、等值演算的应用举例

1． 证明两个公式等值

例 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

几点说明：

- 也可以从右边开始演算（请做一遍）
- 因为每一步都用置换规则，故可不写出
- 熟练后，基本等值式也可以不写出
- 用等值演算不能直接证明两个公式不等值

例 证明 $p\to(q\to r) \not\Leftrightarrow (p\to q)\to r$

方法一 真值表法（自己证）

方法二 观察赋值法. 易知000, 010等是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

方法三 用等值演算先化简两个公式，再观察.

2. 判断公式类型

例 用等值演算法判断下列公式的类型

（1）$q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

（2）$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

（3）$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解（1）$q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，（1）为矛盾式.

（2）$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，（2）为重言式.

问：最后一步为什么等值于1？

说明：（2）的演算步骤可长可短，以上演算最省.

（3）$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

由最后一步可知，（3）不是矛盾式，也不是重言式，它是可满足式，其实101, 111是成真赋值，000, 010等是成假赋值.

总结：从此例可看出

A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例5：证明：¬ (p∨(¬p∧q)) 和¬p∧¬q 逻辑等值

证明 $\neg\left(p\vee\left(\neg p\wedge q\right)\right)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg\left(\neg p\wedge q\right)$

$$\Leftrightarrow\neg p\wedge\left(p\vee\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\neg p\wedge p\right)\vee\left(\neg p\wedge\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow 0\vee\left(\neg p\wedge\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$$

例6：证明 (p∧q) → (p∨q) 为永真式

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \quad & \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
& \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\
& \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\
& \Leftrightarrow 1 \vee 1 \\
& \Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

判断命题公式逻辑等价的方法：

1、真值表

2、命题公式的演算

基本等值定理；

公式的代入不变性；

等值关系的传递性。

命题公式逻辑等价关系的应用：

1、判定是否逻辑等价；

2、判断是否为永真公式或永假公式；

3、命题公式的化简

应用:

有一个逻辑学家误入某部落，被拘于牢囚。酋长意欲放行。于是他对逻辑学家说：“今有两门，一为自由，一为死亡。你可任意开启一门。为协助你逃脱，加派两名战士负责解答你所提问题。两名战士中，一人说的永远是真话，另一永假。”

逻辑学家沉思片刻，然后向一名战士发问。后从容走出。试问：逻辑学家应如何发问?

解答：逻辑学家指着一扇门问一名战士："当我问他（另一名战士）这扇门是否是死亡之门时，他将回答'是'，对吗？"

分析：

P：被问战士是诚实人。

q：被问战士回答：是。

r：另一战士回答：是。

s：这扇门死亡之门。

P	q	r	s
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1

结果说明根据被询战士的回答可选择从哪扇门出去。若回答"是"，说明被指的门非死亡之门。回答"否"，说明该门是死亡之门。