2017 年国考题 -组合优化部分讲解

一、填空（每项 2 分）

1、 函数 f(t) =（1-2t）$^{-7}$ 中 t^5 的系数是：_________

答：直接套公式 $(1-2x)^{-7} = \sum_{k=0}^{\infty} C(7+k-1,k)(2x)^k$

K= 5 C(11,5) 2^5

2、 设 T 是有 K 个顶点的树，则 T 的着色数为：_________

答：2 个

3、 某饭店有 3 种甜点且无限多，小王选取 4 个甜点的方法有：_________

法1：直接列 3+C_3^2*3+ C_3^1 =15

法2：母函数 $(1+x+x^2+\cdots)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x)^{-3} = \sum C(3+k-1,k)\, x^k$

k=4 C(6,2) =15

4、m =P_1^{t1} – P_k^{tk}是m的唯一素数分解，其中p_1 – p_k 是不同的素数，

定义：函数$\mu(m) = \begin{cases} 0 & 如\ \exists_i \in (1,2,\ldots.k) 使 t_i > 0 \\ 1 & 如\ m=1 \\ (-1)^k & 如\ t_i = 1 对所有的 i = 1,2,\ldots.k, \end{cases}$

则对于大于1的整数n,

$\sum_{d/n} \mu(d) =$_________________

答：离散数学的题（略）

二、计算题（共 15 分）

1、 [99 , 1000]内不能被 5、6、8 中任何一个数整除的数的个数为：_________

答：根据容斥原理

1000-98=902个 （ 1~1000 中除去1~98 ）

A_i :被i除 i=5,6,8

则902-$|A_5|$-$|A_6|$-$|A_8|$+ $|A_5 \cap A_6|$+ $|A_5 \cap A_8|$+ $|A_6 \cap A_8|$ - $|A_5 \cap A_6 \cap A_8|$

$|A_5|$=[$\frac{902}{5}$]=180 $|A_6|$=[$\frac{902}{6}$]=150 $|A_8|$=[$\frac{902}{8}$]=112

$|A_5 \cap A_6|$ =[$\frac{902}{30}$]=30 $|A_5 \cap A_8|$ =[$\frac{902}{40}$]=22 $|A_6 \cap A_8|$ =[$\frac{902}{24}$]=37

$|A_5 \cap A_6 \cap A_8|$ =[$\frac{902}{120}$]=7 (注：被5、6、8整除的数有30、40、24、120)

=902-180-150-112+30+22+37-7=542

故，不能被i整除的整数个数为542个

2、求 $\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \to R)$ 的主析取范式和主合取范式。

要求分别用 极小项/极大项 以及相应数字的简洁形式表达。

答：离散数学的题（略）

三、解答题（每项 6 分）

1、t 个球排一排，t ≥3, 用红橙黄蓝绿，5 种颜色，每球一种颜色，要求红橙黄的球至少出现一个，问有多少种？

答：根据指数型母函数

$(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3\ (1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$

$= (e^x-1)^3 \ * \ e^{2x}$

$=(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1)\ e^{2x}$

$=e^{5x}-3e^{4x}+3e^{2x}-e^x$

$=\sum(5^k-3*4^k+3*2^k-1)\frac{x^k}{k!}$

2、8 个座位排一排，8 个同学 A_1~A_8 在此处上 2 节课，第 1 节课 A_i 同学坐 i 位置。(i = 1~8)

(1) 若第 2 节课时，要求 A_1 A_2 A_3 A_4 4 位同学与自己第一节课时不同，且 A_5~A_8 和第一节课相同，求有多少坐法？

(2) 第 2 节课要求 8 位同学中只有 4 位与第一节不同，但不指定是哪 4 位，求有几种坐法？

答: (1) 根据完全错排 $D_4 = 4!\ (1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$

(2) $C_8^4\ D_4$

(思路：先挑4个不动，剩下4个动的)