Dinâmica

1 Introdução

Geralmente, pode ser dito que a dinâmica de um helicóptero é não linear, com o acoplamento de cada eixo. Porém, para voos de baixa velocidade, isto é, velocidades abaixo de 5 m/s, a dinâmica pode ser expressa por um conjunto de equações lineares de movimento como um sistema SISO (*single input single output*). A dinâmica do helicóptero é dividida em vários componentes. Deriva-se o modelo para cada componente tanto pela relação geométrica quanto pela equação de movimento. Combinando todos os componentes, é possível extrair duas equações lineares de estado que descrevem os movimentos laterais e longitudinais do helicóptero. Os parâmetros do modelo são determinados por suas especificações [2].

É conhecido que o modelo de atitude de rolagem é o mesmo da afagem devido à simetria do quadricóptero. Portanto, a uma modelagem é desenvolvida da mesma forma para rolagem e afagem.

Devido ao fato da atitude do quadricóptero ser controlada de acordo com a velocidade de rotação do motor, considera-se inicialmente uma expressão que relaciona a atitude e o torque gerado pela diferença da velocidade de rotação do motor no centro do veículo.

2 Modelo dinâmico de um quadricóptero

A modelagem do controle de um quadricóptero é um problema complexo e tipicamente requer a existência de um modelo matemático de sua dinâmica. Modelos extremamente complexos que incluem os atuadores e dinâmica dos rotores, aerodinâmica da fuselagem e vibração das hélices não são muito práticos para a maioria dos mecanismos avançados de controle em tempo real. O primeiro passo na direção da modelagem da dinâmica do quadricóptero é considerá-lo como um corpo rígido em tres dimensoes com seis graus de liberdade sujeito a uma força principal e três momentos. Adicionalmente são considerados insignificantes os efeitos dos momentos causados pelo corpo rígido sobre a dinâmica translacional e os efeitos do solo.

2.1 Dinâmica de um corpo rígido

As equações fundamentais que regem o movimento de um corpo rígido partem do Teorema de Conservação do Momento Linear e do Teorema de Conservação do Momento Angular. O primeiro diz que se a força externa total atuando sobre um sistema de partículas é zero, o momento linear total do sistema, o corpo rígido, é conservado. Em outras palavras, a taxa de variação do momento linear é igual a força externa atuando sobre um sistema de partículas. Sua relação pode ser verificada na equação 1.

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_{inercial} = \mathbf{F}^{(e)} \tag{1}$$

onde $\mathbf{P}$ é o momento linear e $\mathbf{F}^{(e)}$ denota a resultante das forças externas exercidas no sistema de partículas em um dado instante. Já o segundo diz que o momento angular total de um sistema de partículas se conserva se o torque externo total é nulo. Da mesma forma, a taxa de variação do momento angular é igual ao torque externo total atuando sobre um sistema de partículas em um dado instante. A Equação 2 demonstra a relação quando considerado o referencial inercial fixo.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}}{dt}\right)_{inercial} = N^{(e)} \tag{2}$$

onde $\mathbf{L}$ é o momento angular e $\mathbf{N}^{(e)}$ denota a resultante dos torques externos exercidos no sistema de partículas em um dado instante.

2.2 Equações de movimento de Newton-Euler

O momento angular de um corpo girando em torno de um eixo fixo, em relação a esse eixo, pode ser calculado através do seu momento de inércia I e sua velocidade angular ω como demonstrado na equação 3.

$$\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega} \tag{3}$$

substituindo em 2, é obtido

$$\left(\frac{d(I\overrightarrow{\omega})}{dt}\right)_{inercial} = N^{(e)} \tag{4}$$

Quando considerado o referencial inercial em 4, o momento de inércia I varia no tempo, visto que o corpo translada e rotaciona no tempo em relação ao referencial inercial. Porém, quando considera-se um referencial fixado ao corpo rígido, o momento de inércia é independente do tempo, o que torna as equações de movimento sustancialmente mais simples e a equação 4 passa a ser definida como:

$$I\left(\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}\right)_{corpo} + \overrightarrow{\omega} \times I\overrightarrow{\omega} = N^{(e)} \tag{5}$$

Além disso, quando escolhidos os eixos fixos do corpo como os eixos principais de inércia, o momento de inércia, representado por uma matriz $(I)_{3\times 3}$, passa a ser uma matriz diagonal e, considerando as três componentes do sistema separadamente, as Equações de Euler são expressas por:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = N_x \\ & I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = N_y \\ & I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y = N_z \end{aligned} \tag{6}$$

onde I_1, I_2 e I_3 são constantes. É possível observar que as Equações de Euler não são lineares devido aos termos produto $\omega_i \omega_j$.

Já o momento linear de um corpo se movimentando linearmente em relação ao eixo inercial referencial pode ser calculado através da equação 7.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v} \tag{7}$$

onde m é a massa do corpo rígido e v é a velocidade linear do corpo. Substituindo em 1, é obtido

$$\frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \tag{8}$$

transformando-a para o sistemas de coordenadas do corpo rígido:

$$m\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \quad + \quad \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}\right] = \quad \mathbf{F}^{(e)} \tag{9}$$

A força translacional $\mathbf{F}^{(e)}$ combina as forças geradas pelos motores, gravidade e outras componentes de força do corpo rígido. Expandindo a equação 9 em suas componentes em conjunto com as equações de momento angular, todas em relaçao ao referencial do corpo rígido, obtemos o sistema com seis equações independentes de movimento expresso em 10.

$$\begin{aligned}
m\left[\dot{v}_x - \omega_z v_y + \omega_y v_z\right] &= F_x \\
m\left[\dot{v}_y - \omega_z v_x + \omega_x v_z\right] &= F_y \\
m\left[\dot{v}_z - \omega_y v_x + \omega_x v_y\right] &= F_z \\
I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y \omega_z &= N_x \\
I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z \omega_x &= N_y \\
I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x \omega_y &= N_z
\end{aligned} \tag{10}$$

2.3 Forças e torques aerodinâmicos

Para quadricópteros, o mecanismo que gera forças e torques requeridos para controlar seu movimento é realizado por seus quadro motores e hélices. Estes produzem o impulso necessário de forma perpendicular ao plano de rotação dos motores. O impulso principal é gerado ao longo do eixo vertical do corpo e é usado para compensar a gravidade e controlar o movimento vertical do veículo. Os movimentos horizontais no plano (x,y) são controlados pelo direcionamento do vetor de impulso na direção apropriada, por consequência, resultando em componentes laterais de força. Os torques de controle são, assim, usados para controlar a orientação do corpo do veículo que controla o movimento horizontal.

O quadricóptero pode ser caracterizado por três controles de torque $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$ e uma força principal $F^b = (0, 0, u)^T$, onde τ_ϕ,τ_θ e τ_ψ são torques de rolagem, afagem e guinada, respectivamente, no centro de massa e u é o impulso total gerado pelos quatro motores controlados de forma independente. O conjunto de equações é ilustrado, em sua forma matricial, em 11 e representa as forças e torques do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ l(f_2 - f_4) \\ l(f_1 - f_3) \\ Q_1 + Q_3 - Q_2 - Q_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

onde l é a distância do motor ao centro de massa do veículo e f_i e Q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ são os impulsos e torques de rotação das hélices gerados cada motor, respectivamente.

O impulso f_i e o torque Q_i são geralmente assumidos por serem proporcionais ao quadrado da velocidade angular do motor w_i. De fato, as relações entre a velocidade do motor w_i e o impulso f_i e torque Q_i gerados são muito complexas [1][3]. Portanto, o modelo algébrico para geração das forças e torques de controle são aqui descritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho & \rho \\ 0 & -l\rho & 0 & l\rho \\ -l\rho & 0 & l\rho & 0 \\ \kappa & -\kappa & \kappa & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

onde ρ e κ são constantes positivas caracterizando a aerodinâmica das hélices. As expressões em 12 são aproximações válidas que são usadas para movimentos em baixa velocidade.

Substituindo em 10, temos como as componentes de forças resultantes do sistema a relação 13.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ mg\sin\phi \\ u - mg\cos\phi\cos\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \tag{13}$$

onde $(mg\sin\phi, mgsin\theta, mg\cos\phi\cos\theta)$ são as componentes x, y e z do peso do veículo, respectivamente. Por fim, o conjunto de equações que descrevem o movimento do quadricóptero em relação ao referencial do corpo do veículo, com base nas relações 10 e 13 será:

$$
\begin{aligned}
m\left[\dot{\upsilon}_x - \omega_z \upsilon_y + \omega_y \upsilon_z - g\sin\theta\right] &= 0 \\
m\left[\dot{\upsilon}_y - \omega_z \upsilon_x + \omega_x \upsilon_z - g\sin\phi\right] &= 0 \\
m\left[\dot{\upsilon}_z - \omega_y \upsilon_x + \omega_x \upsilon_y - g\cos\phi\cos\theta\right] &= u \\
I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \tau_\phi \\
I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \tau_\theta \\
I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \tau_\psi
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Algumas forças e momentos como efeitos aerodinâmicos, dinâmica dos motores e efeitos giroscópicos são consideradas secundárias e são aqui deixadas de lado, pois:

- Para quadricópteros (mini), forças secundárias e momentos de corpos pequenos são dominadas pelas forças principais e vetores de torque, resultando em um pequeno e limitado efeito sobre a dinâmica do veículo.
- A complexidade de um modelo depende essencialmente da expressão das forças e momentos aerodinâmicos.

Referências

[1] B. W. McCormick, B. W. McCormick, and B. W. McCormick. *Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics*, volume 2. Wiley New York, 1995.

[2] K. Nonami, F. Kendoul, S. Suzuki, W. Wang, and D. Nakazawa. *Autonomous Flying Robots: Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles*. Springer Science & Business Media, 2010.

[3] R. W. Prouty. *Helicopter performance, stability, and control*. 1995.