

# Modelagem, Identificação e Controle de um VANT Quadrirotor

Marcelo De Lellis C. de Oliveira

lellis@das.ufsc.br

Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Automação e Sistemas  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Sistemas

1 de Novembro de 2012



# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Modelagem

## 3 Identificação

## 4 Controle

- Controle Clássico (PID) em Cascata
- Controle Ótimo com Realimentação de Estados LQ(R)
- Controle Robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com Sensibilidade Mista
- Controle Robusto com Síntese  $\mu$  e Iterações DK

## 5 Referências Bibliográficas



# Contextualização

- Contexto: dissertação de *Master of Science* pelas universidades *Luleå University of Technology* (Suécia) e *Czech Technical University in Prague* (Rep. Tcheca) pelo programa de pós-graduação Erasmus Mundus. Concluído em Junho de 2011;
- Objetivo: estudo de quadrirotores com foco nas estratégias de controle, incluindo considerações de robustez;
- Metodologia: modelagem da literatura; identificação do modelo realizada em protótipo real; testes de controle realizados por simulação;
- Contribuição: colaboração com Jaromír Dvořák em artigo intitulado “*Advanced control of a quadrotor using eigenaxis rotation for large maneuvers*” no congresso *Multiconference on Systems and Control 2011*, em Denver, USA.



# Histórico & Definições

- Aeronave de asa rotativa → multicóptero com 4 rotores;
- Controle através do ângulo de arfagem das hélices e/ou da velocidade angular  $\omega_i$  dos rotores;
- Primeiros projetos: 1920-1930;



(a) *De Bothezat*, 1923.



(b) Protótipo deste estudo.

**Figura 1:** Exemplo de configurações de quadrirotor.

- Vantagens: alta manobrabilidade, decolagem e pouso na vertical (VTOL), fácil pilotagem, grau de liberdade em *yaw*;
- Desvantagem: maior gasto de energia para mesma trajetória.



# Sistemas de Coordenadas

Equações de torque (*Moment*, 1a) e Força (1b) no sistema local:

$${}^b\vec{M} = \vec{I} \cdot \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}) \quad (1a)$$

$${}^b\vec{F} = m (\dot{\vec{V}} + \vec{\Omega} \times \vec{V}) \quad (1b)$$

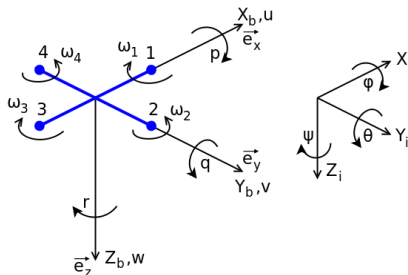


Figura 2: Sistemas de coordenadas local (b – *body*) e inercial (i).



# Modelo Não-Linear Pré-Identificação

Quatro fontes externas de forças e torques consideradas: 1 – efeito giroscópico dos rotores; 2 – arrasto aerodinâmico nas hélices dos rotores; 3 – empuxo dos rotores; 4 – gravidade da terra.

Equações de torque (1a) e força (1b) tornam-se, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \frac{l_a}{l_x} (T_4 - T_2) + \frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^4 M_{j_x} + \frac{(l_y - l_z)}{l_x} q r \\ \dot{q} = \frac{l_a}{l_y} (T_1 - T_3) + \frac{1}{l_y} \sum_{j=1}^4 M_{j_y} - \frac{(l_x - l_z)}{l_y} p r \\ \dot{r} = \frac{1}{l_z} \sum_{j=1}^4 M_{j_z} \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = v r - w q - g \sin \theta \\ \dot{v} = w p - u r + g \sin \phi \cos \theta \\ \dot{w} = u q - v p + g \cos \phi \cos \theta + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^4 T_j \end{array} \right. \quad (2b)$$



# Parâmetros Gerais – Estrutura

Parâmetro	Valor	Descrição
$m$	0.694 kg	massa total da aeronave
$l_a$	0.18 m	braço de alavanca do CG do rotor ao CG da aeronave
$I_x = I_y$	$5.87 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	momento de inércia da aeronave nos eixos $X$ e $Y$
$I_z$	$10.73 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	momento de inércia da aeronave no eixo $Z$

Tabela 1: Parâmetros gerais do quadrirotor identificados.

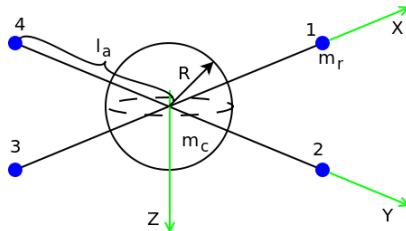
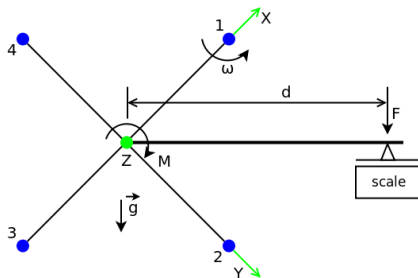


Figura 3: Modelagem da estrutura do quadrirotor.

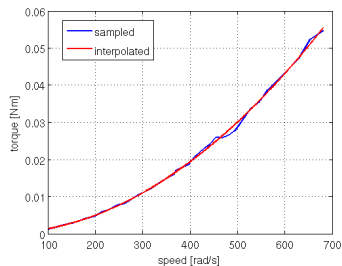


# Torque dos Rotores

$$M_i(\omega_i) = \left( \frac{m_i - m_0}{1000} \right) | \vec{g} | d = I_G \dot{\omega}_i + k_D \omega_i^2 + B_a \omega_i \quad [\text{N m}] \quad (3)$$



(a) Arranjo.



(b) Resultado.

Figura 4: Experimento de identificação  $\omega_i \rightarrow M_i$ .

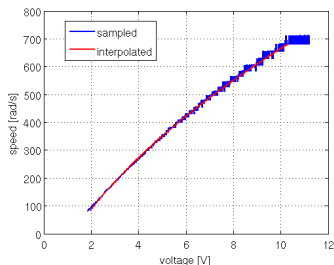




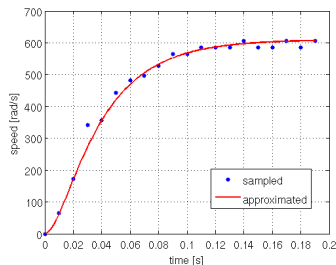
# Dinâmica dos Rotores

Rotor modelado como motor BLDC (4) + propelente (Fig. 5a).

$$\frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{\frac{k_t}{l_t L_a}}{s^2 + \frac{l_t R_a + B_a L_a}{l_t L_a} s + \frac{B_a R_a + k_v k_t}{l_t L_a}} = \frac{264360}{s^2 + 133,8 s + 3115} \quad (4)$$



(a) Ganho estático  $u_i \rightarrow \omega_i$  sem anel de inércia e com propelente.



(b) Dinâmica  $u_i \rightarrow \omega_i$  com anel de inércia e sem propelente.

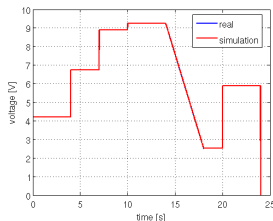
Figura 5: Experimento de identificação da dinâmica do rotor.



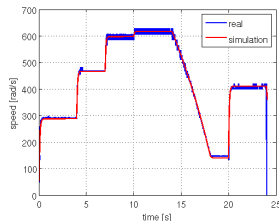
# Validação da Dinâmica dos Rotores

Variável	Valor	Descrição
$k_D$	$1.18 \cdot 10^{-7} \text{ N m s}^2$	coeficiente de arrasto do propelente
$B_a$	$1.23 \cdot 10^{-6} \text{ N m s}$	coeficiente de atrito linear do propelente
$k_t$	$3.7 \cdot 10^{-3} \text{ N m/A}$	constante de torque elétrico
$k_v$	$7.8 \cdot 10^{-3} \text{ V s}$	constante de velocidade
$L_a$	$1.9 \cdot 10^{-3} \text{ H}$	impedância da armadura
$I_G$	$1.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$	inércia do rotor
$R_a$	$260 \cdot 10^{-3} \Omega$	resistência da armadura

Tabela 2: Parâmetros do rotor identificados.



(a) Entrada  $u_i(t)$ .



(b) Saída  $\omega_i(t)$ .

Figura 6: Experimento de validação da dinâmica do rotor.

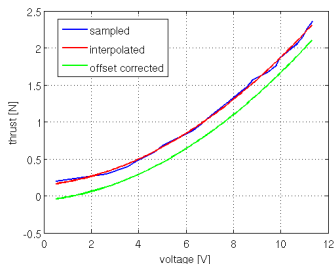


# Identificação do Empuxo dos Rotores

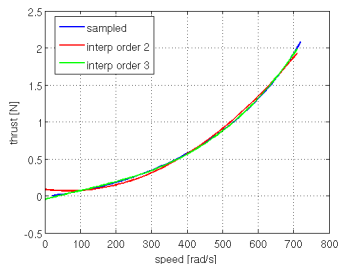
*Hovering point:*  $(u, \omega)_{\text{hov}} = (10.1 \text{ V}, 668 \text{ rad/s})$ .

$$T(\omega) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \omega^i \quad (5)$$

$$T(\omega) = -47.7 \cdot 10^{-3} + 1.3 \cdot 10^{-3} \omega - 1.44 \cdot 10^{-6} \omega^2 + 5.19 \cdot 10^{-9} \omega^3 \text{ [N]}$$



(a) Ganho  $u_i \rightarrow T_i$ .



(b) Ganho  $\omega_i \rightarrow T_i$ .

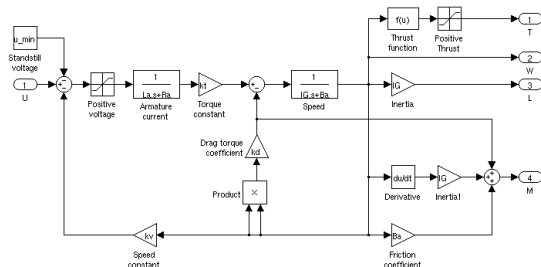
Figura 7: Identificação de ganhos estáticos de empuxo.



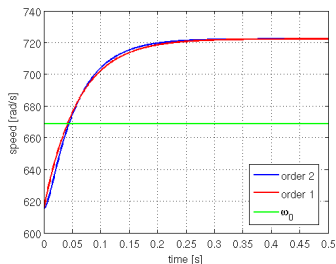
# Modelagem do Rotor – Resultado

Modelo linear simplificado:

$$G_{R_s}(s) = \frac{K_s}{s + \lambda_s} = \frac{885,6}{s + 16,7} \quad (6)$$



(a) Diagrama *Simulink* do modelo não-linear.



(b) Resposta temporal do modelo linear.

Figura 8: Resultado da modelagem do rotor.



# Modelo Não-Linear Pós-Identificação

Equações de torque (2a) e força (2b) são detalhadas, respectivamente:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{l_a}{l_x} \sum_{i=0}^3 \gamma_i (\omega_2^i - \omega_4^i) + \frac{l_G}{l_x} q \sum_{j=1}^4 \omega_j (-1)^j + \frac{(l_y - l_z)}{l_x} q r \\ \dot{q} = \frac{l_a}{l_y} \sum_{i=0}^3 \gamma_i (\omega_3^i - \omega_1^i) - \frac{l_G}{l_y} p \sum_{j=1}^4 \omega_j (-1)^j - \frac{(l_x - l_z)}{l_y} p r \\ \dot{r} = \frac{1}{l_z} \sum_{j=1}^4 (l_G \dot{\omega}_j + k_D \omega_j^2 + B_a \omega_j) (-1)^j \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = v r - w q - g \sin \theta \\ \dot{v} = w p - u r + g \sin \phi \cos \theta \\ \dot{w} = u q - v p + g \cos \phi \cos \theta - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^3 \gamma_i \omega_j^i \end{cases} \quad (7b)$$



# Modelo Linearizado Pós-Identificação

As equações de torque (8) no ponto de linearização  $(p_0, q_0, r_0)$  e as de força (9) no ponto  $(u_0, v_0, w_0)$  and  $(\phi_0, \theta_0)$  são, respectivamente:

$$\begin{cases} \Delta \dot{p} = \frac{l_a}{l_x} (\dot{T}_{20} \Delta \omega_2 - \dot{T}_{40} \Delta \omega_4) + \frac{l_G}{l_x} \left[ q_0 \sum_{j=1}^4 \Delta \omega_j (-1)^j + \Delta q \sum_{j=1}^4 \omega_{j0} (-1)^j \right] + \frac{l_y - l_z}{l_x} (r_0 \Delta q + q_0 \Delta r) \\ \Delta \dot{q} = \frac{l_a}{l_y} (\dot{T}_{30} \Delta \omega_3 - \dot{T}_{10} \Delta \omega_1) - \frac{l_G}{l_y} \left[ p_0 \sum_{j=1}^4 \Delta \omega_j (-1)^j + \Delta p \sum_{j=1}^4 \omega_{j0} (-1)^j \right] - \frac{l_x - l_z}{l_y} (r_0 \Delta p + p_0 \Delta r) \\ \Delta \dot{r} = \frac{1}{l_z} \sum_{j=1}^4 [l_G \Delta \dot{\omega}_j + (2 k_D \omega_{j0} + B_a) \Delta \omega_j] (-1)^j \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = v_0 \Delta r + r_0 \Delta v - w_0 \Delta q - q_0 \Delta w - g \cos \theta_0 \Delta \theta \\ \Delta \dot{v} = w_0 \Delta p + p_0 \Delta w - u_0 \Delta r - r_0 \Delta u + g \cos \phi_0 \cos \theta_0 \Delta \phi - g \sin \phi_0 \sin \theta_0 \Delta \theta \\ \Delta \dot{w} = u_0 \Delta q + q_0 \Delta u - v_0 \Delta p - p_0 \Delta v - g \sin \phi_0 \cos \theta_0 \Delta \phi - g \cos \phi_0 \sin \theta_0 \Delta \theta - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^4 \dot{T}_{j0} \Delta \omega_j \end{cases}$$



# Quadrôtor como Sistema *MIMO*

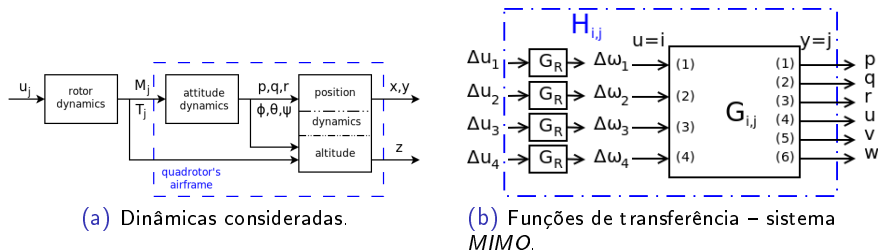


Figura 9: Diagramas de bloco do quadrôtor.



# MIMO – Desacoplamento de Saídas

Desprezando o efeito giroscópico dos rotores em (8), considerando  $\omega_i = \omega_0$ , definindo as constantes no modelo linearizado

$$\alpha = \frac{I_a \dot{T}_0}{I_x}, \quad \beta = 2 k_D \omega_0 + B_a \text{ e } \sigma = \frac{\dot{T}_0}{m} \quad (10)$$

e considerando o ponto de linearização **zero** (pairar no ar), obtém-se as saídas desacopladas

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha (\Delta\omega_2 - \Delta\omega_4) \\ \dot{q} = \alpha (\Delta\omega_3 - \Delta\omega_1) \\ \dot{r} = \frac{1}{I_z} \sum_{j=1}^4 [I_G \Delta\dot{\omega}_j + (\beta + B_a) \Delta\omega_j] (-1)^j \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u} = -g \Delta\theta \\ \dot{v} = g \Delta\phi \\ \dot{w} = -\frac{\dot{T}_0}{m} \sum_{j=1}^4 \Delta\omega_j \end{cases} \quad (11)$$





# MIMO – Matriz de Transferência

Aplicando a transformada de Laplace a (11), considerando a dinâmica dos rotores  $\Delta\omega = G_{R_s} \Delta u_r$  em (6), definindo o vetor de saída  $\vec{Y} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$  e de entrada<sup>1</sup>  $\vec{U}_r = [\Delta u_{r1} \ \Delta u_{r2} \ \Delta u_{r3} \ \Delta u_{r4}]^T$ , a matriz de transferência MIMO é

$$H_{i,j}(s) = G_{i,j}(s) \cdot G_{R_s}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g}{s^3} & 0 & -\frac{g}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{g}{s^3} & 0 & -\frac{g}{s^3} \\ -\frac{\sigma}{s} & -\frac{\sigma}{s} & -\frac{\sigma}{s} & -\frac{\sigma}{s} \\ 0 & \frac{\alpha}{s} & 0 & -\frac{\alpha}{s} \\ -\frac{\alpha}{s} & 0 & \frac{\alpha}{s} & 0 \\ -\frac{l_g s + \beta}{l_z s} & \frac{l_g s + \beta}{l_z s} & -\frac{l_g s + \beta}{l_z s} & \frac{l_g s + \beta}{l_z s} \end{bmatrix} \cdot G_{R_s}(s) \quad (12)$$

<sup>1</sup>Entradas acopladas.



# MIMO – Desacoplamento de Entradas

Redefinindo o vetor de entrada como  $\vec{U}_c = [u_{c1} \ u_{c2} \ u_{c3} \ u_{c4}]^T$  onde  $u_{c1} = \Delta u_{r2} - \Delta u_{r4}$ ,  $u_{c2} = \Delta u_{r3} - \Delta u_{r1}$ ,  $u_{c3} = \Delta u_{r2} + \Delta u_{r4} - \Delta u_{r1} - \Delta u_{r3}$  e  $u_{c4} = \sum_{j=1}^4 \Delta u_j$ , um desacoplamento das entradas também é alcançado e o problema *MIMO* pode ser abordado como 6 problemas *SISO*:

$$H'_{i,j}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g \alpha K_s}{s^3(s+\lambda_s)} & 0 & 0 \\ \frac{g \alpha K_s}{s^3(s+\lambda_s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma K_s}{s(s+\lambda_s)} \\ \frac{\alpha K_s}{s(s+\lambda_s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha K_s}{s(s+\lambda_s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(I_G s + \beta) K_s}{I_z s(s+\lambda_s)} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

com a matriz de desacoplamento  $W$ :

$$\vec{U}_c = W \vec{U}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{U}_r \Rightarrow \vec{U}_r = W^{-1} \vec{U}_c$$



# Controle Clássico (PID) em Cascata

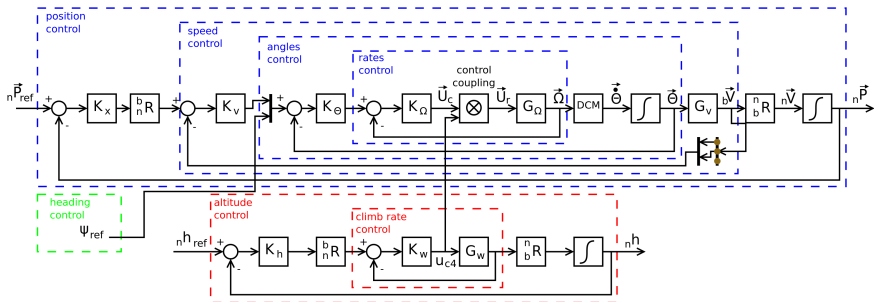


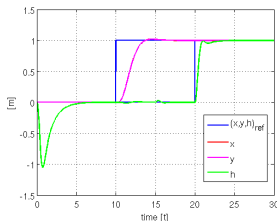
Figura 10: Esquema de controle em cascata.

Malha	Controlador	Tempo de acomodação (s)
Taxa de subida	$K_w(s) = -\frac{12(s+1)}{s}$	2.29
Altitude	$K_h(s) = 2$	6.7
Vel. angulares	$\begin{bmatrix} K_p & K_q & K_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.66 & 22.4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.34 & 0.34 & 0.34 \end{bmatrix}$
Orientação	$\begin{bmatrix} K_\phi & K_\theta & K_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.85 & 2.85 & 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.36 \end{bmatrix}$
Translação	$\begin{bmatrix} K_u & K_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.129 & -0.129 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.54 & 1.54 \end{bmatrix}$
Posição	$\begin{bmatrix} K_x & K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.56 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.45 & 3.45 \end{bmatrix}$

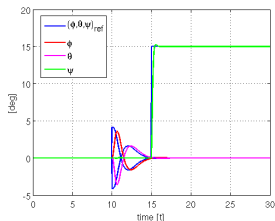
Tabela 3: Ajuste dos controladores clássicos em cascata.



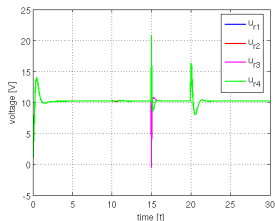
# Controle PID – Teste no Sistema Linear



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

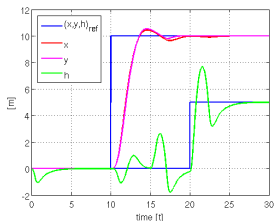


(c) Sinal de controle  $\vec{U}_r$ .

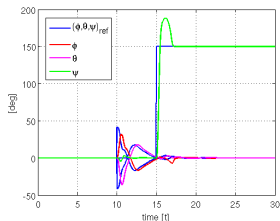
Figura 11: Desempenho dos controladores clássicos em cascata no sistema linear.



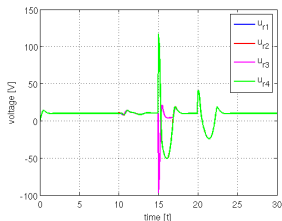
# Controle PID – Teste “Extremo” no Sistema Não-Linear



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

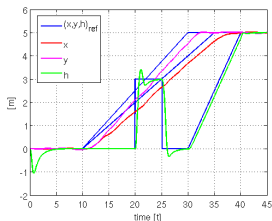


(c) Sinal de controle  $\vec{U}_r$ .

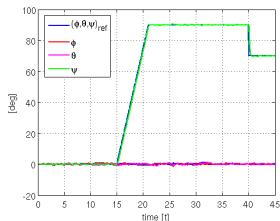
Figura 12: Desempenho dos controladores clássicos em cascata no sistema não-linear.



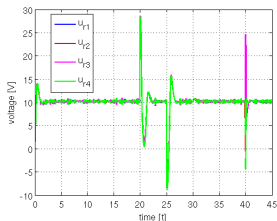
# Controle PID – Desempenho Típico no Sistema Não-Linear



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .



(c) Sinal de controle  $\vec{U}_r$ .

**Figura 13:** Desempenho típico dos controladores clássicos em cascata no sistema não-linear com referências de velocidade e ruído.



# Controle Ótimo LQ(R) – Definições

Exige a representação do sistema no espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= A \vec{x} + B \vec{u} \\ \vec{y} &= C \vec{x} + D \vec{u}\end{aligned}\tag{15}$$

A matriz de ganhos de realimentação é calculada como

$$K_{lqr}(\infty) = R^{-1} B^T S(\infty)\tag{16}$$

onde  $S(\infty) = S$  é a solução da *Equação Algébrica de Riccati* (ARE)

$$0 = A^T S + S A - S B R^{-1} B^T S + Q\tag{17}$$

e o critério ótimo de minimização, em um horizonte infinito, é definido por

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt$$



# Controle LQ – Seguimento de Referência

Para *regulagem* (trazer sistema para origem) temos o vetor de estados do sistema linearizado

$$\vec{x} = [x \quad \Delta u \quad y \quad \Delta v \quad z \quad \Delta w \quad \Delta \phi \quad \Delta p \quad \Delta \theta \quad \Delta q \quad \psi \quad \Delta r \quad \Delta \omega_1 \quad \Delta \omega_2 \quad \Delta \omega_3 \quad \Delta \omega_4]^T \quad (19)$$

Já para seguimento de referência, incrementamos este vetor com os estados da integral dos erros de controle dos 4 graus de liberdade

$$\begin{aligned} x_{17} &= \int (X_{\text{ref}} - X) \Rightarrow \dot{x}_{17} = x_{1\text{ref}} - x_1 \\ x_{18} &= \int (Y_{\text{ref}} - Y) \Rightarrow \dot{x}_{18} = x_{3\text{ref}} - x_3 \\ x_{19} &= \int (Z_{\text{ref}} - Z) \Rightarrow \dot{x}_{19} = x_{5\text{ref}} - x_5 \\ x_{20} &= \int (\psi_{\text{ref}} - \psi) \Rightarrow \dot{x}_{20} = x_{20\text{ref}} - x_{20} \end{aligned} \quad (20)$$





# Controle LQ – Estrutura e Ajuste de Ganhos

$$Q = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 20 & 0 & 1 & 10 & 40 & 10 & 40 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 200 & 20 & 20 \end{bmatrix} \right) \cdot 50$$

$$R = \text{eye}(2)$$

(21)

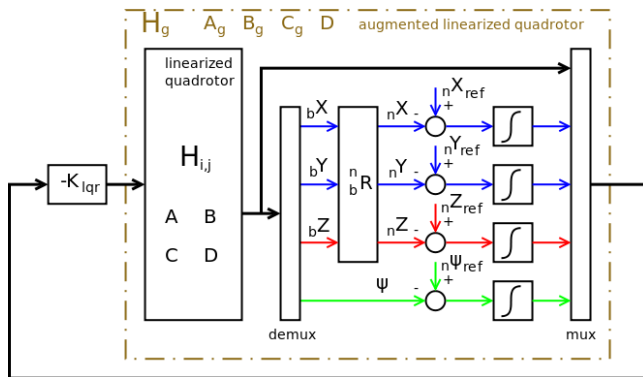
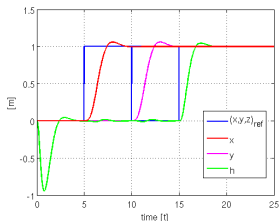


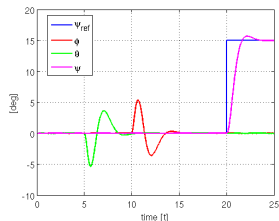
Figura 14: Diagrama de blocos do controlador LQ.



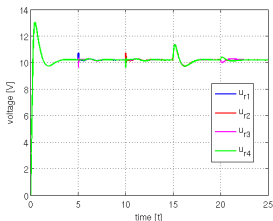
# Controle LQ – Desempenho no Sistema Não-Linear



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

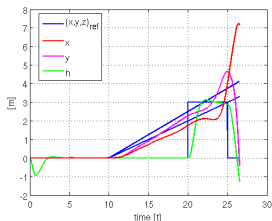


(c) Sinal de controle  $\vec{U}_r$ .

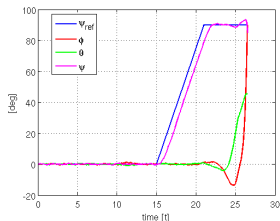
Figura 15: Desmpenho do controle LQ no sistema não-linear.



# Controle LQ – Instabilidade com Manobras Simultâneas

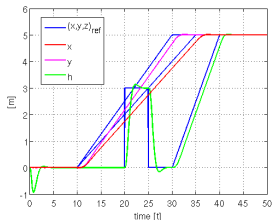


(a) Pos. XY e altitude.

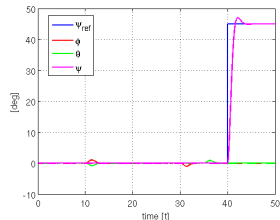


(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

Figura 16: Instabilidade no controle LQ com manobra simultânea em  $\psi$ , com ruído.



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

Figura 17: Controle LQ estável com manobra separada em  $\psi$ , sem ruído.



# Controle Baseado em Sensibilidade Mista $\mathcal{H}_\infty$

- Técnica de controle no domínio da frequência. Objetivo: minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de alguma configuração do sistema SISO  $G(s)$ ;
- Caso *MIMO*: pico da amplificação  $\vec{U} \rightarrow \vec{Y}$  no gráfico de *valores singulares* da matriz  $H(s)$ ;
- Requisito: filtros  $W_i(s)$  devem ser causais e FTs estáveis.

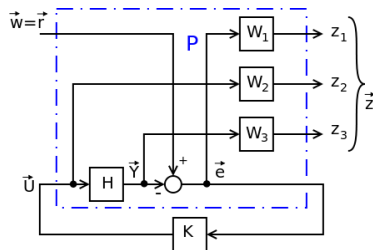


Figura 18: Configuração  $S/K$   $S/T$  para cálculo do controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sensibilidade mista.



# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Critério e Filtros

- Algoritmo: encontrar  $K(\omega)$  estabilizador que minimize

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (22)$$

- $W_1(s) \rightarrow$  “modelagem” (*shaping*) da FT de sensibilidade  $S = 1/(1 + H)$ . Seguimento de referência:  $w \rightarrow u$ ; rejeição de perturbação:  $d \rightarrow y$ . Filtro passa-baixa;
- $W_3(s) \rightarrow$  “modelagem” (*shaping*) da FT de sensibilidade complementar  $T = H/(1 + H)$ . Representa como a incerteza do modelo age em  $u$ . Incerteza cresce com a frequência  $\Rightarrow$  filtro passa-alta;
- $W_2(s)$  (opcional): penaliza ação de controle  $K S$ . Se  $K_\infty$  obtido exigir alta frequência  $\Rightarrow$  filtro passa alta;
- Ao fechar *loop* de  $F = S$  ou  $F = T$  com respectivos filtros, deve valer

$$|W_i F| \leq 1 \Rightarrow |F| \leq \frac{1}{|W_i|}$$

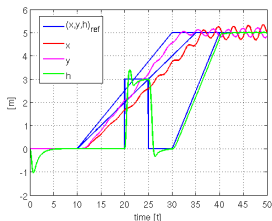


# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Cenário de Incerteza

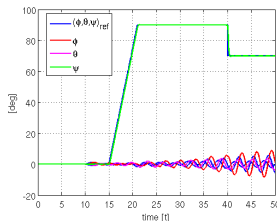
- Acoplada câmera com  $m_p = 150$  g alinhada em  $Z$ , distante  $l_p = 11.73$  cm do CG  $\Rightarrow \Delta I_x = m_p l_p^2 = 17.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 = 3 I_{x_0}$ , portanto  $I'_x = I'_y = 4 I_{x_0} = 23.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ . Cenário possível já que  $m_{\max} = 1062$  g enquanto com  $m_p$  a massa total é  $m' = 844$  g;
- Malhas  $u$  e  $v$ ,  $p$  e  $q$  diretamente afetadas pois dependem de  $\alpha = \frac{l_a \dot{T}_0}{l_x}$  em, respectivamente,  $H'_{1,2}$  e  $H'_{2,1}$ ,  $H'_{4,1}$  and  $H'_{5,2}$  em (13);
- Projeto de controlador robusto para malhas  $p$  e  $q$  deve ser suficiente para estabilização das respectivas malhas superiores  $u$  e  $v$ .



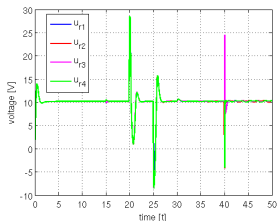
# Instabilidade no PID Cascata com Variação em Parâmetro



(a) Pos. XY e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .



(c) Sinal de controle  $\vec{U}_r$ .

Figura 19: Instabilidade gerada por variação paramétrica  $\Delta I_x = 3 I_{x0}$ .



# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Templates p/ Filtros

- $W_1(s)$ :  $M$  – magnitude em altas frequências;  $A_S$  – ganho estático em baixas frequências  $\Rightarrow$  erro em reg. permanente

$$W_1(s) = \frac{s/M_S + \omega_S}{s + A_S \omega_S} \quad (24)$$

- $W_3(s)$ : de acordo com  $\mathbb{E}$  – erro de modelagem

$$\mathbb{E}(s) = \frac{H_{\text{var}}(s) - H_{\text{nom}}(s)}{H_{\text{nom}}(s)} \quad (25)$$

$r_0$  – incerteza em reg. permanente;  $1/\tau$  – incerteza atinge 100%;  $r_\infty$  – incerteza em altas frequências.  $r_\infty$  muito alto  $\Rightarrow W_3$  perde causalidade

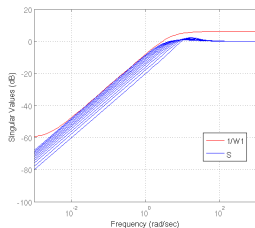
$$W_3(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau/r_\infty) s + 1} \quad (26)$$

Obs.:  $W_3(s)$  deve modelar incertezas paramétricas e de modelagem (dinâmica desconhecida).

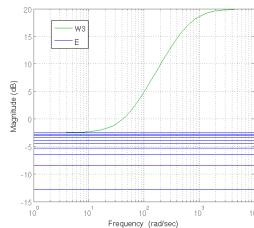




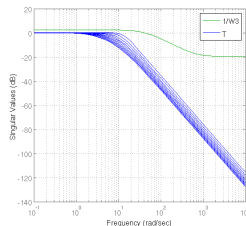
# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Tuning



(a)  $1/W_1$  (ver.) e  $S$  (azul).



(b)  $W_3$  e  $E$ .

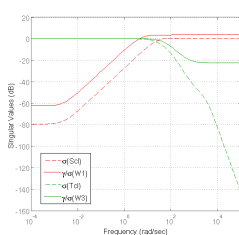


(c)  $1/W_3$  e  $T$ .

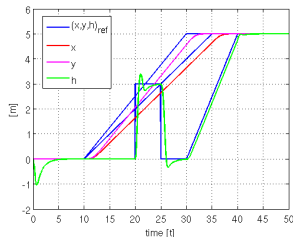
Figura 20: Ajuste dos filtros para cálculo de  $K$  com  $\text{MS-}\mathcal{H}_\infty$ .



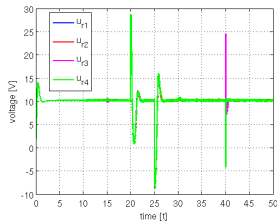
# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Robustez Alcançada



(a) Filtros,  $S$  e  $T$ .



(b) Pos. XY e altitude.



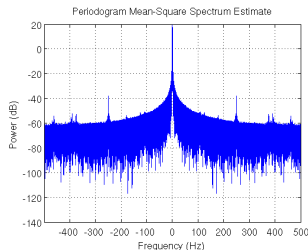
(c) Sinal de controle  $\vec{u}_r$ .

Figura 21: Sis. malha fechada robusto com  $K(\text{MS-}\mathcal{H}_\infty)$ ,  $\Delta l_x = 3 l_{x0}$ .

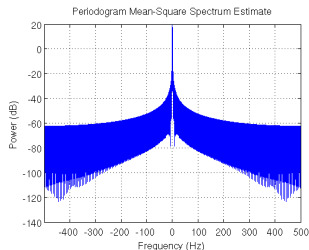


# Controle Sens. Mista $\mathcal{H}_\infty$ – Observações

- Sempre haverá  $e(\infty) > 0$ , por menor que seja. Exceção: integrador em  $H(s)$ ;
- Funções em Matlab: *mixsyn* (algoritmo) e *sigma* (graficar  $\sigma(H(j\omega))$ );
- Controladores  $K_{p\infty}$  e  $K_{q\infty}$  obtidos: 4ª ordem;
- Problema: alta frequência exigida do atuador;
- Solução: penalizar controle com  $W_2 = 0.1$  (ordem do controlador foi mantida). Com  $W_2 = 1$  a robustez é perdida neste cenário;



(a) Sem  $W_2$ .



(b) Com  $W_2 = 0.1$ .

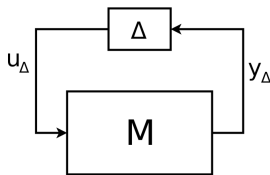
Figura 22: Espectro de frequência da potência de  $u_{r1}$ .



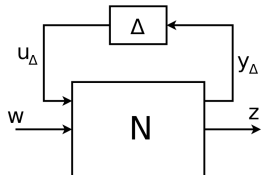
# Controle com Síntese $\mu$ e Iterações DK

- Incertezas de parâmetro e modelagem são “extraídas” da planta e representadas na matriz  $\Delta$ , bloco-diagonal com

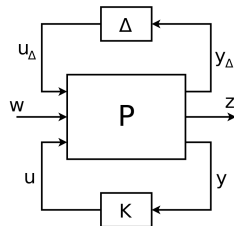
$$\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega \quad (27)$$



(a) Análise de estabilidade robusta.



(b) Análise de desempenho robusto.



(c) Síntese do controlador.

Figura 23: Configurações da planta com incerteza  $\Delta$ .

- Técnica combina síntese de controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com análise do *valor singular estruturado*  $\mu$ .



# Controle $\mu$ -DK – Estabilidade Robusta

Condição de estabilidade robusta (RS):

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1, \forall \omega \quad (28)$$

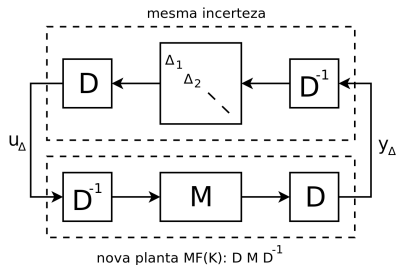


Figura 24: Configuração para algoritmo de síntese  $\mu$ -DK.

Agora, com  $D = \text{diag}\{d_i I_i\}$ , temos uma condição menos conservativa de RS:

$$\min_{D(\omega) \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D(\omega)M(j\omega)D(\omega)^{-1}) < 1, \forall \omega$$



# Controle $\mu$ -DK – Algoritmo

O valor singular estruturado de  $M$  é

$$\mu(M) \triangleq \frac{1}{\min \{k_m \mid \det(I - k_m M \Delta) = 0 \text{ para } \Delta \text{ estruturada}, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}} \quad (30)$$

Algoritmo:

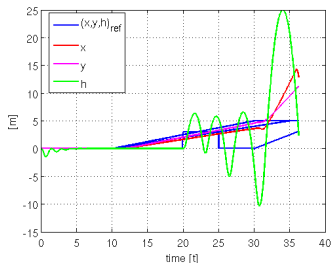
- ➊ **Passo K:** Calcular um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para o problema redimensionado (*scaled*)  $\min_K \|D N(K) D^{-1}\|_\infty$  com  $D(s)$  fixo;
- ➋ **Passo D:** Encontrar  $D(j\omega)$  que minimize, em cada frequência,  $\bar{\sigma}(D N D^{-1}(j\omega))$  com  $N$  fixo;
- ➌ Ajustar a magnitude de cada elemento de  $D(j\omega)$  para uma FT  $D(s)$  de mínima fase e estável. Voltar ao passo 1.

Condições de parada: desempenho desejado é alcançado ou  $\|\cdot\|_\infty$  não mais decresce. Obs.: controlador sintetizado pode ser de alta ordem  $\Rightarrow$  redução de ordem poder ser necessária.

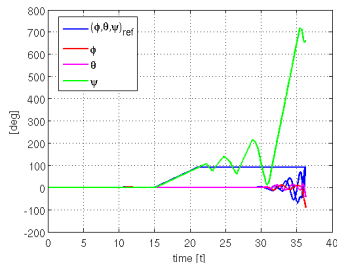


# Controle $\mu$ -DK – Cenário de Incerteza e Instabilidade

- Inércia do rotor varia positivamente como  $I_{G_{nom}} \leq I_G \leq 4I_{G_{nom}}$ ;
- Malhas de posição  $XY$  e orientação  $\psi$  apenas levemente afetadas (compensação entre rotores da variação da dinâmica);
- Controle de  $h$  fortemente afetado. Com  $I'_G = 3.1I_{G_{nom}}$  o sistema não-linear com PID em cascata se torna instável.



(a) Pos.  $XY$  e altitude.



(b) Orientação  $\vec{\Theta}$ .

Figura 25: Instabilidade gerada com  $I'_G = 3.1I_{G_{nom}}$ .



# Controle $\mu$ -DK – Síntese do Controlador

Estratégia: calcular apenas controlador robusto p/ taxa de subida  $K_w$ , aproveitando a arquitetura em cascata  $\Rightarrow$  estabilização de  $h$ . Para isso tomamos  $\frac{w}{\omega_{\text{tot}}} = G_w(s) = -\frac{\dot{T}_0}{s m}$  como  $G_{3,j}$  em (12), com  $\omega_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^4 \omega_j$ .

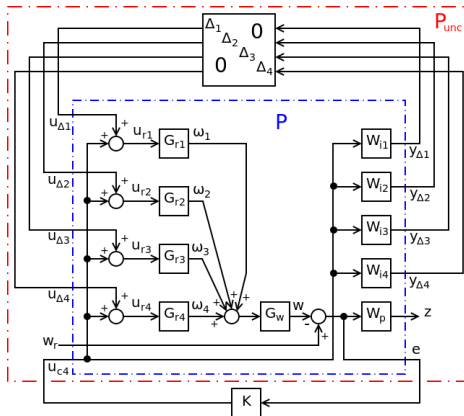


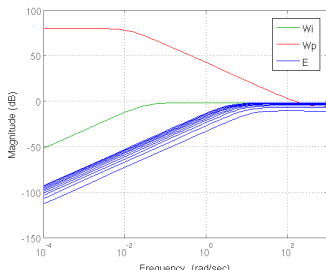
Figura 26: Arranjo da planta incerta  $P_{\text{unc}}$  para síntese do controlador  $\mu$ -DK.



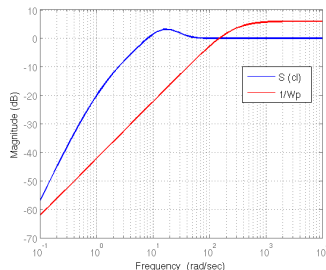


# Controle $\mu$ -DK – *Tuning* dos Filtros

- $W_p$ : filtro de desempenho, canal  $w_r \rightarrow z$ . Neste caso  $e = w_r - w \Rightarrow$  filtro passa-baixa (*template* 24) para minimizar erro em regime (não há integrador). Menor  $A_S \Rightarrow$  menor  $e_\infty$ ; maior  $\omega_S \Rightarrow$  mais rápida ação de controle;  $M_S \Rightarrow$  ganho em alta frequência e pico em  $S$ ;
- $W_{I_j}$ : incerteza paramétrica dos rotores; ajuste baseado em erro de modelagem  $\mathbb{E}$  (25), que aumenta com frequência, portanto filtro passa-alta.



(a)  $W_p$ ,  $W_I$  e  $E$ .

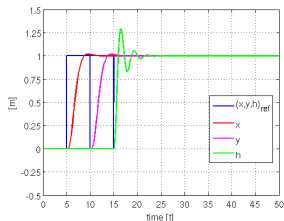


(b)  $1/W_p$  e  $S(K)$ .

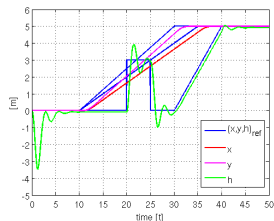
Figura 27: Ajuste dos filtros para síntese  $\mu$ -DK.



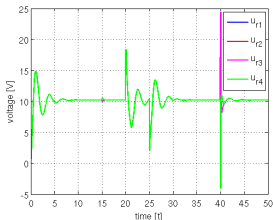
# Controle $\mu$ -DK – Resultados no Cenário Nominal



(a) SL: pos. XY e h.



(b) SNL: pos. XY e h.

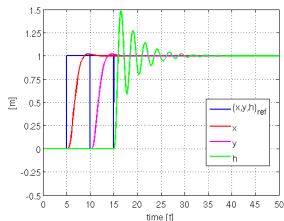


(c) SNL:  $\vec{U}_r$ .

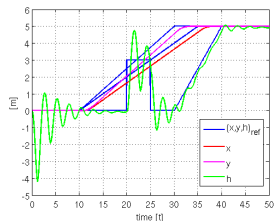
Figura 28: Desempenho do controlador  $K_w$  calculado com  $\mu$ -DK para  $I_{Gnom}$ .



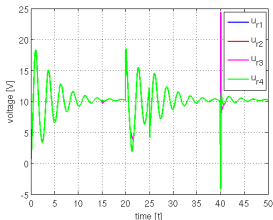
# Controle $\mu$ -DK – Resultados no Cenário Incerto



(a) SL: pos. XY e h.



(b) SNL: pos. XY e h.



(c) SNL:  $\vec{U}_r$ .

Figura 29: Desempenho do controlador  $K_w$  calculado com  $\mu$ -DK para  $I'_G = 3.1/I_{Gnom}$ .



# Controle $\mu$ -DK – Observações

- Funções Matlab: *dksyn* (algoritmo), *ultidyn* (incerteza  $\Delta$ );
- Controlador sintetizado: 28ª ordem! Implementável, viável? Sem garantias de *RS* com redução de ordem...
- *RS* alcançada, mas desempenho em regime nominal deixou a desejar. Seria melhor se não houvesse saturação frequente do controle? Sugestão: usar rotores mais potentes;
- Por outro lado, exigiu-se demais do controlador com incerteza  $I_{G_{nom}} \leq I_G \leq 4I_{G_{nom}}$  (difícil instabilizar PID em cascata!);
- Melhores resultados possíveis, e.g., com incerteza multiplicativa na saída, e/ou integrando malhas de  $w$  e  $h$ .



# Děkuji vám za pozornost!

lellis@das.ufsc.br  
PGEAS – DAS/UFSC



# Bibliografia I



S. Bouabdallah, P. Murrieri e R. Siegwart

*Design and control of an indoor micro quadrotor.*

*Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004.*  
ISBN 0780382323.



M. De Lellis C. de Oliveira

*Modeling, Identification and Control of a Quadrotor Aircraft.*

*Czech Technical University in Prague, Master's thesis.*



J. Dvořák

*Micro Quadrotor: Design, Modelling, Identification and Control.*

*Czech Technical University in Prague, Master's thesis.*



G. V. Raffo

*Robust Control Strategies for a QuadRotor Helicopter. An Underactuated Mechanical System.*  
*Universidad de Sevilla, Ph.D. thesis, 2011.*



S. Skogestad, I. Postlethwaite

*Multivariable Feedback Control Analysis and Design.*

John Wiley and Sons, 2ª edição, 2005.



B. L. Stevens e F. L. Lewis

*Aircraft Control and Simulation.*

John Wiley and Sons, 2ª edição, 2003.

