Dinâmica

1 Modelo dinâmico de um quadricóptero

A modelagem do controle de um quadricóptero é um problema complexo e tipicamente requer a existência de um modelo matemático de sua dinâmica. O primeiro passo, é definir as variáveis de estado que representam o sistema. Em seguida, derivar as equações não lineares que descrevem o movimento do veículo.

1.1 Sistemas de Coordenadas

Para obter e entender o comportamento dinâmico de um quadricóptero, é necessário considerar os seguintes sistemas de coordenadas: inercial, veículo, veículo-1, veículo-2, corpo, estabilidade e vento, cada um com seus eixos ortogonais (x,y,z) e cada um com seus vetores unitários apontando na direção positiva $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ correspondentes. O sistema de coordenadas inerciais e do veículo são relacionadas por uma translação, enquanto as demais são relacionadas por rotações. Os ângulos definindo as orientações relativas aos sistemas de coordenadas do veículo, veículo-1, veículo-2 e corpo são os ângulos de rolagem, afagem e guinada, respectivamente, que descrevem a atitude do veículo. Estes ângulos são comumente chamados de Ângulos de Euler. A relação entre os demais sistemas de coordenadas são chamados ângulos de ataque e sideslip, que consideram a velocidade do ar em um ambiente com incidência de ventos, fato muito improvável em ambientes *indoors* e considerado como ruído neste trabalho.

1.1.1 Sistema de coordenadas inerciais $\mathcal{F}^i$

É o sistema de coordenadas fixado à Terra com sua origem definida como o ponto de partida do veículo. Esse sistema, às vezes, é chamado de norte-leste-sul, com a sigla em inglês (NED), com o Norte sendo considerado a direção inercial X, representado por i_i, o leste como a direção inercial Y, representado por j_i, e o Sul como a direção inercial Z, representado por k_i, como ilustrado na Figura ???.

Figura ???

1.1.2 Sistema de coordenadas do veículo $\mathcal{F}^v$

A origem do sistema de coordenadas do veículo é o centro de massa do MAV. Porém, os eixos do $\mathcal{F}^v$ são alinhados com o referencial inercial $\mathcal{F}^i$. Em outras palavras, os eixos de $\mathcal{F}^v$ são apenas transladados em relação aos eixos de $\mathcal{F}^i$, possuindo a mesma orientação conforme a Figura ????.

Figura ????

1.1.3 Sistema de coordenadas veículo-1 $\mathcal{F}^{v1}$

A origem do sistema de coordenadas veículo-1 é idêntico à origem de $\mathcal{F}^v$. Porém, $\mathcal{F}^{v1}$ é rotacionado positivamente na direção da regra da mão direita em relação a k_v pelo ângulo de guinada ψ. Os demais eixos i_{v1} e j_{v1} apontam na mesma direção de i_v e j_v. O sistema de coordenadas veículo-1 é mostrado na Figura ?????.

A transformação de $\mathcal{F}^v$ para $\mathcal{F}^{v1}$ é dada por:

$$\mathbf{p}^{v1} = R_v^{v1}(\psi)\mathbf{p}^v \tag{1}$$

onde $\mathbf{p}$ indica a posição em relação ao eixo correspondente e:

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.1.4 Sistema de coordenadas do veículo-2 $\mathcal{F}^{v2}$

A origem do sistema de coordenadas veículo-2 é novamente o centro de massa do veículo e é obtida através da rotação de $\mathcal{F}^{v2}$ em relação à j_{v1} na direção da regra da mão direita pelo ângulo de afagem θ.

A transformação de $\mathcal{F}^{v1}$ para $\mathcal{F}^{v2}$ é dada por:

$$\mathbf{p}^{v2} = R_{v1}^{v2}(\theta)\mathbf{p}^{v1} \tag{3}$$

onde

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

1.1.5 Sistema de coordenadas do corpo $\mathcal{F}^{b}$

O sistema de coordenadas do corpo é obtido pela rotação de $\mathcal{F}^{v2}$ na direção positiva da regra da mão direita em relação a i_{v2} pelo ângulo de rolagem ϕ.

A transformação de $\mathcal{F}^{v2}$ para $\mathcal{F}^{b}$ é dada por:

$$\mathbf{p}^{b} = R_{v2}^{b}(\phi)\mathbf{p}^{v2} \tag{5}$$

onde

$$R_{v2}^{b}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{6}$$

A transformação do sistema de coordenadas do veículo para o sistema de coordenadas do corpo é dada por:

$$R_v^b(\phi,\theta,\psi) = R_{v2}^b(\phi)R_{v1}^{v2}(\theta)R_v^{v1}(\psi) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
R_v^b(\phi,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

onde $c_\phi \equiv \cos\phi$ e $s_\phi \equiv \sin\phi$. Os ângulos ϕ, θ, e ψ são comumente referidos como Ângulos de Euler. São bem utilizados por permitirem um significado intuitivo para representação da orientação de um corpo em três dimensões. A sequência de rotações ψ-θ-ϕ é bem utilizada para aeronaves e apenas um de vários dos sistemas de Ângulos de Euler em uso. Ref.

Apesar de intuitivo, os Ângulos de Euler possuem uma singularidade matemática que causa instabilidades computacionais. Para a sequência ψ-θ-ϕ, existe uma singularidade quando o ângulo de afagem θ é ± 90 graus, caso em que o ângulo de guinada ψ é não definido. Esta singularidade é definida como *gimbal lock*. Uma alternativa comum para os Ângulos de Euler é o *Quaternion*. Enquanto menos intuitivo, não possui singularidades matemáticas e é computacionalmente mais eficiente .Ref. Devido suas características, em voo comportado, a afagem do quadricóptero não chega a ± 90 graus e será aqui representada por Ângulos de Euler.

1.2 Cinemática

Cinemática é o estudo dos movimentos sem a preocupação com as suas causas. A velocidade translacional de um MAV é comumente expressada em termos dos componentes das velocidades ao longo de cada eixo do referencial fixado ao corpo do veículo. Já a posição translacional é usualmente medida e expressada no referencial inercial. Portanto, relacionar velocidade e posição translacionais requer diferenciação e uma transformação rotacional como mostrado na equação 9, onde $R_b^v = (R_v^b)^{-1} = (R_v^b)^T$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = R_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (9)$$

onde $[p_x, p_y, p_z]^T$ é a posição translacional em relação ao referencial do veículo $\mathcal{F}^v$ e $[u, v, w]^T$ é a velocidade translacional em relação ao corpo $\mathcal{F}^b$.

O relacionamento entre as posições angulares ϕ, θ e ψ com as taxas angulares ω_x, ω_y e ω_z também são complicadas pelo fato das posições serem definidas em diferentes sistemas de coordenadas. As taxas angulares são definidas no sistema de coordenadas do corpo do veículo $\mathcal{F}^b$. As posições angulares (Ângulos de Euler) são definidas em três diferentes sistemas de coordenadas: O ângulo de rolagem ϕ é a rotação em torno do eixo $i_{v2} = i_b$ do sistema $\mathcal{F}^{v2}$ para o sistema $\mathcal{F}^b$. O ângulo de afagem θ é a rotação de $\mathcal{F}^{v1}$ para $\mathcal{F}^{v2}$ em torno do eixo $j_{v1} = j_{v2}$ e o ângulo de guinada ψ é a rotação de $\mathcal{F}^v$ para $\mathcal{F}^{v1}$ em torno do eixo $k_v = k_{v1}$.

As taxas angulares em relação ao sistema de coordenadas do corpo do veículo $\mathcal{F}^b$ pode ser expressada em termos de derivativas dos Ângulos de Euler, realizando-se as rotações apropriadas como segue:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^{b}(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^{b}(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Invertendo a equação, obtém-se:

$$
\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{11}
$$

que expressa a taxa de variação das três posições angulares em termo das posições ϕ e θ e das taxas angulares ω_x, ω_y e ω_z.

1.3 Dinâmica de um corpo rígido

As equações fundamentais que regem o movimento de um corpo rígido partem do Teorema de Conservação do Momento Linear e do Teorema de Conservação do Momento Angular. O primeiro diz que se a força externa total atuando sobre um sistema de partículas é zero, o momento linear total do sistema, o corpo rígido, é conservado. Em outras palavras, a taxa de variação do momento linear é igual a força externa atuando sobre um sistema de partículas. Sua relação pode ser verificada na equação 12.

$$
\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_{inercial} = \mathbf{F}^{(e)} \tag{12}
$$

onde $\mathbf{P}$ é o momento linear e $\mathbf{F}^{(e)}$ denota a resultante das forças externas exercidas no sistema de partículas em um dado instante. Já o segundo diz que o momento angular total de um sistema de partículas se conserva se o torque externo total é nulo. Da mesma forma, a taxa de variação do momento angular é igual ao torque externo total atuando sobre um sistema de partículas em um dado instante. A Equação 13 demonstra a relação quando considerado o referencial inercial fixo.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}}{dt}\right)_{inercial} = N^{(e)} \tag{13}$$

onde $\mathbf{L}$ é o momento angular e $\mathbf{N}^{(e)}$ denota a resultante dos torques externos exercidos no sistema de partículas em um dado instante.

1.4 Equações de movimento de Newton-Euler

O momento angular de um corpo girando em torno de um eixo fixo, em relação a esse eixo, pode ser calculado através do seu momento de inércia I e sua velocidade angular ω como demonstrado na equação 14.

$$\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega} \tag{14}$$

substituindo em 13, é obtido

$$\left(\frac{d(I\overrightarrow{\omega})}{dt}\right)_{inercial} = N^{(e)} \tag{15}$$

Quando considerado o referencial inercial em 15, o momento de inércia I varia no tempo, visto que o corpo translada e rotaciona no tempo em relação ao referencial inercial. Porém, quando considera-se um referencial fixado ao corpo rígido, o momento de inércia é independente do tempo, o que torna as equações de movimento sustancialmente mais simples e a equação 15 passa a ser definida como:

$$I\left(\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}\right)_{corpo} + \overrightarrow{\omega}\times I\overrightarrow{\omega} = N^{(e)} \tag{16}$$

Além disso, quando escolhidos os eixos fixos do corpo como os eixos principais de inércia, o momento de inércia, representado por uma matriz $(I)_{3\times3}$, passa a ser uma matriz diagonal e, considerando as três componentes do sistema separadamente, as Equações de Euler são expressas por:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy}-I_{zz})\omega_y\omega_z = N_x \\ & \quad\; I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz}-I_{xx})\omega_z\omega_x = N_y \\ & \quad\; I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx}-I_{yy})\omega_x\omega_y = N_z \end{aligned} \tag{17}$$

onde I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são constantes. É possível observar que as Equações de Euler não são lineares devido aos termos produto $\omega_i\omega_j$.

Já o momento linear de um corpo se movimentando linearmente em relação ao eixo inercial referencial pode ser calculado através da equação 18.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v} \tag{18}$$

onde m é a massa do corpo rígido e v é a velocidade linear do corpo. Substituindo em 12, é obtido

$$\frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \tag{19}$$

transformando-a para o sistemas de coordenadas do corpo rígido:

$$m\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}\right] = \mathbf{F}^{(e)} \tag{20}$$

A força translacional $\mathbf{F}^{(e)}$ combina as forças geradas pelos motores, gravidade e outras componentes de força do corpo rígido. Expandindo a equação 20 em suas componentes em conjunto com as equações de momento angular, todas em relaçao ao referencial do corpo rígido, obtemos o sistema com seis equações independentes de movimento expresso em 21.

$$\begin{aligned} m\left[\dot{v}_x - \omega_z v_y + \omega_y v_z\right] &= F_x \\ m\left[\dot{v}_y - \omega_z v_x + \omega_x v_z\right] &= F_y \\ m\left[\dot{v}_z - \omega_y v_x + \omega_x v_y\right] &= F_z \\ I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= N_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= N_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= N_z \end{aligned} \tag{21}$$

1.5 Forças e torques aerodinâmicos

Para quadricópteros, o mecanismo que gera forças e torques requeridos para controlar seu movimento é realizado por seus quadro motores e hélices. Estes produzem o impulso necessário de forma perpendicular ao plano de rotação dos motores. O impulso principal é gerado ao longo do eixo vertical do corpo e é usado para compensar a gravidade e controlar o movimento vertical do veículo. Os movimentos horizontais no plano (x,y) são controlados pelo direcionamento do vetor de impulso na direção apropriada, por consequência, resultando em componentes laterais de força. Os torques de controle são, assim, usados para controlar a orientação do corpo do veículo que controla o movimento horizontal.

O quadricóptero pode ser caracterizado por três controles de torque $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$ e uma força principal $F^b = (0, 0, u)^T$, onde τ_ϕ,τ_θ e τ_ψ são torques de rolagem, afagem e guinada, respectivamente, no centro de massa e u é o impulso total gerado pelos quatro motores controlados de forma independente. O conjunto de equações é ilustrado, em sua forma matricial, em 22 e representa as forças e torques do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ l(f_2 - f_4) \\ l(f_1 - f_3) \\ Q_1 + Q_3 - Q_2 - Q_4 \end{bmatrix} \tag{22}$$

onde l é a distância do motor ao centro de massa do veículo e f_i e Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são os impulsos e torques de rotação das hélices gerados cada motor, respectivamente.

O impulso f_i e o torque Q_i são geralmente assumidos por serem proporcionais ao quadrado da velocidade angular do motor w_i. De fato, as relações entre a velocidade do motor w_i e o impulso f_i e torque Q_i gerados são muito complexas [1][3]. Portanto, o modelo algébrico para geração das forças e torques de controle são aqui descritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho & \rho \\ 0 & -l\rho & 0 & l\rho \\ -l\rho & 0 & l\rho & 0 \\ \kappa & -\kappa & \kappa & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \tag{23}$$

onde ρ e κ são constantes positivas caracterizando a aerodinâmica das hélices. As expressões em 23 são aproximações válidas que são usadas para movimentos em baixa velocidade.

Substituindo em 21, temos como as componentes de forças resultantes do sistema a relação 24.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\sin\theta \\ mg\sin\phi\cos\theta \\ u - mg\cos\phi\cos\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \tag{24}$$

onde $(mg\sin\phi, mgsin\theta, mg\cos\phi\cos\theta)$ são as componentes x, y e z do peso do veículo, respectivamente. Por fim, o conjunto de equações que descrevem o movimento do quadricóptero em relação ao referencial do corpo do veículo, com base nas relações 21 e 24 será:

$$\begin{aligned} m\left[\dot{\upsilon}_x - \omega_z\upsilon_y + \omega_y\upsilon_z + g\sin\theta\right] &= 0 \\ m\left[\dot{\upsilon}_y - \omega_z\upsilon_x + \omega_x\upsilon_z - g\sin\phi\cos\theta\right] &= 0 \\ m\left[\dot{\upsilon}_z - \omega_y\upsilon_x + \omega_x\upsilon_y + g\cos\phi\cos\theta\right] &= u \\ I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \tau_\phi \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \tau_\theta \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \tau_\psi \end{aligned} \tag{25}$$

Algumas forças e momentos como efeitos aerodinâmicos, dinâmica dos motores e efeitos giroscópicos são consideradas secundárias e são aqui deixadas de lado, pois:

- Para quadricópteros (mini), forças secundárias e momentos de corpos pequenos são dominadas pelas forças principais e vetores de torque, resultando em um pequeno e limitado efeito sobre a dinâmica do veículo.
- A complexidade de um modelo depende essencialmente da expressão das forças e momentos aerodinâmicos.

Referências

[1] B. W. McCormick, B. W. McCormick, and B. W. McCormick. *Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics*, volume 2. Wiley New York, 1995.

[2] K. Nonami, F. Kendoul, S. Suzuki, W. Wang, and D. Nakazawa. *Autonomous Flying Robots: Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles*. Springer Science & Business Media, 2010.

[3] R. W. Prouty. *Helicopter performance, stability, and control*. 1995.