B-S 期权定价的 excel 实现

靳军 10153700108
华东师范大学
经济与管理学部
统计系

2016 年 11 月 21 日

目录

1 B-S 期权定价简介（课堂复习）

1.1 标准布朗运动

设变量 W 做标准布朗运动，则对于时间 t，W 有以下数学性质：

$$\Delta W = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

其中 ε 表示服从标准正态分布的一个随机值。

令 Δt 趋紧于 0，便可得到描述标准布朗运动的微分方程：

$$dW = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{2}$$

1.2 普通布朗运动

普通布朗运动是带漂移项的，任意方差率的布朗运动。反之，标准布朗运动是漂移率为 0，方差率为 1 的布朗运动。不妨假设漂移率的期望值为 a，方差率的期望值为 σ^2，设 x 满足普通布朗运动，则描述变量 x 变化的微分方程为：

$$\begin{aligned} &dx = adt + \sigma dW \\ &\Leftrightarrow = adt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \end{aligned} \tag{3}$$

1.3 伊藤过程与伊藤引理

伊藤过程是一种比布朗运动更复杂的随机过程，即漂移率和方差率都不是常数，都是和当前 x 与 t 有关的变量。即假设 x 满足伊藤过程，则刻画 x 变化的微分方程是：

$$dx = a\left(x,t\right)dt + \sigma(x,t)dW \tag{4}$$

伊藤过程无疑是十分复杂的，为了解这个微分方程，伊藤提出了伊藤引力（利用泰勒展开至二阶偏导数）：若变量 x 遵循伊藤过程，若 G 为变量 x 与 t 的函数，则有：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \tag{5}$$

其中 z 为遵循标准布朗运动的变量。

1.4 证券价格的变化过程与对数化

经前人探究，得到了证券价格变化的规律。即证券未来价格的变化率满足是一个正态分布，期望项与方差项都与时间变化 dt 有关，即：

$$\frac{dS}{S} \sim N\left(udt, \sigma\sqrt{dt}\right) \tag{6}$$

用标准正态分布 ε 展开此正态分布，可得到：

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon \tag{7}$$

最后两边乘以 S, 得到证券价格的变化过程：设证券价格 S 为一变量，则 S 遵循漂移率为 μS，方差率为 $\sigma^2 S^2$ 的伊藤过程。即有下述微分方程与关系：

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma S dz \\ a\left(S,t\right) = \mu S \\ b\left(S,t\right) = \sigma S \end{cases} \tag{8}$$

其中 $a\left(S,t\right)$ 指漂移率，$b\left(S,t\right)$ 指方差率的开根。

为了方便计算收益率，一般衡量证券价格采用以证券价格的对数作为计算量。即令 $G = \ln\left(S\right)$，利用伊藤过程，有：

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \\ \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \\ a\left(S,t\right) = \mu S \\ b\left(S,t\right) = \sigma S \\ dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \end{cases} \tag{9}$$

1.5 B-S 微分方程

设 S 为遵循上述伊藤过程的证券价格，f 为某一依赖 S 的衍生证券价格。由伊藤引理，有：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{10}$$

为了消除 dz，可构建一个包括以单位衍生证券空头和 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 单位标的证券多头的投资组合。令 Π 表示该组合 0 时刻的价值：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{11}$$

则对于 dt 时刻，由伊藤引理，显然可消去 dz 项：

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt \tag{12}$$

又因为无套利定价理论，其价格变化应该等于在无风险利率条件下的价格变化，即：

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{13}$$

讲 Π 与 $d\Pi$ 代入上式并移项，得到 B-S 微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{14}$$

1.6 B-S 期权定价的概率论推导

1.6.1 欧式看涨期权

对于一个看涨期权，其到期的期望现金流入是 $E\left[(S_T-K)^+\right]$，其中 S_T 指到期 T 时刻金融资产市场价值，K 值敲定价格，即期权到期交割价格。

由证券价格变化过程知：价格服从对数正态分布（见 9 式），设 S 为当前证券价格。则有：

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma(T-t)\right) \tag{15}$$

令 $\xi = \ln S_T$，则 $S_T = e^{\xi}$，有：

$$\begin{gathered} C_T = E\left[(S_T-K)^+\right] = E\left[\left(e^{\xi}-K\right)^+\right] \\ = \int\limits_{e^y-K\geq 0} (e^y-K)p(y)dy = \int_{\ln K}^{\infty} e^y p(y)dy - \int_{\ln K}^{\infty} Kp(y)dy \end{gathered} \tag{16}$$

其中 $p(y)$ 为变量 ξ 的概率论密度函数。即：

$$p\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{\left[y-(\ln S + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t))\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \tag{17}$$

代入计算，即可的结果，这里省略复杂的计算过程，有：

$$C_T = e^{\ln S + r(T-t)}N(d_1) - KN(d_2) \tag{18}$$

从而进行贴现定价，有：

$$\begin{cases} c = e^{-r(T-t)}C_T = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases} \tag{19}$$

值得注意的是，式子中的 σ 为现时刻不知道的参数，只能靠估计，并且，这个是在没有红利状况下的公式，如果有红利，还要再细分现金流。

1.6.2 欧式看跌期权

与看涨期权同理，先求出交割时刻价值，在进行贴现，有：

$$\begin{cases} p = e^{-r(T-t)}p_T = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases} \tag{20}$$

2 基础 B-S 期权定价的 excel 实现

步骤一：在 excel 中输入所需知道的当前已知参数以及估计参数。

所需知道的参数有：

表 1: 所需参数

Symbol	Meaning
S	证券当前价格（已知）
K	约定好的证券交割价格（已知）
$T-t$	期权有效时间（已知）
σ	年化波动率（未知）
r	无风险利率（已知，可根据市场求出）

在新建立的 excel 表格中输入上述参数。

步骤二：建立 d_1 与 d_2、$-d_1$ 与 $-d_2$。

利用公式：

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases} \tag{21}$$

点击新建参数对应的空白栏，在上部 fx 栏内构建 excel 函数，公式中的各参数都用第一步中输入参数的位置代号代表。

步骤三：建立 $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$、$N(-d_1)$ 与 $N(-d_2)$

N(x) 指标准正态累积分布函数中，从负无穷积分到 x 的值，也表示了从标准正态分布中随机抽一个数，其值小于 x 的概率。

在 excel 中有专门计算这个过程的函数，即 “NROMSDIST”，在 office 的官网上可以查看到具体用法。

更多信息

NORMSDIST(z) 返回标准正态随机变量的观察值小于或等于 z 的概率。标准正态随机变量的平均值为 0，标准偏差为 1（方差也为 1，因为方差 = 标准偏差的平方）。

语法

```
NORMSDIST(z)
```

其中 z 是一个数值。

用法示例

创建一个空白 Excel 工作表，复制下表，选中空白 Excel 工作表中的单元格 A1，然后粘贴各项，这样下表将填满工作表中的单元格 A1:D11。

z	NORMSDIST(z)

图 1: NORMSDIST 用法

故同步骤二一样，新建函数即可：

$$\begin{cases} N(d_1) = NORMSDIST(place_{d1}) \\ N(d_2) = NORMSDIST(place_{d2}) \\ N(-d_1) = NORMSDIST(place_{-d1}) \\ N(-d_2) = NORMSDIST(place_{-d2}) \end{cases} \tag{22}$$

步骤四：建立看涨期权价格 c 与看跌期权价格 p。

新建位置对应函数，利用公式：

$$\begin{cases} c = e^{-r(T-t)}C_T = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ p = e^{-r(T-t)}p_T = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{cases} \tag{23}$$

其中 $N(d_1)$、$N(d_2)$ 以及其他参数引用指定位置即可。最后将 c 与 p 对应的方格填充绿色，更清晰。

完成上述四个步骤便可得到 B-S 期权定价的基础 excel 实现，较为简单。

3 连续红利下的 B-S 期权定价的 excel 实现

连续红利：连续红利支付是指某股票以一已知分红率 (设为 d) 支付不间断连续红利

所以连续红利下的 B-S 期权定价的 excel 实现与基础 B-S 期权定价的 excel 实现相差并不大，第一步输入所需参数的时候多输入一个 d，代表红利收益率即可。第二步、第三步与所设红利收益率无关。

步骤四中所建立的位置对应数因公式不同，会发生变化。以看涨期权为例,其公式可以拆成两部分,一部分为 $SN(d_1)$,另一部分为 $Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$,各部分有各自的金融含义。

$SN(d_1)$ 是指 S_T 的风险中性期望值的现值, 即到期时刻为 S_T 的证券在交易时刻的贴现值，故应该考虑到存在红利收益的情况，继续贴现为 $Se^{-d(T-t)}N(d_1)$；而 $Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ 是指敲定价格 K 的风险中性期望值的现值，这个值与无风险利率有关却与红利无关，所以不发生变化。

所以建立 c 与 p 的公式变为：

$$\begin{cases} c = Se^{-d(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-d(T-t)}N(-d_1) \end{cases} \tag{24}$$

故依此建立关联即可得到 c 与 p，将 c 与 p 对应的方格填充绿色，更清晰。

4 可调节 B-S 期权定价动态图的 excel 实现

经过我的研究，我发现制作一个可调节 B-S 期权定价动态图的过程可拆分为四部分：输入、计算、绘图、刷新。各个部分实现的难点在下文一一列出。

说起这个，我必须得吐槽一下，您给的模版好多地方有问题，而且不够智能，做的时候按您的方法有些麻烦，vba 编程地不彻底。这个之后会提到。

4.1 输入难点：可调控——按钮操作

做可调节动态图的关键就是使用按钮对制定单元格进行操控，下面来研究按钮的使用方法。在动态图出，可以使用一种叫"微调按钮"的按钮（在控件工具中）去使指定单元格里的数字加一或减一，然后在另外一个单元格中除以 10 的指定次方即可调精度。

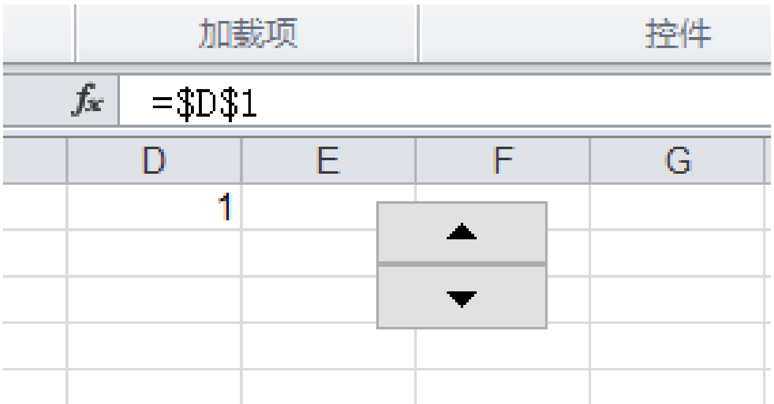


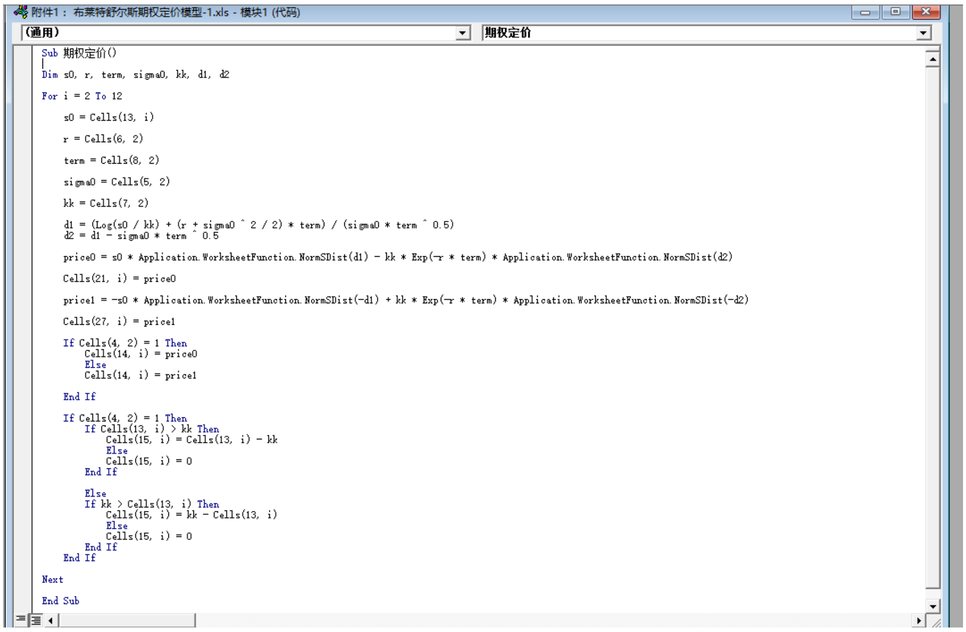
图 2: 设置一个微调按钮

链接指定单元格的方法如上图所示，在空白栏中输入："= 行号"。链接完成后按上键可加一，按下键可减一。

4.2 计算难点：批量处理——vba 编程

其实一开始我是满脸茫然的，因为 14 个股票价格，每个股票价格要建立 5 个联系（d_1 与 d_2、$N(d_1)$ 与 $N(d_2)$、c 或 p），就意味着要建立 60 个联系，一一建立太复杂，很麻烦。

后来看见样板里使用了宏——一种可以编程控制的、可反复执行的操作。



附件1： 布莱特舒尔斯期权定价模型-1.xls - 模块1 (代码)

(通用) 期权定价

```
Sub 期权定价()

Dim s0, r, term, sigma0, kk, d1, d2

For i = 2 To 12

    s0 = Cells(13, i)

    r = Cells(6, 2)

    term = Cells(8, 2)

    sigma0 = Cells(5, 2)

    kk = Cells(7, 2)

    d1 = (Log(s0 / kk) + (r + sigma0 ^ 2 / 2) * term) / (sigma0 * term ^ 0.5)
    d2 = d1 - sigma0 * term ^ 0.5

    price0 = s0 * Application.WorksheetFunction.NormSDist(d1) - kk * Exp(-r * term) * Application.WorksheetFunction.NormSDist(d2)

    Cells(21, i) = price0

    price1 = -s0 * Application.WorksheetFunction.NormSDist(-d1) + kk * Exp(-r * term) * Application.WorksheetFunction.NormSDist(-d2)

    Cells(27, i) = price1

    If Cells(4, 2) = 1 Then
        Cells(14, i) = price0
        Else
        Cells(14, i) = price1

    End If

    If Cells(4, 2) = 1 Then
        If Cells(13, i) > kk Then
            Cells(15, i) = Cells(13, i) - kk
            Else
            Cells(15, i) = 0
        End If

        Else
        If kk > Cells(13, i) Then
            Cells(15, i) = kk - Cells(13, i)
            Else
            Cells(15, i) = 0
        End If
    End If

Next

End Sub
```

图 3: 用 vba 编程制作反复计算宏

上面给出的是 png 矢量图，您可以放大看每一行代码，不会失真!

我就说一些编程的难点：需要熟练使用 for+if 的嵌套还有双 if 嵌套。其中 for+if 的嵌套用于批量处理，双 if 嵌套用于最大值的选取（不得不吐槽，vba 太不智能了，竟然没有取最大值的现成函数）。

4.3 绘图难点：数据选取——图表制作

不得不说，对于计算机语言，一样通，样样通。excel 的制图和 Matlab 的太像了，步骤一模一样：先有两行或列数据，然后选取一个作为横坐标，一个座位纵坐标，然后使用“描点作图法”，用曲线连接所给的点形成图线，显然给的点越多越密，画出来的图越精准。

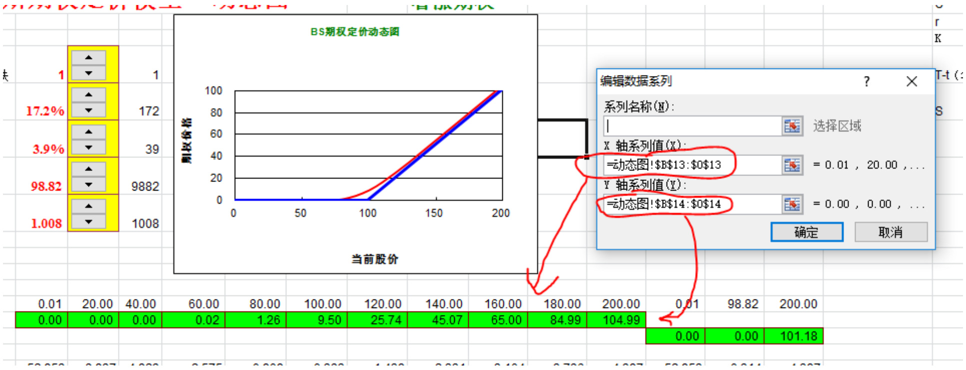


图 4: 选取横纵坐标点列

4.4 刷新难点：自动刷新——宏与按钮的结合

做到这步已经快结束了，我们的目标是每点一次按钮，调整一次数据，图片刷新一次。

其中数据与图片之间是联动的，不需要我们操心，我们要负责的是建立起按钮和数据之前的刷新联系。方法如下图所示：

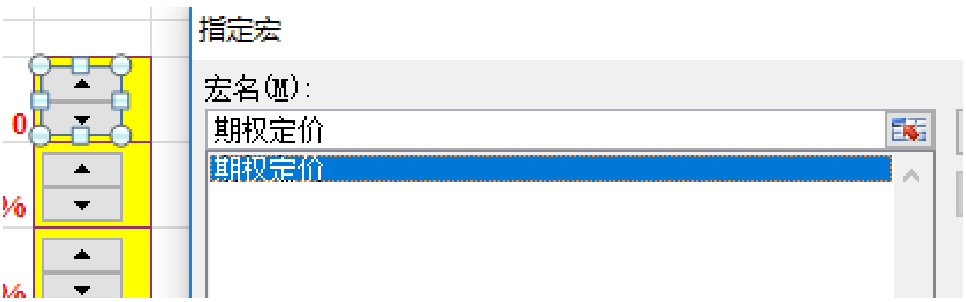


图 5: 按钮“安装”宏

右击按钮，选择“指定宏”, 选择已经制作好的“期权定价”宏，大功告成。

5 其他要说的

之前给的 excel 模版有瑕疵，修正过的 excel 文档在文件夹内，名称为“修改后的文档”，文件夹内还有 latex 源文件（.tex 文件）以及所使用的插

图，可以查看。