

# 计算方法第六次编程作业

PB20511896 王金鑫

## 1 题目

使用 FFT 和 IFFT 实现对规定函数的 Fourier 分析。函数  $f$  以及划分数  $n$  如下：

1.  $f_1(t) = 0.7 \sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t)$ ,  $n = 2^4, 2^7$
2.  $f_2(t) = 0.7 \sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t) + 0.3 \times \text{random}(t)$ , 其中  $\text{random}(t)$  为  $[0, 1)$  区间内的随机数,  $n = 2^7$

其中  $t \in [0, 1)$ , 将  $[0, 1)$  区间均匀划分为  $n$  份,  $f_{1,k} = f_1(\frac{k}{n})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $f_{2,k}$  为  $f_{1,k}$  加上一个随机扰动项,  $f_{2,k} = f_{1,k} + 0.3r_k$ ,  $r_k \in [0, 1)$  为随机数。

## 2 原理

由于题述的  $n$  均为 2 的幂次方, 因此可用逐次分半算法。即将 DFT 的级数按奇偶项分开计算。

## 3 结果

运行结果如下图所示。

Real(g)	Imag(g)
-1.5E-16	0
4.49E-17	1.06E-17
9.38E-17	-0.35
6.43E-18	1.39E-16
-2E-19	1.11E-16
-3E-16	-0.5
-1.4E-16	-8.3E-17
1.23E-16	-2E-16
3.19E-16	0
1.1E-16	2.39E-16
-4.5E-17	1.11E-16
-3E-16	0.5
-2E-19	-1.1E-16
6.34E-17	-1.7E-16
1.42E-16	0.35
2.85E-17	-4.7E-17

图 1:  $n=16$  时,  $f_1$  的 FFT 结果  $g_{1\_16}$

Real(g)	Imag(g)
9.95E-18	0
4.6E-18	2.34E-17
-4.4E-17	-0.35
4.74E-18	6.66E-17
1.12E-17	4.68E-17
-3.2E-16	-0.5
2.9E-18	-5.9E-17
3.14E-17	-5.5E-17
1.67E-17	-7.1E-17
1E-17	-2.1E-17
2.87E-17	-6.1E-17
2.35E-17	-3.2E-17
5.15E-17	-5.5E-17
5.34E-18	3.71E-17
-2.5E-17	-3.4E-17
-3.5E-17	-1.1E-18
-1.5E-17	-6.1E-18
8.59E-18	-1.3E-17
2.3E-17	-4.5E-17
1.18E-17	1.6E-17
4.03E-17	-3.7E-17
1.94E-17	9.09E-17
-1.2E-17	3.4E-17
-1.2E-17	1.04E-17
-3.9E-17	-4.2E-17
3.25E-17	1.58E-17
-4.6E-17	1.72E-17
-3.6E-17	3.15E-17

(a)

-9.7E-17	-1.9E-17
1.76E-17	-1.4E-16
1.19E-16	-1.3E-17
-6.4E-18	3.45E-17
-3.4E-17	-1.9E-17
1.51E-17	8.34E-18
-2.8E-17	-4.1E-17
3.86E-19	4.26E-18
-5.5E-17	-1.8E-17
-9.1E-18	-1.4E-17
-1E-16	-1.3E-17
9.7E-18	-1.4E-16
9.99E-17	-3.3E-17
2.06E-17	1.48E-17
2.27E-17	-3.4E-17
2.36E-17	2.8E-17
-8.8E-18	-1.3E-17
-3E-18	-1.5E-17
-3.1E-17	-1.9E-17
2.67E-17	-5.5E-17
1.8E-17	-4.3E-18
-1.6E-17	2.57E-18
3.17E-17	-2.4E-17
1.96E-17	8.36E-18
5.22E-18	1.49E-17
2.25E-17	-7.6E-18
-5.7E-17	-3.7E-17
4.89E-17	-5.5E-17
8.14E-17	-3.4E-17

(b)

-1.7E-17	-6.7E-18
6.82E-17	-2.6E-18
6.67E-17	0
5.21E-17	-1.7E-17
-1.2E-17	2.77E-18
1.29E-16	5.55E-17
3.09E-17	2.85E-17
-1E-16	0
3.08E-17	-2.9E-17
8.81E-17	-2.8E-17
-1.5E-17	-2.5E-18
5.21E-17	1.72E-17
1.49E-17	8.33E-17
5.26E-17	-1.6E-18
-1.3E-17	1.76E-17
8.14E-17	3.4E-17
4.1E-17	5.52E-17
-4.8E-17	3.84E-17
2.5E-17	3.12E-17
5.22E-18	-1.5E-17
3.41E-17	-8.1E-18
3E-17	2.78E-17
-1.4E-17	3.84E-18
1.8E-17	4.35E-18
2.7E-17	5.46E-17
-3.1E-17	1.44E-17
-7.7E-18	1.07E-17
-8.8E-18	1.29E-17
8.74E-18	-7.3E-18

(c)

1.1E-17	2.35E-17
1.33E-17	-9.6E-18
9.99E-17	3.27E-17
9.13E-18	1.4E-16
-9.6E-17	3.07E-17
4.47E-17	5.17E-17
-5.5E-17	1.77E-17
3.61E-18	-1.1E-17
-4.8E-19	6.89E-17
9.35E-18	-6.6E-18
-3.4E-17	1.86E-17
-8.6E-18	-3.5E-17
8.62E-17	-1.4E-17
1.56E-18	1.09E-16
-9.7E-17	1.9E-17
-4.4E-17	-4.1E-17
-5.4E-17	-3.4E-17
3.45E-17	-1.7E-17
-3.9E-17	4.21E-17
-1.5E-17	-1.7E-17
-1.9E-18	-1.1E-17
5.6E-17	-2.8E-17
4.03E-17	3.68E-17
1.44E-17	-1.5E-18
2.81E-17	5.32E-17
8.46E-18	5.2E-18
-1.5E-17	6.08E-18
-1.7E-17	-2.4E-18
-3.3E-17	2.67E-17

(d)

-9E-18	-7.3E-17
5.15E-17	5.47E-17
8.82E-18	-2.1E-17
2.28E-17	3.93E-18
1.03E-17	4.7E-17
1.67E-17	7.12E-17
2.87E-17	5.69E-17
2.65E-17	1.33E-16
-5E-16	0.5
1.12E-17	-4.7E-17
3.8E-18	-3.1E-17
-1.1E-16	0.35
8.89E-18	-5.6E-17

(e)

图 2:  $n=128$  时,  $f_1$  的 FFT 结果  $g_1_{128}$

Real(g)	Imag(g)
0.059575	0
5.92E-18	2.23E-17
-4.2E-17	-0.35
4.71E-18	6.66E-17
1.12E-17	4.57E-17
-3.2E-16	-0.5
8.34E-20	-5.6E-17
3.15E-17	-5.3E-17
1.94E-17	-7.2E-17
1.17E-17	-2E-17
2.39E-17	-6.7E-17
2.35E-17	-3.2E-17
5.24E-17	-5.4E-17
4.21E-18	3.58E-17
-2.3E-17	-4.4E-17
-3.6E-17	2.67E-19
-1.7E-17	-6.4E-18
9.66E-18	-1.1E-17
2.59E-17	-4.7E-17
1.17E-17	1.6E-17
3.84E-17	-3.8E-17
1.77E-17	8.79E-17
-1.6E-17	3.91E-17
-1.3E-17	1.06E-17
-3.7E-17	-4.2E-17
3.23E-17	1.75E-17

(a)

-5.2E-17	1.49E-17
-3.6E-17	3.15E-17
-9.5E-17	-1.8E-17
1.89E-17	-1.4E-16
1.21E-16	-2.9E-17
-7.7E-18	3.34E-17
-3.5E-17	-1.9E-17
1.37E-17	9.44E-18
-2.6E-17	-4.3E-17
3.6E-19	4.26E-18
-5.6E-17	-1.8E-17
-9.1E-18	-1.4E-17
-1E-16	-7E-18
9.51E-18	-1.4E-16
1.01E-16	-3.2E-17
1.88E-17	1.46E-17
1.96E-17	-3.4E-17
2.36E-17	2.8E-17
-6.9E-18	-1.2E-17
-1.9E-18	-1.3E-17
-2.9E-17	-2.8E-17
2.77E-17	-5.6E-17
1.87E-17	-4.7E-18
-1.7E-17	1.23E-18
3.21E-17	-2.5E-17
1.96E-17	8.36E-18
4.36E-18	1.36E-17

(b)

2.41E-17	-4.5E-18
-5.7E-17	-3.3E-17
5.06E-17	-5.6E-17
8.05E-17	-3.4E-17
-1.7E-17	-8.4E-18
6.66E-17	-2.9E-18
6.67E-17	0
5.21E-17	-1.7E-17
-1.4E-17	3.87E-18
1.3E-16	2.78E-17
3.22E-17	2.96E-17
-1E-16	0
3.21E-17	-3E-17
8.98E-17	-2.8E-17
-1.5E-17	-2.5E-18
5.21E-17	1.66E-17
1.48E-17	8.33E-17
5.2E-17	2.07E-18
-1.3E-17	1.93E-17
8.05E-17	3.44E-17
4.27E-17	5.54E-17
-4.6E-17	3.8E-17
2.5E-17	3.12E-17
4.36E-18	-1.4E-17
3.3E-17	-9.4E-18
3.12E-17	2.35E-17
-1.5E-17	5.18E-18

(c)

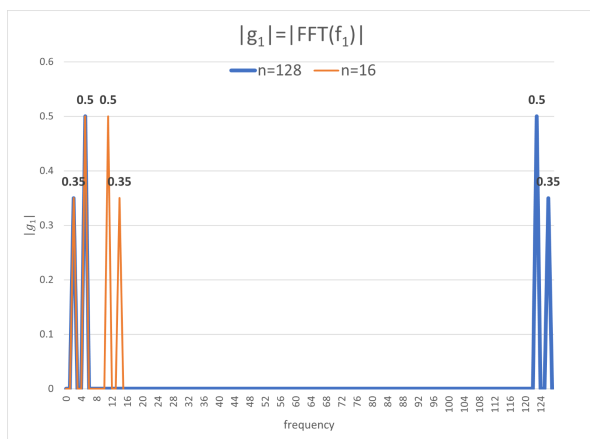
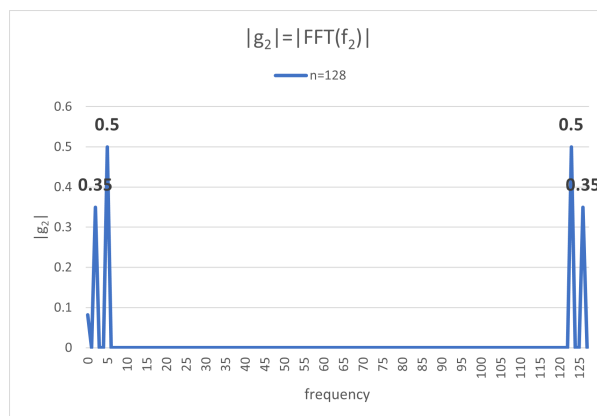
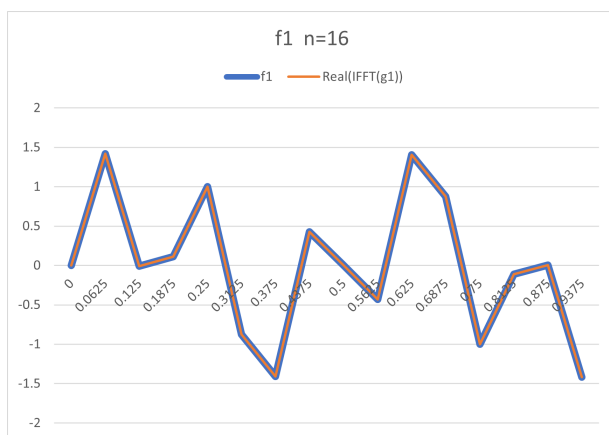
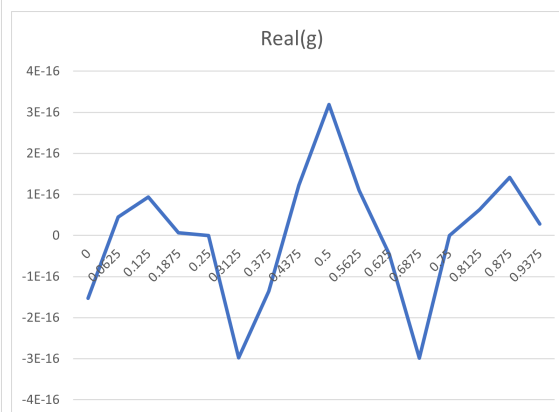
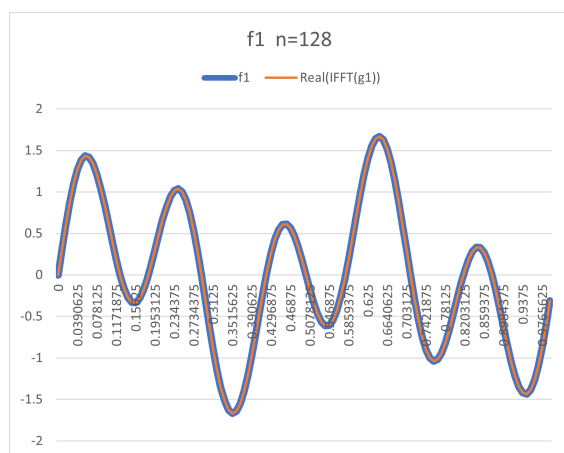
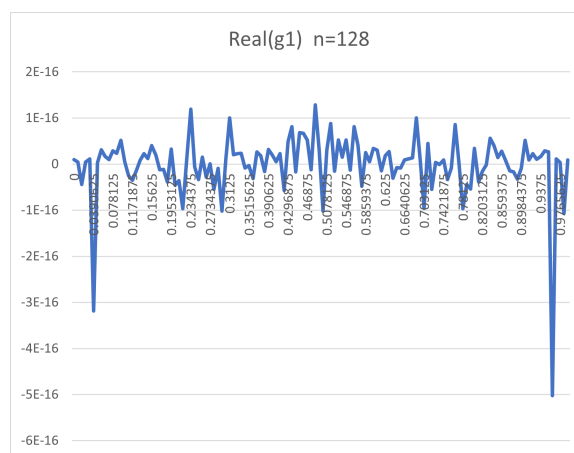
1.87E-17	4.65E-18
2.81E-17	5.59E-17
-3E-17	1.58E-17
-7.7E-18	1.07E-17
-6.9E-18	1.21E-17
7.08E-18	-1E-17
1.1E-17	2.53E-17
1.16E-17	-9.4E-18
1.01E-16	3.25E-17
8.94E-18	1.42E-16
-9.3E-17	2.61E-17
4.46E-17	5.17E-17
-5.6E-17	1.82E-17
4.93E-18	-1.3E-17
1.11E-18	5.68E-17
7.99E-18	-7.7E-18
-3.5E-17	1.91E-17
-1E-17	-3.4E-17
8.81E-17	-1.2E-17
1.53E-18	1.09E-16
-9.5E-17	1.78E-17
-4.4E-17	-4.1E-17
-5.7E-17	-3.3E-17
3.43E-17	-1.8E-17
-3.7E-17	4.19E-17
-1.7E-17	-1.7E-17
-2.2E-18	-1.8E-17

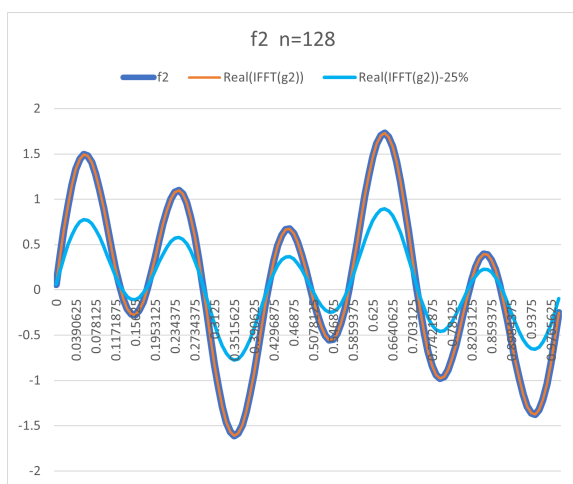
(d)

5.6E-17	-2.8E-17
3.84E-17	3.77E-17
1.54E-17	-1.6E-19
2.94E-17	4.84E-17
9.54E-18	3.85E-18
-1.7E-17	6.39E-18
-1.8E-17	-3.7E-18
-3E-17	2.78E-17
-9E-18	-7.3E-17
5.24E-17	5.43E-17
1.04E-17	-1.8E-17
1.97E-17	7.45E-18
1.2E-17	4.68E-17
1.94E-17	7.16E-17
2.89E-17	5.52E-17
2.47E-17	1.26E-16
-5E-16	0.5
1.12E-17	-4.6E-17
2.43E-18	-3E-17
-1.1E-16	0.35
1.02E-17	-5.5E-17

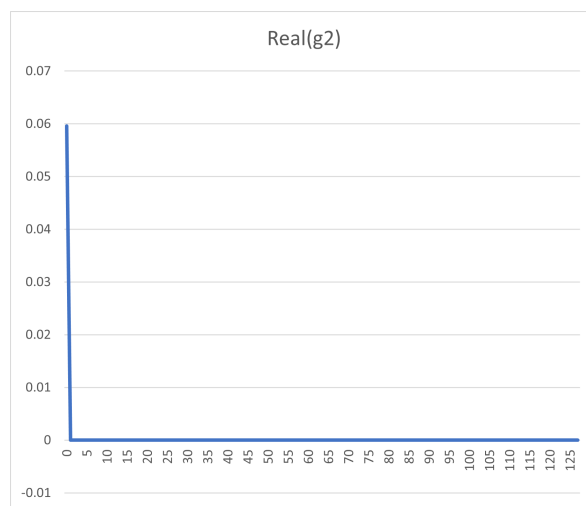
(e)

图 3:  $n=128$  时,  $f_2$  的 FFT 结果  $g_2_{128}$

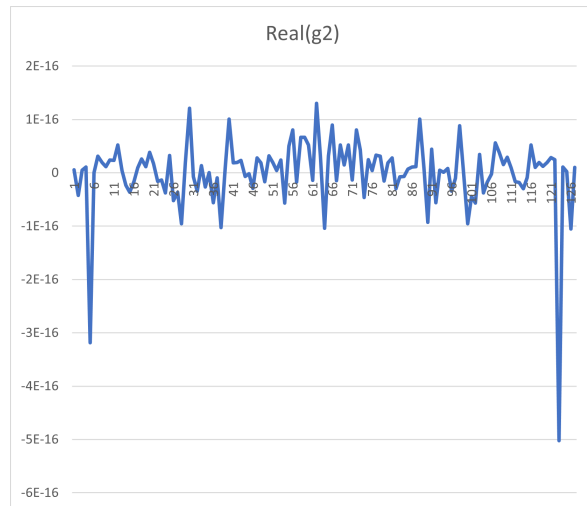
(a)  $g_1$  n=16,128(b)  $|g_2|$  n=128图 4: 不同  $n$  下, 对  $f$  进行 FFT 后得到的  $g$  的模长  $|g|$ (a)  $f_1$  原图像和  $g_1$  在 IFFT 后的图像(b)  $g_1$  的实部图 5:  $n=16$  时,  $f_1$  的相关结果(a)  $f_1$  原图像和  $g_1$  在 IFFT 后的图像(b)  $g_1$  的实部图 6:  $n=128$  时,  $f_1$  的相关结果



(a)  $f_2$  原图像,  $g_2$  在 IFFT 后的图像, FFT 后频率域取前 25% 后 IFFT 的图像



(b)  $g_2$  的实部



(c)  $g_2$  除去频率  $k=0$  处的点后的实部

图 7:  $n=128$  时,  $f_2$  的相关结果

## 4 结果分析

考虑到 double 型变量的有效位数为  $16 \sim 17$  位, 即  $1 \times 10^{-16}$  的数量级属于浮点误差范围内, 而图 1~3 中对于 FFT 后取实部的结果恰好在这个数量级及以下, 因此得到的  $g$  实部的结果并不准确。

考虑该因素后, 可以在误差范围内近似的认为结果中在  $10^{-16}$  及以下数量级的数均为 0。

由图 5~7 可看出:

1.  $n$  越大,  $f$  向量的图像越逼近函数的图像。
2. 不管  $n$  的数目为多少, 对  $g$  作 IFFT 后可以得到和原函数一样的图像, 不会造成明显的影响。
3. 对于  $f$  向量 FFT 后的模长  $|g|$ ,  $n$  的数目并不明显地影响其峰值, 且也不明显地影响其分布的形状, 除了由于数据点的增多导致的图像被拉宽。
4.  $n=16$  和  $n=128$  时,  $g_1$  的实部均在误差范围内为 0, 其大小主要分布在虚部, 由图 1~3 可看出。
5.  $g_2$  的实部在频率  $k=0$  处有一个大小约为 0.06 的峰, 是由  $f_2$  中的随机数引起的。由图 7(b) 和 (c) 可看出除去这一点外的实部均为 0, 且图像与  $n=128$  时  $g_1$  的结果相符合。
6. 对于  $f_2$ , 去除掉高频部分后进行 IFFT 得到的图像与原图像形状相同, 但是大小变为了原来的一半。