

计算方法第一次编程作业

PB20511896 王金鑫

1 题目

- 假设：在 xy 平面上有一个镜面圆，可以反射光线，圆的圆心在 origin 处，半径为 1；观察点在 x 轴负半轴上；物点 Q 在第二象限且在圆外。
- 输入：
观察点 P , $P \in \{(x, y) | x < -1, y = 0\}$
物点 Q , $Q \in \{(x, y) | x < 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1\}$
- 输出：
反射点 T 的位置，像点 R 的位置，都用二维坐标 (x, y) 表示（如果你的算法的结果是其他表示方法，请转换到二维坐标表示后输出）。

2 算法

- 方法：在这里使用的是二分法来数值求解。
- 原理：由费马原理，光的镜面反射问题等价于光程的极值问题。由于此问题的物理模型较为简单，因此不需考虑有两个及以上的极值点的存在。
- 具体算法：设 P 点的横坐标为 P_x ， Q 点的坐标为 (Q_x, Q_y) ， OT 连线与 x 负半轴的夹角为 θ ，则光程为

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(P_x + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{(Q_x + \cos \theta)^2 + (Q_y - \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{P_x^2 + 2P_x \cos \theta + 1} + \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 2Q_x \cos \theta - 2Q_y \sin \theta + 1} \end{aligned} \quad (1)$$

将 L 对 θ 求导，得光程对 θ 的导数为

$$L' = -\left(\frac{P_x \sin \theta}{\sqrt{P_x^2 + 2P_x \cos \theta + 1}} + \frac{Q_x \sin \theta + Q_y \cos \theta}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 2Q_x \cos \theta - 2Q_y \sin \theta + 1}} \right) \quad (2)$$

令 $L' = 0$ ，该方程的根即为 T 所对应的 θ 值。

利用二分法，取 $\theta_1 = 0^\circ$ 和 $\theta_2 = 90^\circ$ 作为初始两端，再取中点 $\theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 。将两个端点

中导数值与中点的导数值相同的一点用中点取代，得到新的区间。重复迭代下去，直到区间的长度小于 0.000001° 时终止，并取此时的中点为最终近似结果，算出 T 所对应的坐标。

Q 与 R 关于过 T 的切线对称，故 $QR \perp OT$ 。已知 P, T, Q 及 θ ，则直线 QR 和直线 PT 的表达式可以得出，联立即可得其交点，也即 R 点的坐标值

$$R_x = \frac{(Q_y + Q_x \tan \theta)(\cos \theta + P_x) - P_x \sin \theta}{\tan \theta(\cos \theta + P_x) - \sin \theta} \quad (3)$$

$$R_y = \frac{\sin \theta(P_x - x)}{\cos \theta + P_x} \quad (4)$$

3 结果

程序测试结果如下图所示：

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -1.000001
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -2 2
T = (-1.000000, 0.000002)
Q = (-0.070739, 1.999996)
```

(a) P(-1.000001,0) Q(-2,2)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -2
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -1 0.000001
T = (-1.000000, 0.000001)
Q = (-0.883584, 0.000001)
```

(b) P(-2,0) Q(-1,0.000001)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -2.33
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -3 1
T = (-0.989279, 0.146037)
Q = (1.182433, 0.382590)
```

(c) P(-2.33,0) Q(-3,1)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -3
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -1 0.5
T = (-0.922615, 0.385721)
Q = (-0.786920, 0.410917)
```

(d) P(-3,0) Q(-1,0.5)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -3
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -2 10
T = (-0.827028, 0.562160)
Q = (8.380296, 2.944148)
```

(e) P(-3,0) Q(-2,10)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -3
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -3 1
T = (-0.987408, 0.158191)
Q = (1.187439, 0.329136)
```

(f) P(-3,0) Q(-3,1)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -10
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -2 1
T = (-0.959311, 0.282350)
Q = (0.304213, 0.321811)
```

(g) P(-10,0) Q(-2,1)

```
Please enter the x coordinate of P and coordinates of Q.
e.g:   Q: x y
(Notice: Px < -1 !!!) P: -1024
(Notice: Qx < 0 && Qy > 0 && r(Q) > 1 !!!) Q: -8 4
T = (-0.970066, 0.242842)
Q = (7.000902, 0.244734)
```

(h) P(-1024,0) Q(-8,4)

图 1: 数据测试结果

在不考虑计算机精度误差的情况下，由于 $|dx| = |\sin \theta| |d\theta| < |d\theta|$ ，且角度转化成弧度相当于乘上 $\frac{\pi}{180} < 0.1$ ，故 T 坐标的误差限为 0.0000001。但对于 R 的坐标来说，由于式 (3) 和式 (4) 的分母可能会比较小，因此误差会较大一些。一种可能的优化方法为：将直线 PT

和直线 QR 联立后的方程组约去 y 或 x 之后得到的方程再次用二分法求解。