Поставим далее каждому рацирнальному элементу поля $\boldsymbol{R}$, т.е. элементу вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, элемент $\frac{f(m)}{f(n)}$ поля $\boldsymbol{R^*}$, т.е. положим

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(m)}{f(n)}. \tag{3.43}$$

Теперь (как это дегко проверить) f отображает взаимно однозначно поле $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных элементов поля $\boldsymbol{R}$ на поле $\boldsymbol{Q^*}$ всех рациональных элементов поля $\boldsymbol{R^*}$. Это соответствие является изоморфизмом упорядоченных полей $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q^*}$. В самом деле, если

$$0 < \frac{m}{n} < \frac{p}{q}, m, n, p, q \in \boldsymbol{Z}, n > 0, q > 0, \tag{3.44}$$

то $mq < np$, а тогда, в силу (3.34), $f(mq) \underset{(3.36)}{<} f(np)$, откуда $f(m)f(q) < f(n)f(p)$ и, следовательно, $\frac{f(m)}{f(n)} < \frac{f(p)}{f(q)}$, т.е., согласно (3.43),

$$f\left(\frac{m}{n}\right) < f\left(\frac{p}{q}\right). \tag{3.45}$$

Для рациональных элементов с произвольными знаками сохранения отношения порядка при отображении f следует из (3.44)-(3.45) и того, что

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{-m}{n}\right) \underset{(3.43)}{=} \frac{f(-m)}{f(n)} \underset{(3.33)}{=} \frac{-f(m)}{f(n)} = -f\left(\frac{m}{n}\right). \tag{3.46}$$

Далее, для любых $\frac{m}{n}\ in\ \boldsymbol{Q}$ и $\frac{p}{q}\ in\ \boldsymbol{Q}$ имеем

$$f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{mq+np}{nq}\right) \underset{(3.43)}{=} \frac{f(mq)}{f(nq)} \underset{\substack{(3.35)\\(3.36)}}{=} \frac{f(m)f(q)+f(n)f(p)}{f(n)f(q)} =$$

$$= \frac{f(m)}{f(n)} + \frac{f(p)}{f(q)} \underset{(3.43)}{=} f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) \tag{3.46}$$

и, наконец,

$$f\left(\frac{m}{n}\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{mp}{nq}\right) \underset{(3.43)}{=} \frac{f(mp)}{f(nq)} \underset{(3.36)}{=} \frac{f(m)f(p)}{f(n)f(q)} =$$

$$= \frac{f(m)}{f(n)}\frac{f(p)}{f(q)} \underset{(3.43)}{=} f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{p}{q}\right). \tag{3.48}$$

Иррациональные элементы, т.е. элементы, не являющиеся рациональными, определяются сечениями в областях рациональных элементов, причем, в силу изоморфизма между множествами $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q^*}$ рациональных элементов, между их сечениями также существует взаимно однозначное соответствие: если $A|B$ - сечение в $\boldsymbol{Q}$, то $f(A)|f(B)$ - сечение в $\boldsymbol{Q^*}$ и мы положим

$$f(A|B) = f(A)|f(B). \tag{3.49}$$

Теперь взаимно однозначное соответствие установлено между всеми элементами полей $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R^*}$. Покажем, что оно также сохраняет отношение порядка и операции сложения и умножения элементов, т.е. является изоморфизмом полей $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R^*}$. Для этого заметим, что (см. п. 3.4)

$$A|B = \sup A = \inf B, f(A)|f(B) = \sup f(A) = \inf f(B). \tag{3.50}$$

Если для заданного множества $X \subset \boldsymbol{Q}$ обозначить через A множество таких рациональных чисел r, что для каждого $r \in A$ существует $x \in X$, для которого $r \leq x$, и положить $B = \boldsymbol{Q} \setminus A$, то множества A и B образуют сечение $A|B$ в поле $\boldsymbol{Q}$ и

$$\sup X = \sup A = A|B.$$

В силу же изоморфизма полей $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q^*}$ имеем

$$\sup f(X) = \sup f(A) = f(A)|f(B) \underset{(3.49)}{=} f(A|B) = f(\sup X).$$

Подобным же образом доказывается аналогичное соотношение для нижних граней. Следовательно, имеют место равенства

$$\sup f(X) = f(\sup X), \inf f(X) = f(\inf X), X \subset \boldsymbol{Q} \tag{3.51}$$

Пусть теперь $A|B$ и $C|D$ - сечения в поле $\boldsymbol{Q}$ и

$$A|B \leq C|D, \tag{3.52}$$

тогда $A \subset C$ и, следовательно, $f(A) \subset f(C)$, откуда вытекает, что

$$f(A)|f(B) \leq f(C)|f(D). \tag{3.53}$$

Далее, для любых сечений $A|B$ и $C|D$ поля $\boldsymbol{Q}$ имеем

$$f(A|B + C|D) \underset{(3.50)}{=} f(\sup A + \sup C) \underset{(3.6)}{=} f(\sup{(A + C)}) \underset{(3.51)}{=}$$

$$\underset{(3.51)}{=} \sup f(A + C) \underset{(3.47)}{=} \sup{(f(A) + f(C))} \underset{(3.6)}{=}$$

$$\underset{(3.6)}{=} \sup f(A) + \sup f(C) \underset{(3.50)}{=} f(A)|f(B) + f(C)|f(D).$$