

CUARENTENA IV

Día 1

Problema 1.

Sea $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función con las siguientes propiedades:

- (i) $f(1) = 0$,
- (ii) $f(p) = 1$ para todos los números primos p ,
- (iii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ para todo x, y en $\mathbb{Z}_{>0}$.

Determinar el menor entero $n \geq 2023$ que satisface $f(n) = n$

Problema 2.

Sea S un conjunto de enteros positivos menores o iguales a 15. Supongamos que no hay dos subconjuntos de S con misma suma. Hallar la máxima suma de S posible.

Aclaración: la suma de un conjunto finito se define como la suma de todos sus elementos.

Problema 3.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea P la intersección de AC y BD . El ángulo $APD = 60$. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Hallar el mayor número real positivo k tal que

$$EG + 3HF \geq kd + (1 - k)s$$

siendo s el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y d la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Duración de la prueba: 3 horas y media

Cada problema vale 8 puntos