

CUARETERNA

DÍA 1 - ASPO

Problema 1.

Sea ABC un triángulo. Supongamos que existe un punto D en el lado AC tal que $CD = 2AB$ y

$$\hat{BAC} = 2 \hat{DBC} = 4 \hat{ACB}.$$

Hallar la medida de los ángulos del triángulo ABC .

Problema 2.

Consideremos una secuencia infinita de enteros positivos $a_1, a_2, a_3 \dots$ que satisfaga las siguientes dos condiciones:

- $a_n \leq 3n$, para todo entero positivo n .
- $v_2(a_m + a_n) = v_2(m + n)$ para cualesquiera m y n enteros positivos.

Probar que todo múltiplo de 3 aparece exactamente una vez en la secuencia.

Nota: $v_2(x)$ denota al exponente de la mayor potencia de 2 que divide a x .

Problema 3.

Sea n un entero positivo impar, y supongamos que en un tablero de $n \times n$ hay un rey de ajedrez que se desplaza como indican las reglas. Algunas casillas se pintan de verde. Supongamos que se puede ir de cualquier casilla verde a cualquier otra pasando solo por casillas verdes. Demostrar que esto puede hacerse a lo sumo $(n^2 - 1)/2$ pasos.

*Duración de la prueba: 4 horas y media
Cada problema vale 7 puntos*