

CUARENTENA III

Problema 1.

Felipe colorea cada entero positivo de azul o amarillo, de modo que la suma de cualesquiera dos números de distinto color sea azul, y el producto amarillo. Demostrar que el producto de dos números amarillos (en caso de que los haya) es amarillo.

Problema 2.

Nico tiene un tablero con forma de hexágono regular de lado n , con n entero positivo, partido en casillas triangulares de lado 1. Nico colocó algunas fichas en el tablero, de modo que cada ficha cubre exactamente dos casillas con un lado en común y todo el tablero quedó cubierto, sin huecos ni superposiciones.

Si agrupamos las fichas por su orientación (hay tres posibles orientaciones), demostrar que hay la misma cantidad de fichas en cada una de las tres orientaciones.

Problema 3.

Sea ABC un triángulo y P un punto interior tal que AP sea bisectriz de $\angle BAC$ y BP sea simultáneamente bisectriz de $\angle APC$ y "trisectriz" de $\angle ABC$ (es decir, $\angle ABP = 2\angle PBC$). Hallar el valor de $\angle PCB$.

Problema 4.

Sean a_1, a_2, \dots, a_n enteros positivos tales que

$$1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n \leq 1/2.$$

Cada año, el gobierno argentino publica un reporte anual con n indicadores económicos. Para cada i , el i -ésimo indicador puede dar 1, 2, 3, ..., a_i . El reporte anual se dice optimista, si al menos $n-1$ indicadores dieron más alto que el año pasado. Demostrar que el gobierno puede publicar una secuencia infinitamente larga de reportes anuales optimistas.

Problema 5.

En el Reino de Mórtimer hay n pueblos conectados por caminos. Cada camino *conecta* dos pueblos A y B de modo que se puede ir de uno a la otro. Es posible viajar de cualquier pueblo a cualquier otro por los caminos de solo una forma.

Definimos el *grado* de un pueblo P como la cantidad de pueblos que están conectados a P . Definimos la *importancia* de un pueblo como la proporción de pueblos conectados a P con menor grado que P sobre el total de pueblos conectados a P .

Encontrar el menor real positivo c con la siguiente propiedad: para todo n y sin importar cómo se dispongan los caminos, la suma total de las importancias de los pueblos es a lo sumo cn .

*La prueba dura 4 horas
Cada problema vale 7 puntos*