

CUARENTENA IV

Día 2

Problema 4.

Sean a , b y n enteros positivos tales que $a > b$ y $ab - 1 = n^2$. Probar que

$$a - b \geq \sqrt{4n - 3}$$

e indicar para qué valores se alcanza la igualdad

Problema 5.

Dado un triángulo ABC , sean M y N los puntos medios de AC y AB , respectivamente. Se marca el punto D en BC tal que $AD = DB$. DM corta a AB en K . Las circunferencias circunscritas de KAM y KND se intersectan nuevamente en P .

Demostrar que $\angle PAC = \angle ABC$.

Problema 6.

Dado un trío de enteros no negativos, en cada paso Mauro elige dos de sus elementos, a y b , y cambia uno de ellos por $a+b$ o $|a-b|$.

Probar que existe una constante $r > 0$ tal que, para cualesquiera enteros positivos x, y, z, n con $x, y, z < 2^n$, Mauro puede transformar el trío $(x; y; z)$ en $(x'; y'; z')$ con $x' y' z' = 0$ aplicando rn operaciones válidas o menos.

Problema 7.

Sea c una constante tal que, para toda permutación $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de los enteros positivos, existen infinitos i que cumplen $\text{mcd}(a_i, a_{i+1}) \leq c$.

- Determinar si c puede tomar un valor menor a $\frac{3}{4}$
- Hallar el menor valor posible de c

Duración de la prueba: 4 horas y 40 minutos

Cada problema vale 8 puntos