CUARENTENA

Problema 1

Sean a, b y c enteros positivos tales que $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ y $\sqrt[3]{c}$ son términos de una progresión aritmética. Probar que abc es un cubo perfecto.

Problema 2

Sea n un entero positivo. En cada una de k casillas de un tablero $n \times n$ hay una persona infectada. Cada día, se contagian simultáneamente todas las personas que tienen al menos dos vecinos infectados. Hallar el menor valor posible de k para que, después de una cantidad suficientemente grande de días, todas las personas estén infectadas.

Aclaración: Dos personas son vecinas si sus casillas tienen un lado en común.

Problema 3

Hallar todas las cuaternas de enteros positivos (w, x, y, z) tales que

$$2^w 3^x - 5^y 7^z = 1.$$

Problema 4

Sea ABC un triángulo acutángulo con $A < 45°$. Sea D un punto en el triángulo ABC tal que $BD = CD$ y $\angle BDC = 4\angle A$. El punto E es la reflexión de C por AB y el punto F es la reflexión de B por AC. Probar que AD y EF son perpendiculares.

Problema 5

Hallar todos los reales positivos c tales que para todo triángulo acutángulo ABC con área T y para todo punto P en el plano vale que

$$(AP + BP + CP)^2 \geq cT.$$

Problema 6

Definimos la sucesión $(a_n)_{n \in N}$ de la siguiente manera: $a_1 = \frac{1}{2}$ y para todo k entero positivo

$$a_{2k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{2k-i} + \frac{a_k^2}{2}, a_{2k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i a_{2k+1-i}.$$

Calcular $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Nota: La sucesión empieza por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{5}{128}$...

Problema 7

Determinar todos los pares de enteros (x, y) mayores a 1 tales que y^x divide a $x^y - 1$.

Problema 8

Sean a y b dos enteros positivos. Determinar el mayor valor de n tal que existen conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ y $B_1, B_2, ... B_n$, tales que:

i) Los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ tienen a elementos cada uno.

ii) Los conjuntos $B_1, B_2, ... B_n$ tienen b elementos cada uno.

iii) Para todos $1 \leq i, j \leq n$, los conjuntos A_i y B_j son disjuntos si y sólo si $i = j$.

Problema 9

Sean a, b, c reales no nulos que satisfacen $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = 0$. Hallar el máximo valor de $\frac{4}{a^2+1} + \frac{4}{b^2+1} + \frac{7}{c^2+1}$.

Problema 10

Sea a un real positivo. Se tiene un tablero cuadriculado infinito en todas las direcciones, con algunas de sus casillas pintadas. Se quieren cubrir todas las casillas pintadas con cuadrados tal que:

i) Los bordes de los cuadrados sigan la línea de la cuadrícula,

ii) Ninguna casilla esté en más de un cuadrado y

iii) En cada cuadrado, la proporción de casillas pintadas sobre la cantidad de casillas totales sea mayor a a, pero como mucho $a\lfloor a^{-\frac{1}{2}} \rfloor^2$.

¿Para qué valores de a se puede hacer sin importar qué casillas estén pintadas?

Problema 11

Dos cubos unitarios tienen centro común. ¿Es siempre posible numerar los vértices de cada cubo con enteros del 1 al 8 de modo que la distancia entre dos vértices con el mismo número sea como mucho $\frac{4}{5}$? ¿Y como mucho $\frac{13}{16}$?

Problema 12

Sean x, y, z enteros positivos tales que

$(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1)$ es cuadrado perfecto.

Probar que $xy + 1$, $yz + 1$, $zx + 1$ son todos cuadrados perfectos.