

# Semana Mortimeriana

Mórtimer

## Problema 1: Esto Recién Empieza

Un mago afirma ser tu amigo. Te dice que si elegís un número real y se lo contás, muy amablemente te dirá el resultado de evaluar su polinomio de coeficientes enteros y grado 2022 en el número seleccionado. No obstante, te impone una condición: no podés hacerle más preguntas que la cantidad mínima necesaria para poder determinar cuál es su polinomio, ya que de otro modo se enoja. Determinar la máxima cantidad de preguntas que se le puede hacer al mago de tal modo que no se provoque su cólera.

## Problema 2: TOP 5

Un club de tenis tiene 50 miembros. Para descubrir a los mejores jugadores, el club organizó una serie de 35 partidos uno contra uno de modo que cada miembro juegue al menos un partido. Sabemos que la edad de Carlitos es el mayor entero positivo  $k$  que cumple la siguiente propiedad: “sin importar cómo el club haya organizado los partidos, siempre hay un conjunto de  $k$  partidos en los que juegan  $2k$  miembros distintos”. Hallar la edad de Carlitos.

## Problema 3: Me Gusta lo Simple

Hallar todas las ternas  $(a, b, c)$  de enteros positivos  $0 < a, b, c < 2022$  tales que

$$abc = (2022 - a)(2022 - b)(2022 - c).$$

## Problema 4: Cereza

Sea  $ABCD$  un cuadrilátero. El incírculo de  $ABC$  es tangente a  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  en  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  respectivamente. El incírculo de  $CDA$  es tangente a  $CD$ ,  $DA$ ,  $AC$  en  $R$ ,  $S$ ,  $V$  respectivamente.

- a) Demostrar que si  $U = V$ , entonces  $PQRS$  es cíclico.
- b) Demostrar que si  $PQRS$  es cíclico, entonces  $U = V$ .

## Problema 5: A Punta de Espada

Una princesa está capturada en la intersección central de una grilla de  $(2n + 1) \times (2n + 1)$ , mientras que en cada una de las otras intersecciones se halla un duende malévolo (hay  $(2n + 1)^2$  intersecciones en total). Brunito, para salvar a la princesa, puede tirar flechas desde cualquier punto, las cuales se mueven en una recta y aniquilan a cualquier ser vivo que las toque; sin embargo, Brunito es muy tacaño y no quiere gastar muchas flechas. Determinar la menor cantidad de flechas con las que Brunito podrá salvar a la princesa de las garras de los duendes malévolos (matar a la princesa no es considerado una salvación apropiada).

## Problema 6: Sol y Luna

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto de enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 2.$$

Demostrar que existen dos subconjuntos distintos de  $A$ , digamos  $S$  y  $L$ , tal que la suma de los elementos de  $S$  es igual a la suma de los elementos de  $L$ .

**Problema 7: Hijo de la Noche**

Decimos que un número racional  $t$  es nocturno si existen  $x, y, z$  enteros tales que

$$t = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Demostrar que  $t$  es nocturno si y solo si  $\frac{1}{2} - t$  lo es.

**Problema 8: Entre Cuatro Paredes**

Un mago dibuja un cuadrilátero  $ABCD$  y divide en 100 cuadriláteros mediante 9 segmentos que no se cortan, trazados desde el lado  $AB$  a  $CD$ , y 9 segmentos que no se cortan, trazados desde el lado  $BC$  a  $DA$ . Demostrar que si los 100 cuadriláteros tienen circunferencia inscrita, entonces  $ABCD$  también tiene circunferencia inscrita.

**Problema 9: Vida Eterna**

El Barón Munchausen presume haber encontrado una secuencia infinita de enteros positivos  $a_1, a_2, a_3, \dots$  que cumple una propiedad fantástica: “ $a_i + a_j$  es un cuadrado perfecto si y solo si  $i + j$  lo es.” Su amigo Euler le dice que seguramente sea una secuencia de la forma  $a_k = m^2 k$ , donde  $m$  es un entero positivo fijo, pero el Barón insiste que no. Decidir si necesariamente Euler tiene razón.

**Problema 10: En Movimiento**

Un sudoku es un tablero de  $9 \times 9$  donde cada casilla tiene un dígito del 1 al 9 de modo que se cumplan las siguientes tres condiciones: En cada fila aparece cada dígito del 1 al 9 exactamente una vez. En cada columna aparece cada dígito del 1 al 9 exactamente una vez. Si se divide al tablero en 9 subtableros  $3 \times 3$ , en cada subtablero aparece cada dígito del 1 al 9 exactamente una vez. Mati, después de incursionar tanto en el mundo de los sudokus y sus variantes, ideó el siguiente juego: Se empieza con un sudoku completo y se coloca una ficha encima de sus casillas. En cada paso, se puede mover la ficha a una casilla vecina (con un lado en común) tal que el número escrito en ella sea consecutivo al número escrito en la casilla actual. Determinar si Mati puede armar un sudoku inicial de modo que sea posible ir de una casilla a cualquier otra mediante una secuencia de pasos.

*La prueba dura 7 días.*

*Cada problema vale 7 puntos (a menos que seas Marchi...)*