

# CUARETERNA

## DÍA 2 - DISPO

### Problema 4.

Determinar si existe una permutación de los enteros positivos tal que la suma de cualesquiera dos elementos consecutivos sea un cuadrado perfecto.

### Problema 5.

Los lados de un 200-ágono convexo  $A_1A_2A_3 \cdots A_{200}$  se colorean alternadamente de rojo y azul. Supongamos que las extensiones de los lados azules definen un 100-ágono regular, y las de los rojos también.

Probar que las 50 diagonales  $A_1A_{101}, A_3A_{103}, A_5A_{105}, \dots, A_{99}A_{199}$  son concurrentes.

### Problema 6.

Sea  $n$  un entero positivo y sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  reales no negativos. Demostrar que

$$\sum_{i,j=1}^n \min \{a_i a_j, b_i b_j\} \leq \sum_{i,j=1}^n \min \{a_i b_j, a_j b_i\}$$

donde  $\min \{x, y\}$  denota al menor número entre  $x$  e  $y$ .

*Duración de la prueba: 4 horas y media  
Cada problema vale 7 puntos*