**COMBINATORIA BÁSICA**

*El arte de contar*

Contar es una de las habilidades más importantes en el repertorio de un matemático, incluso en los más avanzados. Sin embargo, lo curioso es que, en matemática, el objetivo no es contar cantidades muy complicadas, sino todo lo contrario: contar lo menos posible. Nuestro objetivo va a ser descubrir la forma más rápida y menos tediosa de enumerar objetos.

El siguiente apunte tiene como objetivo introducir al lector al mundo de contar posibilidades y brindarle las técnicas más usuales para resolver estos problemas. El apunte está ordenado de la siguiente forma:

* Una introducción con cinco ejercicios prácticos para practicar las herramientas necesarias para los problemas de contar.
* Una lista de los *problemas clásicos* con sus soluciones, para aplicar en futuros problemas.
* Más técnicas útiles para encarar los problemas de contar más complicados.
* Tres tandas de problemas: la primera, de problemas introductorios de ñandú y las primeras etapas de OMA; la segunda, de problemas para aplicar los problemas clásicos, y la tercera, de problemas más difíciles.

Ojalá este apunte sirva como introducción al maravilloso arte de contar.

# **1. ¿Qué es contar?** Una introducción práctica

## **Método**

La combinatoria es el área de la matemática que se encarga de **contar**. Paradójicamente, la tarea del matemático es hacerlo, pero contando lo menos posible, o, al menos, de una forma que se minimicen las chances de cometer de errores. Para contar *estratégicamente* existen muchísimas técnicas, algunas más conceptuales, sobre cómo organizarse para contar, y otras más concretas, fórmulas específicas para problemas puntuales. Para empezar este largo trayecto, veremos tres ideas, más del tipo conceptual, que nos ayudarán a evitar errores.

El primer paso a la hora de contar es **ordenarse**. Hay que tener claro qué es lo que queremos contar y en qué orden. Este paso puede salvarnos de contar casos repetidos o incluso de olvidarnos otros.

**Ejemplo 1.** ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?

![A picture containing shoji, building, crossword puzzle

Description automatically generated]()

**Solución:** Vamos a elegir un **orden** para contarlos. En este caso, los vamos a contar por tamaño.

* Hay 15 cuadrados de 1 × 1,
* Hay 8 cuadrados de 2 × 2,
* Hay 3 cuadrados de 3 × 3

Luego en total hay 15 + 8 + 3 = 26 cuadrados.

|  |
| --- |
| **Idea:** Ordenarse es crucial en (casi) todos los problemas de contar. |

**Ejemplo 2.** Se escriben los números del 1 al 1000 en una lista:

1234567891011121314 … 9989991000

¿Cuántos dígitos tiene la lista?

**Solución:** Contemos qué pasa en los números para cada cantidad de dígitos.

* Hay 9 números de un dígito: 9 x 1 = 9 dígitos.
* Hay 90 números de dos dígitos: 90 x 2 = 180 dígitos.
* Hay 900 números de tres dígitos: 900 x 3 = 2700 dígitos.
* Hay 1 número de cuatro dígitos: 4 dígitos.

En total, hay 9 + 180 + 2700 + 4 = 2893 dígitos.

|  |
| --- |
| **Idea:** Clasificar las cosas para contar y luego contar cada clase por separado. |

## **Astucia**

Cuando ya sabemos qué vamos a contar, debemos **idear** cómo contarlo. Muchas veces cierta observación puede simplificar mucho la cuenta: encontrar un patrón, aprovechar una cuenta que ya hicimos antes o encontrar una relación con una cosa más fácil de contar. Este paso puede salvarnos de tener que pasar todo el tiempo de la prueba contando algo que podía reducirse.

**Ejemplo.**

1. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 son múltiplos de 3?
2. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 no contienen el dígito 1?
3. ¿Cuántos números entre 1 y 10000 son capicúas (se leen igual de derecha a izquierda)?

**Solución: a)** Fijémonos que los múltiplos de tres siguen un **patrón**:

(1 2 **3**), (4 5 **6**), (7 8 **9**), … (97 98 **99**) y (100)

En cada trío, el último número es el múltiplo de 3. Luego, como hay 33 tríos (y un solterón), en total hay 33 múltiplos de 3.

**b)** Vamos a elegir un orden para contarlos y **aprovechar** las cuentas que ya hicimos antes. Contemos los números hasta cierta cantidad de dígitos:

* Hay 9 tales números hasta el 10 (contando al 0, son: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).
* Hay 81 tales números hasta el 100 (puede empezar con uno de 9 dígitos distintos y cada uno tiene 9 opciones de terminarse, por la cuenta anterior).
* Hay 729 tales números hasta el 1000 (puede empezar con uno de 9 dígitos y cada uno tiene 81 formas de terminarse, por la cuenta anterior).

En este caso estamos contando al 0, que deberíamos excluir de a cuenta final luego, hay 728 números sin el dígito 1.

**c)** Vamos a encontrar una **relación** entre los capicúas y los números naturales. Contemos los capicúas según su cantidad de dígitos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**1**1, **2**2, **3**3, **4**4, **5**5, **6**6, **7**7, **8**8, **9**9

**10**1, **11**1, **12**1, **13**1, **14**1, **15**1, **16**1, **17**1, …, **98**9, **99**9

**10**01, **11**11, **12**21, **13**31, **14**41, **15**51, …, **98**89, **99**99

Los capicúas de 1 y 2 dígitos son los dígitos solos (un dígito) o duplicados (dos dígitos).

Los capicúas de 3 y 4 dígitos se forman a partir de los números de 2 dígitos: Si copiamos el número, le damos vuelta y “solapamos” las dos copias en el último dígito, resulta un capicúa de tres dígitos (19 → 191). Si lo copiamos sin solapar resulta uno de cuatro dígitos (19 → 1991).

En definitiva, para cada número entre 1 y 99 hay dos formas de armar un capicúa (con o sin solapamiento). Entonces hay 198 capicúas.

|  |
| --- |
| **Idea:** Listar algunas de las cosas para contar y buscar algún patrón o clave útil. |

## 

## **Paciencia**

Por último pero no menos importante, hay que **hacer** la cuenta. Lo más importante es seguir la idea que teníamos prestando atención a todos los detalles o cálculos, y sobre todo, qué estamos contando en cada paso. Es común enfrascarse en las cuentas y olvidarse de qué se está contando. Este paso, bien hecho, puede salvarnos de errores de cuentas evitables.

**Ejemplo.** Se escribe el número que resulta de concatenar los números del 1 al 1000 en orden:

12345678910111213 … 9989991000

a) ¿Cuántos dígitos tiene el número escrito?

b) Hallar su milésimo dígito.

**Solución:** Contemos la cantidad total de dígitos que aportan los números dependiendo su cantidad de dígitos:

* Los números de 1 dígito son 9 y aportan 1 c/u: 9 en total.
* Los números de 2 dígitos son 90 y aportan 2 c/u: 180 en total.
* Los números de 3 dígitos son 900 y aportan 3 c/u: 2700 en total.
* Los números de 4 dígitos son 1, que aporta 4 en total.

En total hay 9 + 180 + 2700 + 1 = 2890 dígitos.

Para hallar el milésimo dígito, notemos que los números de 1 y 2 dígitos aportan 189 dígitos en total, mientras que los de 3 dígitos aportan más de 2000 a esa suma. Luego, tenemos que buscar en el rango de los números de 3 dígitos.

Como cada número aporta 3 dígitos, y nos faltan 811 para llegar a 1000, tenemos que avanzar 270,3333… números. ¿Cómo redondeamos? Es importante saber siempre qué contamos. Si redondeamos para abajo, estamos diciendo que 270 números aportan 810 dígitos. Así que el milésimo dígito es el primer dígito del siguiente número.

Los primeros 270 números de 3 dígitos son 100, 101, 102, …, 369. El siguiente es 370. Así que el milésimo dígito es 3. Fue pesada la cuenta, pero salió

En la solución usamos varias veces una cuenta confusa:

|  |
| --- |
| **Idea:** La cantidad de números entre a y b no es b – a, sino  b – a + 1. |

La forma que me resulta más cómoda de pensarla es que entre a + 1 y b sí hay b – a números, que son:

a + 1, a + 2, a + 3, …, a + (b – a) = b.

Y un último consejo más “mecánico”, y a veces tedioso:

|  |
| --- |
| **Idea:** Si una cuenta puede hacerse rápido, debemos estar dispuestos a hacerla. |

Vale la pena decirlo temprano: es mejor tener una solución “poco elegante” antes que no tener ninguna.

# **Estrategia del árbol**

Odiada por muchos y amada por muchos otros, es indiscutible que la **estrategia del** **árbol de posibilidades**es increíblemente útil para contar ordenadamente. La estrategia consiste en construir las posibilidades parte por parte y pensar que las posibilidades se *ramifican* en otras, y estas ramas se ramifican nuevamente, y así sucesivamente.

**Ejemplo.** Se tiene un tablero de 6 x 8 como en la imagen:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Se quiere ir de la casilla A a la casilla B haciendo 7 movimientos a casillas vecinas en dirección diagonal. ¿Cuántos caminos posibles hay?

**Solución:** Numeramos las casillas así:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 |  | 5 |  | 11 |  |  |
| A |  | 3 |  | 8 |  | 14 |  |
|  | 2 |  | 6 |  | 12 |  | B |
|  |  | 4 |  | 9 |  | 15 |  |
|  |  |  | 7 |  | 13 |  |  |
|  |  |  |  | 10 |  |  |  |

y vemos las posibles ramificaciones del camino en el siguiente diagrama:

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Contando las *hojas*, o extremos del árbol, vemos que en total hay 28 posibilidades.

Si bien no será la solución más elegante, es indiscutible que el diagrama de árbol cumple un rol importantísimo para ordenarse y contar en los ejemplos más rebuscados.

|  |
| --- |
| **Idea:** Buscar patrones que se repitan en el árbol de posibilidades. |

# **Primera tanda de problemas**

La primera tanda de problemas está compuesta principalmente de problemas de varias instancias de ñandú. Al final agrego problemas del primer nivel las primeras instancias de OMA para ir introduciendo a lector.

**1.** (nac-ñ-2022-n1-3) Pablo quiere escribir la lista de todos los números de 4 dígitos, tales que el último dígito es igual al promedio de los otros tres dígitos. ¿Cuántos números tiene que escribir? ¿Cuántos de estos números son impares?

**2.** (metro-2022-n1-3) En un tablero de 8 × 1 se quieren colocar 2 fichas rojas y 2 fichas azules, todas en casilleros diferentes y de manera que no haya fichas de distinto color en casilleros vecinos. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

**3.** (metro-2022-n1-6) Edu quiere pintar las casillas de un tablero de 4 x 4 de manera que en cada fila haya dos casillas rojas y dos casillas verdes, y en cada columna haya dos casillas rojas y dos casillas verdes. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

**4.** (inter-2020-n3-6) Se ordenan los números naturales formando un triángulo. El 1 en la primera fila, 2 y 3 en la segunda, 4, 5 y 6 en la tercera, 7, 8, 9 y 10 en la cuarta, y así siguiendo. Hallar el primero y el último número de la fila número 50.

**5.** (zonal-2016-n1-2) Un libro tiene 976 páginas numeradas desde el 1 hasta el 976. Determinar cuántas veces aparece escrito el dígito 7 en los números de las páginas del libro.

**6.** (zonal-2020-n1-2) Juan debe subir una escalera con 7 escalones. En un paso él puede subir 1, 2 o 3 escalones. Por ejemplo, podría subir 3 escalones, después 1, después 2 y finalmente 1. Determinar la cantidad de maneras diferentes en las que Juan puede subir la escalera.-

# 

# **2. Los** **problemas clásicos**

## **Regla del producto**

En el arte de contar existen los “problemas clásicos”, es decir, preguntas que aparecen frecuentemente a la hora de contar cosas que, en principio, podrían no tener nada que ver con estos “problemas clásicos”.

El ejemplo que sigue es típicamente conocido como la **regla del producto** en la combinatoria. Responde a la pregunta de “cómo se pueden combinar” las posibilidades de elegir *cosas independientes*. El ejemplo clásico: ¿de cuantas formas podemos vestirnos si tenemos 5 remeras, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas? Podemos resumir este problema en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se puede formar una lista de *r* números enteros, no necesariamente distintos, todos entre 1 y *n*?

**Solución:** El primer número de la lista tiene n posibilidades. Independientemente de cuál sea este primer número (pues no hay problema con las repeticiones), el segundo número va a tener las mismas n posibilidades. Así, en cada posición hay n posibilidades. Entonces hay

n × n × … × n = nr posibilidades.

Un caso más interesante es incluso cuando en cada posición de la lista hay una cantidad distinta de posibilidades. Por ejemplo, si el primer elemento tiene a posibilidades, el segundo b y el tercero c, en total hay

a × b × c posibilidades,

motivo por el cual se conoce por la regla del producto.

**Ejemplo.** ¿Cuántos números **impares** entre 1 y 1000 no contienen al dígito 1?

**Solución:** El número no puede ser 1000, así que tiene a lo sumo 3 dígitos. El primer dígito puede ser del 0 al 9, sin contar el 1, que son 9 posibilidades (si empieza tiene menos de tres dígitos); el segundo dígito puede ser del 0 al 9, sin contar el 1, que son 9 posibilidades, y el tercero puede ser 3, 5, 7 o 9, para que el número sea impar. En total, hay

9 x 9 x 4 = 324 posibilidades.

|  |
| --- |
| **¿Cuándo aplicar la regla del producto?**  Cuando hay que combinar cosas que son independientes entre sí; el ejemplo típico es combinar remeras y pantalones.  **No** se aplica si no todas las combinaciones son válidas, por ejemplo, si el color de la remera depende del del pantalón, para vestir de forma combinada, por ejemplo.  **No** se aplica para juntar cuentas de casos separados, en ese caso se **suman** las posibilidades. |

La regla del producto puede mostrarse con la estrategia del árbol:

## **Variaciones y permutaciones**

Ahora empezamos con los problemas combinatorios más interesantes. Supongamos que ahora queremos saber cuántas formas tenemos de elegir una de nuestras 5 remeras para cada uno de los 5 días de la semana: eso sí, no queremos repetir (por higiene).

Las **variaciones** de un conjunto son las formas de formar una lista *ordenada* con *algunos* de sus elementos, sin repetir. Si se usan todos los elementos, tenemos una **permutación**. La dificultad en contar variaciones está en que ahora las elecciones no son independientes, sino que cada una depende de la anterior.

[IMAGEN DE VARIACIONES y PERMUTACIONES]

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se puede formar una lista de r números enteros, sin repetir, todos entre 1 y *n*? (Es decir, ¿cuántas variaciones de *r* de los números entre 1 y *n* hay?)

**Solución:** El primer número de la lista tiene n posibilidades. Entonces, cualquiera haya sido el primero el segundo número va a tener *n* – 1 posibilidades (todas salvo el ya usado). Luego, el tercero tendrá *n* – 2 posibilidades (todas salvo los dos ya usados). Así, en las sucesivas posiciones habrá *n* – 3, *n* – 4, … hasta *n* – *r* + 1 posibilidades para la última posición (todos salvo los *r* – 1 ya usados). Luego en total hay:

*n* × (*n* – 1) × (*n* – 2) × … × (*n* – *r* + 1) = *nVr*.

El símbolo de la derecha se lee **“*n* *permutados* de a *r*”**. A diferencia del caso anterior, no existe una fórmula “fácil” para la multiplicación de la izquierda, por lo que se tiene que recurrir a un símbolo pensado específicamente para expresarla.

Para que este símbolo tenga sentido, debemos tener n ≥ r, puesto que si no, ¿cómo hacemos una lista sin repeticiones con más números de los que tenemos disponibles? El caso más interesante es el de n = r, en el que la cuenta da:

*n* × (*n* – 1) × (*n* – 2) × … × 1 = *n*!

Donde “*n*!” se lee **“*n* factorial”**, y equivale al producto de los números del 1 al *n*. Combinatoriamente, un número factorial cuenta la cantidad de permutaciones de un conjunto con esa cantidad de elementos. Usando esta notación, también se cumple que:

*nVr* = *n*! / (*n* – *r*)!

Si el lector duda de esta afirmación, puede intentar llevar a cabo la división para comprobar que se llega a la multiplicación que obtuvimos al principio. De ahora en más, usaremos la expresión en el lado derecho de la igualdad, pues es lo más frecuente.

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez de 8 × 8 de forma tal que no se ataquen entre sí?

[EJ DE TORRES]

**Solución:** Como las torres no pueden compartir fila, debe haber una torre por fila. Más aún, las torres de cada fila deben estar en columnas distintas. Para elegir la columna en la que colocar la torre de la primera fila tenemos 8 opciones, la de la segunda, tenemos 7 opciones (todas salvo la ya usada). En total, hay

8! = 8 × 7 × … × 2 × 1 = 40.320 posibilidades.-

## 

## **Combinaciones**

Supongamos ahora que vamos a un viaje de 3 días y tenemos que elegir qué remeras llevarnos. Sabemos cuántas formas hay de planificar cuál usamos para día, pero eso ya no nos importa: queremos saber cuántas formas hay de elegir 3, no importa cuál usamos qué día.

Las **combinaciones** de un conjunto de elementos son las formas de elegir algunos de sus elementos, sin importar el orden en qué se elijan. La nueva dificultad para contar combinaciones es lograr no contar como distintas dos elecciones de los mismos elementos en otro orden. Y esto no es menor: el problema capital de la combinatoria consiste en *cómo evitar contar cosas repetidas*. Por suerte, hay una forma muy elegante de evitarlo en este caso.

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se pueden elegir *r* números enteros, sin repetir y sin importar el orden, entre 1 y *n*? (Es decir, ¿cuántas combinaciones de *r* de los números entre 1 y *n* hay?)

**Solución:** Vamos a aplicar el concepto de permutaciones. Sabemos que hay *n*! / (*n* – *r*)! posibles permutaciones de *r* de los *n* números. Si bien esto nos permite “elegir” los *r* números, como en las combinaciones no nos importa el orden, esto implica estar contando muchas veces los mismos números solo que en distinto orden.

¿De cuántas formas contamos, por ejemplo, los números 1, 2, …, *r*? Vamos a contar una por cada posible forma de ordenarlos. Pero esta última cantidad son las permutaciones de *r*, es decir, *r*! (*r* factorial). Si en la cuenta *n*! / (*n* – *r*)! cada combinación se repite *r*! veces, entonces la cantidad de combinaciones es

(*n* × … × (*n* – *r* + 1)) / (*r* × … × 1) = *nCr* = *n*! / (*n* – *r*)! *r*!

Las dos expresiones de la derecha son dos abreviaciones distintas de la cantidad de combinaciones de r números de un total de *n*, y se leen **“*n* *tomados* de a *r*”**. En este caso, resulta mucho más preocupante que la respuesta termine siendo un número entero o no (lo es), y el hecho de que siempre lo sea es una curiosidad aritmética bastante menos obvia que en el caso anterior. Por ahora, puede tranquilizar ver algunos ejemplos de **números combinatorios** en acción:

(3 2) = 3! / 1! 2! = 3

(5 3) = 5! / 2! 3! = 10

(10 4) = 10! / 4! 6! = 210

El lector podría confirmar manualmente que los primeros dos combinatorios cumplen su función. En cambio, ya si el tercero quisiera contarse a mano, llevaría un poco más de trabajo…

|  |
| --- |
| Los números combinatorios son muy especiales (no por nada reciben un nombre propio) y aparecen frecuentemente en combinatoria y en otras áreas, como por ejemplo, teoría de números. |

**Ejemplo.** -

## **Conjunto de partes**

Supongamos ahora que, además de la ropa, queremos llevarnos al viaje también algunos de los 5 libros que tenemos, pero, no nos interesa llevarnos uno por día. Es más, no nos interesa cuántos nos llevamos, incluso aceptaríamos llevarnos los 5 o ninguno. ¿Cómo podemos contarlos ahora? ¿Será otro tipo de números nuevos?

El **conjunto de partes** de un conjunto son todas las formas de elegir algunos de esos elementos, incluyendo elegir ninguno y elegir todos.

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas podemos elegir algunos de los números enteros entre 1 y *n* (se cuenta no elegir ninguno o elegir todos)?

**Solución:** Cada entero positivo, independientemente, puede elegirse o no. Dependiendo de si son elegidos o no, podemos formar una lista de 0 y 1 donde un 0 en la posición k representa que el k no fue elegido y un 1 representa que sí fue elegido. Luego, contamos la cantidad de variaciones de n elementos de dos tipos, que son 2n.

Lo que vimos en este ejemplo es que el tamaño del conjunto de partes es 2*n*, donde *n* es el tamaño del conjunto original. Inesperado, ¿no?

Uno podría haber abordado este ejemplo contando las elecciones, separando en cuántos de los n números enteros se eligen, arribando a la expresión:

(*n* 0) + (*n* 1) + (*n* 2) + … + (*n* *n*)

El simple hecho de que contar dos veces lo mismo tiene que dar el mismo resultado, es una demostración de la curiosa identidad “combinatoria”:

(*n* 0) + (*n* 1) + (*n* 2) + … + (*n* *n*) = 2*n*.

Puede comprobarse que esta identidad vale, por ejemplo para *n* = 5, calculando manualmente:

1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 25.

**Ejercicio.** ¿Y si no quisiéramos considerar los casos donde la elección es vacía o de todo el conjunto?

**Ejercicio.** Tenemos 10 libros y queremos llevar al menos 2 de ellos. ¿De cuántas formas podemos elegirlos?-**Anagramas de una palabra**

El último problema clásico que analizaremos es tal vez el menos frecuente, pero nos va a dar una forma de pensar los problemas que vimos antes. Supongamos que queremos contar la cantidad de **anagramas** de una palabra, es decir, la cantidad de palabras *distintas* que se pueden formar reordenando sus letras. Si las letras son todas distintas, esto coincide con la cantidad de permutaciones.

Pero ¿y si hay letras repetidas, como en ELEMENTOS? ¿Y si hay más de una letra que se repite, y en diferentes cantidades, como BIBLIOTECARIA? ¿Cómo podemos abordar estos casos?

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas podemos escribir una lista con a números 1 y b números 2? ¿Y si además hay c números 3?

**Solución 1:** Si los 1 y 2 son considerados como a + b entidades distintas, hay (a + b)! órdenes posibles. Sin embargo, esta cuenta repite cada lista posible unas a! b! veces. Entonces, la cantidad de listas posibles es:

(*a* + *b*)! / *a*! *b*! = (*a*+*b* *b*)

Para la segunda pregunta, tenemos (*a* + *b* + *c*)! / *a*! *b*! *c*!.

**Solución 2:** Como la lista tiene *a* + *b* posiciones en total, basta con contar la cantidad de formas de elegir las *a* posiciones donde va a ir un 1, y las *b* restantes se rellenan con 2. Elegir *a* de un total de *a* + *b* posiciones puede hacerse de (*a*+*b* *a*) formas.

Para la segunda pregunta, primero elegimos las *a* posiciones donde va un 1, para cada elección las *b* posiciones (de las *b* + *c* restantes) donde va un 2 y quedan determinadas las *c* donde va un 3. En total hay:

*(a+b+c a) × (b+c b) = (a+b+c)! / a! b! c!*

**Ejercicio.** Calcular cuántos anagramas tienen las palabras:

1. MURCIÉLAGO
2. BIBLIOTECARIA
3. ELEMENTOS

-

## **¿Cómo recordar las fórmulas?**

Si las secciones anteriores aún no quedaron claras, recomiendo fuertemente leerlas una o dos veces más para acostumbrarse a los conceptos, incluso en días distintos. Las dos ideas clave son:

|  |
| --- |
| **Idea:** La cantidad de formas de reordenar los elementos de una lista de n elementos es n! (n factorial). |

|  |
| --- |
| **Idea:** Para no contar casos repetidos, podemos dividir por cuántas veces se repite cada posibilidad. |

Sabiendo contar permutaciones con repeticiones, automáticamente tenemos una línea de pensamiento que nos permite reconstruir rápidamente las fórmulas para muchos de los problemas clásicos que vimos hasta ahora:

Las **permutaciones** son anagramas de n letras distintas, por lo que hay n! (n factorial).

Las **variaciones** son permutaciones donde no nos importa el orden de los elementos que no elegimos, por eso dividimos por (*n* – *r*)!

[IMAGEN]

Por eso *nVr* = *n*! / (*n* – *r*)!.

Las **combinaciones** son como las variaciones pero tampoco importa el orden de los que sí elegimos, así que dividimos tanto por (*n* – *r*)! como por *r*!

[IMAGEN]

Por eso *nCr* = *n*! / *r*! (*n* – *r*)!

Los **anagramas** son permutaciones donde no nos importa el orden de las letras iguales. En este caso, calculamos *n*! y dividimos por cada grupo de letras iguales.

[IMAGEN]

## **Para calentar los motores**

El objetivo de los siguientes problemas es encontrar los problemas que están ocultos en cada uno de los siguientes problemas. Si es posible, se aconseja al lector generalizar los problemas para números aún más grandes, o incluso, si es posible, remplazando las constantes por variables.

**Problema 1.** ¿De cuántas formas se pueden elegir cinco números entre 1 y 20 de forma que cualesquiera dos números elegidos difieran en al menos 2?

**Problema 2.** Una torre empieza en la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez. La torre debe llegar a la casilla superior derecha haciendo solo movimientos hacia arriba o hacia la derecha. ¿Cuántos caminos posibles tiene la torre?

**Problema 3.** a) Ana, Beto y Carlos tienen 25 caramelos para repartirse. Los caramelos son idénticos, por lo que solo importa la cantidad de caramelos que recibe cada uno. Ana y Beto quieren recibir al menos un caramelo cada uno. Determinar de cuántas formas se pueden repartir los caramelos.

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

*a + b + c + d* = 100

donde *a*, *b*, *c* y *d* son enteros positivos?

**Solución al problema 1:** A cada número, salvo el último, lo combinamos con el número siguiente. De esta forma, como los números no son consecutivos, nunca combinamos dos números elegidos. Entonces, quedó una elección de 5 números de un total de 16.

Además, para cada elección de 5 números de los 16, separamos cada uno de los primeros cuatro números elegidos en dos números distintos consecutivos, y tenemos una elección de 5 números de un total de 20 sin dos consecutivos.

Por ejemplo:

[IMAGEN]

Entonces, resulta que la cantidad de elecciones del problema es:

(16 5) = 4.368

**Solución al problema 2:** Dividamos al camino en movimientos hacia arriba o hacia la derecha de una sola casilla. En total, el camino tendrá 8 movimientos hacia arriba y 8 movimientos hacia la derecha.

[IMAGEN]

Como los movimientos pueden ser en cualquier orden, la cantidad de reordenamientos distintos de los caminos está dado por

16! / (8!)2 = 12.870

**Solución al problema 3:** a) Separamos dos caramelos, uno para Ana y otro para Beto. Luego, de los 23 caramelos restantes, cada uno puede recibir cualquier cantidad entre 0 y los 23 posibles.

Ubicamos los 23 caramelos en una fila junto con dos “separadores”. En total, hay 25 objetos para reordenar en una fila.

[IMAGEN]

Sin importar el reordenamiento, los separadores dividen a los caramelos en 3 grupos, el primero para Ana, el segundo para Beto, y el tercero para Carlos. En total, hay

25 × 24 / 2 = 300 posibilidades.

b) Con la misma idea, resultan (103 3) = 176.851 posibilidades.-

## **(Opcional) Problemas con dígitos**

Antes de la siguiente tanda de problemas, vale la pena nota que existen muchos problemas de combinatoria que piden hallar la cantidad de números que existen con determinadas condiciones sobre los dígitos. Sobre estos problemas, las mismas técnicas que vinimos desarrollando funcionan (de hecho, vimos varios ejemplos). Apliquemos entonces estas técnicas a algunos problemas de este tipo:

**1.** (zonal-2019-n1-2) Bruno escribió la lista de todos los números enteros positivos de cuatro dígitos tales que al multiplicar sus cuatro dígitos el resultado es igual a 48. Determinar cuántos números tiene la lista de Bruno.

*ACLARACIÓN:* Los números pueden tener dígitos repetidos. Por ejemplo, 1434 está en la lista porque 1 ⋅ 4 ⋅ 3 ⋅ 4 = 48.

**2.** (zonal-2015-n1-2) Un número se dice *interesante* si todo par de dígitos consecutivos es un múltiplo de 19 o es un múltiplo de 21. Por ejemplo, el número 3842 es interesante, porque 38 = 2 ⋅ 19, 84 = 4 ⋅ 21 y 42 = 2 ⋅ 21. Hallar todos los números interesantes de 10 dígitos.

**3.** (zonal-2020-n2-1) Se escribieron en un pizarrón todos los números de tres dígitos que decrecen de izquierda a derecha. Por ejemplo, 421 y 970 están escritos, pero 733 y 994 no. Determinar la cantidad de números escritos. ¿Y si los números son de 4 dígitos?

**4.** (zonal-2022-n2-1) Calcular cuántos números enteros positivos satisfacen simultáneamente que:

* la suma de sus dígitos es igual a 10,
* no tienen dígitos iguales a 0 y
* no tienen dígitos repetidos.

**5.** (zonal-2021-n2-1) Mi computadora hizo la lista de todos los números de 4 dígitos que tienen exactamente dos dígitos iguales y que además tienen el primer dígito de la izquierda igual a 7. Determinar cuántos números hay en esta lista.

**6.** (zonal-2018-n2-1) Diremos que un número entero positivo es alternado si sus dígitos se alternan entre pares e impares. Por ejemplo, 5838 y 2109 son alternados y 2134 no lo es. Hallar la cantidad de números alternados de 4 dígitos tales que al multiplicarlos por 2 el resultado es también un número alternado de 4 dígitos.

*NOTA:* Un número alternado puede tener dígitos repetidos.

**7.** (mayo-2022-n1-2) Con seis de los nueve dígitos del 1 al 9 se escribe la lista, ordenada de menor a mayor, de todos los números de tres dígitos distintos que se pueden formar usando los dígitos elegidos. El número 317 aparece en la posición 22. ¿Qué número aparece en la posición 84?-

## **(Opcional) Triángulo de Pascal**

El triángulo de Pascal es un arreglo “triangular” (tiene forma de triángulo pero se puede extender infinitamente hacia abajo) de números que se puede construir de la siguiente forma: En los lados izquierdo y derecho colocamos solo 1, luego, en cada entrada, escribimos la suma de los dos números que están arriba de ella; así:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Las propiedades de este triángulo son muchísimas y están estrechamente relacionadas a los números combinatóricos y las propiedades vistas hasta ahora.

**Proposición.** La k-ésima entrada de la n-esima fila (k está entre 0 y n) es el número (n k).

**Demostración:** …

Sigue una lista de propiedades que el lector interesado podrá intentar demostrar utilizando combinatoria:

**1.** El triángulo es simétrico con respecto a una recta vertical central.

**2.** La suma de los números en la n-ésima fila es 2n.

**3.** …-

# **Segunda tanda de problemas**

Ahora sí, es momento de la segunda tanda de problemas, y adentraremos en los problemas de combinatoria de las siguientes instancias de la OMA.

**1.** (zonal-2020-n2-2) Diego tiene 4 fichas blancas y 8 fichas negras y quiere ubicarlas en una fila de modo que siempre cada ficha blanca tenga inmediatamente a su derecha una ficha negra. Determinar de cuántas maneras puede hacerlo.

**2.** (zonal-2018-n1-1) Bruno debe elegir tres números distintos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que la suma de los tres elegidos sea un número par. Determinar de cuántas maneras puede hacer su elección.

**3.** (regio-2021-n2-3) Se tiene un cuadrado de 11 × 11 cuadriculado en cuadraditos de 1 × 1. Determinar de cuántas maneras se puede dividir en cinco rectángulos, siguiendo las líneas del cuadriculado, con la condición de que exactamente uno de los rectángulos no tenga ningún lado que sea parte del borde del cuadrado de 11 × 11 (y los cinco rectángulos cubran totalmente el cuadrado).

**4.** (metro-2016-n1-2) Sea S = {1, 2, 3, 4, 5}. Ana elige algunos números de S; Beto también elige algunos números de S. Decimos que Ana y Beto hacen una elección feliz si han elegido exactamente un número en común. Calcular cuántas elecciones felices pueden hacer Ana y Beto.

**5.** (regio-1998-n2-3) Utilizando exclusivamente las letras A y B se escriben palabras de 15 letras tales que en cada palabra figuren exactamente cinco veces el grupo AA, y exactamente tres veces cada uno de los grupos AB, BA y BB. Por ejemplo, una de estas palabras es AAAABABBAAABBBA. ¿Cuántas palabras distintas se pueden escribir?

**6.** (selimo-2021-4) Un *patrón en cruz* es una distribución de los nueve dígitos 1, 2, …, 9 formando una X como en el siguiente ejemplo:

1 8

3 6

5

4 7

2 9

Diremos que un patrón en cruz es balanceado si las sumas de los cinco números de cada diagonal son iguales. Nuestro ejemplo es balanceado porque 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 5 + 6 + 8. Calcular cuántos patrones en cruz son balanceados.

**7.** ¿De cuántas maneras pueden ubicarse en fila 7 hombres y 9 mujeres, todos de alturas diferentes, de modo que los hombres entre sí y las mujeres entre sí se encuentren ordenados de forma creciente de altura?

**8.** Una araña usa una media y una zapatilla en cada uno de sus pies. Para vestirse, la araña se coloca una media o zapatilla por vez, y en cada pie se coloca la media antes de la zapatilla. ¿En cuántos órdenes distintos puede vestirse la araña?

**9.** En un torneo de ping-pong juegan 5 jugadores que inicialmente están ubicados en una hilera. El jugador #5 juega contra el #4 y el perdedor recibe el 5to puesto. El ganador del partido anterior juega contra el #3 y el perdedor de este partido recibe el 4to puesto. El ganador juega contra el #2 y el que pierde recibe el 3er puesto. Por último, juegan el ganador del partido anterior y el #1, el que pierde recibe el 2do puesto y el ganador recibe el 1er puesto. ¿De cuántas formas diferentes pueden recibir los premios los jugadores de #1 al #5?

**10.** En el juego de SET hay una carta para cada combinación de cuatro características: forma (que puede ser cuadrado, triángulo o círculo), color (rojo, verde o azul), número (uno, dos o tres y relleno (sólido, rayado, punteado).

Decimos que tres cartas forman un SET si, para cada una de las cuatro características, las tres cartas o bien comparten dicha característica (por ejemplo, son todos cuadrados) o bien difieren dos a dos en dicha característica (por ejemplo, son cuadrado, triángulo y círculo). Determinar cuántos tríos de cartas forman un SET. Determinar cuántos tríos de cartas forman un SET.

**11.** (Cantidad de divisores) Sea n un número entero positivo. Escribimos su factorización en primos

n = p1a1 p2a2 … pnan

¿Cuántos divisores tiene N, en términos de su factorización?

# **3. Algunos trucos**

# **Biyecciones** y cómo relacionar problemas

Muchas veces ocurre que encontrar una estrategia combinatoria como las de la sección anterior es muy difícil, debido a que la relación entre las distintas posibilidades es mucho menos libre. Para esos casos quedan aún varios trucos posibles. Empezaremos por ver el de **biyección**.

# Fibonacci y **recursiones**

Supongamos que un problema puede variar de “tamaño” y queremos resolver el de tamaño 100. Si lográramos resolver un caso más pequeño, o incluso reducir el problema de tamaño 100 a uno análogo pero de tamaño uno menor, es posible que en el fondo podamos hallar una fórmula recursiva que relacione la cantidad de posibilidades de un tamaño con el de los tamaños más chicos.

**Ejemplo.** Se quiere cubrir un tablero de 2 × 100 con dominós sin huecos ni superposiciones. ¿De cuántas formas puede hacerse?

**Solución:**

# **Incluir y excluir**

El **principio de** **inclusión-exclusión** brinda una fórmula para contar la cantidad de elementos que cumplen alguna de una lista de condiciones que proporcionemos. El caso más fácil es el de dos condiciones:

**Ejemplo 1.** ¿Cuántos números entre 1 y 1000 no son múltiplos ni de 2 ni de 3?

**Solución:** Entre 1 y 1000 hay 1000 números, de los cuales 500 son pares y 333 múltiplos de 3. Sin embargo, 1000 – 500 – 333 = 167 no es la respuesta al ejemplo, pues resta dos veces los múltiplos de 6. Como hay 166 múltiplos de 6, los volvemos a sumar. Ahora, cada número múltiplo de 2 o 3 fue restado exactamente una vez. La cantidad total de esos números es:

1000 – 500 – 333 + 166 = 333.

|  |
| --- |
| **Principio de inclusión-exclusión:** Si *A* y *B* son dos condiciones, entonces:  #(*A* o *B*) = #*A* + #*B* - #(*A* y *B*).  Donde # *P* es la cantidad de elementos que satisfacen la condición *P*. |

**Ejemplo 2.** ¿Cuántos números de 100 dígitos cumplen que no contienen los dígitos 0, 1 y 2, pero sí los dígitos 3, 4 y 5?

**Solución:** Hay 7100 números que solo usan dígitos del 3 al 9. Tenemos que restar los que no usan o el 3, los que no usan el 4 y los que no usan el 5.Exactamente 6100 números de esos no usan el 3, 6100 no usan el 4 y 6100 no usan el 5. Sin embargo, hay algunos que no usan ni el 3 ni el 4 que están siendo contados en dos de las cuentas. Hay 5100 de los números que no usan ni el 3 ni el 4, 5100 no usan ni el 3 ni el 5 y 5100 no usan ni el 4 ni el 5. Lamentablemente, los que no usan ninguno de los tres dígitos están siendo contados por triple. Por suerte, sabemos 4100 números no usan ningún dígito del 0 al 5.

Entonces, sabemos que la cantidad de números que no usan solo dos de 3, 4 y 5 es 3 × 5100 – 2 × 4100.

# **Repeticiones, otra vez**

**Problema.** ¿De cuántas formas se puede pintar un collar de 5 perlas con 4 colores?

**Problema.** Se quiere pintar un tablero de 7 x 7 de verde y amarillo de forma tal que dos casillas sean verdes y el resto amarillas. Dos coloraciones son equivalentes si pueden obtenerse a partir de reflejar o rotar el tablero ¿Cuántas coloraciones no equivalentes existen?

# **Los mil y un catalanes**

# **Tercera tanda de problemas**

Si llegaste hasta acá, ¡felicitaciones! En esta tanda están los problemas más difíciles de contar posibilidades.

**1.** Sea n un entero positivo. Hallar la cantidad de tuplas x1, ..., xm de enteros mayores o iguales que 2 tales que x1 + ... + xm = n.

**2.** ¿De cuántas formas se puede triangular un polígono regular de n lados?

**3.** En una recta se marcan 2n puntos. ¿De cuántas formas distintas se pueden dibujar n arcos, cada uno entre dos puntos distintos, en un mismo semiplano con respecto a la recta, de forma tal que los arcos no se corten?

**4.** (Desarreglos) ¿Cuántas permutaciones de los números del 1, 2, 3, … n hay de forma tal que ningún número esté en la posición que le corresponde?

**5.** Dar una demostración combinatoria del Pequeño Teorema de Fermat: para todo a entero y p primo, ap – a es múltiplo de p.

**6.** Demostrar una demostración combinatoria del Teorema de Wilson: para todo p primo, (p-1)! + 1 es múltiplo de p.

**7.** Dar una demostración combinatoria de la siguiente identidad:

(n 0) + (n-1 1) + (n-2 2) + … + (⌈n/2⌉, ⌊n/2⌋) = Fn+1 – 1-