GEOMETRÍA GENERAL

APRENDIENDO A VER

# Introducción

La geometría es el arte de las figuras. Como tal, la geometría tiene un gran componente de intuición visual, es decir, capacidad de *ver*, o mejor dicho, *entender visualmente*. Así, aprender geometría podría considerarse como “aprender a ver”, solo que, en vez de ver de aprender a ver con los dos ojos que ya sabemos usar, aprendemos a ver con el “ojo de la mente”. El propósito de este apunte es entrenar este olvidado “ojo” que, de otra forma, muy infrecuentemente nos animamos a utilizar.

Dentro de la geometría más básica se encuentran los problemas de *medición*, es decir, problemas que preguntan por la longitud de un segmento, la superficie de una figura, o la amplitud de un ángulo.

# Geometría como razonamiento

# Estructura de este apunte

A quien lea esto como práctica para las Olimpiadas de Matemática, le resultará extraño el comienzo

Tabla de contenidos

[GEOMETRÍA GENERAL 1](#_heading=h.gjdgxs)

[Introducción 1](#_heading=h.30j0zll)

[Tabla de contenidos 2](#_heading=h.1fob9te)

[Capítulo 0: Rudimentos 5](#_heading=h.3znysh7)

[Triángulos 5](#_heading=h.2et92p0)

[Cuadriláteros 6](#_heading=h.3dy6vkm)

[*(Opcional) Más figuras* 7](#_heading=h.4d34og8)

[*(Opcional) Problemas iniciales* 8](#_heading=h.17dp8vu)

[Misceláneos 9](#_heading=h.kgcv8k)

[Preludio: Fundamentos 10](#_heading=h.3rdcrjn)

[Capítulo 1: Medidas 11](#_heading=h.26in1rg)

[Longitudes 11](#_heading=h.lnxbz9)

[Perímetro 12](#_heading=h.35nkun2)

[Problemas para esta sección 12](#_heading=h.1ksv4uv)

[Áreas 13](#_heading=h.2jxsxqh)

[Base y altura 13](#_heading=h.z337ya)

[Otros casos 14](#_heading=h.3j2qqm3)

[Área del rombo 14](#_heading=h.1y810tw)

[Área del paralelogramo 15](#_heading=h.4i7ojhp)

[Área del trapecio 15](#_heading=h.2xcytpi)

[Área del cuadrilátero 15](#_heading=h.1ci93xb)

[Problemas para esta sección 15](#_heading=h.3whwml4)

[Ángulos 17](#_heading=h.qsh70q)

[Paralelas 17](#_heading=h.3as4poj)

[Problemas para esta sección 18](#_heading=h.1pxezwc)

[Teorema de Pitágoras 20](#_heading=h.49x2ik5)

[Medio-cuadrado y medio-equilátero 20](#_heading=h.2p2csry)

[Problemas para esta sección 21](#_heading=h.147n2zr)

[*(Opcional) Anexo: Ecuaciones* 23](#_heading=h.23ckvvd)

[Problemas para este capítulo 24](#_heading=h.32hioqz)

[Regional 24](#_heading=h.34g0dwd)

[Provincial 24](#_heading=h.1hmsyys)

[Nacional 24](#_heading=h.41mghml)

[Capítulo 2: Triángulos 25](#_heading=h.2grqrue)

[Congruencia 25](#_heading=h.vx1227)

[Criterios de congruencia 25](#_heading=h.3fwokq0)

[Paralelogramos 25](#_heading=h.1v1yuxt)

[Otras figuras 26](#_heading=h.1jlao46)

[Semejanza 27](#_heading=h.2u6wntf)

[Criterios de semejanza 27](#_heading=h.19c6y18)

[(Primer) Teorema de Thales 27](#_heading=h.3tbugp1)

[*(Opcional) Teorema de la bisectriz* 27](#_heading=h.28h4qwu)

[Bases medias 28](#_heading=h.nmf14n)

[*(Opcional) Cuchilla* 28](#_heading=h.37m2jsg)

[Isósceles 29](#_heading=h.43ky6rz)

[Equiláteros 30](#_heading=h.2iq8gzs)

[Problemas para este capítulo 31](#_heading=h.1mrcu09)

[Regional 31](#_heading=h.46r0co2)

[Provincial 31](#_heading=h.2lwamvv)

[Nacional 31](#_heading=h.111kx3o)

[Capítulo 3: Circunferencias 32](#_heading=h.3l18frh)

[Radios y diámetros 32](#_heading=h.206ipza)

[*(Segundo) Teorema de Thales* 32](#_heading=h.4k668n3)

[*(Opcional) Problemas previos a la teoría* 33](#_heading=h.xvir7l)

[Arco capaz 34](#_heading=h.1egqt2p)

[Cíclicos 35](#_heading=h.3hv69ve)

[Interludio: Regla y compás 36](#_heading=h.2dlolyb)

[Primeros pasos 36](#_heading=h.sqyw64)

[El límite de lo construible 36](#_heading=h.3cqmetx)

[Capítulo 4: Centros 37](#_heading=h.1rvwp1q)

[Circuncentro 37](#_heading=h.4bvk7pj)

[Incentro 37](#_heading=h.2r0uhxc)

[Baricentro 37](#_heading=h.1664s55)

[Ortocentro 37](#_heading=h.3q5sasy)

[Problemas para este capítulo 38](#_heading=h.25b2l0r)

PARTE I

FIGURAS Y PROPIEDADES

Capítulo 0: Rudimentos

Si la geometría es el arte de las figuras, el primer paso para entender la geometría es entender las figuras. En la primaria nos enseñan las figuras básicas: triángulos, cuadriláteros, y las propiedades que estas cumplen. En los problemas de geometría, muchas veces es necesario conocer todas estas propiedades para vincular distintas medidas entre sí. Por ejemplo, un triángulo equilátero puede darnos información sobre la longitud de un lado, o la medida de un ángulo, etc.

Este capítulo tiene como objetivo repasar las figuras geométricas más básicas que se estudian en el colegio y listar sus propiedades. A saber, veremos los tres tipos de triángulos, tipos de cuadriláteros y figuras de orden superior.

# Puntos, segmentos y rectas

# Triángulos

Es posible afirmar que, después de los puntos y los segmentos, la figura más simple y que más abunda en geometría son los triángulos. De hecho, la geometría de los triángulos es muchas veces considerada un área particular de la geometría.

**Definición.** Un **triángulo** es una figura compuesta por tres *vértices* conectados por tres *lados*, que forman *tres* ángulos.

[FIGURA]

En general, un triángulo no tiene ningún tipo de estructura: cualesquiera tres puntos dibujados forman un triángulo; sin embargo, agregando más condiciones se consiguen tipos especiales de triángulos:

**Definición.** Un triángulo es:

* **equilátero** si tiene sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales
* **isósceles** si tiene dos de sus lados iguales y dos de sus ángulos iguales
* **escaleno** si ninguna de las dos condiciones anteriores se cumple.

[FIGURA]

Lo interesante de estas definiciones es lo siguiente: Supongamos que solo sabemos de un triángulo que tiene sus tres lados iguales. Entonces, podemos asegurar que el triángulo también tiene sus tres ángulos iguales. Es decir, basta con tener tres lados iguales para que sea equilátero. Similarmente, si un triángulo tiene solo tres ángulos iguales, también es equilátero. Es decir, el siguiente es un **razonamiento válido** sobre un triángulo:

tiene sus tres lados iguales ⟹ tiene sus tres ángulos iguales

Otra afirmación muy interesante es que, si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces podemos asegurar que los dos ángulos opuestos a esos ángulos también son iguales.[[1]](#footnote-0) En este caso el razonamiento válido sería:

tiene dos lados iguales ⟹ los dos ángulos opuestos son iguales

El estudio de estos razonamientos válidos va a ser el núcleo de todo este apunte.

# Cuadriláteros

Siguiendo la forma de los triángulos, que tienen tres lados, existen más tipos de figuras que tienen cuatro lados, pero cuya clasificación es mucho más amplia y variada que la de los triángulos. Vamos a ver dos de estos tipos de figuras.

**Definición.** Un **rectángulo** es una figura compuesta por cuatro *vértices* conectados por cuatro *lados*, que forman cuatro *ángulos rectos*, es decir, que miden 90°.

[FIGURA]

Los rectángulos cumplen varias propiedades interesantes, a saber, sus pares de lados opuestos son iguales y sus dos *diagonales* miden lo mismo.

Existe un tipo de rectángulo aún más específico y lleno de propiedades, que todos conocemos bien:

**Definición.** Un **cuadrado** es un rectángulo cuyos cuatro lados miden lo mismo.

[FIGURA]

Es decir, los cuadrados son un tipo específico de rectángulos, que además de tener dos pares de lados iguales, tienen estos pares iguales entre sí. Una de sus propiedades es que sus diagonales son *perpendiculares*, es decir, forman un ángulo de 90° entre sí.

**Definición.** Un **cuadrilátero** es cualquier figura compuesta por cuatro *vértices* conectados por cuatro *lados*, que forman cuatro *ángulos*.

[FIGURA]

Es decir, tanto los rectángulos como los cuadrados son tipos particulares de cuadriláteros, que son la versión de los triángulos pero con cuatro lados en vez de tres.

Los segmentos que unen los dos pares de vértices opuestos de un cuadrilátero se llaman sus **diagonales**.

**Definición.** Existen otros tipos particulares de cuadriláteros:

1. Un **rombo** es un cuadrilátero con sus cuatro lados iguales.
2. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son paralelos.
3. Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos.

[FIGURA]

# *(Opcional) Más figuras*

Cuando ya sabemos que los triángulos y cuadriláteros son las figuras generales con 3 y 4 lados, es tentador ir un poco más allá y hablar de figuras con cualquier cantidad de lados.

**Definición.** Un **polígono de n lados**, también llamado **n-ágono**,es cualquier figura compuesta por n vértices conectados por n lados, que forman n ángulos.

[FIGURA]

Así, los triángulos son los polígonos de 3 lados, los cuadriláteros son los de 4 lados, los pentágonos y hexágonos son los 5 y 6 lados, y así siguiendo.

**Definición.** Un **cubo** es una figura *tridimensional* compuesta por 8 *vértices* unidos por 12 *aristas* que forman 6 *caras cuadradas*. Como las 6 caras son cuadradas, un cubo tiene 12 aristas iguales y perpendiculares entre sí.

[FIGURA]

Un cubo puede pensarse como la generalización tridimensional del cuadrado, conservando el hecho de que sus lados son iguales y perpendiculares.

# *(Opcional) Propiedades de las figuras*

Desde mi perspectiva, toda la geometría consiste en el descubrimiento de porciones o partes de figuras geométricas dentro de otras figuras más complejas. Por ejemplo, encontrar un triángulo isósceles dentro de la figura de un problema puede darnos datos sobre los lados o ángulos de la figura.

Para poder aprovecharlas, es conveniente conocer las propiedades de las figuras que pueden aparecer dentro de un problema. Pero muchas veces, no solo basta con conocer las propiedades que una figura *necesita* cumplir, sino qué propiedades son *suficientes* para que una figura sea de una clase en particular.

Ejemplifiquemos esta última idea. En un cuadrado, los cuatro lados son iguales: es una propiedad *necesaria* de los cuadrados. Sin embargo, esta propiedad no es *suficiente* para hallar un cuadrado. Si un cuadrilátero tiene cuatro lados iguales, puede ser un cuadrado, pero tranquilamente puede no ser un cuadrado, de hecho, una figura con esta propiedad se llama rombo:

[FIGURA]

Este ejemplo muestra un tipo particular de *razonamiento incorrecto*, y muchas veces, en apariciones más sutiles, es difícil de detectar y puede llevarnos a cometer errores indeseados.

Pero ¿bajo qué propiedades podemos hallar un cuadrado? Por ejemplo, si sabemos que los cuatro ángulos y los cuatro lados son iguales (de hecho, vimos que esta era la *definición* de un cuadrado).¿Y entonces de qué nos sirve saber que es un cuadrado?Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son iguales y perpendiculares.

A diferencia del ejemplo anterior, en este ejemplo se retrata un **razonamiento válido** sobre un cuadrilátero:

tiene sus cuatro lados iguales ⟹ sus diagonales son iguales y perpendiculares

# *(Opcional) Problemas iniciales*

Los siguientes problemas fueron elegidos por la simpleza de su enunciación y por tener una solución creativa, con poco contenido teórico. Sin embargo, muchos conceptos serán explicados con más detalle más adelante, por lo que pueden omitirse en una primera lectura.

**Problema 1.** Dos rectángulos iguales de lados 5 y 10 están apoyados sobre una recta, como en la figura. Hallar el ángulo <PCA, donde P es el vértice superior izquierdo.

Polygon

Description automatically generated with medium confidence

**Problema 2.** Un hexágono tiene seis ángulos de 120° y sus lados son 3, 2, 5, 4, a y b. Hallar a y b.

Shape

Description automatically generated

**Problema 3.** En un cubo se marcan tres vértices A, B y C, como en la figura. Hallar <ABC.

Chart, radar chart

Description automatically generated

Preludio: Fundamentos

Antes de comenzar con las definiciones y los teoremas de este apunte, quería destacar una particularidad de la geometría que la distingue del resto de áreas. Al ser más dependiente de la posición espacial o forma de las figuras, es mucho más frecuente querer recurrir a argumentos aproximados o empíricos sobre la figura.

En muchos casos -y como ocurrió en Los Elementos de Euclides- es necesario considerar estos argumentos como axiomas, como por ejemplo, la congruencia de triángulos.

Capítulo 1: Medidas

La geometría era tradicionalmente una herramienta utilizada para medir distintas clases de cosas de la vida real. Por eso, la geometría hereda de estas aplicaciones el concepto de *medidas*. Si bien es posible tratar el concepto de medida de una forma totalmente abstracta sin recurrir al mundo real, es útil poder visualizar lo que representa cada medida visualmente. Algunas de estas medidas son las longitudes, los ángulos y las áreas. Geométricamente, lo más interesante no es calcular estas medidas sino poder encontrar relaciones entre ellas, y esto es más interesante aún si las medidas son de distinto tipo, como por ejemplo, relacionar lados con ángulos.

# Longitudes

La medida más simple y la más utilizada en la vida cotidiana es la longitud de *un segmento*.

**Definición.** La **longitud** de un segmento es, intuitivamente, la **distancia** entre sus extremos.[[2]](#footnote-1) Si dos segmentos tienen la misma longitud, se dice que son iguales, con el signo igual (=).

[FIGURA]

La longitud nos permite hablar de las relaciones entre los lados de una figura. Por ejemplo, ahora diríamos que un triángulo ABC es equilátero si AB = BC = CA. También diríamos AB = 5 para decir que el lado AB mide 5.[[3]](#footnote-2) Otra definición que podemos hacer con longitudes es la siguiente:

**Definición.** El **punto medio** de un segmento es el punto en él que está a igual distancia a un extremo que al otro. Es decir, si el punto medio del segmento AB es el punto M que cumple que AM y MB tienen igual longitud.

[FIGURA]

Si tenemos un segmento compuesto de varios segmentos consecutivos, su longitud total resulta la suma de sus partes. Por ejemplo, si AB es un segmento y M es su punto medio, podemos considerarlo compuesto de dos segmentos AM y MB. Entonces como AM = MB = x (por ser punto medio), se cumple que:

AB = AM + MB = x + x = 2x ⟹ x = AB/2.

## Perímetro

Una vez definimos la longitud de un segmento, es posible definir otras medidas que pueden descomponerse en la longitud de varios segmentos.

**Definición.** El **perímetro** de una figura son todos los lados que componen su borde. La **longitud del perímetro**, o simplemente *perímetro*, es la suma de las longitudes de estos lados. Por ejemplo, el perímetro de un triángulo es la suma de sus tres lados.

Como caso particular, dado que los triángulos equiláteros, los cuadrados (y, en general, cualquier polígono regular) tienen todos sus lados iguales, es posible calcular sus perímetros multiplicando la longitud de su lado por la cantidad de lados.

**Ejercicio.** La siguiente figura está compuesta por cuadrados iguales de lado 1. Hallar su perímetro.

[FIGURA]

**Ejercicio.** La siguiente figura está compuesta por triángulos equiláteros y tiene perímetro 12 cm. Hallar el lado de cada triángulo.

[FIGURA]

Notar que la relación entre los perímetros de una figura puede establecerse a partir de las relaciones entre las longitudes de los lados de la figura. Esto será puesto a prueba en los problemas.

## Problemas para esta sección

**1.** (inter-ñ-2022-n1-2) La figura está formada por 3 cuadrados iguales y 3 triángulos equiláteros iguales. El perímetro de cada cuadrado es de 68 cm. ¿Cuál es el perímetro de cada triángulo? ¿Cuál es el perímetro de la figura?

**2.** (zonal-ñ-2020-n1-4) En la figura, ABFG es un cuadrado con 72cm de perímetro. demás AH = HG y también AB = 3BC. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo ACDH?

**3.**

**4.**

**5.** (mayo-2021-n1-1) En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

# Áreas

Si la longitud es la medida de un segmento, una componente con una sola dimensión, el área es la medida de una superficie de dos dimensiones.

**Definición.** El **área** de una figura es la superficie de limitada por el perímetro. La **medida del área**, o simplemente área, es, intuitivamente, el tamaño de esta superficie.[[4]](#footnote-3)

[FIGURA]

Muchas veces, se reduce el cálculo del área a una simple tabla de figuras y sus respectivas fórmulas para calcular el área. Sin embargo, nada más lejos de la realidad: en la mayoría de los casos, una misma figura tiene muchas posibles fórmulas para el área, mientras que otras tienen solo fórmulas excesivamente complicadas para su memorización. En esta sección, intentaremos hacer una aproximación más humana al concepto de área.

## Base y altura

Tal vez la figura más sencilla para calcular su área sea el rectángulo. Incluso, podríamos decir que la fórmula para el área de un rectángulo es casi una definición a partir de la cuál podemos deducir el área de otras figuras:

**Definición.** (Área de un rectángulo) El área de un rectángulo con lados opuestos a y b es ab.

[FIGURA]

En particular, el área de un cuadrado es el producto del lado consigo mismo, es decir, la longitud de su lado al cuadrado, de ahí el nombre de esta operación:

**Proposición.** (Área de un cuadrado) El área de un cuadrado de lado l es l2.

Es interesante destacar que el área del rectángulo aumenta al aumentar sus dimensiones, la horizontal, o base, y la vertical, o altura. Estos conceptos serán útiles para estudiar el área de los triángulos.

En el caso de los triángulos existe una variedad de formas de calcular su área. Al principio, uno pensaría en una fórmula que permita calcular el área a partir de los tres lados, la cual existe. Sin embargo, es mucho más usual utilizar una fórmula más simple pero que recurre a otro concepto:

**Definición.** La **altura** de un triángulo es el segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto, llamado **base**, y es perpendicular a este. La **longitud de la altura**, o simplemente altura, es la longitud de este segmento. Esta longitud coincide con la distancia del vértice al lado opuesto. Notar que un triángulo tiene tres bases y tres alturas correspondientes.

Con esta definición, ya podemos hablar de la siguiente propiedad, generalmente aprendida en la escuela:

**Proposición.** (Área de un triángulo) El área de un triángulo T es

área(T) = bh / 2

donde b es la base y h es la altura correspondiente.

**Demostración:** Consideremos encerrar al triángulo en un rectángulo con el que comparta altura y base.

[FIGURA]

Dividiendo al triángulo en dos por su altura, vemos que el rectángulo contiene una copia exacta de cada una de las dos partes del triángulo original. Luego, el área del triángulo es la mitad que la del rectángulo. Esto es:

área(T) = área(R) / 2 = bh / 2.

Esta fórmula, si bien es simple y útil, cuenta con increíbles consecuencias que muy pocas veces se enseñan en la educación tradicional:

**Proposición.** Si dos triángulos tienen la misma base y altura, entonces tienen la misma área.

Esta propiedad, sabiendo la fórmula del área de los triángulos, es casi inmediata. Pueden sorprender entonces las aplicaciones que puede llegar a tener. Enunciaremos algunas propiedades en forma de ejercicios para pensar:

**Ejercicio.** Bruno y Julián dibujan un triángulo cada uno. La base del triángulo de Julián mide la mitad que la del triángulo de Bruno, y la altura mide el doble. ¿Cuál de los dos tiene mayor área?

**Ejercicio.** Sea ABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Demostrar que las áreas de ABM y AMC son iguales.

**Ejercicio.** Sea ABCD un cuadrilátero tal que los lados AD y BC son paralelos. Demostrar que las áreas de ABC y DBC son iguales.

## Otros casos

Mencionábamos que algunas figuras, como el triángulo, poseen diversas fórmulas para calcular su área dependiendo de qué datos del triángulo conocemos. Por el contrario, no existe una fórmula sencilla para calcular el área de un cuadrilátero genérico sin tener que involucrar nuevos elementos a la figura.

Sin embargo, esto no quiere decir que sea imposible calcular su área. Es más, teniendo la información apropiada, puede ser incluso muy sencillo calcular el área de un cuadrilátero. Una estrategia puede ser dividir al cuadrilátero en varios triángulos, calcular el área de cada triángulo por separado y luego sumar las áreas. Esto, por ejemplo, permite calcular las áreas de tipos especiales de cuadriláteros.

### Área del rombo

Para calcular el área de un rombo, podemos encuadrarlo en un rectángulo de la siguiente forma:

[FIGURA]

Luego, si dividimos el rectángulo en ocho triángulos iguales, el rombo ocupa cuatro de ellos, luego su área es la mitad que la del rectángulo. Este rectángulo tiene como dimensiones las longitudes de las diagonales del rombo. De esta forma:

**Proposición.** (Área de un rombo) El área de un rombo R es:

área(R) = d1d2/2

donde d1 y d2 son las longitudes de las diagonales (menor y mayor) del rombo.

### Área del paralelogramo

Como dos lados opuestos paralelos están siempre a la misma distancia, en un paralelogramo podemos considerar una base y una altura al igual que con un rectángulo. Esto es, fijado un lado como base, la altura es la distancia entre ese lado y su opuesto.

[FIGURA]

Si consideramos recortar un triángulo de la figura y pegarla del otro lado, vemos como el área del paralelogramo coincide exactamente con la del rectángulo de esa base y esa altura. Esto es:

**Proposición.** (Área de un paralelogramo) El área de un paralelogramo P es:

área(P) = bh

donde b es la base y h es la altura del paralelogramo, definidas como antes.

### Área del trapecio

En este caso, como los lados paralelos no miden lo mismo, contamos con dos bases, una mayor y una menor, y, por supuesto, con la distancia entre ellas, la altura. Vamos a aplicar la técnica del paralelogramo en dos lugares distintos. Para eso, primero debemos marcar los puntos medios de los lados no paralelos:

[FIGURA]

Recortando los triángulos marcados y pegándolos en sus respectivos lugares, formamos un rectángulo cuya altura coincide y su base mide la **semisuma** de las bases del trapecio. Esto es:

**Proposición.** (Área de un trapecio) El área de un trapecio T es:

área(T) = (B + b) h / 2

donde B y b son las bases (mayor y menor) y h la altura del trapecio.

### Área del cuadrilátero genérico

La pregunta que se puede estar haciendo el lector es: ¿y no hay ninguna fórmula que funcione para todos los cuadriláteros independientemente de sus propiedades? Si bien las hay, no son tan simples como la de los casos particulares presentados arriba. Sin embargo, eso no quiere decir que sea imposible calcular el área de un cuadrilátero arbitrario, pues hay varias formas de hacerlo.

Una forma bastante simple es calcularla como suma de las áreas de dos triángulos así:

[FIGURA]

Y el área resulta ser:

AC (BP + DQ) / 2.

## Problemas para esta sección

**1.** (zonal-ñ-2021-n1-2) En la figura, de 98 cm de perímetro, ABCE es un rectángulo; AB = 4 AE; CDE es un triángulo equilátero. ¿Cuál es el perímetro de ABCE? ¿Cuál es el área de ABCE?

**2.** (nacional-ñ-2022-n2-2) En la figura: R1, R2, R3, R4 y R5 son rectángulos. El área de R2 es el doble del área de R1. El área de R3 es el doble del área de R2. El área de R4 es el doble del área de R3. El área de R5 es el doble del área de R4. El área de la parte sombreada de la figura es de 264 cm. Los lados de R4 están en la relación 3 : 4. ¿Cuál es el área del rectángulo R5? ¿Cuál es el área del rectángulo R3? ¿Cuál es el perímetro del rectángulo R4?

**3.** (zonal-2019-n1-3) Se tienen dos cuadrados A y B de lados 5 y 7, respectivamente, en ese orden de izquierda a derecha. Hallar el área del triángulo determinado por los vértices inferior izquierdo y superior derecho de A, y el superior derecho de B.

**4.** (zonal-2016-n1-3) Sea ABCD un rectángulo de lados AB, BC, CD y DA. Sea E un punto en el lado CD. Si área (ADE) = 1/5 área (ABCE), calcular DC/CE.

**5.** (zonal-2012-n1-3) Un cuadrado está dividido en 4 rectángulos iguales y un cuadrado, como se muestra en la figura, si el área del cuadrado sombreado es 36 y el área de cada uno de los rectángulos iguales es 720, calcular las longitudes de los lados de los rectángulos.

A picture containing rectangle, square, line, sketch

Description automatically generated

**6.** (zonal-2021-n2-3) En el triángulo ABC sean P y Q en el lado BC tales que 3BP = 2BC y Q está entre B y P. La recta paralela a AQ por P corta a AC en R. Si el área del cuadrilátero ABQR es igual a 34, calcular el área del triángulo ABC.

**7.** (a2-bases-medias-1) Sea ABC un triángulo. Sean P y Q puntos sobre el lado BC tales que BP = PQ = QC. La paralela a AQ que pasa por P corta al lado AB en el punto R. Si el área de ABC es 6, entonces hallar el área de a) APQ y b) BQR. *(Se retomará este problema en bases medias.)*

**8.** (folklore) Tres hormigas se hallan en tres vértices de un cuadrado. Cada hormiga puede moverse únicamente por una recta paralela a la que forman las otras dos. No pueden moverse dos hormigas en simultáneo. ¿Es posible que las tres hormigas se coloquen en los puntos medios de los lados del cuadrado?

# Ángulos

Otra de medida que nos brinda la geometría es la *magnitud de* *un ángulo*. Si bien en el caso de las longitudes nos referimos al concepto por la medida (longitud) y no por lo que medimos (ángulo), en este caso es más utilizado la referencia a lo que medimos en vez de lo medido.

**Definición.** La magnitudde un **ángulo** es, intuitivamente, la amplitud entre sus extremos.Similarmente, dos ángulos tienen la misma magnitud, se dice que son iguales, con el signo igual (=).

[FIGURA]

Los ángulos intuitivamente representan la inclinación de una recta con respecto a otra, pero, vemos que dos rectas determinan no uno, sino cuatro ángulos. ¿Cuál tenemos que elegir? Bueno, la geometría en este caso nos ayuda, puesto que estos cuatro ángulos guardan una estrecha relación entre sí:

**Propiedad.** (Ángulos en un vértice) De los cuatro ángulos que forman dos rectas, los dos pares de opuestos son iguales, mientras que los ángulos que yacen sobre una misma recta separados por la otra suman 180°. En total los cuatro ángulos suman 360°.

[FIGURA]

## Paralelas

En un sentido intuitivo, si la longitud nos dice cuánta distancia hay de un punto a otro, un ángulo nos dice en qué dirección está una recta o cuán inclinada está, tomando como referencia un eje horizontal. Por eso, es de esperar que las rectas paralelas se comporten bien con los ángulos

**Definición.** Dos rectas son **paralelas** si no se cortan nunca. Intuitivamente, dos rectas paralelas conservan siempre la misma dirección.

[FIGURA]

El concepto intuitivo de que rectas paralelas conservan la misma dirección puede resumirse en la propiedad de ángulos entre paralelas:

**Propiedad.** (Ángulos entre paralelas) Los ángulos correspondientes que forma una recta con dos paralelas son iguales.

Sabiendo como se vinculan entre sí los ángulos en un vértice, podemos completar los ocho ángulos de la figura de la propiedad anterior. La consecuencia más importante de los ángulos entre paralelas es la de suma de ángulos en un triángulo:

**Propiedad.** (Suma de ángulos en un triángulo)La suma de ángulos de un triángulo es 180°.

**Demostración.** Consideremos la paralela uno de los lados pasando por el vértice opuesto. Entonces, completando los ángulos entre paralelas, vemos que los tres ángulos del triángulo yacen sobre una misma recta separados por los dos lados. Entonces, su suma es 180°, como queríamos.

[FIGURA]

Si dividimos un cuadrilátero por una de sus diagonales, entonces vemos que su interior queda dividido en dos triángulos. Más aún, los ángulos de ambos triángulos completan todos los ángulos del cuadrilátero. De esto se puede deducir que la suma de ángulos interiores de un cuadrilátero es 2 × 180° = 360°. Veamos cómo ir más allá con esta propiedad:

**Definición.** Un **polígono regular de n lados** o **n-ágono regular** es un polígono de n lados que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

[FIGURA]

Por ejemplo, un triángulo regular es simplemente un triángulo equilátero, mientras que un cuadrilátero regular es un cuadrado. Una observación importante es que para que un triángulo sea equilátero basta solo con tener sus tres lados iguales (o sus tres ángulos), pero para figuras con más lados esto no es cierto: existen cuadriláteros con sus cuatro lados iguales pero no sus ángulos (rombos), y existen cuadriláteros con sus cuatro ángulos iguales pero no sus lados (rectángulos). Los mismo ocurre para pentágonos, hexágonos y demás.

Quedan como ejercicios hallar algunas propiedades sobre ángulos en polígonos regulares:

**Ejercicio.** Hallar los ángulos interiores de un polígono regular de n lados. Comprobar que un triángulo equilátero tiene tres ángulos de 60° y que si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos iguales, entonces son rectos.

**Ejercicio.** Demostrar las siguientes propiedades sobre los polígonos regulares de 5 y 6 lados:

1. En un pentágono regular cada diagonal es paralela al lado con el que no comparte vértices.
2. En un hexágono regular las diagonales mayores miden el doble de los lados.

## Problemas para esta sección

**1.** (zonal-2022-n1-3) En el triángulo equilátero ABC se marcaron los puntos D y E en BC y AC respectivamente de modo que al doblar siguiendo el segmento DE, el punto C se apoya sobre el lado AB en el punto C’ y <DC’B = 90°. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo CED.

**2.** (zonal-2021-n1-3) Sea ABC un triángulo isósceles con B = C y A mayor que 90º. La bisectriz del ángulo C corta al lado AB en D. Sean E en BC tal que DE = BE y F en BE tal que DF es la bisectriz del ángulo BDE. Si FDC = 116°, calcular la medida del ángulo ABC.

**3.** (zonal-2020-n1-3) Las rectas PQ y RS son paralelas. ¿Cuál es el valor del ángulo QÂC?

A picture containing line, diagram

Description automatically generated

**4.** (zonal-2017-n1-3) Sea ABCDE un pentágono tal que AB = BC = CA = AD = DE = EA y <CAD = 40°. Calcular la medida del ángulo <ABE. *ACLARACIÓN:* Los lados del pentágono ABCDE son AB, BC, CD, DE y EA.

**5.** (zonal-2015-n1-3) Sea ABCD un rectángulo. Se consideran un punto P del lado AB y un punto Q del lado AD tales que <BPC = <CPQ = y <PQC = <CQD. Calcular la medida del ángulo <PCQ.

**6.** (zonal-2014-n1-3) En un hexágono regular ABCDEF (los vértices en ese orden) trazamos las diagonales AE y BD. Sean H en AE y G en BD tales que ABGH es un cuadrado. Calcular la medida del ángulo <FHE.

**7.** (zonal-2022-n2-2) Sea ABCDE un pentágono regular de lados AB, BC, CD, DE y EA. Las diagonales AC y BD se cortan en P. Calcular la medida del ángulo APB.

# Teorema de Pitágoras

Uno de los teoremas fundamentales para relacionar longitudes entre sí es el Teorema de Pitágoras. Hasta ahora, sabíamos que si un segmento está compuesto por otros dos, entonces su longitud es la suma de las partes. Pero ¿es posible calcular la longitud de un segmento a partir de otros sin que sean específicamente sus partes? Bueno, si tres segmentos satisfacen una estructura en particular, el Teorema de Pitágoras nos dice que sí. Primero intentemos entender cuál es esa estructura particular:

**Definición.** (pre-Pitágoras) Un triángulo es **rectángulo** si uno de sus ángulos mide 90°, es decir, dos de sus lados son perpendiculares. Estos dos lados se llaman **catetos** y el lado mayor se llama **hipotenusa**.

Una propiedad de estos triángulos rectángulos es que la hipotenusa siempre mide más que los catetos. Sin embargo, la propiedad más interesante de los triángulos rectángulos es, sin duda, el Teorema de Pitágoras:

**Teorema.** (de Pitágoras)En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, ABC es un triángulo con el ángulo <BAC = 90°, entonces

AB2 + AC2 = BC2

Es decir, cuando dos segmentos forman un ángulo recto con un tercero, podemos afirmar que la longitud no es la suma de las partes exactamente, pero sí el cuadrado de la longitud es la suma de los cuadrados de las partes.

**Demostración.** Para demostrar el Teorema de Pitágoras, notemos que, al construir tres cuadrados con lados en cada uno de los lados del triángulo original, queremos comprobar que las áreas de los cuadrados b y c suman el área del triángulo A. Para eso, el siguiente reordenamiento puede ser una satisfactoria demostración del teorema:

**[FIGURA]**

El ejemplo típico para el Teorema de Pitágoras es el triángulo rectángulo con catetos 3 y 4. Por el teorema, su hipotenusa mide 5. Se pueden hallar muchos otros casos de triángulos rectángulos cuyos tres lados son enteros. Cuando tres enteros son los lados de un triángulo rectángulo, se dice que forman una **terna pitagórica**.

Veamos algunos ejemplos prácticos del Teorema de Pitágoras en uso:

**Ejercicio.** Armar un triángulo rectángulo cuyo perímetro sea 120. *(Pista: El triángulo 3-4-5.)*

**Ejercicio.** A partir del Teorema de Pitágoras, explicar por qué la hipotenusa siempre mide más que ambos catetos.

## Medio-cuadrado y medio-equilátero

Al comienzo del apunte mencionábamos que la geometría es el arte de las figuras, y destacamos los triángulos como las figuras más importantes. Sin embargo, bajo la luz del Teorema de Pitágoras es posible descubrir las propiedades de dos tipos de triángulos muy importantes.

**Proposición.** (Medio-equilátero) Un triángulo con ángulos 30°-60°-90° tiene lados en proporción 1 : √3 : 2.

**Demostración:** Consideremos reflejar el vértice B por el lado opuesto. Como el ángulo A es recto, esta reflexión está alineada con A y B. Además, los ángulos B, C y B’ del nuevo triángulo BCB’ son de 60°, por lo que este resulta equilátero. Es decir, sus tres lados son iguales.

Si denotamos BC = 2, tenemos AB = 1. Ahora, por el Teorema de Pitágoras:

AB2 + AC2 = BC2 ⟹ 1 + x2 = 4 ⟹ x = √3.

**Proposición.** (Medio-cuadrado) Un triángulo con ángulos 45°-45°-90° tiene lados en proporción 1 : 1 : √2.

**Demostración:** En este caso, como los ángulos B y C son iguales, sus lados opuestos, AB y AC deben ser iguales[[5]](#footnote-4). Entonces, si fijamos AB = AC = 1, el Teorema de Pitágoras nos dice:

AB2 + AC2 = BC2 ⟹ 2 = x2 ⟹ x = √2.

## Problemas para esta sección

Ahora sí, una vez hechos estos ejercicios, pasemos a ejemplos de usos Teorema de Pitágoras en problemas de Olimpiadas:

**1.** (zonal-2021-n1-2) Una hormiga realiza 14 movimientos según las siguientes reglas:

* En el primer movimiento avanza 1 cm, en el segundo avanza 2 cm, en el tercero avanza 3 cm, y así siguiendo hasta el último en el que avanza 14 cm.
* En los movimientos impares se mueve en dirección vertical, hacia arriba o hacia abajo, a su elección.
* En los movimientos pares se mueve en dirección horizontal, hacia la izquierda o hacia la derecha, a su elección.

Hallar la menor distancia posible entre el punto donde la hormiga inicia su camino y el punto donde lo finaliza. Indicar una sucesión de movimientos para lograr esa distancia.

**2.** (zonal-2020-n1-3) Sea ABC un triángulo rectángulo con <A = 90°, <B = 60° y AB = 6. Se considera el punto D tal que el triángulo BCD sea equilátero y sólo comparta con el triángulo ABC el lado BC. Las rectas BD y AC se cortan en E. Calcular las medidas de los lados del triángulo CDE.

**3.** (zonal-2013-n1-3) Se tiene un cuadrilátero ABCD, de lados AB, BC, CD y DA, con <ABC = 90°, y <ACD = 90°. Si AB = 96, BC = 72 y CD = 90, calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD.

**4.** (zonal-2011-n1-3) Sea ABCD un trapecio de bases AB y CD, con AB menor que CD, y lados no paralelos BC y DA, tal que el lado BC es perpendicular a la diagonal BD. Se traza por A la perpendicular a la diagonal BD, que corta al lado CD en E. Si BD = DE, BD = 36 y BC = 27, calcular las longitudes de AB y CD.

**5.** (zonal-2020-n2-6) El cuadrilátero ABCD tiene AB = 4, BC = 5, CD = 6, DA = 3 y DÂB = 90º. Determinar el área del cuadrilátero ABCD.

**6.** (mayo-2020-n1-3) Una hormiga despistada hace el siguiente recorrido: Comenzando en el punto A va 1 cm hacia el norte, después 2 cm hacia el este, a continuación 3 cm hacia el sur, luego 4 hacia el oeste, de inmediato 5 cm al norte, continúa 6 cm al oeste, y así sucesivamente, finalmente 41 cm al norte y termina en el punto B. Calcular la distancia entre A y B en línea recta.

**7.** (provincial-2019-n1-3) En la figura se muestra una línea quebrada DEFB en el interior del cuadrado ABCD. Se sabe que DE es perpendicular a EF y EF es perpendicular a FB. Si DE = 5, EF = 1 y FB = 2, calcular la longitud del lado del cuadrado ABCD.

# *(Opcional) Anexo: Ecuaciones*

Cuando aparecen medidas y relaciones entre ellas, es posible que el problema se transforme en uno de aritmética: buscamos valores posibles para las longitudes de los segmentos que tenemos de forma tal que todas las relaciones se cumplan. Para estos casos, va a ser útil aceitar nuestros conocimientos sobre ecuaciones:

**1.** En la figura, los perímetros de los rectángulos son 2, 6, 8 y p, en ese orden. Hallar p.

Diagram

Description automatically generated

**2.** En los lados de un triángulo ABC se marcan puntos D en BC, E en AC y F en AB, tales que AEF, BDF y CDE sean tres triángulos isósceles con ápices en A, B y C, respectivamente. Si los lados de ABC miden 5, 6 y 7, hallar la medida de AD.

# Problemas para este capítulo

Con todas las herramientas adquiridas a lo largo de este capítulo, ya estamos listos para derrotar monstruos mucho más grandes.

## Regional

**1.** (regional-2022-n1-3) El heptágono ABCDEFG, de lados AB=BC=CD=DE=EF=FG=GA=2, tiene DEˆF=120∘, GAˆB=ABˆC=CDˆE=EFˆG y BCˆD=FGˆA=90∘. Además, hay un punto P en el interior del heptágono tal que PA=PB=PD=PE=PF=2. Calcular el área del heptágono.

**2.** (regional-2020-n1-3) En el triángulo ABC, sean D un punto en AB, F un punto en AD y E un punto en AC tales que los triángulos BCD, CDE, DEF y EFA tienen áreas iguales. Si AB=32 y AC=39, determinar las longitudes de BD, DF, FA, AE y EC.

## Provincial

**.**

## Nacional

**1.** (nacional-2020-n1-2) En el triángulo isósceles ABC sean D y E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que las rectas BE y CD se cortan en F. Además, los triángulos AEB y ADC son iguales y tienen AD = AE = 10 y AB = AC = 30. Calcular [ADFE]/[ABC].

Aclaración: [ABC] denota el área de la figura ABC.

**2.** (nacional-2022-n1-2) Sea ABCD un paralelogramo con el lado AB mayor que el lado BC y el ángulo <A mayor que el ángulo <B. Sea X en el interior del paralelogramo ABCD tal que los triángulos AXB, BXC y el cuadrilátero DAXC tengan áreas iguales. Construir con regla no graduada y compás el punto X. Indicar los pasos de la construcción y explicar por qué satisface las condiciones del problema.

*LEVEL UP!*

Capítulo 2: Triángulos

Sin duda alguna los triángulos son la piedra fundamental de la geometría euclídea. Todas las figuras pueden construirse a partir de los triángulos, así, todas las propiedades de los triángulos pasan a ser claves para demostrar las propiedades del resto de las figuras.

# Congruencia

La congruencia es la respuesta a la siguiente pregunta. Si dos monedas del mismo tamaño se colocan sobre una mesa, ¿son iguales las monedas? Es claro que tiene la misma forma, pero, si no coinciden, ¿son realmente iguales? Para no hacerse un lío, en geometría decimos que dos figuras con la misma forma son *congruentes*. El caso de congruencia más interesante se da en los triángulos.

## Criterios de congruencia

¿Cómo saber si dos triángulos son iguales? Para eso, los criterios de congruencia nos brindan condiciones que *aseguran* que dos triángulos son congruentes.

**“Axioma”.[[6]](#footnote-5)** (Criterios de congruencia) Los siguientes criterios aseguran la congruencia de los triángulos ABC y A’B’C’:

1. (L-L-L) AB = A’B’, AC = A’C’ y BC = B’C’,
2. (L-A-L) AB = A’B’, AC = A’C’ y <A = <A’,
3. (A-L-A) AB = A’B’, <A = <A’ y <B = <B’.

(L – lado, A – ángulo.) Cabe destacar que en el criterio L-A-L es importante que el ángulo esté ubicado entre los lados correspondientes, si no, este contraejemplo refutaría el criterio:

[FIGURA]

## Paralelogramos

Aprovechemos que aprendimos los criterios de congruencia para demostrar propiedades cruciales de los paralelogramos:

**Proposición.** Demostrar las siguientes cuatro propiedades de los *paralelogramos* son equivalentes, es decir, si un cuadrilátero ABCD cumple una, entonces cumple las tres:

1. AB es paralelo a CD y BC es paralelo a DA,
2. AB = CD y BC = DA,
3. AB es paralelo a CD y de igual longitud, y
4. AC y BD se cortan en sus puntos medios.

**Demostración: HACER**

Es siempre aconsejable intentar buscar demostraciones de las propiedades que ya conozcamos sobre las figuras.

## Problemas para esta sección

**1.** Demostrar las siguientes dos propiedades de los rectángulos son *equivalentes*:

1. AB perp BC perp CD perp DA, y
2. AC y BD son iguales y se cortan en sus puntos medios.

# Isósceles

Definimos los triángulos isósceles como aquellos que tienen dos lados iguales. Mencionamos varias veces que los triángulos isósceles también tienen dos ángulos iguales. Esto parece claro: un triángulo isósceles es “simétrico” con respecto a un eje de simetría entre sus dos lados iguales. Ahora sí estamos en condiciones

**Definición.** Mediatriz, bisectriz, altura y mediana.

**Proposición.** Demostrar que los triángulos isósceles… son “isósceles”. Es decir, probar que

1. Si AB = AC, entonces <ABC = <ACB
2. Si <ABC = <ACB, entonces AB = AC.

Y además probar las siguientes propiedades adicionales:

1. Si AB = AC (o <ABC = <ACB), entonces la recta perpendicular a BC por A (*altura*), la recta que divide al ángulo <BAC por la mitad (*bisectriz*) y la recta que une a A con el punto medio de BC (*mediana*) son la misma recta.

## Problemas para esta sección

**1.** (Teorema de Thales [2do]) Sea ABC un triángulo de modo que el punto C está en la circunferencia de diámetro AB. Demostrar que ABC es un triángulo rectángulo.

**2.** Sea ABCD un trapecio de bases AD y BC tal que AB = BC = CD = 3 y AD = 6. Calcular los cuatro ángulos del trapecio.

**3.** Sea ABC un triángulo. Las bisectrices de los ángulos <ABC y <CBA se cortan en el punto I. La recta paralela a BC por I corta a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Se sabe que AD = 20 y BE = 23. Halar la longitud del segmento DE.

# Equiláteros

## Problemas para esta sección

# Semejanza

Así como la congruencia nos habla de las medidas, la semejanza nos habla de formas. Intuitivamente, dos figuras son *semejantes* si tienen la misma forma, pero posiblemente distintos tamaños. Por ejemplo, dos monedas de distintos tamaños son círculos semejantes.

## Criterios de semejanza

Los criterios de semejanza pueden recordarse por su gran parecido a los criterios de congruencia (y no por casualidad).

**Proposición.[[7]](#footnote-6)** (Criterios de semejanza) Los siguientes criterios aseguran la semejanza de los triángulos ABC y A’B’C’:

1. (L-L-L) AB/A’B’ = AC/A’C’ = BC/B’C’,
2. (L-A-L) AB/A’B’ = AC/A’C’ y <A = <A’,
3. (A-A-A) <A = <A’ y <B = <B’.

Una forma de pensar estos criterios es la siguiente: Si se fija la igualdad de dos lados correspondientes de los triángulos, digamos AB = A’B’, entonces el criterio de semejanza implica directamente la congruencia de los triángulos ABC y A’B’C’ por su respectivo criterio. Por ejemplo, si AB = A’B’ en el 2. Obtenemos exactamente el criterio de congruencia L-A-L.

## (Primer) Teorema de Thales

Un enunciado casi equivalente al de semejanza es el Teorema de Thales, más conocido, tal vez, por la famosa canción que lleva su nombre.

**Teorema.** (Teorema de Thales) El Teorema de Thales puede enunciarse de las siguientes formas:

1. Sea ABCD un trapecio de bases AB y CD. Sea P la intersección de las semirrectas DA y CB. Demostrar que PA/PD = PB/PC.
2. Sea ABCD un trapecio de bases AB y CD. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD. Demostrar que PA/PC = PB/PD.
3. Si tres rectas paralelas, a, b y c son cortadas por dos transversales entonces sus segmentos correspondientes son proporcionales.

**Demostración: HACER**

## *(Opcional) Teorema de la bisectriz*

Una consecuencia directa y muy útil del Teorema de Thales es el Teorema de la bisectriz:

**Teorema.** (Teorema de la bisectriz) Sea ABC un triángulo y D un punto en el lado BC tal que AD es bisectriz del ángulo <BAC. Entonces, BD/DC = AB/AC.

**Demostración: HACER**

## Problemas para esta sección

# Bases medias

**Proposición.** (Base media) Dado un triángulo ABC, si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, probar que MN (*base media*) cumple las siguientes dos propiedades: 1) MN es paralela a BC y 2) MN mide la mitad de BC.

## *(Opcional) Cuchilla*

## Problemas para esta sección

**Problema.** (bases-medias-2)Sea ABCD un trapecio de bases AB = 2 y CD = 4. Sean M el punto medio de la diagonal BD y N el punto medio de la diagonal AC. Calcular la longitud de MN.

**Proposición.** (varignon) Sea ABCD un cuadrilátero. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AB, BC, CD y DA. Probar que MNPQ es un paralelogramo.

# Problemas para este capítulo

Vamos a derrotar a los monstruos más grandes.

## Regional

## Provincial

## Nacional

**Problema.** (nacional-2018-n1-2) Construir, utilizando exclusivamente una regla y un compás, un trapecio ABCD de bases AB y CD tal que si E es el punto medio del lado AD vale que EC = BC = 4, CD = 2 y <ECB = 120°. Indicar los pasos de la construcción y calcular el área del trapecio ABCD.

Nota: No es necesario explicar cómo se trazan paralelas y perpendiculares a una recta por un punto.

**Problema.** (selcono-2017-4) Sea ABCD un cuadrilátero con AC = 20 y AD = 16. Se marca P en el segmento CD tal que los triángulos ABP y ACD son congruentes. Si el área del triángulo APD es 28, calcular el valor del área del triángulo BCP. (Dos triángulos son congruentes si sus lados son respectivamente iguales).

*LEVEL UP!*

Capítulo 3: Circunferencias

Las circunferencias, luego de los triángulos, aparecen como figuras enigmáticas de la geometría.

# Radios y diámetros

Primero, recordemos la definición de circunferencia, a partir de la cual demostraremos las propiedades ulteriores:

**Definición.** (Circunferencia) Dado un punto O y un número real r, una **circunferencia** es el conjunto de puntos P tales que OP = r. En este caso, se dice que O es el **centro** y r el **radio** de la circunferencia.

[FIGURA]

Más en general, cualquier segmento que una el centro con algún punto de la circunferencia se puede llamar radio. La propiedad fundamental de las circunferencias es que *todos los radios miden lo mismo*. Esta propiedad nos permitirá deducir un montón de herramientas para resolver problemas.

## Perímetro y área

Uno de los motivos por el que se considera a las circunferencias figuras más complejas es el cálculo de su perímetro y su área.

**Proposición.** El perímetro de una circunferencia de radio r es 2πr, donde π es una constante.

Notar que esta proposición es coherente con los principios de semejanza: todas las circunferencias son semejantes, por lo que la proporción entre su radio y su perímetro deberá ser constante. En este caso, la constante es denotada 2π y es la constante más famosa de la matemática debido a su aparición en muchas otras ramas bastante disímiles con las circunferencias.

**Proposición.** El área de una circunferencia de radio r es πr2, donde π es una constante.

Se suele usar la siguiente “demostración visual” para fundamentar este hecho:

[FIGURA]

## (Segundo) Teorema de Thales

Volvemos a tener otro teorema de la mano de Thales, que ya fue dejado como ejercicio en la sección anterior:

**Definición.** (Cuerdas y diámetros) Dados dos puntos A y B en una circunferencia, el segmento AB se llama **cuerda** de la circunferencia. Si el segmento AB incluye al centro O, se dice que AB es **diámetro**.

Notar que debido a la propiedad de que todos los radios son iguales:

* El diámetro siempre es el doble que el radio,
* El centro siempre cae en el punto medio de los diámetros.

Entonces, dado un diámetro, su centro y radio quedan determinados. Ahora sí, al teorema:

**Teorema.** ([2do] de Thales) El segundo teorema de Thales puede enunciarse de varias formas:

1. Sea ABC un triángulo de modo que el punto C está en la circunferencia de diámetro AB. Demostrar que ABC es un triángulo rectángulo.
2. Sea ABC un triángulo de modo que <ACB = 90° y sea M el punto medio de AB. Entonces, AM = BM = CM.

**Demostración:**

## Problemas para esta sección

# Arco capaz

Vamos a pulir las técnicas utilizadas para la demostración del Segundo Teorema de Thales para demostrar generalizaciones de este teorema.

**Definición.** (Ángulo inscrito y central) Dado una circunferencia de centro O y una cuerda AB, el **ángulo central** de la cuerda AB es el ángulo <AOB. Un **ángulo inscrito** de la cuerda AB es un ángulo <APB donde P está en la circunferencia.

Uno puede preguntarse por qué tiene sentido definir estos ángulos y por qué tiene sentido un ángulo que dependa de un punto arbitrario de la circunferencia.

**Proposición.** Sea AB la cuerda de una circunferencia de centro O y P un punto en la circunferencia, entonces:

1. El ángulo central es el doble que el inscrito, es decir, <AOB = 2<APB, y
2. el ángulo inscrito no depende del punto P elegido.

**Demostración:** 1. Como AO, BO y PO son radios, AO = BO = PO, de donde APO y BPO son isósceles. De este modo,

<OPA = <OAP, <OPB = <OBP

Notar que entonces:

<AOB = <OAP + <OBP + <APB = 2<APB

2. Como el ángulo central no depende del punto P, si P y P’ son dos puntos distintos en la circunferencia, resulta:

<APB = <AOB/2 = <AP’B.

Dejamos el siguiente ejercicio para practicar estas ideas:

**Ejercicio.** Demostrar las siguientes propiedades:

1. Sean A, B y P puntos en una circunferencia. Entonces <APB = 90° si y solo si AB es diámetro.
2. Sean A, B, B’, A’ puntos en una circunferencia. Entonces AB // A’B’ si y solo si AA’ = BB’.

Uno puede preguntarse qué pasa si el punto P pasa a estar del otro lado de AB. En ese caso, el ángulo inscrito ya no pasa a ser el mismo sino que en este caso el ángulo central es el que está del otro lado, es decir, el que suma 360° con el original. Esto causa que si Q está del otro lado de AB en la circunferencia entonces:

<AP’B = (360° - <AOB) / 2 = 180 - <APB.

# Cíclicos

Todas las ideas de la sección anterior nos servirán para demostrar el siguiente resultado, que sin duda será el más importante de toda esta sección.

**Definición.** (Cuadriláteros cíclicos) Un cuadrilátero convexo ABCD es **cíclico** si sus cuatro vértices yacen sobre una misma circunferencia.

**Proposición.** Dado un cuadrilátero convexo ABCD, las siguientes propiedades son equivalentes:

* ABCD es un cuadrilátero cíclico,
* <ACB = <ADB, y
* <DAB + <BCD = 180°.

**Demostración:**

## Problemas para esta sección

**Problema.** (evan-chen) El cuadrilátero ABCD tiene diagonales AC y BD perpendiculares y cumple: <ADB = 30°, <BAC = 40°, <ACD = 50°.

**Problema.** (mayo-2009) Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que ABD es equilátero y el triángulo BCD es isósceles, con <C = 90°. Si E es el punto medio del lado AD, calcular la medida del ángulo <CED.

**Problema.** (selcono-2018-4)

# Problemas para este capítulo

Vamos a derrotar a los monstruos más grandes.

Interludio: Regla y compás

Como mencionamos en el preludio, los griegos contaban con una restricción fundamental para hacer geometría: todas las figuras geométricas que usaban debían ser construibles con regla y compás. Pero ¿qué podemos hacer con regla y compás? ¿Cómo podemos dibujar mediatrices, bisectrices o construcciones más complejas? ¿Todas las figuras pueden construirse?

# Primeros pasos

Sigamos el método de *Los Elementos*, que empieza así:

**Problema.** (Proposición 1 de *Los Elementos*) Dado un segmento AB, construir con regla y compás un triángulo equilátero con lado AB.

Una vez hecha esta primera construcción, podemos empezar con las dos construcciones más básicas: la mediatriz y la bisectriz.

**Problema.** (Proposición 10) Dado un segmento AB, construir su mediatriz.

**Problema.** (Proposición 9) Dado un ángulo AOB, construir su bisectriz.

Es aconsejable tener en mente las construcciones que ya sabemos hacer: pueden servirnos como pasos intermedios para conseguir otras más complicadas. Pasemos ahora a construir perpendiculares y paralelas.

**Problema.** (Proposición 11, 12 y …) Dado un segmento AB, construir:

1. La perpendicular a AB por un punto P en la recta AB.
2. La perpendicular a AB por un punto P fuera de la recta AB.
3. La paralela a AB por un punto P fuera de la recta.

**Problema.** (Proposición 66) Dado un segmento AB, construir un cuadrado con lado AB.

# El límite de lo construible

Como se demostró siglos después de la publicación de *Los Elementos*, no todas las figuras pueden construirse con regla y compás. Los ejemplos más clásicos son los llamados *tres problemas délicos*: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Estos ya eran conocidos por los griegos y considerados como problemas muy difíciles. Hoy en día sabemos que sencillamente son construcciones imposibles de hacer con regla y compás. ¿Cómo es esto posible?

**Experimento.** Supongamos que un segmento de lado 1 es dado. ¿Se pueden construir con regla y compás segmentos de longitud 2, 3 ó 100? ¿Y un segmento de longitud ½? Más difícil: ¿Y 1/3? ¿Y √2?

Con suerte, logramos construir un puñado de longitudes enteras, racionales e incluso irracionales. ¿Son todas las longitudes construibles? La respuesta es que no. Por ejemplo, es imposible construir un segmento que mida π. Demostrando este tipo de afirmaciones se puede demostrar que los problemas délicos son efectivamente imposibles.

Capítulo 4: Centros

# Circuncentro

Uno de los centros más importantes del triángulo es el circuncentro, o centro de la circunferencia inscrita. Sus propiedades se derivan en su mayoría de las de los cuadriláteros cíclicos.

**Proposición.** Las tres *mediatrices* de un triángulo se cortan en un mismo punto. Este punto se llama *circuncentro* del triángulo ABC, y es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. ¿Cómo se puede construir el circuncentro con regla y compás?

**Demostración:**

**Definición.** Circunferencia circunscrita.

# Incentro

El incentro es el equivalente al circuncentro que se obtiene al intercambiar mediatrices por bisectrices. Al hacer este cambio, la circunferencia pasa de pasar por los tres vértices a ser tangente a los tres vértices.

**Proposición.** Las tres *bisectrices* de un triángulo se cortan en un mismo punto. Este punto se llama *incentro* del triángulo ABC, y es el centro de la circunferencia en tangente a los tres lados de un triángulo. ¿Cómo se puede construir el incentro con regla y compás?

**Demostración:**

**Definición.** Circunferencia inscrita.

# Baricentro

**Proposición.** Las tres *medianas* de un triángulo se cortan en un mismo punto. Este punto se llama *baricentro* del triángulo ABC. ¿Cómo se puede construir el baricentro con regla y compás?

**Demostración:**

**Proposición.** Las medianas parten al triángulo en 6 triángulos de igual área.

**Proposición.** El baricentro parte divide a las medianas en proporción 2:1.

# Ortocentro

**Proposición.** Las tres *alturas* de un triángulo se cortan en un mismo punto. Este punto se llama *ortocentro* del triángulo ABC. ¿Cómo se puede construir el ortocentro con regla y compás?

**Demostración:**

**Proposición.**

# Problemas para este capítulo

**Problema.** Sea ABC un triángulo. Sea L la intersección de la mediatriz de BC y la bisectriz de <BAC. Probar que L está en la circunferencia circunscrita de ABC.

Capítulo 5: Transformaciones

Temas a cubrir:

* Teorema de Thales
* Homotecias como muchos Thales
* Reflexiones por puntos medios y paralelogramos
* Rotaciones y rotohomotecias para ángulos
* Potencia de un punto e inversión

1. Veremos varias explicaciones de por qué se puede hacer esto en el Capítulo 2. [↑](#footnote-ref-0)
2. Una definición precisa de distancia escapa a los intereses de este capítulo (aunque será dada más adelante). [↑](#footnote-ref-1)
3. En las ciencias estamos acostumbrados a asignarle un sufijo a las longitudes en metros, centímetros, o cualquier otra unidad de medida. Sin embargo, en geometría estamos totalmente tranquilos diciendo que un segmento mide 5 sin tener que afirmar si son metros, centímetros, peras o manzanas. Es por eso por lo que decimos que la geometría se desliga un poco de la vida real, por más que sus conceptos intenten representar características de la realidad. [↑](#footnote-ref-2)
4. De vuelta, definir formalmente el área es una tarea aún más difícil y se posterga para más adelante. [↑](#footnote-ref-3)
5. Más de esto en el Capítulo 2 [↑](#footnote-ref-4)
6. Ver Preludio. [↑](#footnote-ref-5)
7. Ver Preludio. [↑](#footnote-ref-6)