Camada Física - DTMF - Transformada de Fourier

Rafael Corsi - rafael.corsi@insper.edu.br

Setembro - 2017

A Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma maneira de decompormos um sinal no tempo nas frequências que o formam. É uma ferramenta muito utilizada no processamento de sinais e modulação em frequência. O sinal resultante da transformada de Fourier indica quais frequências (ganho e fase) compõem o sinal.

A decomposição é realizada via a equação (sinais contínuos) :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-2\pi i t \omega}\, dt$$

O sinal utilizado para a decomposição na transformada de Fourier é o sinal senoidal.A transformada de Fourier significa : Quais senos (amplitude e fase) se somados reconstituem o sinal original. A figura a seguir ilustra a decomposição de uma onda quadrada em senoides :

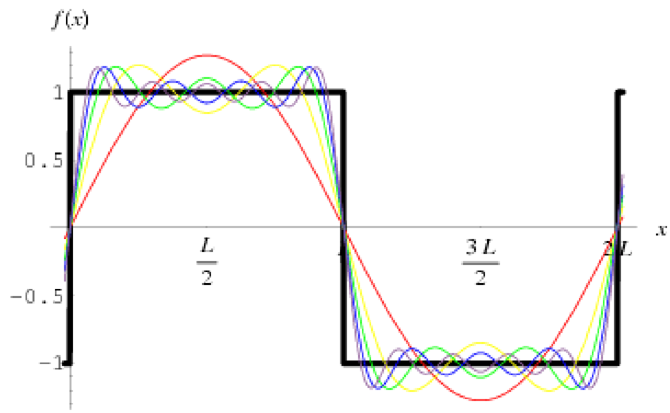


Figura 1: Decomposição de uma onda quadrada em senoides. REF[2]

A decomposição de uma onda quadrada é composta por infinitas senoides. A figura anterior pode ser representada em outras duas : Magnitude e Fase das senoides.

Transformada discreta de Fourier (DFT)

Quando estamos trabalhando com um sinal que foi de alguma forma digitalizado a transformada que devemos utilizar é a transformada discreta de Fourier, que recebe um sinal discreto x[n] e decompõem esse sinal :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot [\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N)]$$

A transformada é denotada por : $\mathcal{F}$, por $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ ou $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ ou $\mathcal{F}\mathbf{x}$

A transformada de Fourier de um sinal **X[k]** resulta em um sinal com componentes complexos que podem ser tratados por módulo (Re(X[k]) e fase (Im(X[k])). O módulo é um indicativo da energia que compõem o sinal na determinada frequência e a fase indica o quanto "atrasado/adiantando" será o sinal naquela determinada frequência.

Propriedades da transformada de Fourier

A seguir algumas propriedades da transformada Fourier :

Frequência positiva/negativa

A transformada de Fourier de um sinal x é composta por componentes de frequência positivas e negativas que ocupam todo o intervalo de frequências de **- infinito** até + **infinito**, as frequências negativas não possuem nenhum significado físico e surgem das propriedades matemáticas da transformada.

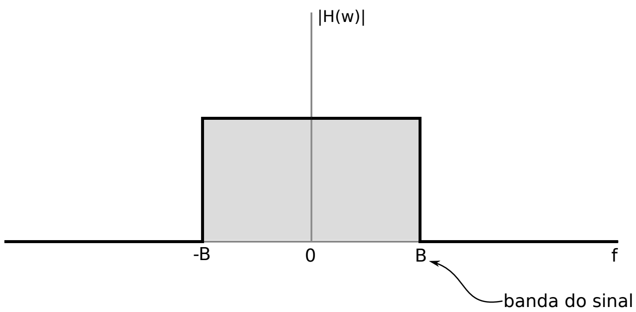


Figura 2: Transformada de Fourier de um sinal x

Se analisarmos a identidade trigonométrica de uma senoide com frequência negativa reparamos que o seu equivalente é apenas um deslocamento em fase.

$$cos(-\omega t + \theta) = cos(\omega t - \theta)$$

Normalmente exibimos somente a parte positiva da transformada de Fourier já que a parte negativa é geralmente (para transformada de sinais reais) um espelho da parte positiva.

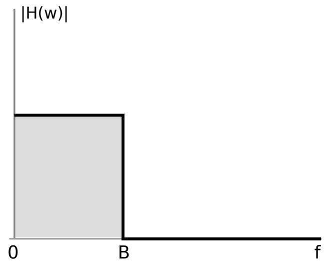


Figura 3: Exibição das frequências positivas da transformada

Porém o componente negativo é importante pois ele aparece quando fazemos um deslocamento do spectro atual para uma nova frequência. Veremos mais disso quando entrarmos em modulação de sinais.

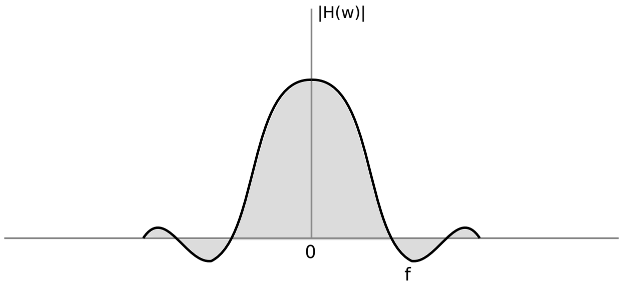


Figura 4: Transformada de Fourier de um sinal y

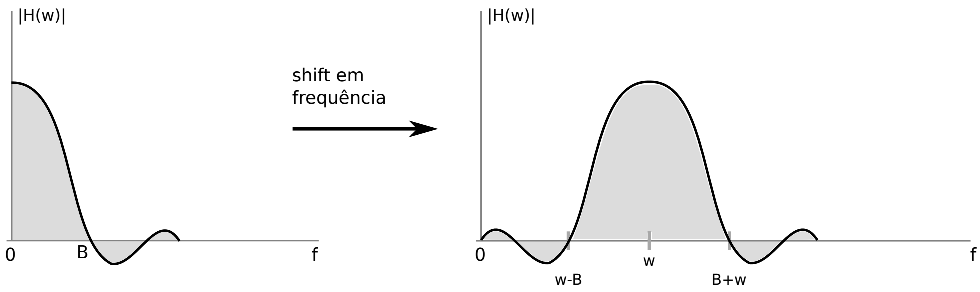


Figura 5: Transformada do sinal y deslocado em frequência

Linearidade

A transformada de Fourier de um sinal composto por h(t) = x(t) e y(t) é igual a soma das transformadas dos sinais.

$$H(k) = \mathcal{F}(x(t)) + \mathcal{F}(y(t))$$

Escala

Um sinal escalado no tempo x(at) é equivalente a :

$$\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{a}X(\frac{\omega}{a})$$

Derivação no tempo

A transformada de Fourier de um sinal derivado no tempo x'(t) é :

$$\mathcal{F}(\frac{d}{dt}x(t)) = j\omega\, X(j\omega)$$

O que acontece se substituirmos $j\omega$ por s ?

$$\mathcal{F}(\frac{d}{dt}x(t)) = s\, X(s)$$

Caímos na transformada de Laplace !

Parte Real da transformada (Re(X[k]))

A parte real da transformada de Fourier é chamada de *spectro de magnitude* e é uma função par da frequência (espelhado em torno do eixo Y) que indica o quanto cada frequência contribui para a geração do sinal. Quanto maior a amplitude da frequência maior é a sua contribuição ao sinal.

> O que é a banda de um sinal ?

> Para que serve o teorema de Parseval ?

Parte imaginária (Im(X[k]))

A parte imaginária indica a fase das frequências que compõem o sinal sendo do tipo ímpar (espelhado em torno do eixo x e y). A análise das fases é muito utilizada para projeto de filtros e não possui utilização no processamento de sinais de áudio, já que o ouvido humano não consegue distinguir fase.

Propriedades da transformada discreta de Fourier

Devido a transformada discreta de Fourier trabalhar em um sinal que foi amostrado, uma das consequências desse fato é que existe um "rebatimento" do espectro para múltiplos da frequência de amostragem (fs), conforme ilustrado a seguir :

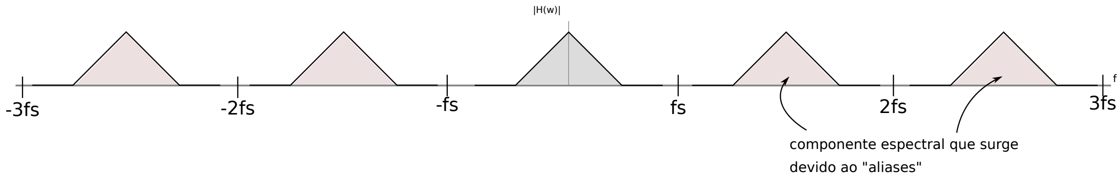


Figura 6: Transformada Discreta

O que acontece usualmente é que só exibimos o gráfico até a frequência fmax = fs/2, e esse rebatimento fica "mascarado".

Teorema da amostragem de Nyquist

A frequência de Nyquist define a menor frequência que um sinal com banda B pode ser amostrado para que o x[n] resultante da digitalização de um sinal x(t). A frequência de Nyquist deve ser no mínimo duas vezes a banda do sinal:

$$fs > 2B$$

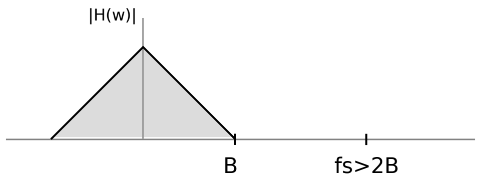


Figura 7: Transformada Discreta

> O que é aliasing e ant-aliasing ?

Exemplos

Alguns exemplos:

Exemplo 1 - Seno

Dado um sinal composto puramente por uma senoide de 5 Hz e amplitude 1 :

$$x(t) = 1 * sin(5t)$$

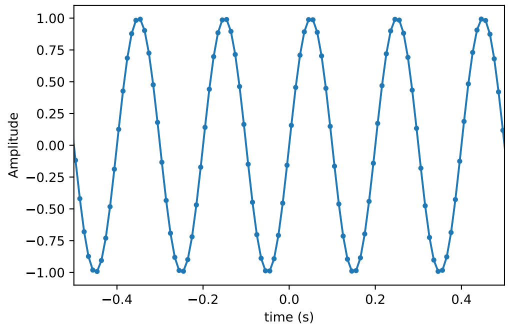
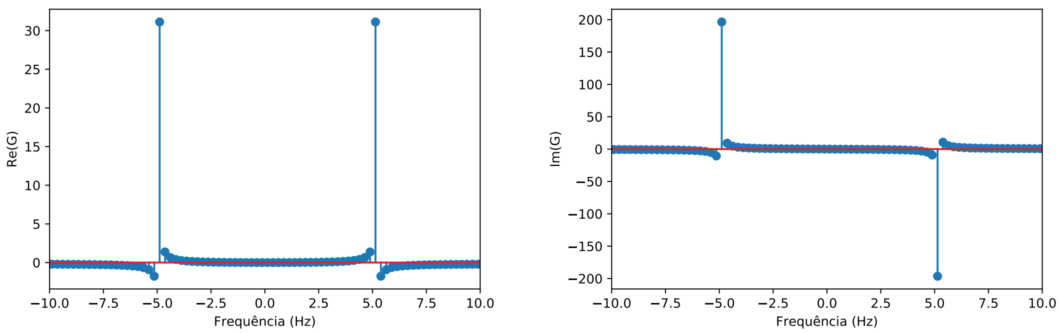


Figura 8: $x(t) = 1 * sin(5t)$

Obtemos os seguintes gráficos da transformada :



Note que a composição espectral desse sinal deveria ser somente duas componentes em +5Hz e -5Hz devido a transformada do seno ser um impulso na frequência fundamental. Porém no sinal resultante notamos pequenos sinais em torno da frequência 5Hz, isso ocorre pois o sinal original está no domínio do discreto e sua transformada possui limitações de resolução, veremos mais disso futuramente.

Exemplo 2 - Nível DC

Dado um sinal composto puramente por uma senoide de 5 Hz e amplitude 0.5 com um nível DC :

$$x(t) = 0.5 + 0.5 * sin(5t)$$

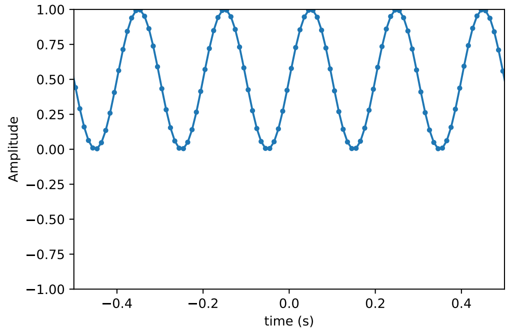
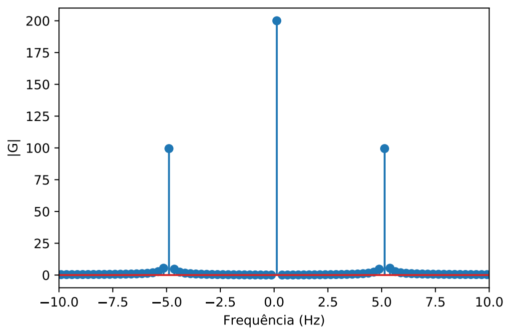
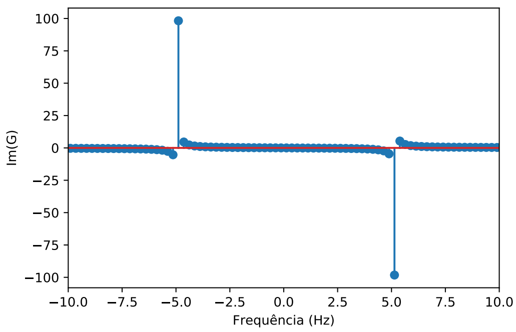


Figura 9: $x(t) = 1 * sin(5t)$

Obtemos os seguintes gráficos da transformada :





Nessa transformada notamos a aparição de um componente na frequência 0, que é devido ao sinal original possuir um valor médio.

Python Notebook

Referências :

- [1] Alan Oppenheim. RES.6-007 Signals and Systems. Spring 2011. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu.

- [2] http://mathworld.wolfram.com/FourierSeriesSquareWave.html