Busca e Ordenação

Algoritmos de Ordenação Quadráticos

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2018

Sumário

Fundamentos de Ordenação

Ordenação parcial e ordenação total

- Seja $a_s = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ uma sequência de N objetos, denominados elementos
- Seja $R \subset a_s \times a_s$ uma relação
- Dados dois elementos $a_i, a_j \in a_s$, a_i se relaciona com a_j se $(a_i, a_j) \in R$ (isto não implica necessariamente que a_j se relaciona com a_i)
- Seja $S = \{a \in a_s \mid \exists b \in a_s : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R\}$
- Dizemos que R é uma relação de ordem parcial se, para todos $a, b, c \in S$, temos que
  1. $(a, a) \in R$
  2. se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ então a e b são iguais
  3. se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ então $(a, c) \in R$
- Se para todos $a, b \in a_s$ vale $(a, b) \in R$ ou $(b, a) \in R$, então R é uma relação de ordem total

Definição de ordenação

- Dizemos que uma sequência a_s está ordenada de acordo com a relação de ordem R se, para todos $i = 2, 3, \ldots, N$, temos que $(a_{i-1}, a_i) \in R$
- Uma algoritmo de ordenação $A(a_s, R)$ recebe, como entrada, uma sequência a_s e uma relação de ordem R e, ao final do algoritmo, a sequência a_s (ou uma nova sequência b_s) está ordenada de acordo com a relação R
- Na prática, a relação R é implementada como uma função binária f tal que $f(a, b)$ retorna verdadeiro se $(a, b) \in R$
- Como a definição de ordenação depende da relação R, uma mesma sequência pode estar ordenada de acordo com R_1 e não ordenada de acordo com R_2

Características dos algoritmos de ordenação

- Se a sequência a ser ordenada pode ser armazenada inteiramente em memória, o algoritmo é dito interno; caso contrário, é chamado externo
- Se o algoritmo usa apenas a memória da própria sequência (e talvez uma pequena quantidade adicional para variáveis temporárias), o algoritmo é denominado *in-place*
- Se o algoritmo demanda uma cópia extra da sequência, é chamado *not-in-place* ou *out-of-place*
- Um algoritmo de ordenação é estável se ele preserva a ordem relativa de elementos iguais

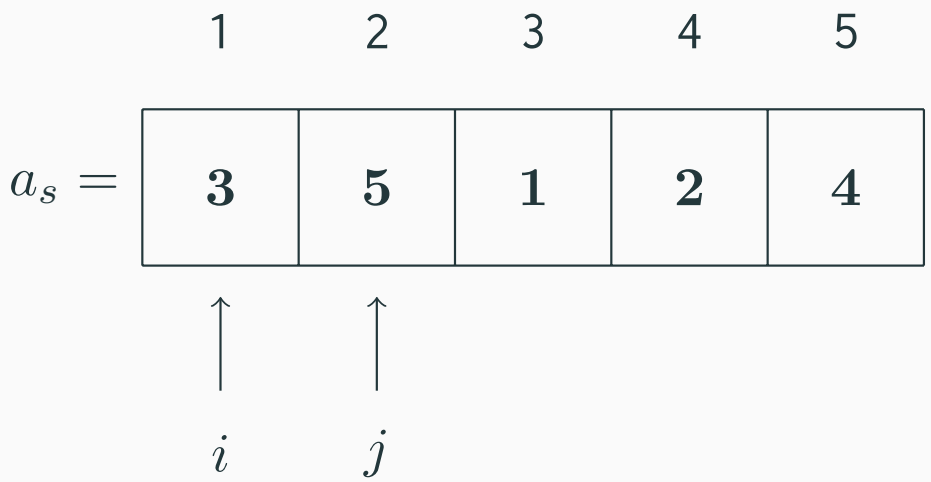
Selection Sort

Selection Sort

- *Selection sort* é um algoritmo de ordenação de simples entendimento e codificação
- Primeiramente ele identifica o menor dentre todos os elementos da sequência e o armazena na primeira posição
- Em seguida, procura o menor elemento dentre os que restaram, e o move para segunda posição
- Em faz o mesmo para a terceira, quarta, até a última posição
- A complexidade assintótica é $O(N^2)$, onde N é o número de elementos da sequência

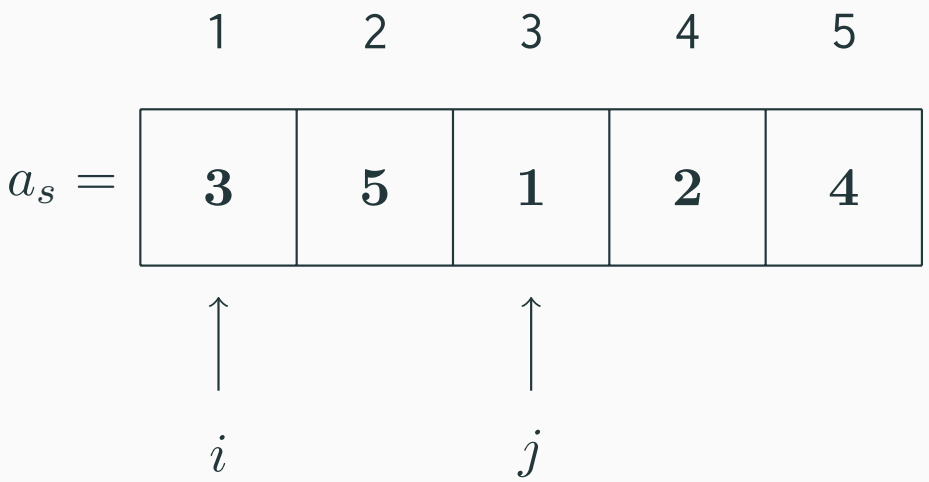
Visualização do selection sort

$k = 1$



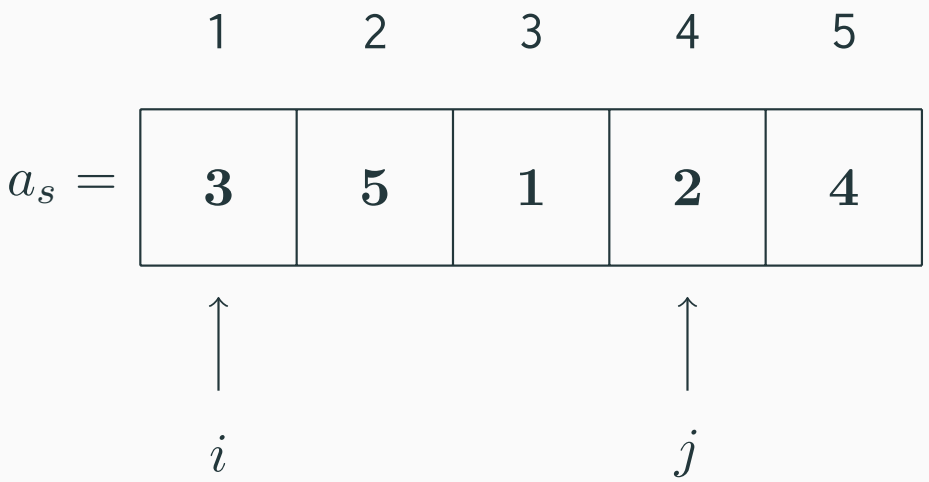
Visualização do selection sort

$k = 3$



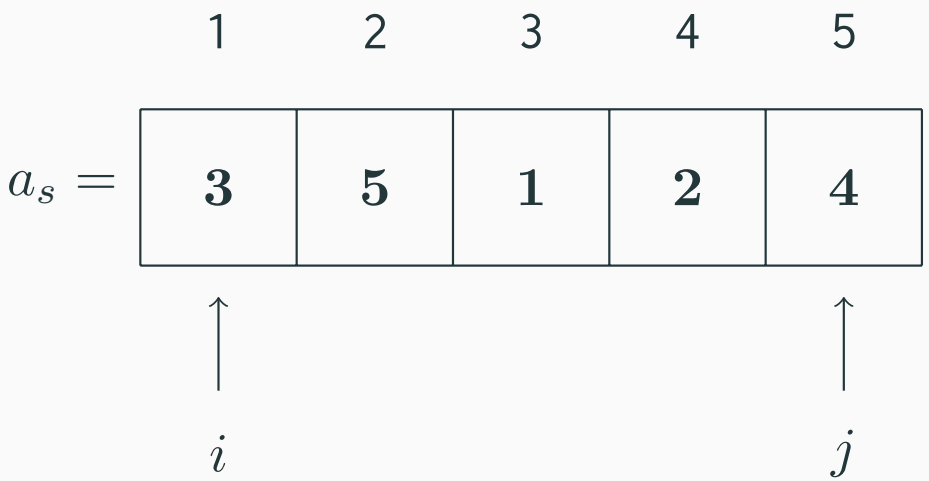
Visualização do selection sort

$k = 3$



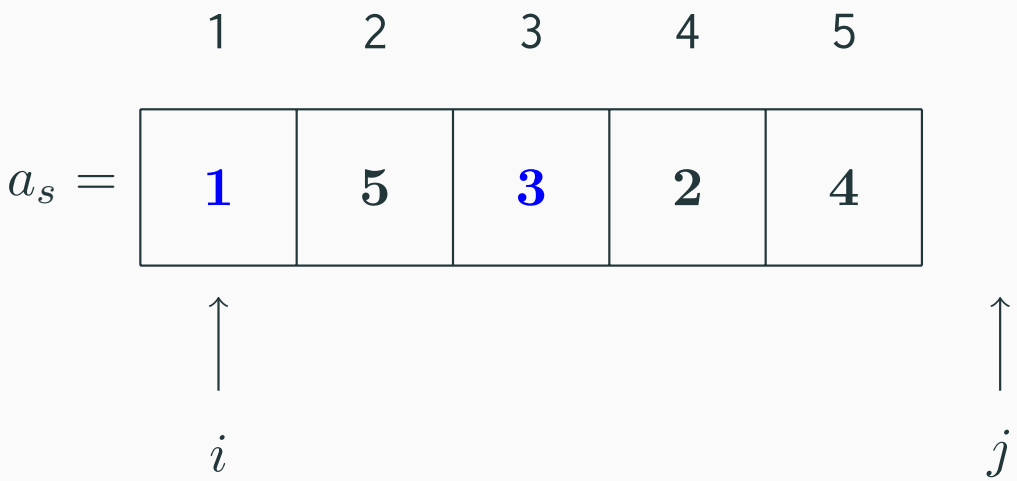
Visualização do selection sort

$k = 3$



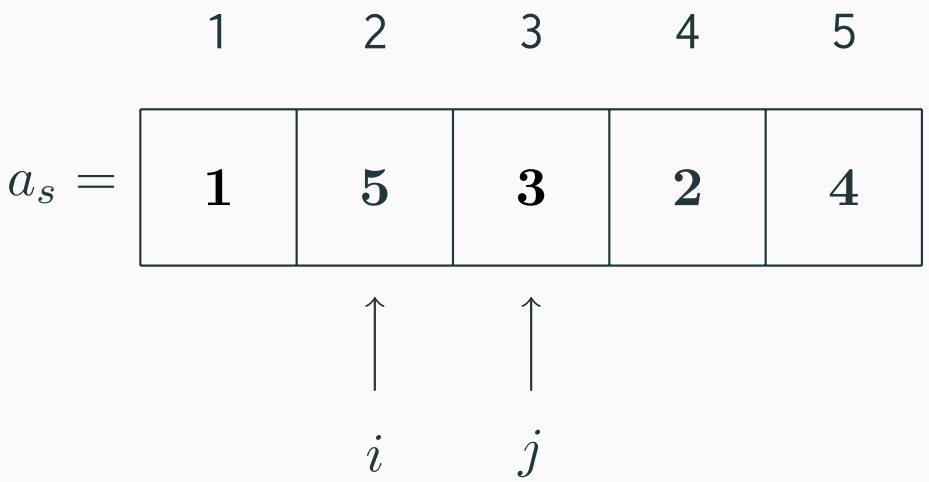
Visualização do selection sort

$k = 3$



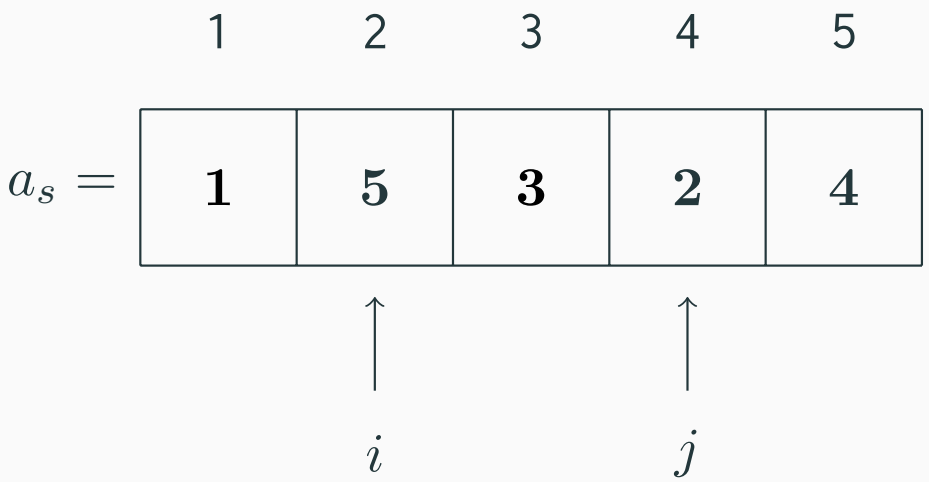
Visualização do selection sort

$k = 3$



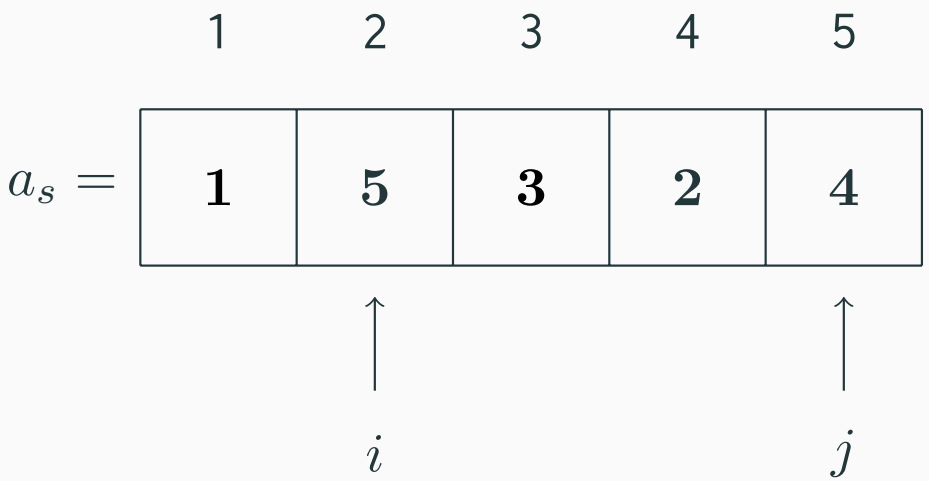
Visualização do selection sort

$k = 4$



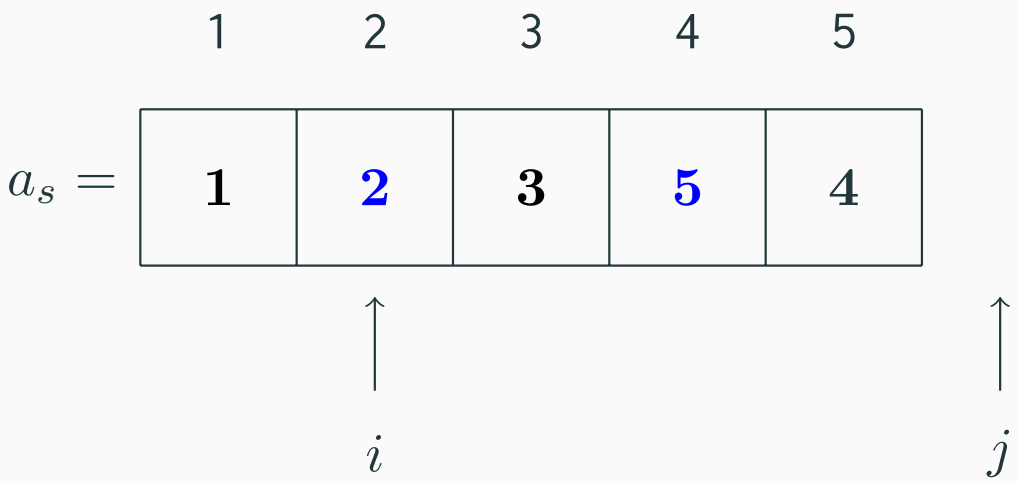
Visualização do selection sort

$k = 4$



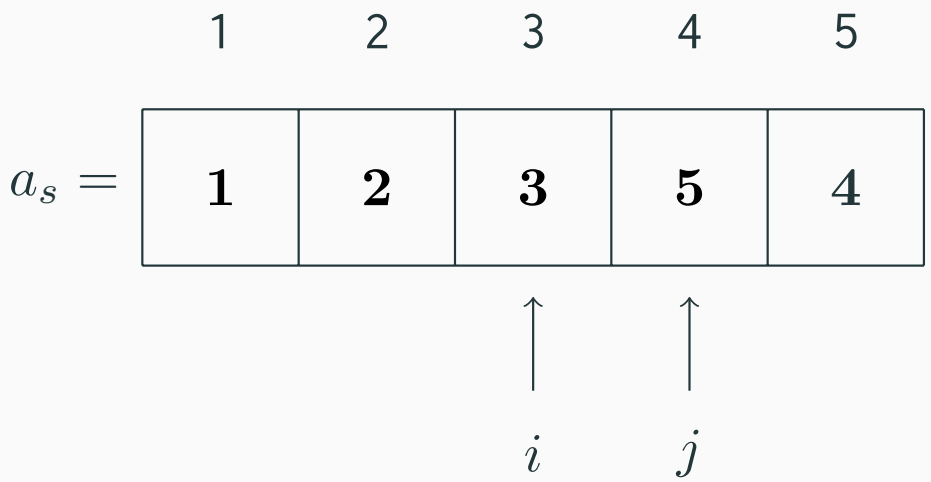
Visualização do selection sort

$k = 4$



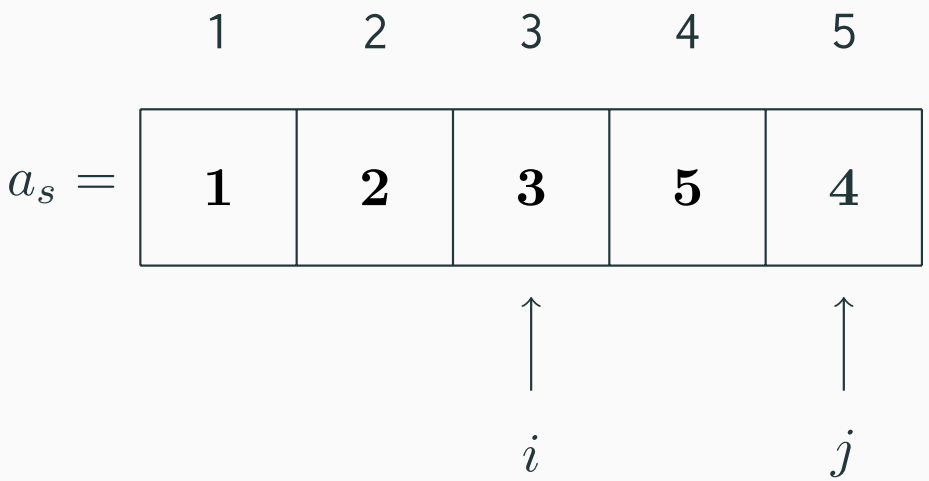
Visualização do selection sort

$k = 3$



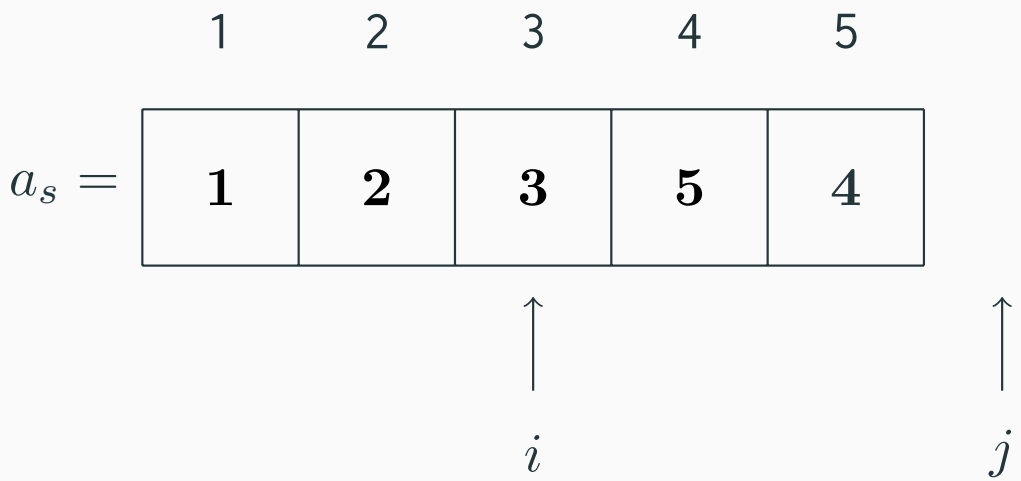
Visualização do selection sort

$k = 3$



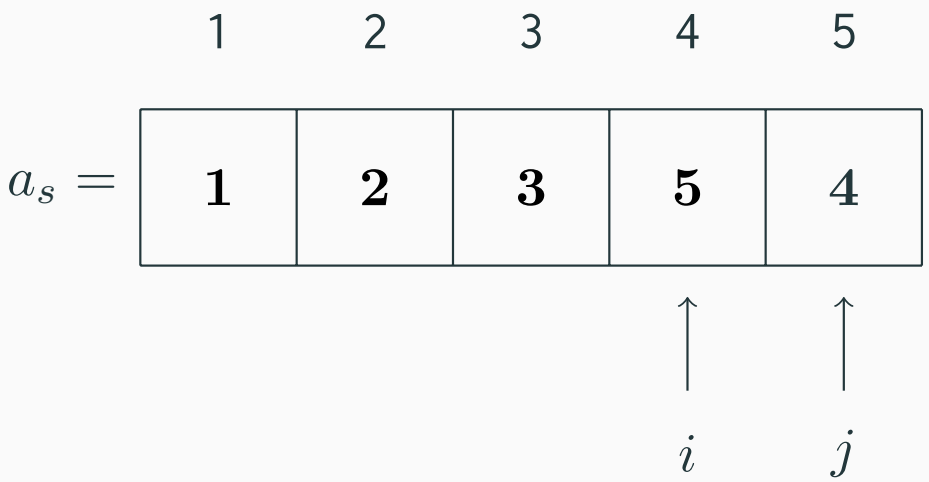
Visualização do selection sort

$k = 3$



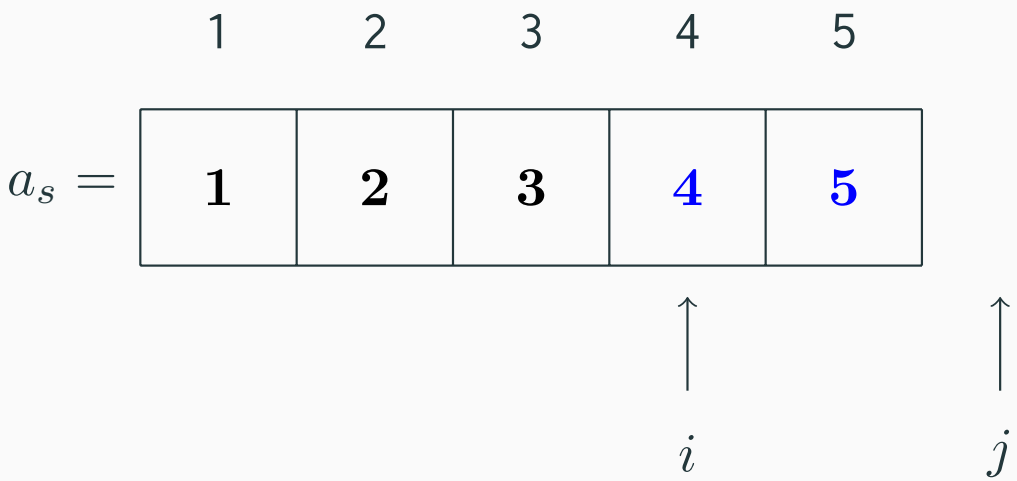
Visualização do selection sort

$k = 5$



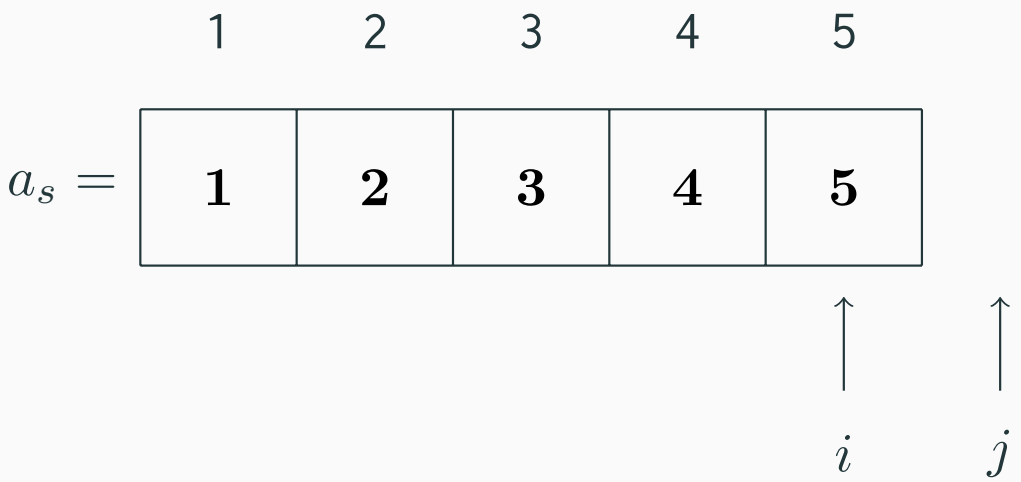
Visualização do selection sort

$k = 5$



Visualização do selection sort

$k = 5$



Implementação do selection sort em C++

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

template<typename T>
void selection_sort(vector<T>& as)
{
    int N = as.size();

    for (int i = 0; i < N; ++i)
    {
        int k = i;                          // k = índice do menor elemento

        for (int j = i + 1; j < N; ++j)
            if (as[j] < as[k])
                k = j;

        swap(as[i], as[k]);
    }
}
```

Implementação do selection sort em C++

```
22
23 int main()
24 {
25     vector<int> as { 3, 5, 1, 2, 4 };
26
27     selection_sort<int>(as);
28
29     for (size_t i = 0; i < as.size(); ++i)
30         cout << as[i] << (i + 1 == as.size() ? '\n' : ' ');
31
32     return 0;
33 }
```

Observações sobre o selection sort

- O pior caso do algoritmo acontece quando a sequência está ordenado em sentido contrário, isto é, $\forall i = 2, 3, \ldots, N, (a_i, a_{i-1}) \in R$
- No pior caso, é feita 1 atribuição no início, $6N$ atribuições no laço externo (considerando 3 atribuições por swap()) e

$$\sum_{i=0}^{N-1} 2(N - i - 1) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} k = N(N - 1)$$

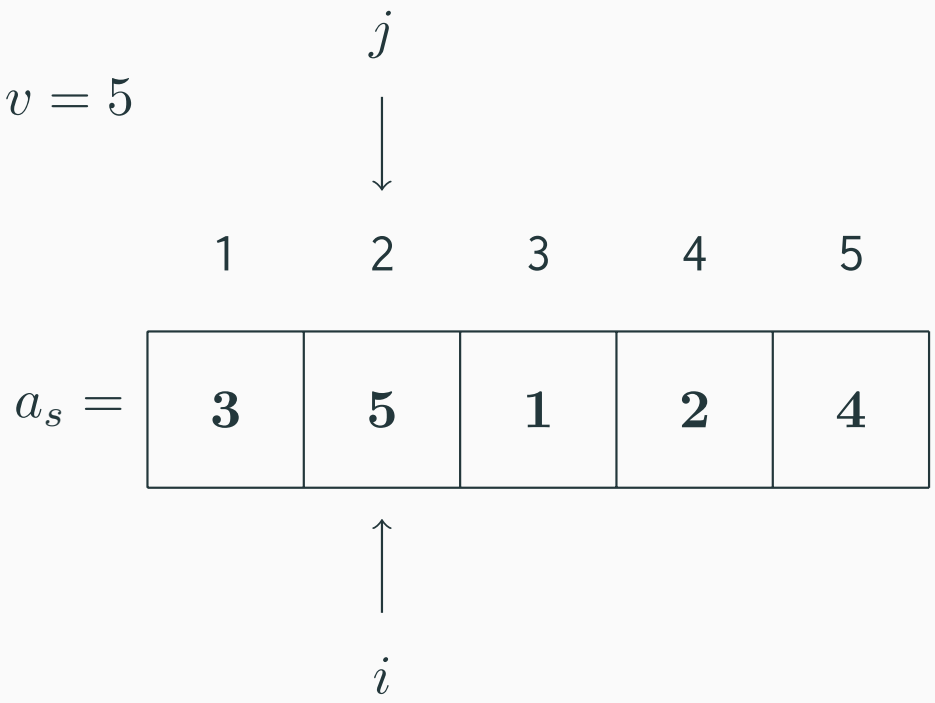
  atribuições no laço interno
- Assim, $f(N) = 1 + 6N + N(N - 1)$ é $O(N^2)$
- O *selection sort* é um algoritmo estável *in-place*

Insertion Sort

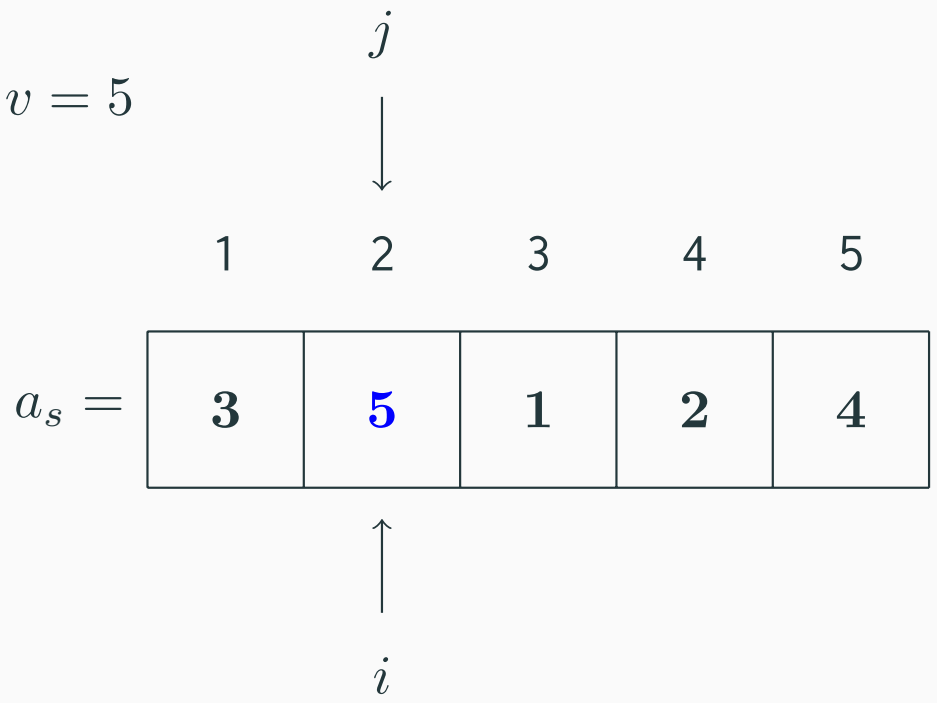
Insertion Sort

- *Insertion sort* é um algoritmo de ordenação similar ao *selection sort*
- Ele também é estável, *in-place* e tem complexidade $O(N^2)$
- Ele considera, inicialmente, que um sequência com um único elemento já está ordenada
- Em seguida, para cada elemento da sequência, ele procura a posição correta no vetor ordenado que está à esquerda do elemento, e o insere nesta posição
- É o tipo de ordenação que os jogadores de cartas costumam usar

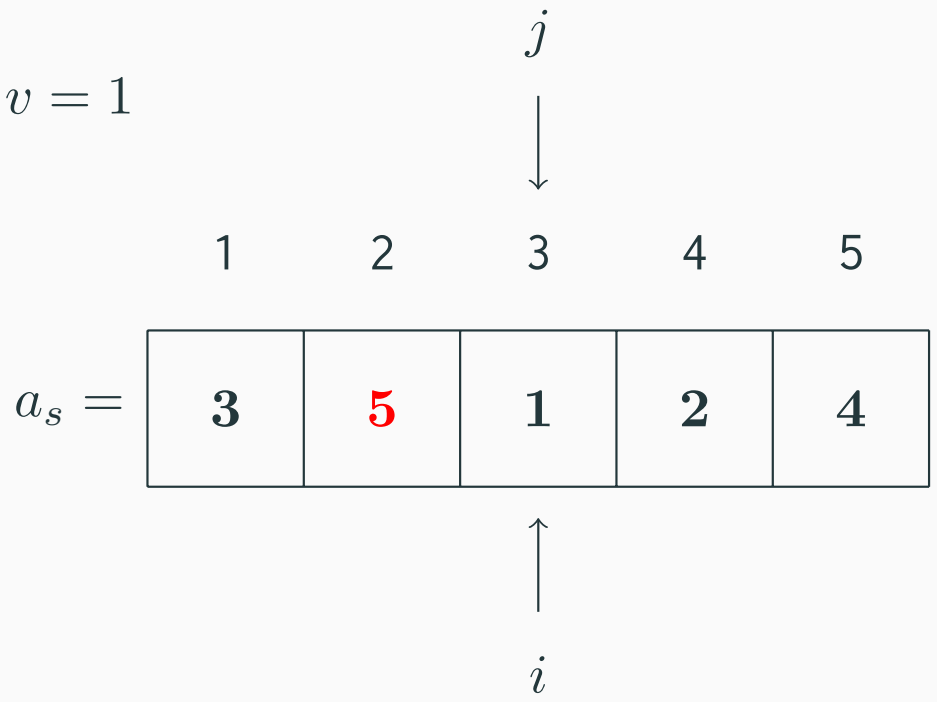
Visualização do insert sort



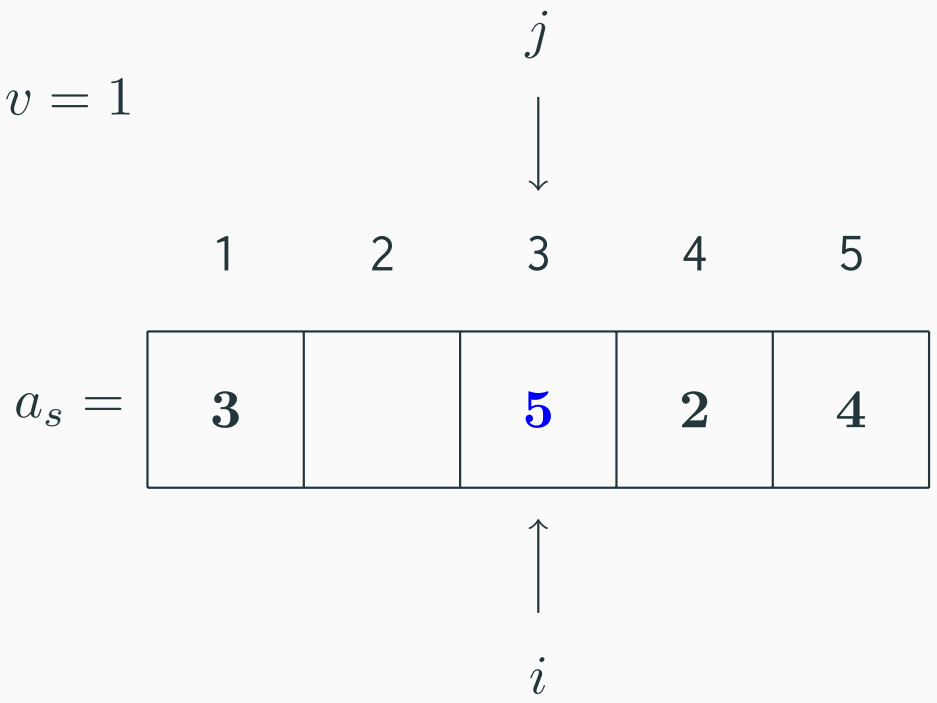
Visualização do insert sort



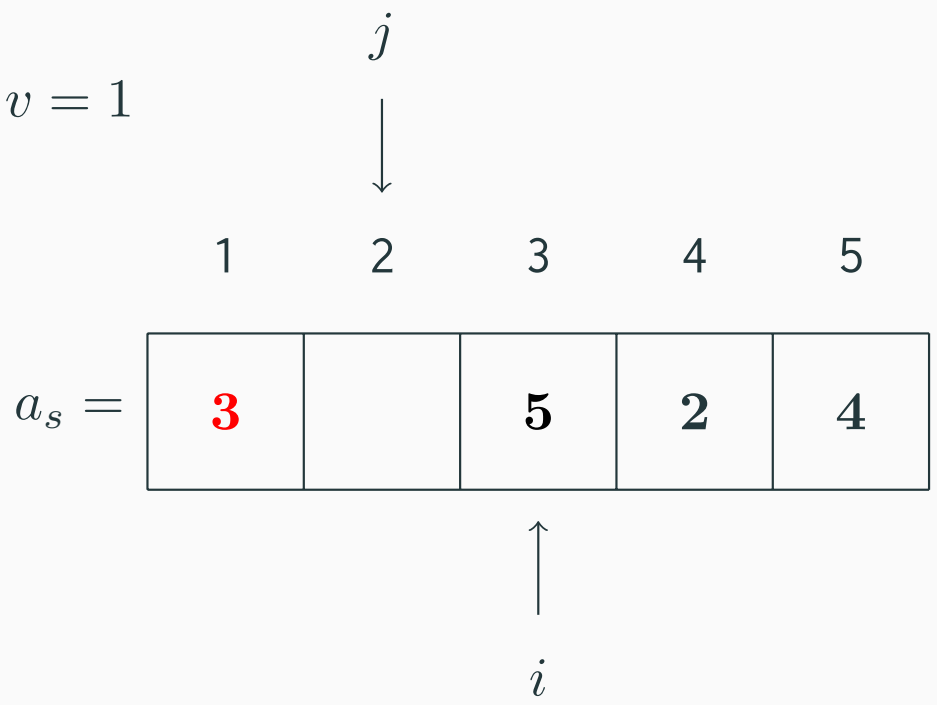
Visualização do insert sort



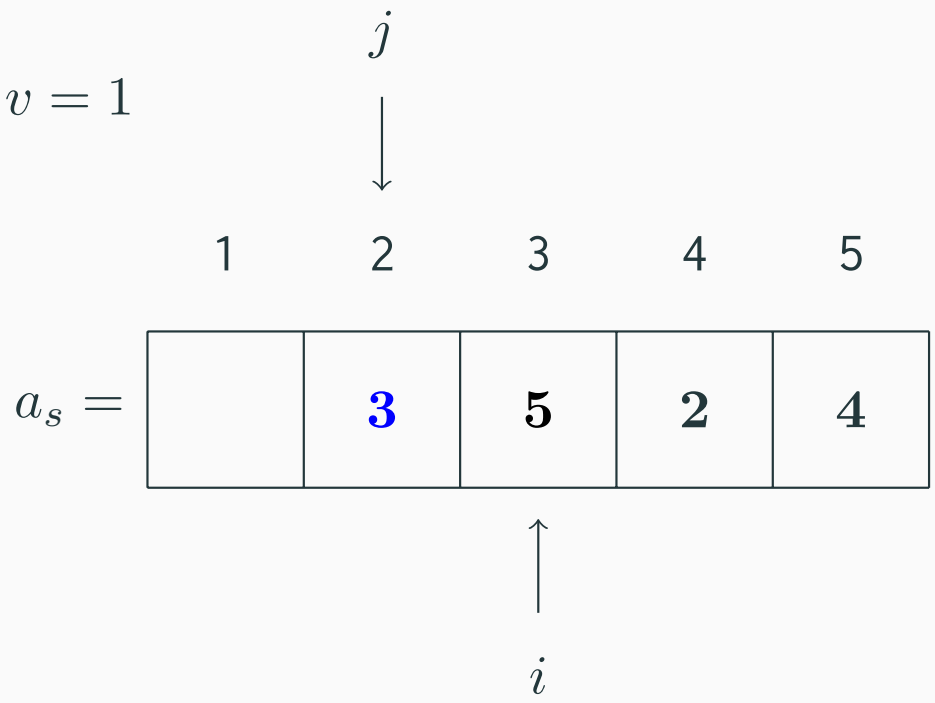
Visualização do insert sort



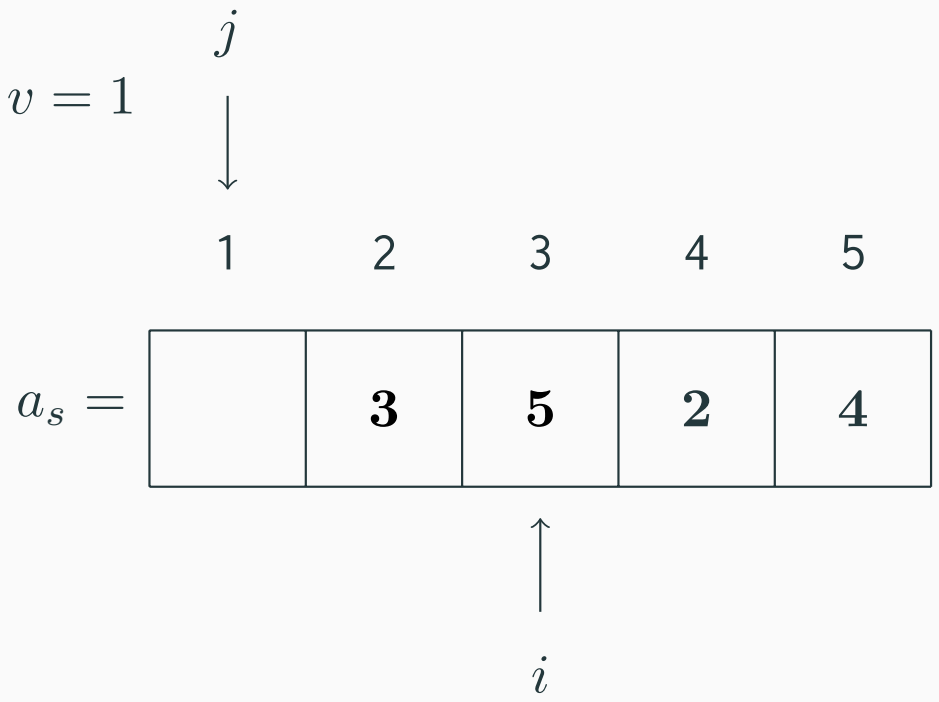
Visualização do insert sort



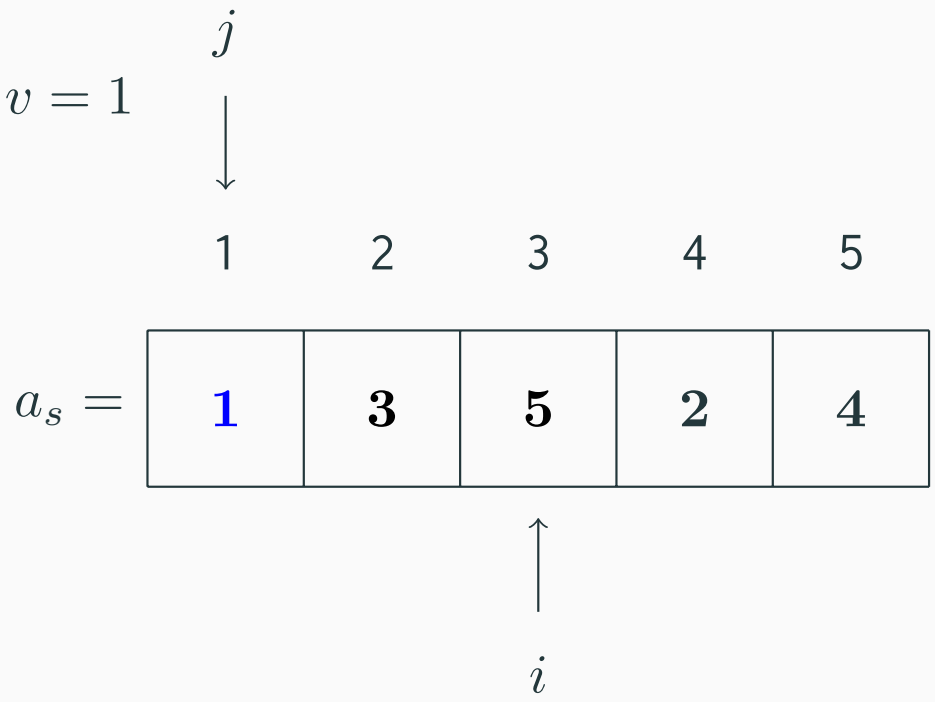
Visualização do insert sort



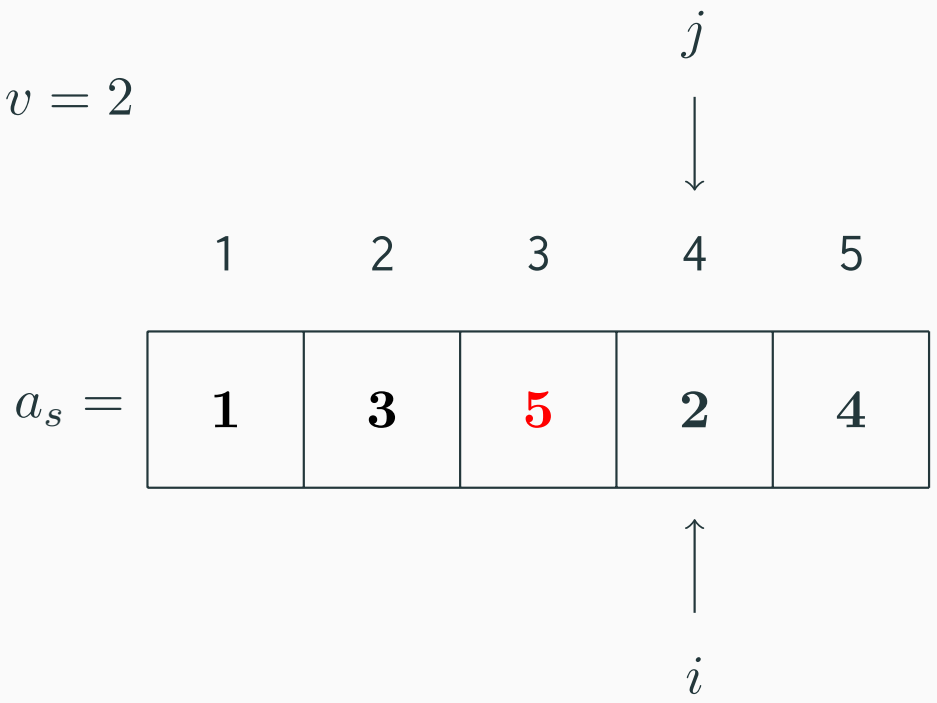
Visualização do insert sort



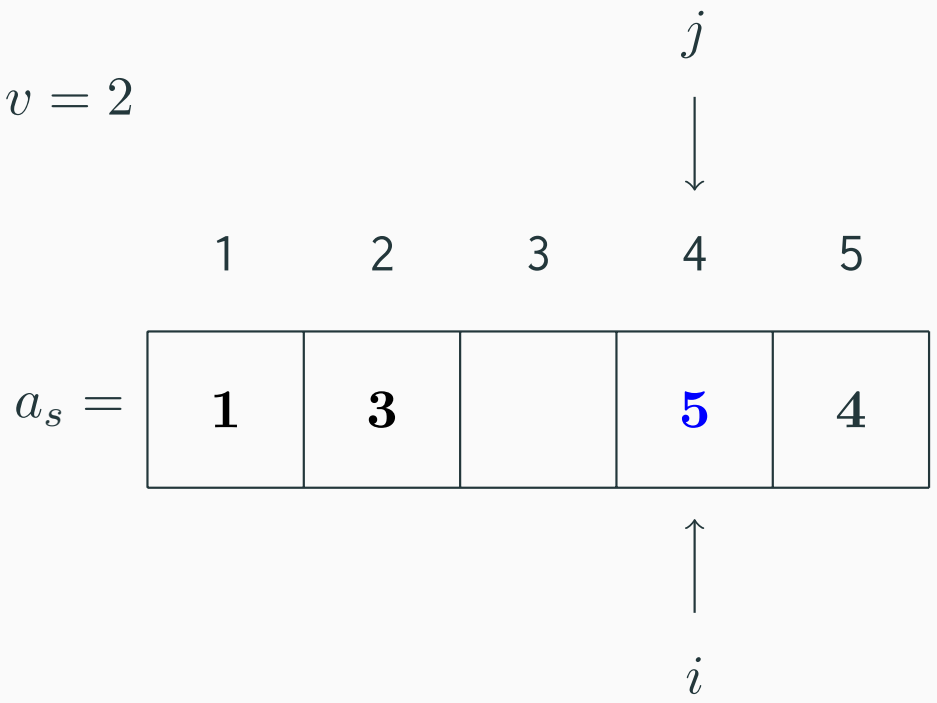
Visualização do insert sort



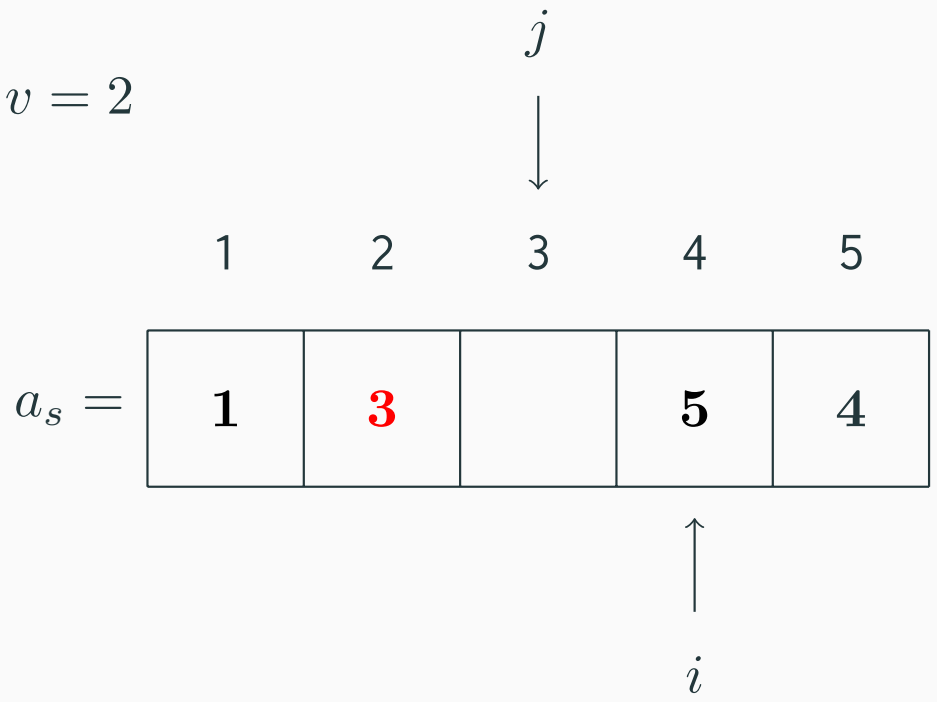
Visualização do insert sort



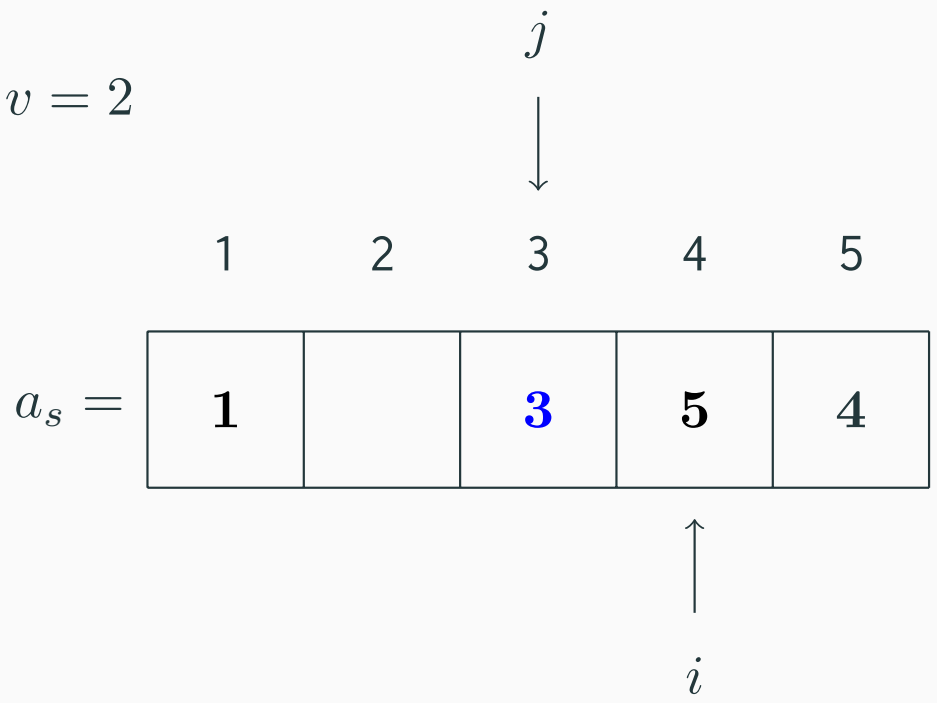
Visualização do insert sort



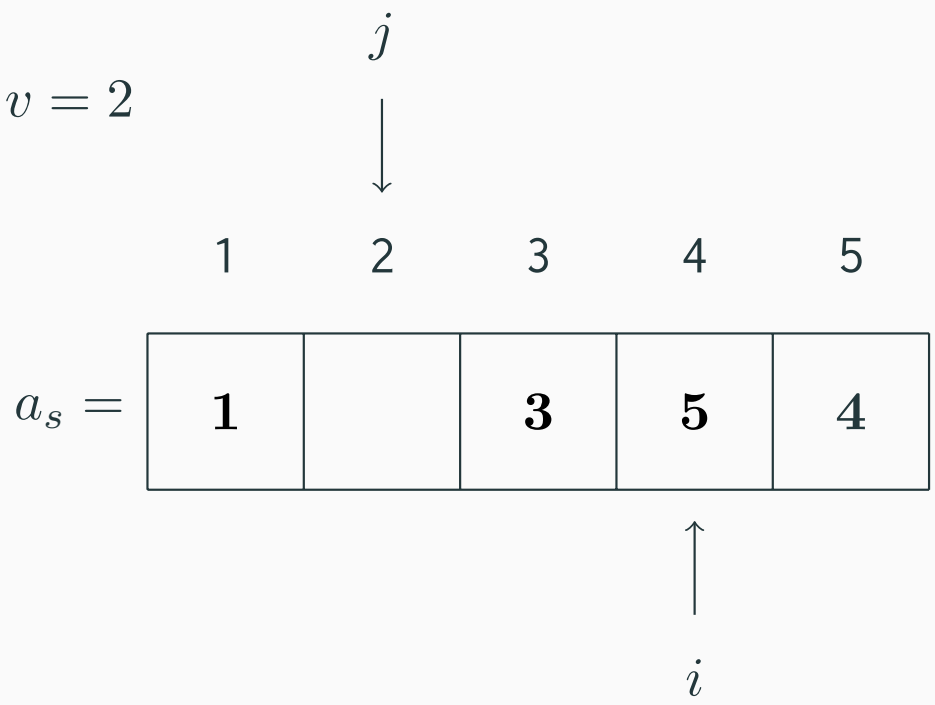
Visualização do insert sort



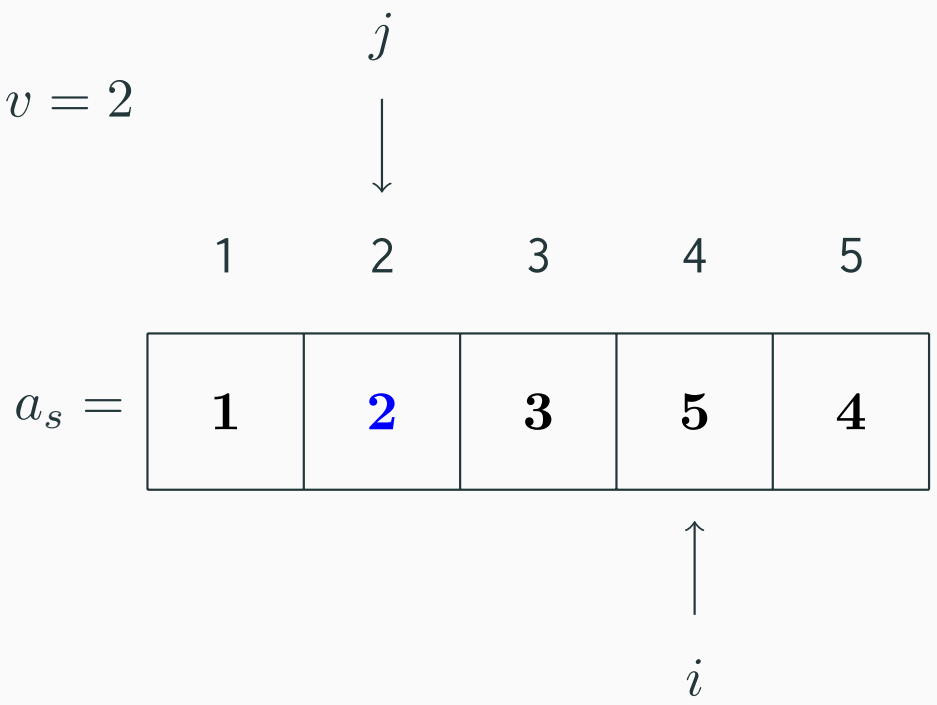
Visualização do insert sort



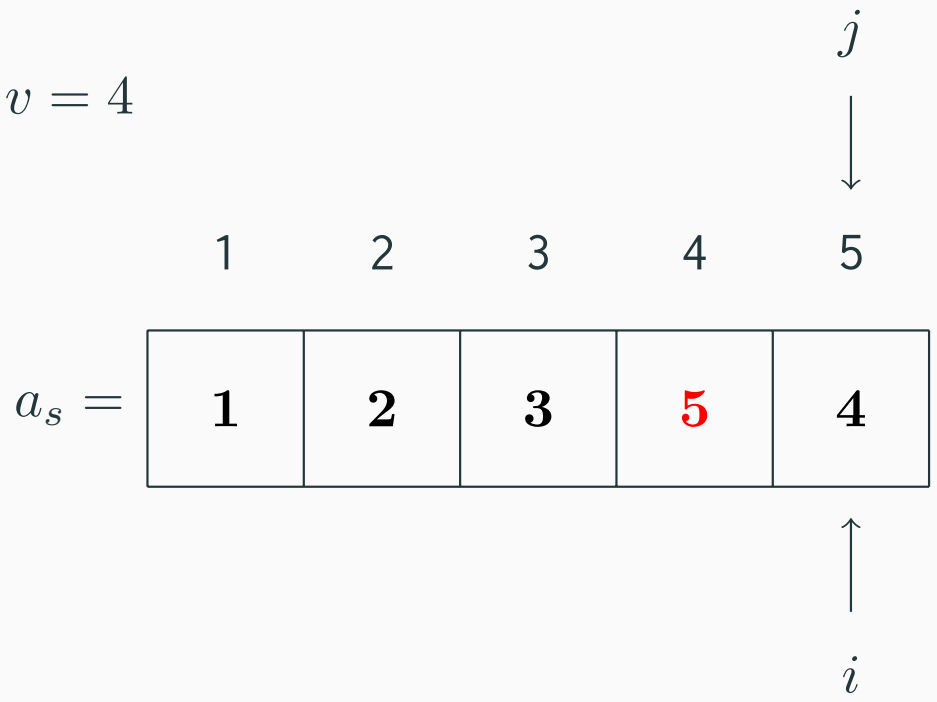
Visualização do insert sort



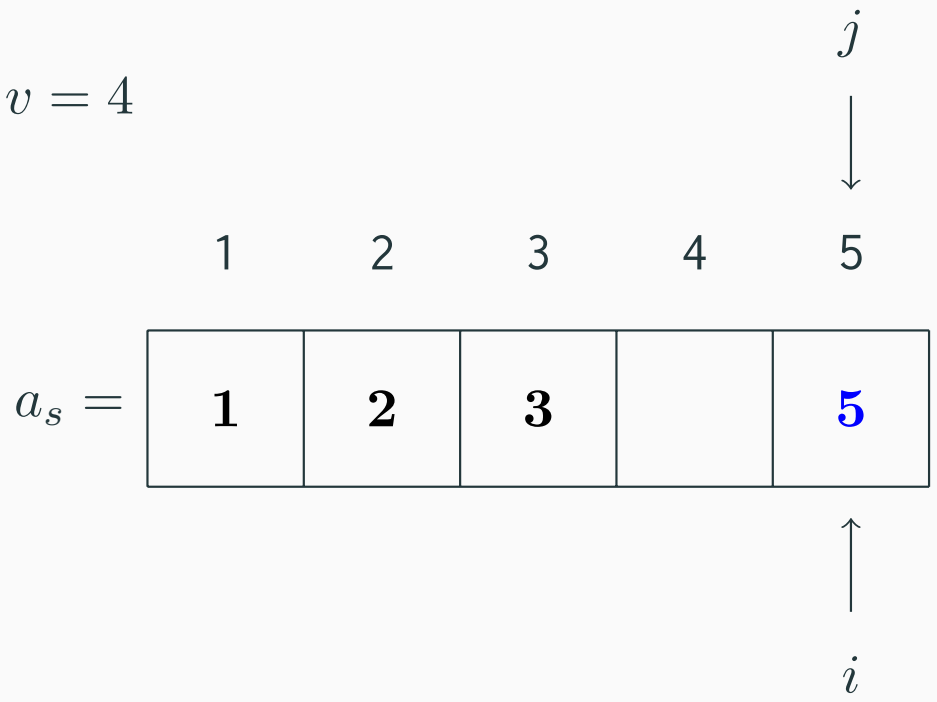
Visualização do insert sort



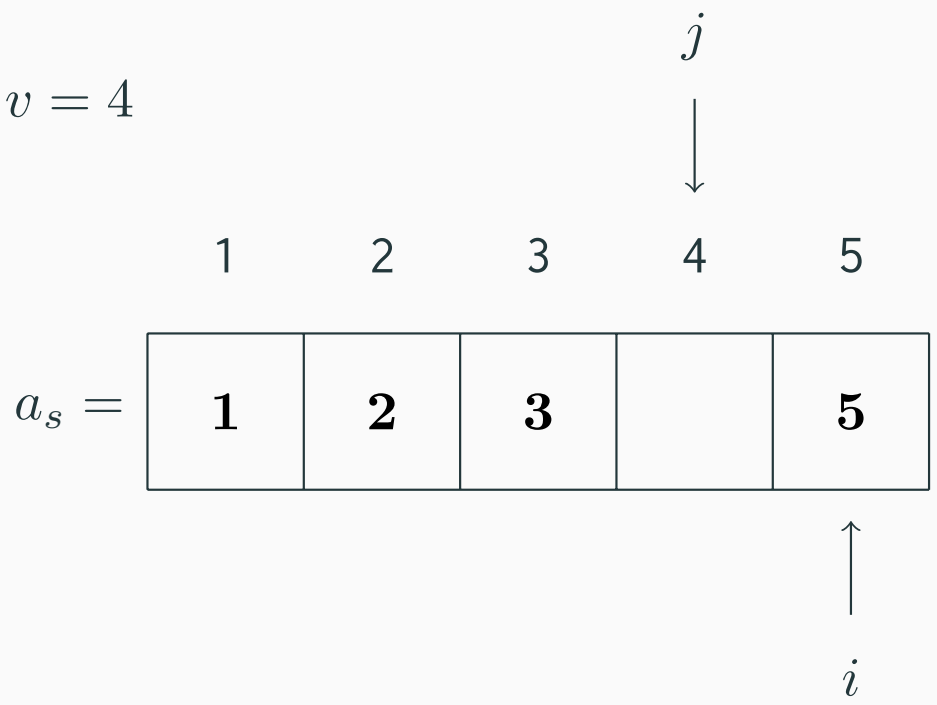
Visualização do insert sort



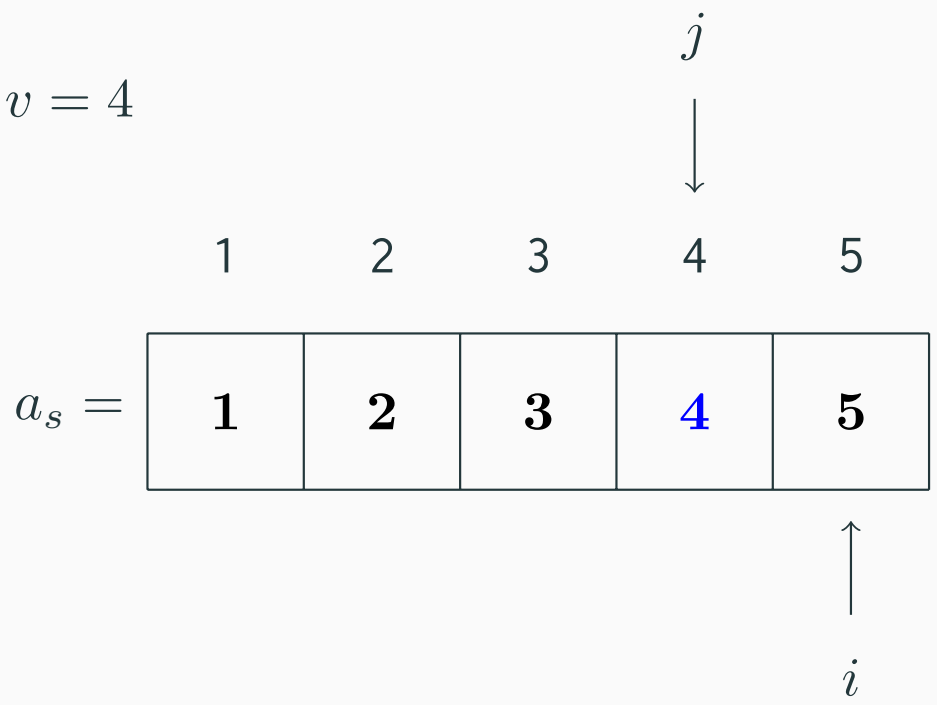
Visualização do insert sort



Visualização do insert sort



Visualização do insert sort



Implementação do insert sort em C++

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

template<typename T>
void insert_sort(vector<T>& as)
{
    int N = as.size();

    for (int i = 1, j; i < N; ++i)
    {
        auto v = as[i];

        for (j = i; j and as[j - 1] > v; --j)
            as[j] = as[j - 1];

        as[j] = v;
    }
}

```

Implementação do insert sort em C++

```
22 int main()
23 {
24     vector<int> as { 3, 5, 1, 2, 4 };
25 
26     insert_sort<int>(as);
27 
28     for (size_t i = 0; i < as.size(); ++i)
29         cout << as[i] << (i + 1 == as.size() ? '\n' : ' ');
30 
31     return 0;
32 }
```

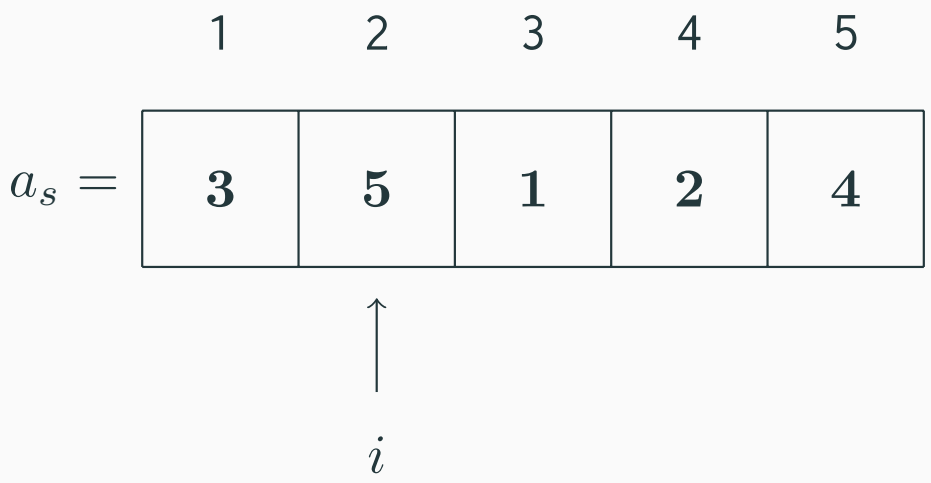
Bubble Sort

Bubble Sort

- *Bubble sort* é um algoritmo de ordenação estável, *in-place* e quadrático
- É um algoritmo popular em cursos introdutórios de algoritmos, embora tem a implementação mais complexa e pior tempo de execução em relação ao *selection sort*
- Ele itera até N vezes sobre os elementos
- Em cada iteração, se ele encontrar um par de elementos adjacentes que estão fora de ordem, ele inverte a posição de ambos
- Se uma dada iteração não fizer nenhuma troca, o algoritmo é finalizado
- Como, a cada iteração, ao menos o maior elemento fora de posição será posicionado corretamente, o algoritmo sempre termina com o vetor ordenado

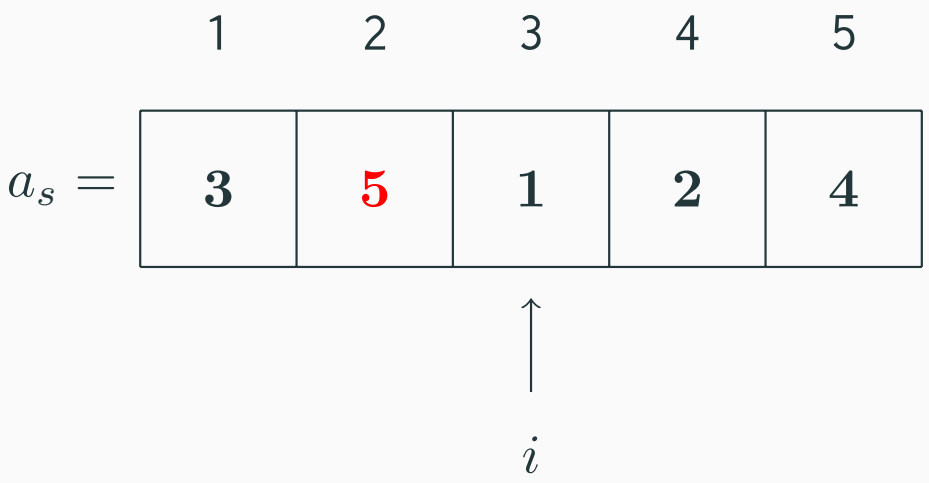
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



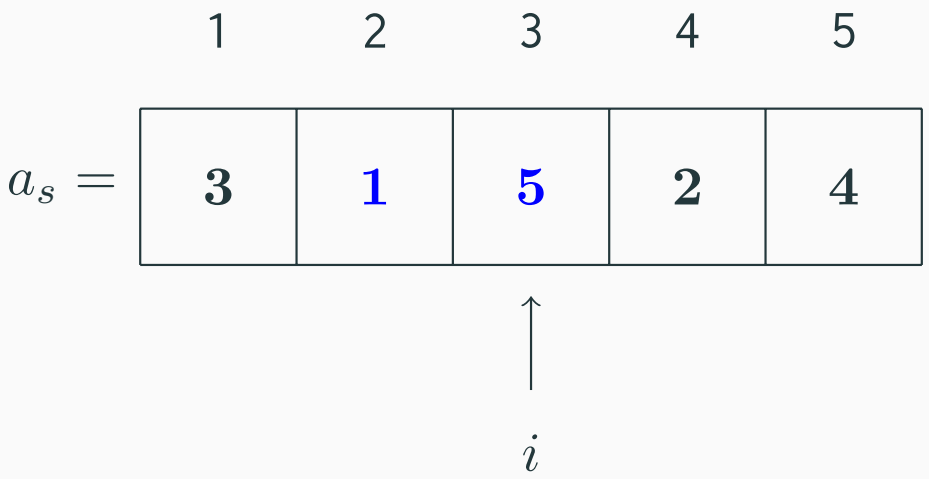
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



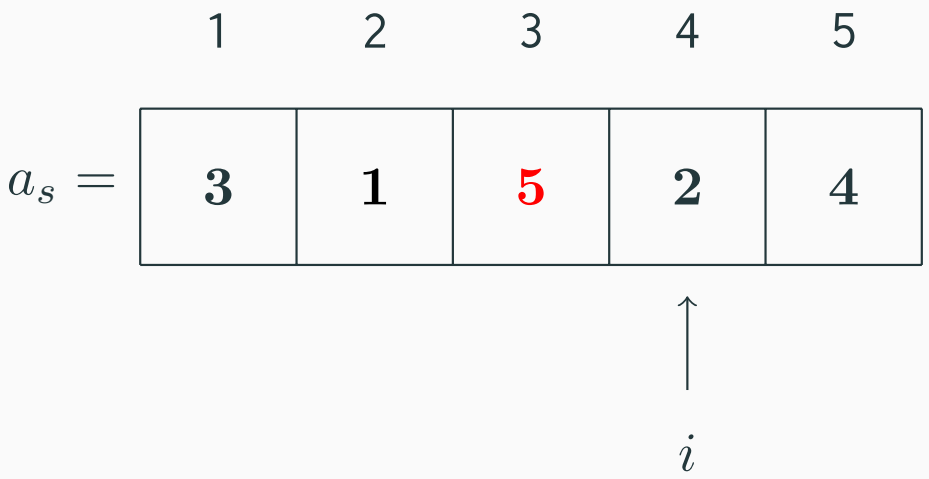
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



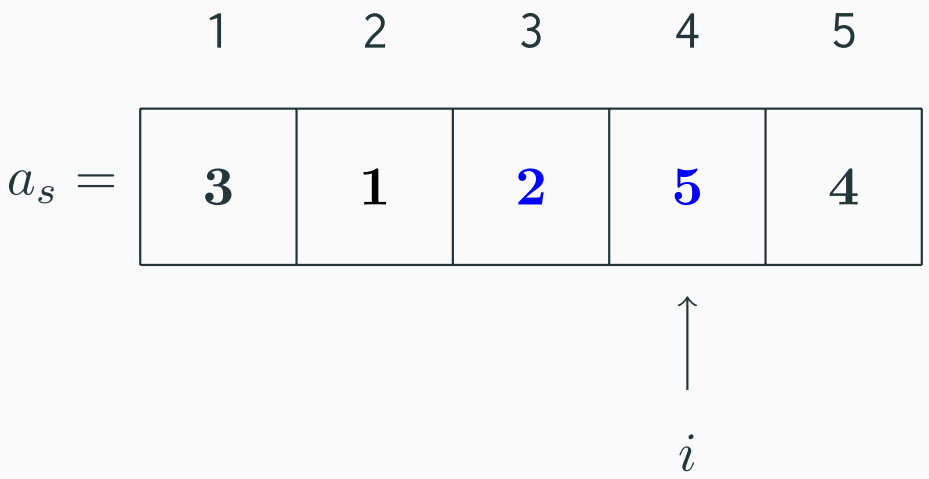
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



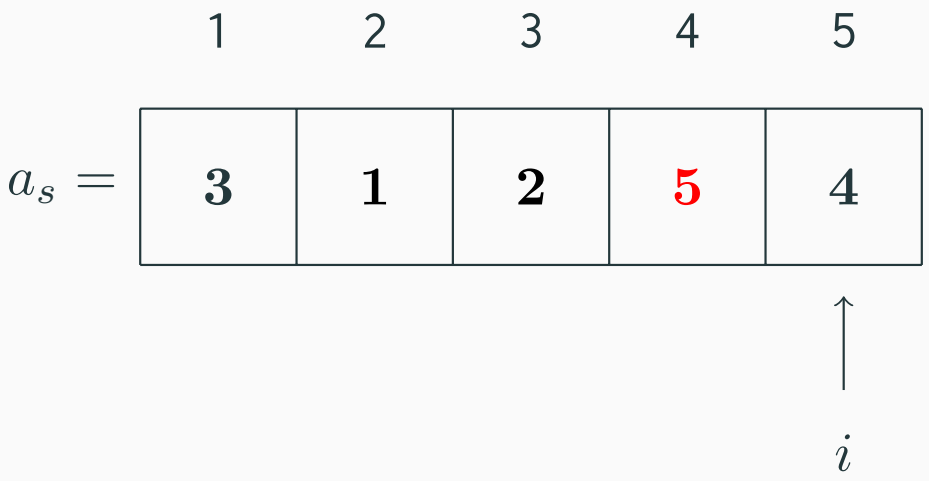
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



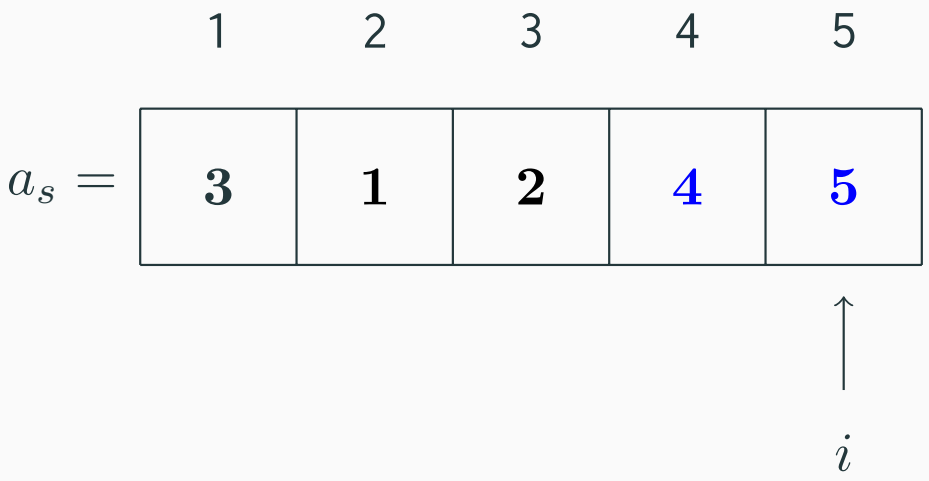
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



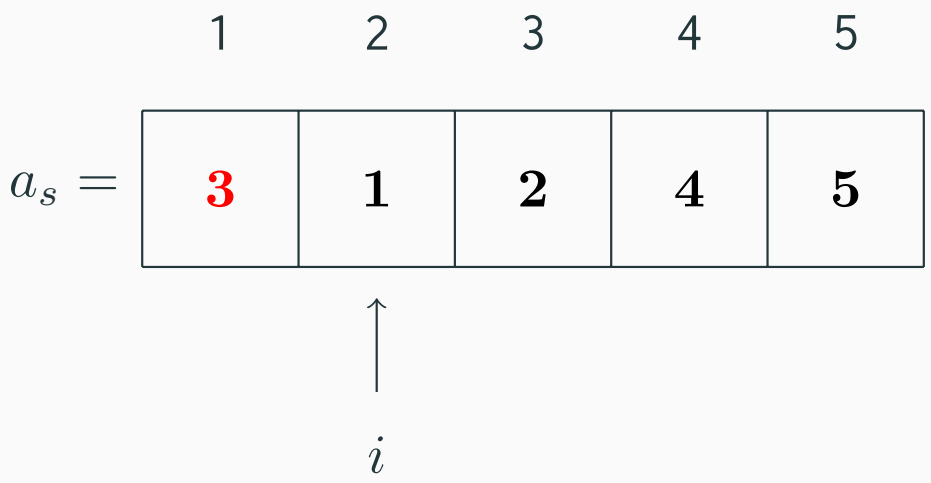
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



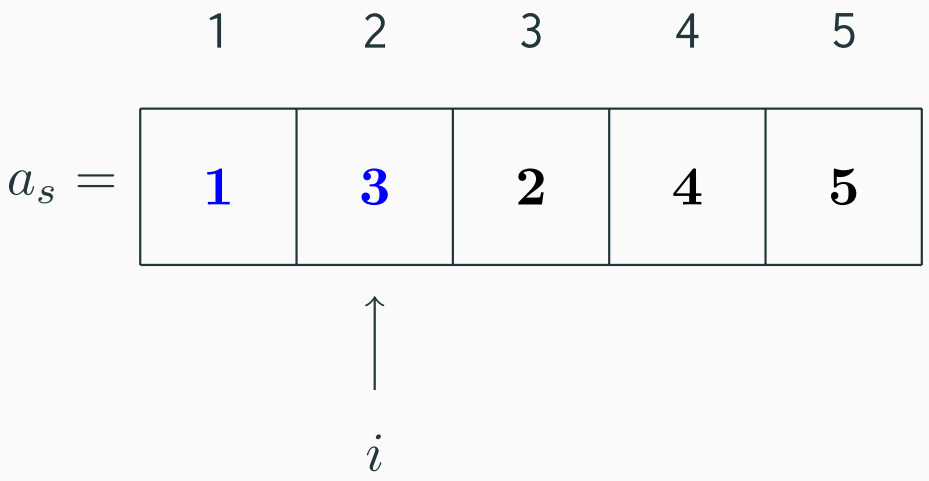
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



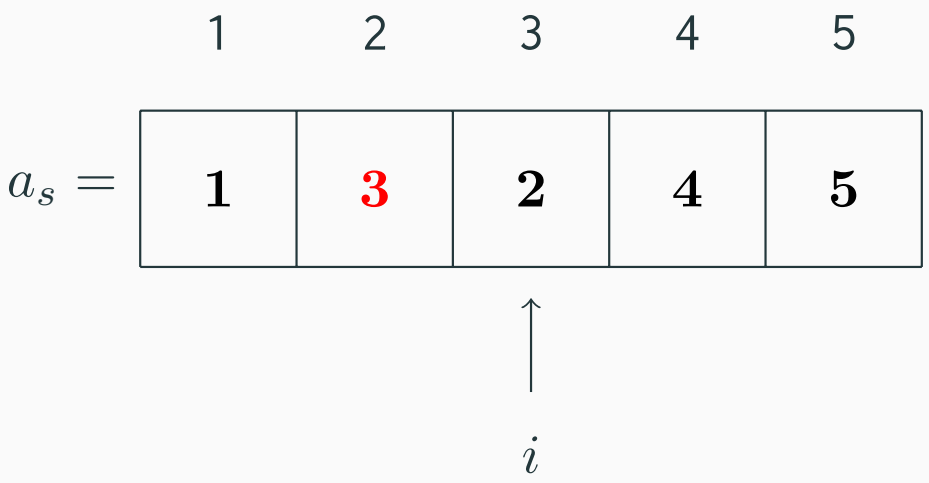
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



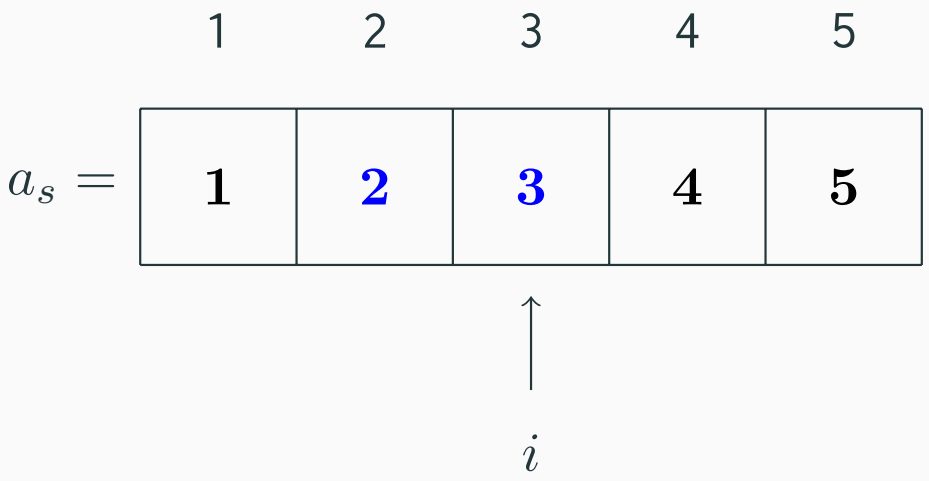
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



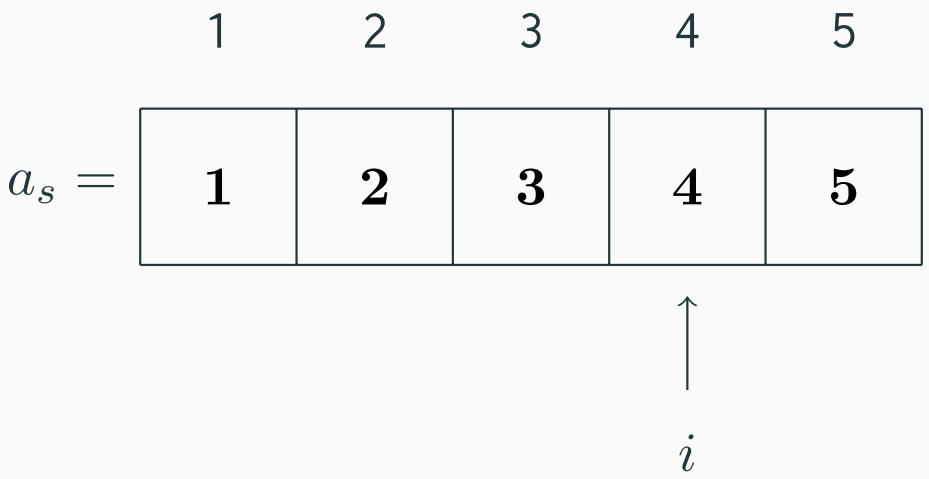
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`true`**



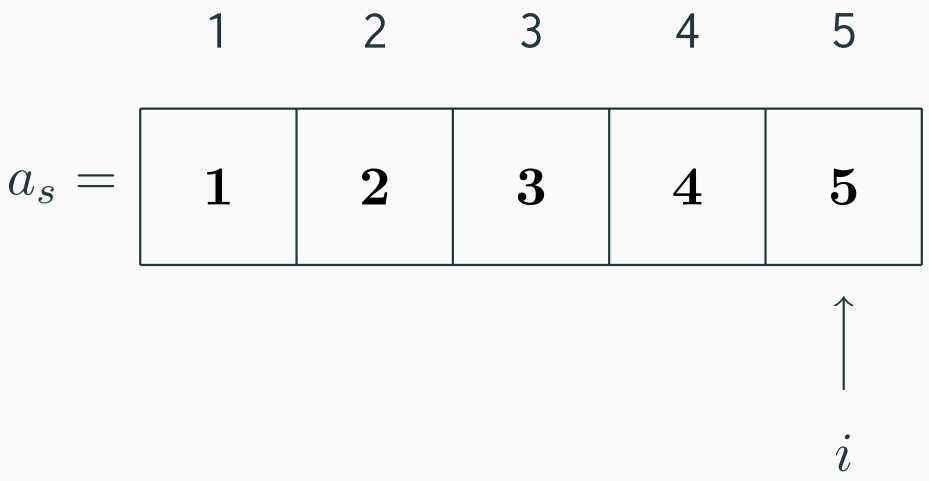
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



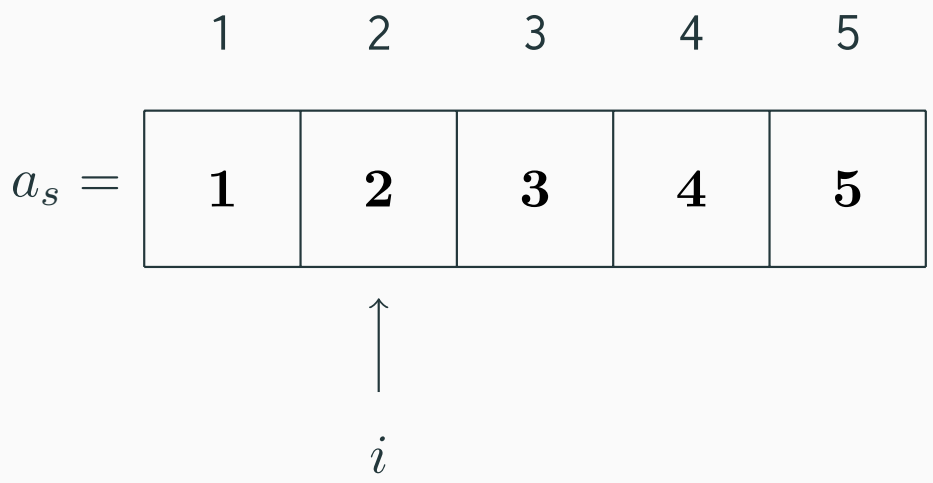
Visualização do bubble sort

updated $=$ **true**



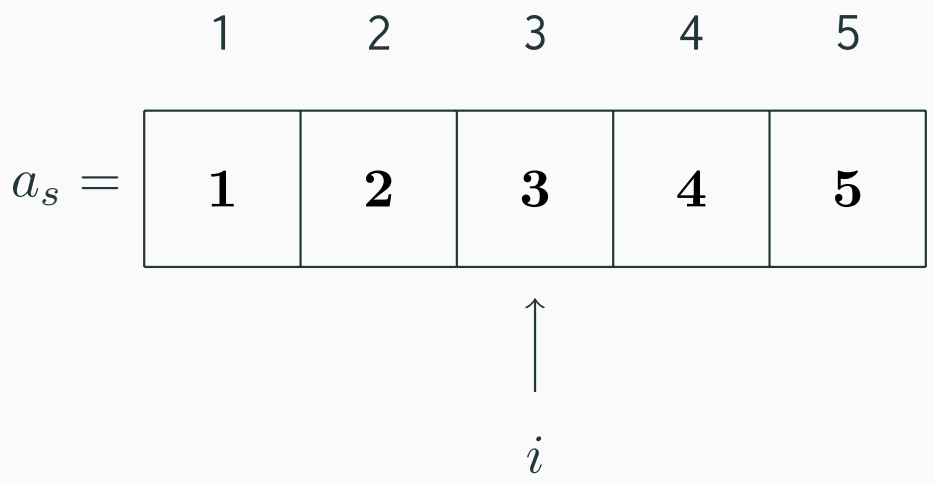
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



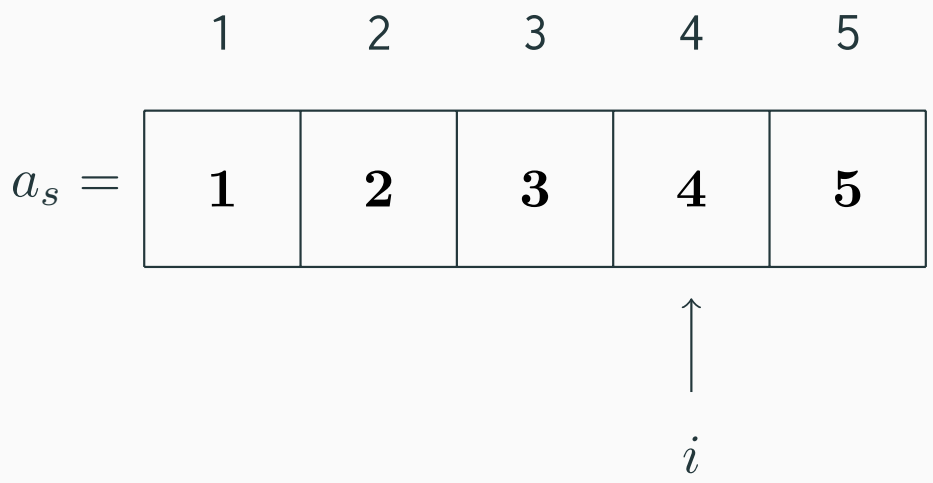
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



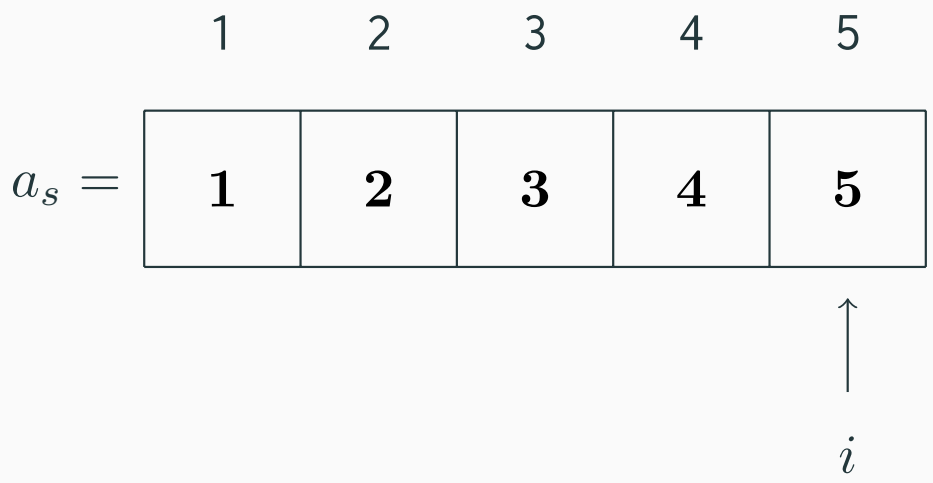
Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



Visualização do bubble sort

updated $=$ **`false`**



Implementação do bubble sort em C++

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

template<typename T>
void bubble_sort(vector<T>& as) {
    int N = as.size();
    bool updated;

    do {
        updated = false;

        for (int i = 1; i < N; ++i) {
            if (as[i - 1] > as[i]) {
                updated = true;
                swap(as[i - 1], as[i]);
            }
        }
    } while (updated);
}
```

Implementação do bubble sort em C++

```
22
23 int main()
24 {
25     vector<int> as { 3, 5, 1, 2, 4 };
26
27     bubble_sort<int>(as);
28
29     for (size_t i = 0; i < as.size(); ++i)
30         cout << as[i] << (i + 1 == as.size() ? '\n' : ' ');
31
32     return 0;
33 }
```

Referências

1. **DROZDEK**, Adam. *Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.
2. **KERNIGHAN**, Bryan; **RITCHIE**, Dennis. *The C Programming Language*, 1978.
3. **STROUSTROUP**, Bjarne. *The C++ Programming Language*, 2013.
4. **SEDGEWICK**, Robert. *Algorithms*, 4th edition, 2011.
5. Wikipédia. *In-place algorithm*, acesso em 01/10/2018.[1]
6. Wikipédia. *Partially Ordered Set*, acesso em 01/10/2018.[2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/In-place_algorithm
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Partially_ordered_set