Física Computacional II (510240)

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Tarea 01

Profesor : Dr. Roberto Navarro
Ayudante : Vicente Cárdenas **Entrega:** 18 de octubre de 2021

Pregunta 1 (3 pts)

(a) (1 pt) Usando expansiones en series de Taylor, demuestre las siguientes fórmulas para la primera y tercera derivadas centradas:

$$f'(x) = \frac{f(x - \frac{3}{2}h) - 27f(x - \frac{1}{2}h) + 27f(x + \frac{1}{2}h) - f(x + \frac{3}{2}h)}{24h} + O(h^4)\,, \tag{1}$$

$$f'''(x) = \frac{-f(x - \frac{3}{2}h) + 3f(x - \frac{1}{2}h) - 3f(x + \frac{1}{2}h) + f(x + \frac{3}{2}h)}{h^3} + O(h^2)\,. \tag{2}$$

(b) (1 pt) Estime el error numérico de la primera derivada según la ecuación (1), pero considerando efectos por errores de redondeo al usar un computador. Luego, estime el valor de h que minimiza este error.

(c) (1 pt) Tome una función $f(x)$ de su elección, que no sea un polinomio, pero que conozca su primera derivada analítica. Luego, grafique el error absoluto entre la primera derivada analítica y la ecuación (1) como función de h en el rango $10^{-20} < h < 0.1$, para algún valor de x de su elección. En la misma figura, grafique el error estimado según el resultado del ítem (b).

(d) **(voluntario, +0.3 pts)** Con las aproximaciones del ítem (a), se pueden encontrar tres fórmulas distintas para $f'(x)$, todas con error $O(h^2)$. ¿Cuál de ellas es conveniente de programar por sobre las demás y por qué?

(e) **(voluntario, +0.1 pts)** En el ítem (c), el gráfico del error dependerá de si sus cálculos son a precisión simple (32 bits) o doble (64 bits). Averigüe cómo controlar la precisión de sus cálculos para graficar el error numérico y el error estimado en ambos casos.

Pregunta 2 (3 pts) La ecuación de movimiento de un péndulo amortiguado es:

$$\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0\,, \tag{3}$$

donde $\theta = \theta(t)$ es el ángulo, como función del tiempo t, que forma el péndulo respecto de una línea vertical; g es la aceleración de gravedad, ℓ el largo del péndulo y η es una constante de amortiguamiento.

(a) (1 pt) Defina $\tau = t\sqrt{g/\ell}$ y demuestre que la ecuación (3) se puede reescribir para que dependa de una sola constante adimensional, definida por $\nu = \eta\sqrt{(\ell/g)}$.

(b) (1 pt) Resuelva numéricamente la ecuación diferencial adimensional, según el ítem (a), usando los métodos de Euler y del salto de la rana. Grafique las soluciones para distintas condiciones iniciales en un gráfico de $\dot{\theta}$ como función de θ (este es un gráfico conocido como el *espacio de fases*).

(c) (1 pt) Considere ángulos $\theta \ll 1$. Compare la solución analítica con la numérica para un oscilador armónico supercrítico ($\nu > 1$), subcrítico ($\nu < 1$) y crítico ($\nu = 1$).