Laboratorio 2 - Muestreo y Aliasing

Señales y Sistemas 2025

Condiciones de trabajo

Este laboratorio deberá realizarse en parejas.
Fecha de entrega: Lunes 10 de noviembre de 2025.

Objetivo

El objetivo de este laboratorio es realizar simulaciones computacionales para:

1. Entender cómo se realiza el cálculo de la transformada de Fourier en sistemas digitales.
2. Comprender cabalmente el fenómeno de *aliasing*, o traslape, mediante la generación y manipulación de ejemplos en señales de audio, imagen, y video.

Instrucciones

Programación

Todas las actividades están basadas en elaborar programas de computadora para desarrollar las actividades. Se utilizará **Python** y la IDE online **Google Colab** (colab.research.google.com) que permite la ejecución de cuadernos Jupyter en la nube, sin necesidad de instalar programas en forma local.

Política para el uso de IA

Recomendamos (¡recomendamos!) utilizar alguna solución de inteligencia artificial (ej. ChatGPT, Gemini) para reducir los tiempos de elaboración de los distintos códigos. El foco del laboratorio está en comprender los conceptos y resultados, no en la programación en sí misma. El uso de estas herramientas no exime de la responsabilidad de comprender y ser capaz de explicar el código utilizado, ni de la responsabilidad sobre los resultados obtenidos.

Entregables

Como resumen del trabajo realizado, se deberá realizar:

- Código para realizar las tareas solicitadas. Se entregará como un enlace a un cuaderno de Google Colab.
- Un informe de laboratorio que contenga las respuestas de todas las consignas planteadas en cada actividad. Además de responder las preguntas, agregue al informe todas las imágenes y gráficas que consideren pertinentes para justificar sus respuestas.
- Una defensa oral del trabajo realizado, en la cual se responderán preguntas sobre los conceptos involucrados y los resultados obtenidos. Debe poder explicarse el código utilizado, aun el que haya sido brindado por el equipo docente.

Pautas para los informes

Los informes deberán estructurarse en secciones, una por cada actividad. Cada sección deberá contener:

- Una breve sección de introducción, indicando qué se hizo y cómo. No es necesario realizar un marco teórico exhaustivo, pero sí es necesario explicar brevemente los conceptos involucrados.
- Los resultados obtenidos, incluyendo gráficos, tablas, etc., y las respuestas a las preguntas planteadas.
- Un análisis/discusión de los resultados obtenidos, incluyendo una comparación con lo esperado.

El informe debe cerrar con una sección de conclusiones sobre el total de lo que se hizo: ¿qué se aprendió, confirmó, verificó en cada parte?

Las imágenes que aparezcan en el informe tienen que estar referidas y explicadas en el texto. Una gráfica sin explicación no tiene valor. Además de la referencia en el texto, cada imagen debe tener un título y una leyenda que explique lo que la misma muestra.

Los informes deberán tener no más de 10 páginas.

Citas y referencias

Todos los elementos del código y del informe que no sean de su autoría deben estar apropiadamente referenciados. Las citas deben aparecer en el lugar donde está el material de terceros, no alcanza con tener una lista de referencias genéricas al final.

Introducción

Nuestra vida cotidiana está sumergida en el procesamiento digital de señales continuas. Diariamente escuchamos pistas de música y miramos fotos y videos a través de nuestros dispositivos inteligentes. Para que esto sea posible, las señales analógicas de nuestro entorno deben de alguna manera ser "digitalizadas" para poder ser almacenadas y procesadas en computadoras digitales.

Este laboratorio apunta a entender el proceso de digitalización de señales y distinguir cuándo las muestras que tomamos para digitalizar la información van a representar fielmente a sus contrapartes de tiempo continuo. También quedará en evidencia cómo continuamente suceden estos fenómenos de representación incorrecta de la información, y que nos topamos con ellos más frecuentemente de lo que pensamos.

Marco teórico

Fourier en la práctica: CTFT, DTFT, y DFT

En el laboratorio 1 se trabajó con el cálculo y visualización, mediante una computadora, de la representación espectral -de Fourier- de señales analógicas, específicamente de señales de audio. Sin embargo, por su naturaleza digital, una computadora no puede representar directamente a una señal continua (analógica) ni a su espectro (CTFT) que también es una señal continua. ¿Es posible entonces visualizar el espectro de una señal analógica en una computadora? ¿Cómo?

La respuesta corta es: en lugar de trabajar con la señal original continua $x(t)$ y su CTFT $X(j\omega)$, trabajamos con una versión muestreada de la misma $x_{T_s}[n]$ y su DTFT $X_{T_s}(e^{j\theta})$. Como ya se vió en el curso, en ciertas condiciones estos dos espectros son equivalentes (Teorema del Muestreo). Específicamente, en caso de que la DTFT se calcule sobre una señal $x_{T_s}[n]$ que resulta del muestreo de una señal continua $x(t)$, y que dicho muestreo se haga en las condiciones del Teorema del Muestreo, entonces la DTFT de $x_{T_s}[n]$ en el intervalo $\omega \in [-\pi, \pi]$ es una compresión o estiramiento en el eje de frecuencia de $X(j\omega)$, la CTFT de $x(t)$:

$$X(j\omega) = T_s \cdot X_{T_s}(e^{j\omega/f_s}), \quad |\omega| < \pi f_s$$

Sin embargo la DTFT sigue siendo una señal continua (de variable $\theta \in [-\pi, \pi]$), y por tanto no puede ser representada directamente en una computadora. Para resolver esto, se trabaja en su lugar con la DFT (Transformada Discreta de Fourier) de la señal discreta $x[n]$, que es una señal discreta en frecuencia y por tanto puede ser representada en una computadora. La DFT está predicada en el hecho de que, en la práctica, cualquier señal sobre la que trabajemos en una computadora es necesariamente acotada en el tiempo (tiene un comienzo y un fin), pues sólo podemos almacenar un número finito de muestras en la memoria de la computadora.

Discrete Fourier Transform (DFT)

Sea una señal discreta $x[n]$ acotada en el tiempo (es decir, que comienza y termina) con N muestras de duración. Esta señal puede asumirse como una señal discreta tradicional (con $n \in \mathbb{Z}$) pero que vale 0 fuera del intervalo $[0, N-1]$. La DFT de $x[n]$ está definida como:

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1}$$

Es decir, la DFT de la señal se define igual que la DTFT, pero evaluada únicamente en N puntos equiespaciados en el intervalo $[0, 2\pi)$, lo que equivale a tomar N muestras de la DTFT de $x[n]$ en $\theta_k = \frac{2\pi}{N} k$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

La DFT entonces puede pensarse como una versión *muestreada* de la DTFT para señales discretas acotadas en el tiempo. Su transformada inversa (ec. de síntesis) está dada por:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1}$$

Una forma alternativa de pensar en la DFT es como una transformación lineal que mapea un vector de N muestras de la señal discreta $x[n]$ a un vector de N muestras de su espectro $X[k]$. Es decir, una transformación lineal $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Sea $\mathbf{x}$ el vector columna que contiene las N muestras de la señal discreta, y sea $\mathbf{X}$ el vector columna que contiene las N muestras de su espectro. Entonces la DFT puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}$$

Donde $\mathbf{W}$ es la matriz de la DFT, cuyos elementos están dados por $W_{k,n} = e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k, n = 0, 1, \ldots, N-1$. Expresando esta ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j(2\pi/N)0\cdot 0} & e^{-j(2\pi/N)0\cdot 1} & \cdots & e^{-j(2\pi/N)0\cdot(N-1)} \\ e^{-j(2\pi/N)1\cdot 0} & e^{-j(2\pi/N)1\cdot 1} & \cdots & e^{-j(2\pi/N)1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(2\pi/N)(N-1)\cdot 0} & e^{-j(2\pi/N)(N-1)\cdot 1} & \cdots & e^{-j(2\pi/N)(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Esta transformación es invertible, y por tanto las N muestras del espectro $X[k]$ contienen toda la información necesaria para reconstruir las N muestras originales de la señal $x[n]$ mediante la transformada inversa de Fourier discreta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{X}$$

En resumen:

- **CTFT:** Es la transformada de Fourier de una señal continua ($x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Es también una señal (en frecuencia) continua ($X(j\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) pues su variable independiente es continua.

- **DTFT:** Es la transformada de Fourier de una señal discreta ($x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$). Es también una señal (en frecuencia) continua ($X(e^{j\theta}) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$). Cuando la DTFT se calcula a partir de las muestras de una señal continua, y el muestreo se hace en las condiciones del Teorema del Muestreo, la DTFT es una versión comprimida o estirada de la CTFT de la señal continua original.

- **DFT:** Es la transformada de Fourier de una señal discreta acotada en el tiempo ($x[n] : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{C}$). Es una señal (en frecuencia) discreta ($X[k] : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{C}$), pues se calcula únicamente en un conjunto finito de puntos equiespaciados. Puede pensarse como una versión muestreada (muestras en el espacio de frecuencia) de la DTFT. Más aun, estas muestras contienen toda la información necesaria para reconstruir la señal original $x[n]$ mediante la transformada inversa de Fourier discreta.

Debe notarse que si bien es cierto que la DTFT es equivalent a la CTFT en ciertas condiciones, y la DFT es una versión muestreada de la DTFT cuando la señal es acotada en el tiempo que permite reconstruir la señal discreta, **no es estrictamente correcto decir que la DFT es una versión muestreada de la CTFT** y no es posible reconstruir exactamente la señal original $x(t)$ a partir de la DFT de sus muestras. Esto se debe a que cualquier señal acotada temporalmente es necesariamente de ancho de banda infinito (y viceversa, cualquier señal de ancho de banda finito es necesariamente infinita en el tiempo). Por tanto, las condiciones en que la DFT representa muestras de la DTFT son incompatibles con las condiciones en que la DTFT representa la CTFT de una señal continua. Sin embargo, en la práctica, si la señal continua original es tiene muy poca de su energía fuera de una banda de frecuencias limitada, y se toman suficientes muestras de la misma (condición de Nyquist), la DFT de las muestras puede utilizarse para obtener una buena aproximación de la CTFT original.

Aliasing

Como se vió en clase, el *aliasing* o traslape ocurre cuando una señal analógica es muestreada por debajo de la frecuencia de Nyquist, y luego se reconstruye una señal analógica a partir de las muestras resultantes. Los ejemplos cotidianos de este fenómeno son múltiples, y en este laboratorio se trabajarán ejemplos de audio, imagen, y video.

Caso 1D: Audio

Las señales de audio son señales que registran la presión de aire, que es lo que percibimos como sonido. La presión de aire en un punto del espacio puede entenderse como una señal $P(t)$ continua, y como tal es una señal en las condiciones que típicamente tratamos en el curso. El registro digital de señales de este tipo permite su procesamiento y reproducción en dispositivos electrónicos modernos, como puede ser un celular o una computadora. A efectos de poder escuchar una señal de audio digital, es necesario reconstruir la señal de presión de aire $P(t)$ a partir de sus muestras, proceso que típicamente se realiza mediante hardware utilizando electrónica apropiada ("placa de sonido") conectada a un transductor (parlante o auricular).

Caso 2D: Imágenes

Una imagen digital puede pensarse como una matriz de elementos cuadrados (**pic**ture **el**ement**s** o pixels), cada uno con un color asignado. En el contexto de nuestro curso, podemos pensarla como una señal discreta de dos variables: $I[m,n]$ donde m representa la columna y n la fila del pixel, y cada pixel toma un valor numérico que describe su color correspondiente.[1]

La resolución de la imagen refiere a la cantidad de pixeles de la misma, y a mayor número de pixeles se habla de una mayor resolución. Dada una escena visual, con un tamaño dado que se desee registrar, la capacidad de un sistema de fotografía digital para capturar detalles pequeños en la escena depende directamente de su resolución: registrar apropiadamente detalles más pequeños requieren de una mayor resolución. En el contexto de estas señales, la "tasa de muestreo" de la señal equivale a la distancia entre dos puntos registrados por pixeles consecutivos, y por tanto se puede medir en pixeles por metro o px/mm en lugar de Hz como ocurre con señales temporales.

A diferencia del caso de audio, las imágenes digitales no suelen reconstruirse explícitamente como una señal continua, si no que se despliegan directamente en forma digital ya que los dispositivos de visualización (por ejemplo un monitor de computadora o la pantalla de un teléfono móvil) son en sí digitales pues están divididos en pixeles también.[2] Esto es equivalente a tener una señal continua pero constante a tramos, pues la iluminación o color es constante dentro del área de cada pixel, aunque varía entre pixeles. La percepción de la imagen como un continuo de luminancia, en lugar de una colección de puntos o pequeños rectángulos de colores, ocurre al nivel de nuestro sistema nervioso si los pixeles son suficientemente pequeños.

Caso 3D: Video

Los videos digitales son una sucesión de imágenes digitales a una tasa dada (esta tasa se mide habitualmente en cuadros por segundo, o fps). La tasa de fotogramas puede interpretarse como una tasa de muestreo (temporal) sobre la escena visual que es continua. Por tanto, los mismos pueden pensarse como una señal discreta de tres variables independientes: $I[m,n,k]$ donde m y n tienen la misma interpretación que en el caso de una imagen digital, y k es un índice temporal que indica el número de fotograma o cuadro.

En el caso de los videos, los sistemas de reproducción simplemente muestran la secuencia de fotogramas en una rápida sucesión, y es nuestro sistema visual el que reconstruye una señal continua (en realidad, la percepción de una señal continua).[3]

En esta actividad se utilizará un video de una rueda girando para reproducir el efecto rueda de carro. Este es el nombre del efecto por el cual un movimiento rotatorio, como el de una rueda, se percibe como si tuviera una velocidad y dirección de rotación aparente que es diferente a la real. Este efecto se observa principalmente en videos de ruedas de vehículos, y obedece al *aliasing* del estímulo visual (que tiene una frecuencia natural dada por la periodicidad del movimiento rotatorio) y su muestreo al registrarlo en video.[4] Un ejemplo de este efecto puede verse en este video.

Actividad 1: Fourier en la práctica

Por lo visto en la introducción, la DFT se puede utilizar para calcular, parcialmente y bajo ciertas suposiciones, la CTFT de una señal continua. En esta actividad se visualizará la CTFT de una señal continua a partir de sus muestras, utilizando la DFT.

En una computadora, el cálculo de la DFT se realiza típicamente mediante un algoritmo conocido como la Transformada Rápida de Fourier, o FFT (por Fast Fourier Transform). Este **algoritmo** permite calcular la DFT de una señal digital en forma particularmente eficiente[5]. La amplia mayoría de los lenguajes de programación que se usan en contextos de cálculo científico y técnico poseen una implementación de este algoritmo, usualmente bajo una función del nombre `fft()`, que toma un vector de largo N y devuelve otro vector del mismo largo que contiene los valores de la DFT. Esta es la función a la que normalmente recurrimos cuando queremos calcular "la transformada de Fourier" de una señal utilizando una computadora.

Suponga que se tiene una señal $x(t)$ que satisface que $x(t) = 0, \ \forall t < 0$ y $\forall t > T$. Dicha señal se muestrea utilizando una frecuencia de muestreo f_s que satisface las condiciones del Teorema del Muestreo, obteniéndose una señal $x[n]$. Se pide:

Parte 1: cálculo analítico de la CTFT de una señal acotada en el tiempo

Calcule la CTFT de una señal que es sinusoidal con frecuencia f_0 en un intervalo de tiempo $[0, T]$ (siendo T el largo del intervalo) y vale 0 fuera de este intervalo.

Se sugiere utilizar la propiedad de multiplicación de la CTFT aplicada a una señal sinusoidal y un pulso rectangular apropiado.

Parte 2: implementación de la DFT para calcular la CTFT

Escriba una función que tome como argumentos de entrada un vector que contiene las muestras de una señal continua para $k \in [0, N-1]$, y la frecuencia de muestreo a la que se adquirieron dichas muestras, y grafique el módulo del espectro de la CTFT de $x(t)$ en función de la frecuencia, expresada en Hz.

Para lograr esto, deberá utilizar la función `fft()` para calcular la DFT de la señal muestreada, y luego deberá realizar las conversiones necesarias para graficar el espectro en función de la frecuencia continua, utilizando las relaciones entre CTFT, DTFT, y DFT vistas en el marco teórico. Será necesario también leer la documentación de la función `fft()` para entender cómo interpretar los resultados que esta devuelve, y específicamente el orden de las muestras en el vector resultante. Será útil también utilizar la función `fftshift()`, cuya función y uso también deberá investigarse en la documentación.

Para probar el código, genere un vector que contenga muestras de una sinusoidal pura de frecuencia elegida por usted, a una tasa de muestreo también elegida por ustedes, y utilice la función generada en la primera parte. La frecuencia de la señal debe ser tal que T (la duración del intervalo sinusoidal de la señal) sea mucho más largo que el período de la señal, y no sea un múltiplo del mismo. Verifique que los resultados son consistentes con lo calculado en la parte 2.

Actividad 2: Aliasing

En esta actividad se verán tres ejemplos de *aliasing*: en audio, en imágenes, y en video. Para los tres ejemplos se utilizará el cuaderno de Google Colab que puede encontrarse aquí (debe hacerse una copia del mismo para poder editarlo).

Parte 1: Audio

Para la reproducción de señales de audio registradas en medios digitales, es necesario reconstruir una onda de presión de aire a partir de las muestras con las que se cuenta de la señal. Esta tarea típicamente es realizada por un procesador (o tarjeta) de audio conectado a un parlante o auricular en computadoras, celulares y otros dispositivos electrónicos modernos. Es decir, la reconstrucción de la señal continua de audio ocurre a nivel del *hardware*, y no en el *software*.

En el cuaderno de Colab provisto se brinda código de computadora para simular la digitalización de un tono puro de sonido y su reproducción. Se pide:

1. Generar un tono de 10kHz muestreado a 44100Hz y escucharlo. ¿Qué percibe? ¿Cuál es la frecuencia mínima para muestrear un tono de estas características dentro de las condiciones del teorema del muestreo?
2. Generar un tono de 10kHz muestreado a 22050Hz y escucharlo. ¿Cambió lo que percibe? ¿Por qué?
3. Generar un tono de 10kHz muestreado a una frecuencia de su elección entre 12kHz y 14kHz y escucharlo. ¿Cambió ahora lo percibido? ¿A un tono de qué frecuencia es equivalente lo que se escucha? ¿Qué es lo que espera escuchar según el fenómeno de *aliasing*?
4. Repita la parte anterior utilizando una frecuencia de muestreo de 5250Hz.
5. **Extra:** Busque un archivo de audio de una persona hablando (no música ni canto), y cárguelo en su computadora. Mediante submuestreo, reduzca la tasa de muestreo del archivo, hasta que pueda escuchar en el mismo distorsión notoria de la voz por *aliasing*. Describa qué es lo que percibe y la frecuencia de muestreo a la que fue posible observar este fenómeno.

Parte 2: Imágenes

En esta sección se estudiará el efecto de utilizar distintas resoluciones para representaciones digitales de imágenes. Para esto, se simulará el efecto de registrar una misma escena utilizando distintas resoluciones de imagen y se observarán los efectos sobre ciertos patrones periódicos que aparecen en la misma. Se pide:

1. Utilizando esta imagen en el cuaderno de Colab provisto, observe y describa lo que se percibe cuando se visualiza la imagen en su resolución original.
2. Repita el paso anterior cuando se reduce la resolución de la imagen utilizando factores de 2x, 3x, 4x y 7x.[6]
3. El fenómeno observado en la parte anterior es una manifestación de *aliasing*. Discuta, en este contexto, qué son los "tonos" o "frecuencias" que aparecen en la imagen, y cómo se puede interpretar la tasa de Nyquist.

Parte 3: Video

Junto con este laboratorio se proveerán cuatro archivos, que contienen una animación de la misma rueda blanca y negra girando a cuatro velocidades distintas. Medidas en revoluciones por segundo (rps) las velocidades son: 0.5, 1, 2, y 4 rps.

Se pide:

1. Reproduzca los archivos provistos. Observe y describa la rotación que se percibe en cada uno.
2. Considere ahora un pixel cualquiera del video que caiga dentro de la rueda. Si tomamos la intensidad lumínica de dicho pixel, en cualquiera de los videos, la misma puede describirse como una onda cuadrada ya que el pixel toma únicamente dos valores: negro ('0') y blanco ('1'). Encuentre la frecuencia fundamental de dicha onda cuadrada en función de la velocidad de rotación de la rueda. Con este resultado, estime la tasa de Nyquist necesaria para una reconstrucción apropiada de la señal visual en cada video.

3. Con el resultado de la parte anterior, estime la frecuencia de rotación que espera percibir sabiendo que la tasa de cuadros de todos los videos es $30\,fps$. ¿Es esto consistente con lo descrito en la primera parte?

4. **Extra:** utilizando la función de reproducción a distintas velocidades del reproductor de video elegido, reproduzca el video de $2\,rps$ a velocidad 0.5x y 2x. ¿Coincide lo que se percibe con los videos de $1\,rps$ y $4\,rps$? Discuta por qué.

---

1. Los estándares para representar imágenes a color suelen establecer que cada pixel tome tres valores para representar el color, por ejemplo representando la 'cantidad' de rojo, verde, y azul del pixel respectivamente. A los efectos de este ejercicio la representación elegida es irrelevante. ↩

2. En el caso de que la pantalla o monitor tenga una resolución mayor a la de la imagen en cuestión, puede interpolarse la imagen para simular una mayor resolución a la que realmente se tiene y generar una sensación perceptualmente más agradable (una imagen "más suave" y "menos pixelada"). ↩

3. Esto es cierto aún en los videos mal llamados "analógicos" que en realidad también son una sucesión discreta de fotogramas, al igual que los videos digitales. Es decir, no existen registros videográficos realmente analógicos o continuos. ↩

4. El efecto también ocurre en la vida cotidiana al observar ruedas girando bajo iluminación continua, sin mediar ningún proceso de muestreo explícito. No existe consenso acerca del mecanismo de este efecto y posiblemente no sea por *aliasing*. ↩

5. La DFT puede calcularse directamente a partir de su definición, sin embargo esta forma directa de cálculo es computacionalmente muy ineficiente para señales de tamaño grande. Específicamente, su complejidad computacional (cantidad de cuentas que deben realizarse) es proporcional a N^2. En contraste, el algoritmo FFT realiza el mismo cálculo pero tiene una complejidad computacional proporcional a $N\log_2(N)$, lo que representa una mejora sustancial cuando N es grande. ↩

6. La simulación de haber obtenido la misma escena con una resolución menor en este caso se realiza mediante submuestreo: es decir, se descartan pixeles. Por ejemplo, en el caso de una reducción 7x, se descartan 6 de cada 7 pixeles, y la imagen total termina teniendo 49 veces menos pixeles que la versión original. ↩