

Muestreo y Aliasing

Laboratorio 2

Naré Harispe, Bruno Moreira, María Martínez

I. INTRODUCCIÓN

En este laboratorio se utilizaron distintas representaciones de la Transformada de Fourier; CTFT (espectro de una señal continua), DTFT (espectro de señales discretas) y la DFT (versión discreta y finita de la DTFT). Esta última permite el cómputo a través del algoritmo FFT, utilizado en la Actividad 1 para analizar una señal muestreada.

Además, se utilizó en la Actividad 2, el Teorema de Muestreo de Nyquist-Shannon. Cuyo fundamento recae en que la frecuencia de muestreo debe ser el doble del ancho de banda de la señal muestreada si se quiere reconstruir la señal original. De no ser cumplida esta condición, se produce *aliasing*, que genera distorsiones en la reconstrucción de la señal.

II. DESARROLLO

Actividad 1: Fourier en la práctica

Parte 1:

Para el cálculo de CTFT de una señal sinusoidal, con f_0 y acotada por un intervalo de tiempo, se tomaron 2 señales auxiliares para construir y hallar su CTFT.

$$z(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$r(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

Multiplicando estas dos señales, se obtiene como señal resultante una cosenoidal truncada $[-T/2; T/2]$:

$$y(t) = r(t) \cdot z(t)$$

Por las propiedades de multiplicación de la DTFT:

$$Y(j\omega) = r(j\omega) * z(j\omega)$$

Por tablas de transformada 4.6 y si sustituimos $j\omega$ por f (Oppenheim, Willsky, Young; 1983; 392):

$$Y(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) * \frac{T \text{sinc}(\pi f T)}{f \pi T}$$

Luego por la propiedad de desplazamiento del impulso y aplicando distributiva, como el impulso es el neutro en la convolución, se logró llevar a esta expresión:

$$Y(f) = \frac{T}{2} (\text{sinc}(\pi T(f - f_0)) + \text{sinc}(\pi T(f + f_0)))$$

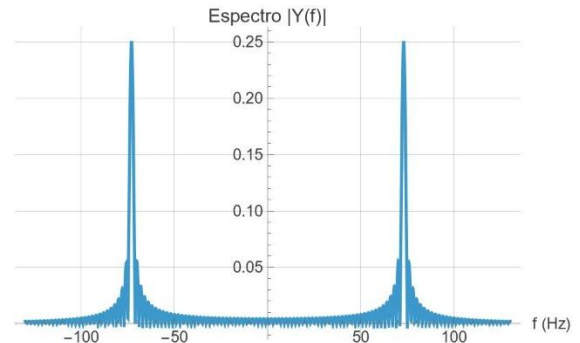


Figura 1: representación gráfica CTFT

La señal $r(t)$ limita la duración en el tiempo, lo que ensancha en frecuencia. A su vez, la señal $z(t)$ da dos picos en $\pm f_0$, pero al convulsionar los espectros de estas dos señales, esos picos se “enacharon”, y dieron como resultado dos *sinc* centrados en $\pm f_0$ que se observan en la Figura 1. A partir de este cálculo analítico, se esperan obtener resultados similares mediante el cómputo en Python.

Parte 2:

Se pide aproximar la CTFT de una señal continua según sus muestras y graficar el módulo del espectro de esta. Para ello se utilizó la función `fft()` para el cálculo de la DFT. Para probar la efectividad del código, se implementó la función generada en la Parte 1, y se compararon los resultados.

Para comprobar que el código es capaz de representar fielmente CTFT mediante el uso apropiado de DFT, se creó una función arbitraria cosenoidal la cual retorna los valores de una señal análoga a la parte 1. Sin embargo, es importante tener en cuenta que se utilizaron muestras de $y(t)$ ya que las herramientas utilizadas para este análisis funcionan de forma discreta.

Como señal de prueba se empleó una función cosenoidal arbitraria, generada con los parámetros:

$$f_0 = 73 \text{ Hz}$$

$$f_s = 250 \text{ Hz}$$

$$T = 0.5$$

```

12 def DFT(x, fs, title="Espectro de Magnitud (FFT)":
13     """
14     Calcula y grafica la FFT de una señal x
15     muestreada a frecuencia fs.
16
17     Parámetros:
18     x : array, señal en el tiempo
19     fs : float, frecuencia de muestreo [Hz]
20     title : str, título del gráfico
21     """
22     N = len(x)
23     X = fft(x)
24     X = (1/fs)*X # Normalización por fs
25     X_shifted = fftshift(X)
26     freqs = fftfreq(N, d=1.0 / fs)
27     X_mag = np.abs(X_shifted)

```

Figura 2: extracto del código utilizado para resolver la parte 2

Viendo la Figura 2, en la línea 12 se definió una función la cual calcula la DFT de una señal x . Se determinan la cantidad de muestras de la señal en la línea 21. Además, se hizo uso de la función $\text{fft}(x)$, la cual recibe un *vector* de la señal entrante y devuelve otro *vector* que representa la magnitud y fase de cada frecuencia presente en la señal (x).

La función $\text{fftshift}()$ reordena los resultados de la FFT para que el eje de frecuencias quede centrado en 0 Hz, resultando con un espectro simétrico con respecto al eje y. La normalización del módulo realizada en la línea 23 ajusta la escala del espectro, y es necesaria debido a la definición de la DFT. Normalizando de esta manera, se ajusta la magnitud del dominio temporal continuo que asegura una relación directa con la CTFT.

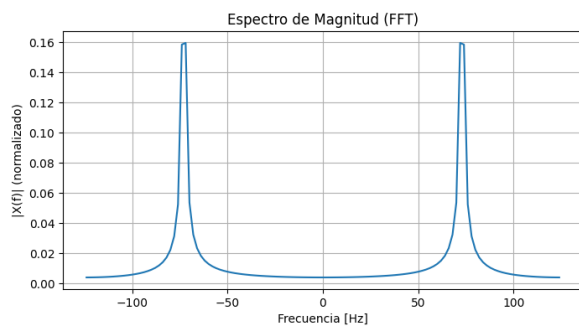


Figura 3: gráfica DFT de $z(t)$ resultante del código utilizado para resolver la parte 2

Al comparar la gráfica de la Figura 3 con $Y(f)$ se observaron algunas similitudes, sin embargo, no se visualizaron las formaciones de los sinc ni la amplitud adecuada, esto se debe a la densidad de puntos que $\text{fft}()$ calcula, para obtener una representación más acorde a lo esperado se utilizó a continuación una técnica llamada zero-padding la cual añade ceros al final de la señal incrementando el número de puntos de la FFT.

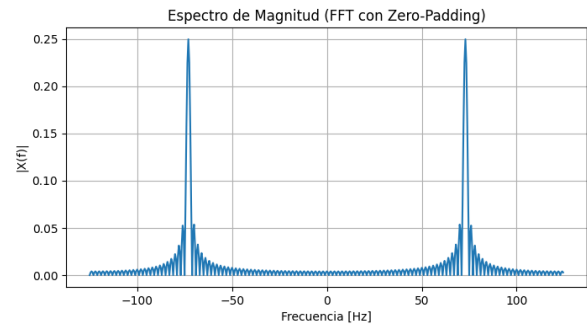


Figura 4: gráfica DFT con zero-padding de $z(t)$

Se comparó el módulo del espectro desplazado en la Figura 4 con el espectro calculado en la Parte 1 mostrado en la Figura 1. Se logró comprobar visualmente a través de las gráficas resultantes la eficacia del código que se realizó en la Parte 2 de esta sección.

Actividad 2: Aliasing

Para estudiar el proceso de digitalización y reproducción de señales de audio, es necesario analizar cómo la frecuencia de muestreo afecta este proceso y la señal reconstruida, este fenómeno es conocido como el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

Según este teorema, la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble del ancho de banda de la señal original, de manera que se pueda luego reconstruir sin perder información. Si esta condición no se cumple entonces ocurre el fenómeno de *aliasing*, donde las componentes de frecuencia se solapan en el espectro, generando una distorsión irreversible en la señal reconstruida. Por lo tanto, al haber casos en los que la condición de Nyquist no se cumple, se espera que la señal reconstruida tenga una frecuencia distinta de la señal original por lo mencionado anteriormente.

A lo largo de esta sección se analizaron audios, imágenes y videos que se encuentran en este [link](#).

Parte 1: Audio

Se generó con el código anterior un tono con una frecuencia de $f_0 = 10\text{kHz}$ muestreado a una frecuencia $f_s = 44.1\text{kHz}$:

La frecuencia mínima para muestrear un tono de estas características es de 21Hz , ya que $21\text{Hz} > 2 \cdot 10\text{Hz}$ esta es el mínimo valor de frecuencia de muestreo para en la señal reconstruida no exista solapamiento.

En consecuencia, las condiciones de frecuencia de esta parte cumplen con la condición de Nyquist, ya que $44.1\text{kHz} > 20\text{kHz}$. Por lo tanto, al reconstruir esta señal, se espera que no haya aliasing.

Se utilizó el código dado anteriormente para muestrear la señal y reproducir el tono. Al escucharlo, se percibió un tono muy agudo y estable.

Del mismo modo, se utilizó la misma frecuencia de la señal, modificando la frecuencia de muestreo a $f_s = 22.05\text{kHz}$:

Al igual que el muestreo anterior la condición de Nyquist se cumple, $22.05\text{kHz} > 20\text{kHz}$, por lo que es

esperable que se escuche exactamente igual al tono anterior.

A través del código se logró escuchar, el mismo tono agudo que en la sección anterior.

Utilizando la misma señal, se modificó nuevamente la frecuencia de muestreo a una que se encuentre entre 12kHz y 14kHz, se eligió 13Hz:

En este caso, como la frecuencia de la señal es de $f_o = 10\text{kHz}$ y la frecuencia de muestreo $f_s = 13\text{kHz}$, la condición de Nyquist no se cumple, $13\text{kHz} < 20\text{kHz}$. Se espera que, al reconstruir la señal, se genere aliasing.

Al escuchar este tono, se logró diferenciar claramente el cambio de frecuencia en el tono reconstruido. Se generó un tono menos agudo, lo que hizo que se percibiera o escuchara más alto.

Nuevamente se utilizó la misma señal, sin embargo, se disminuyó la frecuencia de muestreo significativamente, siendo esta 5250Hz:

Teniendo una frecuencia de señal de $f_o = 10\text{kHz}$, en este caso está claro que la condición de Nyquist no se cumple $5.25\text{kHz} < 20\text{kHz}$. Se espera que, con esta frecuencia de muestreo, al reconstruir la señal se genere mucho aliasing.

Al pasar estas frecuencias por el código utilizado a lo largo de esta sección, se obtuvo un tono mucho más grave que el tono puro inicial. Esto demuestra el efecto del aliasing en el sonido, ya que se pasó de un tono con una frecuencia de 10kHz, a uno con una frecuencia significativamente menor.

Esta nueva frecuencia se puede calcular como:

$$(1) \quad f_{alias} = |f_{inicial} - kf_s|$$

Siendo k el entero más cercano cuando $\frac{f_{señal}}{f_s}$, entonces

$$k = \frac{10k}{5.25k} = 2.$$

$$f_{alias} = |10k - 2 \cdot 5.25k| = 0.5\text{kHz}$$

Por lo tanto, la nueva frecuencia que va a tener la señal va a ser de 500Hz.

Para poder notar las diferencias entre una señal reconstruida sin aliasing y otra con aliasing, se seleccionó la señal de la parte 1 y la señal de la parte 4 de manera de compararlas evaluando su gráfica.

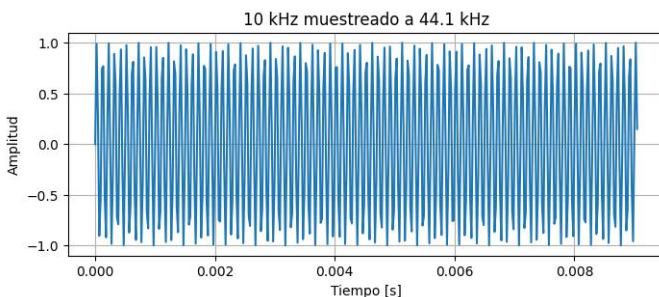


Figura 5: gráfica de la señal reconstruida del tono de 10kHz muestreado a 44.1kHz

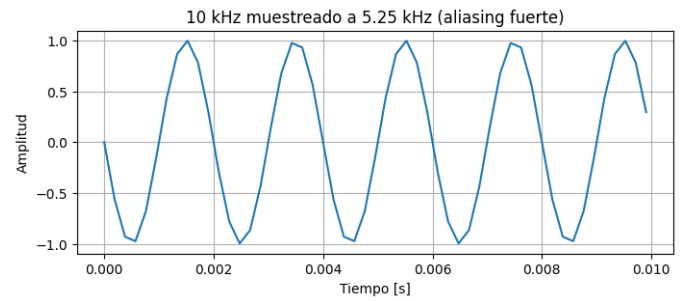


Figura 6: gráfica de la señal reconstruida del tono de 10kHz muestreado a 5.25kHz

Las dos gráficas representan la misma señal original de 10kHz, pero muestreadas a diferentes frecuencias, generando diferentes comportamientos en la señal reconstruida. La Figura 5, corresponde a la señal muestreada a 44.1kHz, una frecuencia que cumple con la condición de muestreo de Nyquist-Shannon, por lo tanto, no se produce solapamiento espectral.

Para reconstruir la señal original, se toman los puntos muestreados y son conectados con líneas, por lo que, visualmente, no se observa una onda sinusoidal perfectamente suave, aunque la frecuencia está correctamente representada.

Si se reproduce auditivamente la señal, el oído humano percibirá un tono muy agudo y estable, correspondiente a la frecuencia real de 10kHz.

En cambio, la Figura 6 representa la señal muestreada a 5.25kHz, una frecuencia de muestreo que no cumple la condición de Nyquist, por lo que se produce solapamiento espectral.

En este caso, la señal reconstruida utilizó menos puntos de muestreo de los necesarios para una reconstrucción fiel. Esto generó que la representación de la señal parezca de una frecuencia menor a la original, en este caso de aproximadamente 500Hz. Visualmente se observa una onda suave, pero en realidad, esta onda contiene componentes espectrales de frecuencia más baja, que no pertenecen a la señal original.

Si se reproduce esta señal, se percibirá un tono grave, muy distinto a lo que realmente se tendría que escuchar (agudo) al reconstruir la señal muestreada correctamente.

Para finalizar esta sección del estudio, se tomó un audio de una persona hablando. Al igual que las partes anteriores, se modificó la frecuencia de muestreo de manera de estudiar el efecto del aliasing en un audio que no este compuesto por un único tono puro.

Al ser un audio de una persona hablando, se espera que, si no se muestrea la señal en las condiciones de Nyquist, la grabación se perciba distorsionada o incluso irreconocible. Esto es debido al solapamiento espectral, fenómeno en el cual partes del espectro original que se encuentran por encima de $f_s/2$ se pliegan a frecuencias más bajas, tal como se calculó en la ecuación (1).

En el caso de que ocurra aliasing, auditivamente se espera que las vocales, que suelen ser más graves, predominen en la

señal reconstruida, mientras que las consonantes se vuelvan indistinguibles.

Se procesó el siguiente audio mediante una herramienta web que permitió muestrear el archivo original a distintas frecuencias de muestreo. Esta página web fue utilizada únicamente para emular el proceso de digitalización.²

A partir de eso, se obtuvieron dos audios. A partir de eso, se obtuvieron dos señales:

- Señal A, muestreada a una frecuencia de 8000Hz
- Señal B, muestreada a 1000Hz.

En la señal A se distingue el mensaje, sin embargo, se notan diferencias con la señal original. Se percibe una leve pérdida de calidad y de agudos en comparación con el audio original. Esto se debe a que la frecuencia de muestreo fue suficiente para capturar el rango fundamental de la voz humana (4kHz), pero no los armónicos más altos.

Por otra parte, en la señal B, se presenta un aliasing severo. Las palabras se vuelven inteligibles, predominan los sonidos graves y como era de esperarse, las vocales son las que más se perciben. Las consonantes desaparecen casi por completo (son componentes que requieren altas frecuencias), dando como resultado un sonido apagado, grave y distorsionado.

Parte 2: Imágenes



Figura 7: imagen dada para evaluar distintas resoluciones

Si se visualiza la Figura 7 en los dos vestidos se perciben patrones complejos de figuras con mucho detalle, si abstraemos esto a las ideas trabajadas anteriormente, serían la equivalencia de una señal con una frecuencia más alta que el resto de la imagen.



Figura 8: imagen evaluada en distintas resoluciones

Al reducir la calidad de la imagen utilizando distintos factores, los patrones de los vestidos se ven distorsionados. Particularmente, evaluando la Figura 8, el vestido azul sufre cambios que representan el efecto del fenómeno de aliasing en las imágenes.

Si se interpreta el patrón de líneas azules y blancas producidas por el vestido como un tono, se puede establecer un determinado rango de frecuencias f_0 . La tasa de Nyquist en este caso sería $f_m \geq f_0$. Al visualizar las distintas imágenes en la figura, se nota como esta condición no se cumplió, lo que generó deformaciones modificaciones en el patrón de la imagen original.

Parte 3: Video

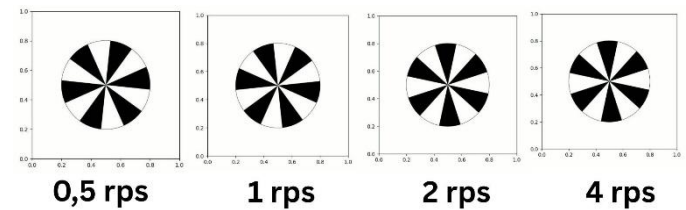


Figura 9: imagen representativa de los videos

Continuando el estudio en videos, al modificar las revoluciones por segundo del mismo video de rueda, se percibió un aumento en la velocidad de giro.

Teniendo en cuenta que la rueda cuenta con 12 divisiones, 6 negras y 6 blancas, se observó que cambia 12 veces de color por vuelta.

Cambiando las rps en el mismo video se obtuvieron las siguientes frecuencias que representan las imágenes de la Figura 9:

- $0.5 \text{ rps} / f_0 = 6.0,5 = 3\text{Hz}$
Nyquist: $f_m > 6\text{Hz}$
- $1 \text{ rps} / f_1 = 6\text{Hz}$
Nyquist: $f_m > 12\text{Hz}$
- $2 \text{ rps} / f_2 = 12\text{Hz}$
Nyquist: $f_m > 24\text{Hz}$
- $4 \text{ rps} / f_3 = 24\text{Hz}$
Nyquist: $f_m > 48\text{Hz}$

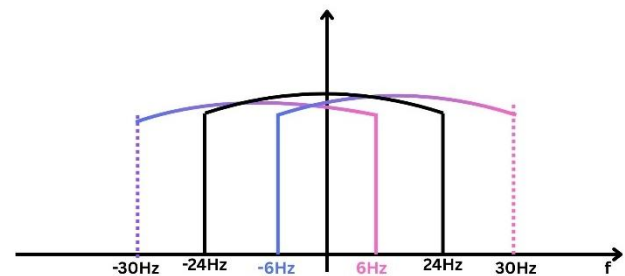


Figura 10: grafica representativa del aliasing (video 4rsp)

Como los videos están almacenados a 30fps, cuentan con una frecuencia f_m . Si se tiene en cuenta las condiciones de Nyquist, el único video que no las cumple es el de 4rps, ya que requiere una mayor tasa de muestreo. Para estudiar con mayor

profundidad que se debería observar en el video, se graficó un croquis del aliasing esperado. El mismo está representado en la *Figura 10*. Esta grafica denota que se debería producir una inversión temporal y debería girar a 1rps.

Al visualizar los videos, lo previamente teorizado se cumple, las ruedas que giran a 4rps y 1rps giran a la misma velocidad.

Para comprar algunos de los videos a distintas velocidades de reproducción se optó por reproducir en conjunto en un solo video.

Al comparar los videos de 2rps a $\times 0.5$ y $\times 2$ de velocidad con el de 4rps y 1rps no observaron similitudes, sin embargo, si se observa con detenimiento la rueda de 2rps se produce un efecto estroboscópico, este fenómeno en el cual la rueda se mueve a una velocidad tan alta y continua, que visualmente parece estar quieto o moviéndose muy lentamente. Esto se puede generar debido a que su frecuencia mínima de muestreo es de 24Hz la cual se encuentra muy cerca de la frecuencia de muestreo del video, siendo más evidente en el video de 2rps a $\times 0.5$

III. CONCLUSIÓN

A partir del estudio en la Actividad 1, se logró hallar una representación adecuada de la CTFT de una señal real acotada arbitraria mediante herramientas computacionales discretas. Esto demuestra la importancia y utilidad de la DFT para el cálculo de Fourier.

Es importante tener en cuenta que para el desarrollo de la Parte 2 de esta sección, fue útil el uso del zero-padding. La implementación de esta técnica permitió incrementar el número de puntos para el cálculo de la FFT, dando como resultado, una representación más acorde al resultado teórico. Sin embargo, esto no es estrictamente necesario, ya que existe la posibilidad de conseguir los mismos resultados desde la propia función de cálculo (`fft()`).

En la Actividad 2, se visualizó, en distintas señales, el efecto del fenómeno de aliasing y cómo este se presenta tanto visualmente como auditivamente.

Los audios estudiados demostraron un cambio en la frecuencia de la señal reconstruida cuando la frecuencia de muestreo no cumplía con la condición de Nyquist, resultando en un tono más grave que el de la señal original. Además, se estudió un audio de una persona hablando, lo que demostró que el aliasing en una señal compuesta por distintos tonos resulta en una señal completamente distorsionada, en donde las vocales predominan y las consonantes se vuelven indistinguibles.

Visualmente se estudiaron imágenes y videos, y nuevamente variando su frecuencia de muestreo o frecuencia fundamental de los mismos se observó cómo los patrones de las imágenes se distorsionan, mientras que, en el video, se ve la rueda no solo cambiando de velocidad, sino también de sentido. A su vez, se realizó una comparación en videos de igual rps pero con distintas velocidades de reproducción. Se observó el efecto estroboscópico en ambos videos, aunque a $\times 0.5$ fue más evidente. Todo esto es debido al solapamiento espectral de la señal reconstruida al aparecer el fenómeno de aliasing.

Referencias

- [1] Zahniser, D. J., & Brenner, J. F. (1985). Signals and systems, by A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and I.T. Young. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, 796 pages, hardbound, \$37.95. Cytometry, 6(4), 392. <https://doi.org/10.1002/cyto.990060420>
- [2] Online-Convert. (s. f.). Convert audio to WAV. online-convert.com. <https://audio.online-convert.com/convert-to-wav>

El código utilizado a lo largo de este estudio se encuentra en este [link](#), además, se pueden ver las gráficas, las imágenes, lo videos y los audios utilizados para el análisis anterior.