

Sistemas LTI

Laboratorio 3

Naré Harispe, Bruno Moreira, María Martínez

I. INTRODUCCIÓN

En este laboratorio se construyó un circuito RC para modelar un sistema LTI (lineal e invariante en el tiempo). En la Actividad 1 se utilizó como entrada del sistema un impulso, un escalón y un pulso rectangular, estudiando tanto teórica como empíricamente la salida frente a dichas entradas.

En la Actividad 2, se evaluó la respuesta en frecuencia del mismo sistema, variando entre distintos valores de resistencia y frecuencias de manera de poder comparar los resultados tanto teóricos y como experimentales.

II. DESARROLLO

Actividad 1:

Predicciones teóricas

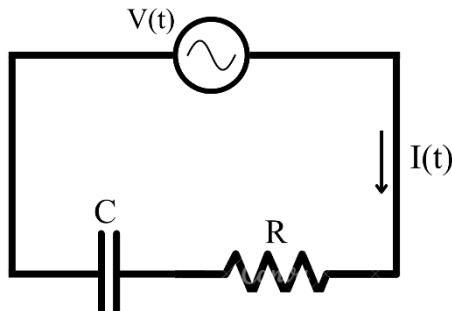


Figura 1: circuito RC

El sistema 1 conformado por un circuito RC, como se muestra en la *Figura 1*, puede ser descripto mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$V(t) = RC \frac{dV_c}{dt} + V_c(t)$$

Se considera $V(t)$ como la entrada y $V_c(t)$ como la salida del sistema. Describo mediante una Ecuación Diferencial lineal de coeficientes constantes se tiene que es lineal e invariante en el tiempo (LTI).

Al ser LTI, se obtiene la respuesta al impulso $h(t)$ el cual permite caracterizar todo su comportamiento. De forma análoga, se calcula a su vez la respuesta en frecuencia del sistema, $H(j\omega)$ que también caracteriza el sistema.

$$\mathcal{F}\{V(t)\} = \mathcal{F}\left\{RC \frac{dV_c}{dt} + V_c(t)\right\}$$

Utilizando la propiedad de derivación de la CTFT (Tabla 4.2 y 4.1):

$$V(j\omega) \frac{1}{(RCj\omega + 1)} = V_c(j\omega)$$

Por lo tanto, se obtuvo del Sistema 1, la siguiente respuesta en frecuencia y su anti transformada:

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

$$h(t) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{RC})} \right\} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Para verificar que esta respuesta al impulso es la correcta se realizará una actividad experimental, comparando, tanto de forma teórica como experimental, el tiempo τ en el cual la respuesta al impulso disminuye a un cierto valor, este proceso se repetirá para otras señales de entrada al sistema.

En este caso los valores de RC utilizados son:

$$C=2.3\mu F$$

$$R=16.07k\Omega$$

Se calcula el tiempo τ tal que $h(\tau) = \frac{h(0)}{e}$. Para ello se evaluó primero la respuesta al impulso en 0, imponiendo la condición a evaluar.

$$h(0) = \frac{1}{RC}$$

$$h(\tau) = \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} = \frac{h(0)}{e}$$

Para que esa igualdad se cumpla, necesariamente $\tau = RC$. Por lo tanto, el tiempo en el que la respuesta al impulso cae 37%, utilizando los valores de resistencia y capacitancia descritos anteriormente las predicciones teóricas son de $t_{teo} = 36.961ms$.

Para realizar el relevamiento del impulso $h(t)$ se armó el circuito RC mostrado en la *Figura 1* en el laboratorio. De esta manera se evalúa lo calculado teóricamente, en el laboratorio con resistores y capacitores del mismo valor teórico.

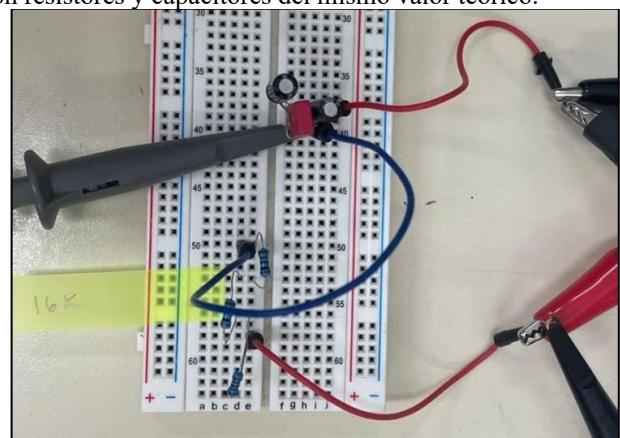


Figura 2: circuito RC implementado en protoboard

Para conseguir el valor de capacitancia y resistencia se conectaron 3 capacitores en paralelo para alcanzar el valor deseado ($2.2\mu F$). Los valores de estos capacitores fueron $0.221\mu F$, $1.028\mu F$ y $1.062\mu F$:

$$C = 0.221 + 1.028 + 1.062 = 2.311\mu F$$

Para las resistencias se utilizaron tres resistencias en serie; $12.02k$, $1.98k$ y $2.02k$:

$$R = 12.02k + 1.98k + 2.07 = 16.07k\Omega$$

Se generó en el generador de señales, una señal pulso de $5 V_{pp}$ y duración de $10ms$ con un offset de $2.5V$ y $f=1Hz$ de manera de emular la entrada del impulso en el Sistema 1.

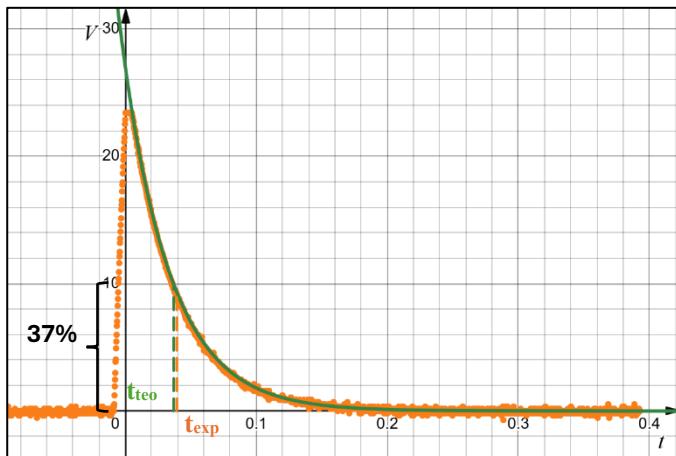


Figura 3: gráfica comparativa de la respuesta al impulso del Sistema 1 (leyenda verde corresponde al valor teórico, puntos naranjas son los valores extraídos del osciloscopio).

La Figura 3 muestra en naranja, una representación de los valores extraídos del osciloscopio $h_{exp}(t)$ y las predicciones teóricas $h_{teo}(t)$ (leyenda azul). La masa de puntos naranjas representa el CH2 del osciloscopio (la respuesta del sistema al ‘impulso’) que registró muestras discretas en el tiempo.

Al comparar ambos resultados, se observó que los puntos obtenidos del osciloscopio siguen estrechamente la exponencial teórica. Esto demuestra que, a pesar del ruido evidente mostrado en las pequeñas fluctuaciones de los puntos, el sistema real realizado en la Figura 2, se ajusta al modelo RC ideal calculado anteriormente.

Para corroborar la declaración anterior, se registraron las coordenadas del pico $h_{exp}(t_0)(t_0, V_0)$ según la tensión de según $V_{ref} = 1,901V$ el $V_0 = 2,964V$.

Teniendo en cuenta que al referenciar t_{exp} se hace referencia al τ , el tiempo asociado a la constante de tiempo del circuito. Este describe la velocidad con la que un sistema dinámico (circuito RC) se carga o descarga.

Se tiene que $V_C(t_{exp})$ representa la descarga de 37% de V_{exp} según el voltaje de referencia, por lo tanto:

$$V_c(t_{exp}) = (V_0 - V_{ref}) \cdot 0,37 = 393,310mV = V_{exp}$$

$$t_{exp} = 39,366ms$$

El pulso de entrada de $10ms$ simula un impulso. Este produjo una carga casi instantánea de la tensión del capacitor, seguido de la descarga de este de forma exponencial, al igual que el modelo RC ideal.

La línea punteada vertical representa el tiempo en el que el capacitor cae al 37% de su valor máximo, el cual corresponde a la constante de tiempo del circuito RC. A partir de los datos obtenidos se calculó un valor experimental de $39.366ms$, mientras que teóricamente, se calculó un tiempo de $36.961ms$.

Se calculó el error de dichos resultados de manera de evidenciar la coherencia entre el sistema teórico y empírico del siguiente modo:

$$\begin{aligned} Error(\%) &= \frac{|\tau_{exp} - \tau_{teo}|}{\tau_{teo}} \cdot 100 = \frac{|2.405|}{36.961} \cdot 100 \\ Error(\%) &= 6.51\% \end{aligned}$$

Se presentó un error relativo de 6.51% dado por las tolerancias de los capacitores y debido a las condiciones reales de la medición. Sin embargo, es un error bajo, lo que permite demostrar la coherencia y coincidencia entre la respuesta real y el modelo RC ideal.

De igual forma que se realizó con el impulso, se analizó la respuesta a una señal escalón como entrada al Sistema 1.

Como este sistema es LTI, al haber calculado $h(t)$ se encuentra la respuesta a cualquier señal convolucionando la respuesta al impulso con la señal de entrada. Por lo tanto, la respuesta al escalón se calculó de la siguiente manera ($y(t)=x(t)*h(t)$):

$$h_u(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$$

$$h_u(\infty) = 1$$

$$h_u(\tau) = 0.63h_u(\infty)$$

$$(1 - e^{-\tau/RC}) = (0.63)$$

$$e^{-\tau/RC} = 0.37$$

$$\tau = -\ln(0.37)RC$$

Considerando los valores de RC previamente establecidos se obtuvo que, $t_{teo} = 36,749ms$, demostrando efectivamente, que la dinámica de carga y descarga de un circuito RC son procesos complementarios. Estos están descritos por la misma solución exponencial ($e^{-t/\tau}$), lo único

que las diferencias son la condición auxiliar, la cual determina si la señal crece hacia su valor final, o decae desde él.

Empíricamente, se configuró la entrada al circuito de la *Figura 1* como un pulso de mayor duración, 500ms, manteniendo la frecuencia anterior.

Se registraron las coordenadas del pico $h_{exp}(t)(t_1, V_1)$ según la tensión de referencia $V_{ref} = 0V$, $V_1 = 4.919V$, y, teniendo en cuenta que $V_C(t_{exp})$ representa la descarga de 63% de V_1 según el voltaje de referencia se calculó:

$$V_c(t_{exp}) = (V_1 - V_{ref}) \cdot 0,63 = 3,099V = V_{exp}$$

$$t_{exp} = 37,690ms$$

Frente a la respuesta de un escalón, un capacitor alcanza aproximadamente su valor final (95% cargado) después de 3τ . A su vez, se considera que, existe un tiempo en el que, una vez iniciado el proceso, la curva entra en una región donde la variación es mínima. A partir de ahí, se toma como que el capacitor alcanzó un estado estable en el cual se considera completamente cargado. Este tiempo es 5τ , el cual, considerando los valores anteriores, es de $t = 185ms$. [1]

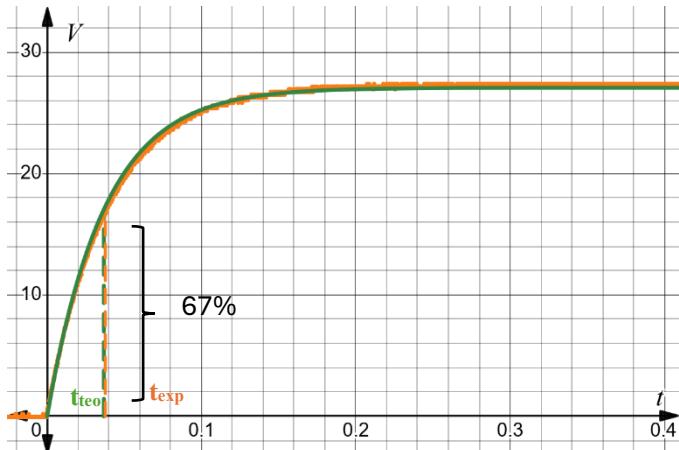


Figura 4: gráfica comparativa de la respuesta al escalón del Sistema 1 (leyenda verde corresponde al valor teórico, puntos naranjas son los valores extraídos del osciloscopio).

La *Figura 4* muestra la respuesta ante un escalón del Sistema 1, obtenida experimentalmente con un osciloscopio (puntos naranjas) y comparada con el resultado obtenido analíticamente (leyenda verde).

Se observó que, al aplicar un escalón de 0V a 5V, la tensión el capacitor aumenta de forma exponencial. Al inicio el capacitor se carga rápidamente, a medida que se acerca a su valor final, el capacitor se ralentiza. Se puede observar gráficamente como aproximadamente cuando se acerca el tiempo de 5τ , no se ven más cambios en el valor del capacitor. Esto demuestra coherencia en el análisis previo y demuestra la congruencia entre el modelo RC ideal y el circuito de la *Figura 1*.

En la *Figura 4* se marcó el punto en el que el capacitor carga el 67% de su valor máximo, el cual ocurre en $t_{exp}=37,690ms$. Teóricamente, se halló ese tiempo, siendo este 36.749ms. Análogamente al análisis anterior, se calculó el error. Siendo este 2.56%, se determina la consistencia de los valores obtenidos en la práctica.

Se nota una clara diferencia entre el error en la carga (2.56%) y el error en la descarga (6.51%). Esto puede deberse a que, en la descarga, la dinámica depende casi exclusivamente de los capacitores utilizados en la práctica. Estos pueden presentar fugas y otros efectos que no son considerados en el modelo RC ideal. Estos efectos incluyen la propia tolerancia de los capacitores conectados en paralelo, su resistencia interna e incluso el osciloscopio utilizado el cual determina los resultados experimentales.

Este último efecto afecta más la descarga. Esto es debido a que, al estar descargándose, la amplitud de la señal disminuye progresivamente, dando lugar a que el ruido del osciloscopio tenga más influencia en las mediciones. Por lo tanto, la determinación del punto en el 37% de descarga, es más sensibles a variaciones pequeñas, lo que aumenta el error experimental frente a la descarga teórica.

Por último, se calculó la respuesta al Sistema 1 cuando $V(t) = \Pi(t/T) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$. Para ello se aplicaron los principios de superposición e invariancia temporal. Como resultado se obtuvo:

$$y(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\frac{(t+T/2)}{RC}}\right) & , T/2 > t > -T/2 \\ \left(e^{\frac{-(t-T/2)}{RC}} - e^{-\frac{(t+T/2)}{RC}}\right), & t > T/2 \end{cases}$$

Al igual que en los casos anteriores, se analizó la entrada empíricamente, reconfigurando el generador de señales para que de como entrada un pulso rectangular de 100ms de ancho, siguiendo los cálculos anteriores.

Al tener una duración de 100ms, se puede predecir que el capacitor no va a llegar a cargarse hasta su valor máximo. Si se sigue con el análisis previo que $\tau = RC \approx 37.7ms$, se espera que el capacitor no alcance su valor final durante el intervalo que dura el pulso, a diferencia de cuando se analizó la respuesta al escalón anteriormente.

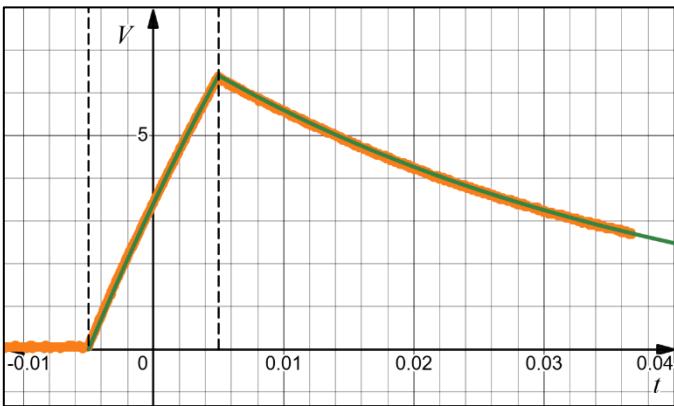


Figura 5: gráfica comparativa de $y(t)$ cuando la entrada es un pulso rectangular, la leyenda verde corresponde al valor teórico mientras que los puntos naranjas son los das obtenidos en el osciloscopio. Se marcó con líneas punteadas la duración del pulso.

La *Figura 5* muestra la gráfica de $y(t)$ cuando la entrada es un pulso rectangular, obtenida experimentalmente mediante el osciloscopio y comprada con el modelo RC ideal de carga y descarga calculado anteriormente. Esta comparación permite analizar visualmente la dinámica de carga y descarga de un capacitor, bajo un pulso de duración finita (en este caso 100ms).

Durante el intervalo (líneas punteadas verticales) que el pulso de entrada está a nivel alto, el capacitor se carga exponencialmente hacia el valor impuesto por el pulso. Este comportamiento coincide con el análisis teórico que se realizó al evaluar la respuesta al sistema frente a un escalón: el capacitor no alcanza instantáneamente su valor final, sino que se aproxima gradualmente. A su vez, tal cual se predijo anteriormente, el circuito real sigue al modelo RC ideal, sin alcanzar su valor máximo, el cual alcanaría a los 3τ .

Al caer el pulso a 0V, el capacitor comienza a descargarse, esto se presenta en la curva exponencial decreciente, similar a la evaluada anteriormente cuando la entrada era un impulso. Se ve como la masa de puntos sigue de manera muy precisa la leyenda verde describiendo el modelo teórico a lo largo de la carga y descarga del capacitor, esto evidencia la congruencia de los resultados a lo largo del estudio.

ACTIVIDAD 2:

En esta actividad se implementó el mismo circuito presente en la Actividad 1, remplazando las resistencias por $1.66k\Omega$ y 156Ω , las cuales se midieron utilizando un multímetro como se muestra en la *Figura 6*.

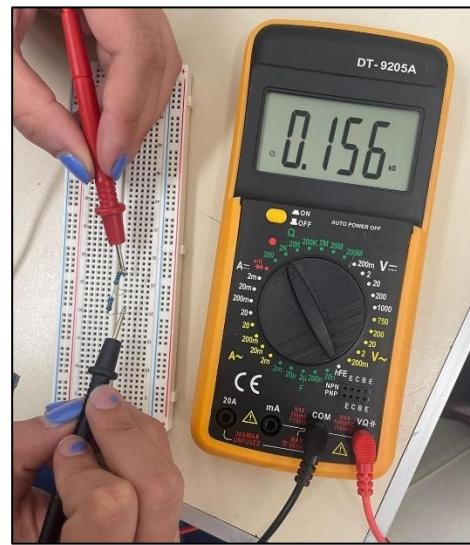


Figura 6: Medida de la resistencia de 156Ω

En la Actividad 1 se concluyó que la respuesta en frecuencia al Sistema 1 es:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

A continuación, se calculó el módulo y la fase de la respuesta anterior:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

Se estudió el comportamiento de el modulo y fase según distintos valores RC para lograr un mejor entendimiento del comportamiento del sistema.

- $\omega RC \ll 1$, se calculó el límite del módulo para frecuencias muy bajas, mientras que en la fase, se simplificó el resultado

Módulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = 1$$

Por tanto, $|H(j\omega)| \approx 1$

Fase: se tiene que $\tan(x) \approx x$ si $|x| \ll 1$, por lo tanto, destinando ese resultado a la fase de la transformada, se obtuvo; $\angle H(j\omega) = -\omega RC$, que, al saber que es mucho menor que uno, deriva a $\angle H(j\omega) \approx 0$.

Este comportamiento se puede observar mejor en el siguiente applet en [GeoGebra](#). [2] El resultado se correlaciona con el comportamiento del circuito en bajas frecuencias. Se puede interpretar que, como la señal varía tan despacio, el capacitor tiene tiempo de cargarse y descargarse casi completamente.

- ω muy grande, lleva a que $\omega RC \gg 1$:
Al sustituir, $|H(j\omega)| \approx 1/\omega RC$. Este resultado tiende a 0.
- $\omega = (1/RC)$

Análogamente, al ver la ecuación se obtiene que

$$|H(j\omega)| = \frac{RC}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{RC}{\sqrt{2}}$$

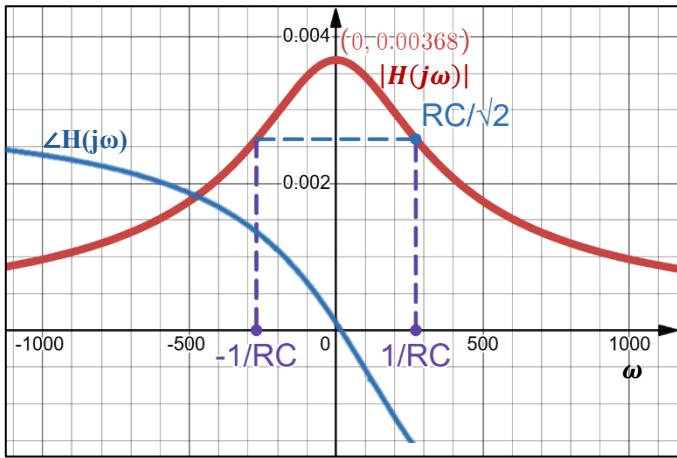


Figura 7: gráfica del módulo y fase de la respuesta en frecuencia, las líneas punteadas representan

Se graficó el módulo y la fase calculada anteriormente. Presentes en la Figura 7, se puede observar cómo al mantener las frecuencias bajas ($|\omega| \ll 1/RC$), el módulo se mantiene cercano a su valor máximo. Esto indica que es un filtro pasa bajos (LPF), ya que permite el paso de señales de baja frecuencia. A medida que la frecuencia aumenta, se ve una caída progresiva a la vez que el módulo comienza a disminuir.

Cabe destacar que la gráfica no se encuentra normalizada, de manera que los valores de amplitud del módulo describen las magnitudes reales según los valores específicos utilizados en el circuito. Esta gráfica muestra el comportamiento real del sistema con sus valores físicos.

A su vez, la frecuencia de corte se ve descrita en las líneas punteadas que forman un cuadrado. Esta es de $1/RC$, la cual se define porque es cuando la potencia del valor máximo de la señal decrece un 50%.

En relación con la fase descrita en la Figura 7 (leyenda azul), se puede analizar como el capacitor introduce un atraso porque se carga y descarga con un tiempo característico dado por RC . Esto no solo hace que su salida disminuya en amplitud, sino que también le agregue un retardo en su fase respecto a la señal de entrada.

Análogamente al análisis anterior, al ser un sistema LTI, si la entrada es $x(t) = 3\cos(200\pi t)$, es de esperarse que la salida de este sea $y(t) = |H(j200\pi)|3\cos(200\pi t + \angle H(j200\pi))$.

Esto es debido a que los sistemas con esa característica responden a señales sinusoidales con la misma frecuencia, modificando únicamente su amplitud y fase, tal cual se vio previamente.

Para comprobar el comportamiento del sistema se configuró el generador de señales con una señal sinusoidal de amplitud 1Vpp y una frecuencia de 5Hz. Se implementó una resistencia de $1.66k\Omega$ y una capacitancia $2.3\mu F$.

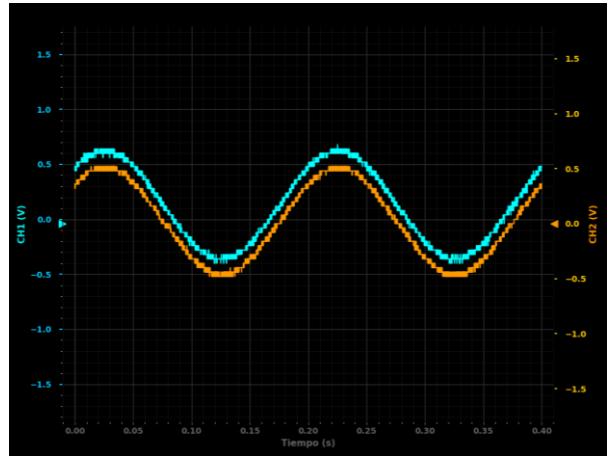


Figura 8: CH1 entrada del sistema, CH2 salida del sistema.

En la Figura 8 se presentó la gráfica comparativa entre la señal de entrada del sistema (CH1, leyenda azul) y la señal medida (CH2, leyenda naranja). Visualmente ya se puede analizar como el hecho de que el sistema sea LTI, influye en el resultado, generando una sinusoidal con diferente amplitud y fase.

Los datos extraídos del osciloscopio con estas configuraciones fueron:

$$A_{exp} = 1.04V \text{ y } T_{exp} = 0.199$$

Mientras que los valores teóricos previamente calculados son:

$$A_{teo} = 0.993V \text{ y } T_{teo} = 0.2$$

Se observa que los valores experimentales de amplitud y período son aproximadamente idénticos a los valores teóricos. Comparando frecuencias de las sinusoides de salida y entrada se percibió una correlación entre las mismas. Las diferencias mínimas pueden ser debido a la tolerancia de los componentes (para llegar al valor de la resistencia y capacitancia del estudio se utilizaron varios componentes en serie/paralelo), al ruido de la medición e incluso a las limitaciones del propio osciloscopio.

Era de esperarse que la frecuencia de la sinusode se mantenga, que la amplitud se escala según $|H(j\omega)|$ y que mantenga la misma forma por lo mencionado anteriormente. Además, la salida debía presentar cierto desfasaje debido a la presencia del capacitor en el circuito.

Si se analizan la Figura 8 y los valores experimentales de amplitud, período y forma extraídos del osciloscopio se comprueba que la respuesta del sistema se comporta prácticamente como la esperada.

Para realizar una comparación entre el modelo teórico y experimental, se realizaron medidas y predicciones teóricas de la respuesta del sistema a distintas frecuencias de sinusoidales variando entre distintos valores de resistencia. En este caso los valores de mayor relevancia serán el módulo y fase. Esto es debido a que son los valores principales que caracterizan cómo se comporta la respuesta en frecuencia del sistema, manteniendo la amplitud de la sinusode de entrada en 1V para ambos casos.

En el primer caso se utilizaron dos resistencias conectadas en serie ($R_1 = 0,196\text{k}\Omega$ y $R_2 = 1,475\text{k}\Omega$) para obtener una resistencia equivalente de $R = 1.66\text{k}\Omega$. A su vez, se utilizaron los mismos capacitores de la actividad anterior, resultando en una capacitancia de $C = 2.30\mu\text{F}$

A partir de esos valores y las ecuaciones previamente descritas del módulo y la fase de la respuesta al sistema, se logró completar la *Tabla 1*. Una tabla comparativa entre los resultados obtenidos en el laboratorio utilizando los cursores del osciloscopio y las predicciones teóricas.

f[Hz]	Predicciones teóricas		Datos Experimentales	
	 H(j\omega) 	\phi/\omega[s]	A Salida [V]	Delay[S]
5	9.93E-01	-3.64E-03	1.00E+00	4.00E-03
10	9.75E-01	-3.59E-03	1.00E+00	1.00E-03
20	9.09E-01	-3.42E-03	1.00E+00	8.00E-04
50	6.57E-01	-2.72E-03	9.60E-01	3.00E-04
100	4.00E-01	-1.85E-03	9.44E-01	2.00E-04
200	2.13E-01	-1.08E-03	9.52E-01	1.00E-04
500	8.68E-02	-4.72E-04	8.44E-01	5.00E-05
1000	4.35E-02	-2.43E-04	6.40E-01	4.80E-05
2000	2.18E-02	-1.23E-04	4.12E-01	3.60E-05
5000	8.72E-03	-4.97E-05	2.32E-01	1.20E-05

Tabla 1: Respuesta teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia con $R = 1.66\text{k}\Omega$

Se observa como para cada frecuencia se comparó, en la *Tabla 1*, el desfasaje teórico del sistema con el *delay* experimental medido directamente desde el osciloscopio. $\phi/\omega[s]$ surge de convertir el desfasaje angular en un tiempo (segundos), mientras que el *delay* es la diferencia temporal actual que se dedujo utilizando los cursores del osciloscopio.

En un sistema LTI como lo es el circuito RC estudiado, estos valores deberían mostrar la misma tendencia; que a frecuencias bajas el retardo se hace mayor, mientras que en altas frecuencias se reduce de forma significativa.

Visualizando la *Tabla 1*, se ve como el comportamiento general descrito experimentalmente es coherente con la predicción teórica, debido a que ambas columnas muestran una tendencia decreciente a medida que la frecuencia aumenta. Sin embargo, hay una discrepancia entre los valores teóricos y los experimentales.

Esto se debe a que el valor calculado teóricamente, no corresponde al retardo real del circuito. El término $\phi/\omega[s]$, es solo una aproximación del delay, ya que convierte el desfasaje angular en un tiempo equivalente para una frecuencia dada. Sin embargo, el delay medido, corresponde al desplazamiento temporal directo entre las ondas.

La diferencia aparece porque el desfasaje del sistema no varía linealmente con la frecuencia, debido a que, en el circuito estudiado, la fase está dada por: $\phi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$. Esta función no es lineal, por esa razón, dividir la fase entre la frecuencia angular no produce el delay real, sino una aproximación válida en menores frecuencias.

A su vez, la diferencia se amplifica debido a las imprecisiones del osciloscopio en cuanto a la utilización de los cursores para extraer los datos. A medida que la amplitud disminuye, se vuelve más complicado medir los desfasajes reales, lo cual describe las limitaciones del modelo ideal respecto al circuito físico. Además, el propio ruido de la señal de salida también dificulta la extracción de datos.

Aun así, evaluando las predicciones teóricas y los resultados experimentales individualmente, se puede concluir que ambos disminuyen de manera consistente, lo que confirma que la respuesta del sistema frente a sinusoidales es la esperada para un filtro RC descrito anteriormente.

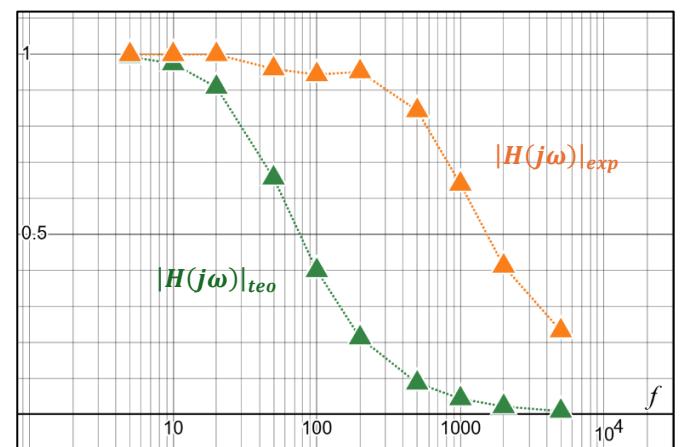


Figura 9: Grafica de $|H(j\omega)|$ teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia

La *Figura 9* compara los módulos teóricos y experimentales comparados en la *Tabla 1*. Ambas presentan una alta ganancia en las frecuencias bajas, una caída progresiva y una atenuación en las frecuencias más altas.

Sin embargo, la curva experimental (naranja) se encuentra desplazada hacia arriba. Lo que sugiere una mayor ganancia medida que la teórica. Estas medidas también presentan más ruido, y la zona de caída no coincide exactamente con la predicción teórica. Esta gráfica comparativa permite analizar visualmente los resultados y análisis descritos anteriormente.

Análogamente, se graficaron comparativamente los resultados teóricos y experimentales de la fase, lo que permitió analizar de manera profunda los errores encontrados anteriormente.

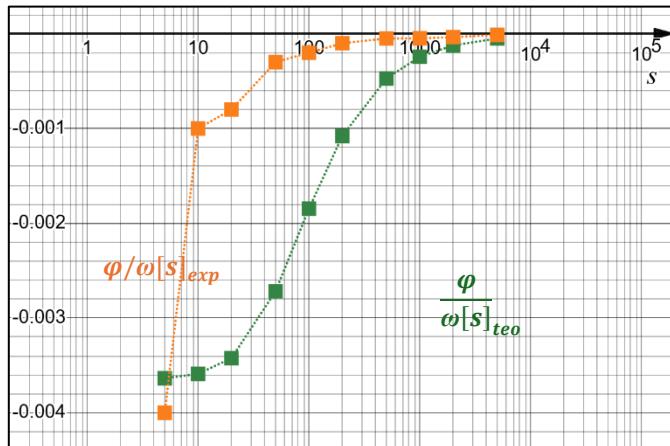


Figura 10: Grafica de $\phi/\omega[s]$ o delay teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia (eje x escala logarítmica)

La Figura 10 describe las columnas de $\phi/\omega[s]$ y el delay de la Tabla 1. Sin embargo, se ve en los datos que mientras los valores teóricos son negativos, la columna de los datos experimentales son valores positivos.

Al medir con el osciloscopio, si la señal esta retrasada, la medición del Δt da un número positivo. A pesar de eso, la fase en radianes debe quedar negativa, ya que el sistema es del tipo pasa-bajos. Por lo tanto, al graficar, los conjuntos de datos quedan negativas representado globalmente, la misma curva, que difieren entre ellas debido a los efectos descritos anteriormente.

Se repitió este mismo proceso cambiando el valor de las resistencias en serie ($R_1 = 146\Omega$, $R_2 = 20\Omega$) para obtener una resistencia equivalente de $R = 166\Omega$.

Predicciones teóricas		Datos experimentales	
$f[\text{Hz}]$	$ H(j\omega) $	$\phi/\omega[s]$	A salida [V]
5	1.00E+00	-3.52E-04	1.04E+00
10	1.00E+00	-3.52E-04	1.01E+00
20	9.99E-01	-3.52E-04	1.04E+00
50	9.94E-01	-3.51E-04	1.00E+00
100	9.76E-01	-3.46E-04	9.80E-01

200	9.15E-01	-3.31E-04	8.40E-01	3.60E-05
500	6.71E-01	-2.66E-04	5.28E-01	2.40E-05
1000	4.12E-01	-1.82E-04	2.96E-01	1.80E-05
2000	2.21E-01	-1.07E-04	1.68E-01	8.40E-05
5000	9.01E-02	-4.71E-05	1.04E-01	2.40E-05

Tabla 2: Respuesta teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia, con $R = 166\Omega$

Analizando la Tabla 2, se compararon nuevamente las predicciones teóricas del módulo y la fase del sistema con los datos obtenidos experimentalmente a través del osciloscopio.

En cuanto al módulo, los valores experimentales siguen un patrón coherente ya que, en frecuencias bajas, la amplitud es de aproximadamente 1V (describe el comportamiento de un filtro pasa-bajo). Mientras que, a medida que aumentan las frecuencias, la amplitud cae de 0.98V a 0.104V. Estos últimos datos coinciden con la columna teórica, la cual pasa de 1V a 0.091V.

A pesar de esas congruencias, se observa una discrepancia cuando a medida que la frecuencia aumenta, la amplitud experimental es ligeramente más baja que la teórica. Esto puede deberse al ruido de la señal resultante y la imprecisión del osciloscopio al medir tanto la amplitud como la fase con los cursos. Sin embargo, se puede observar la coherencia y similitud entre el modelo ideal y el circuito en la siguiente Figura 11 (la de abajo).

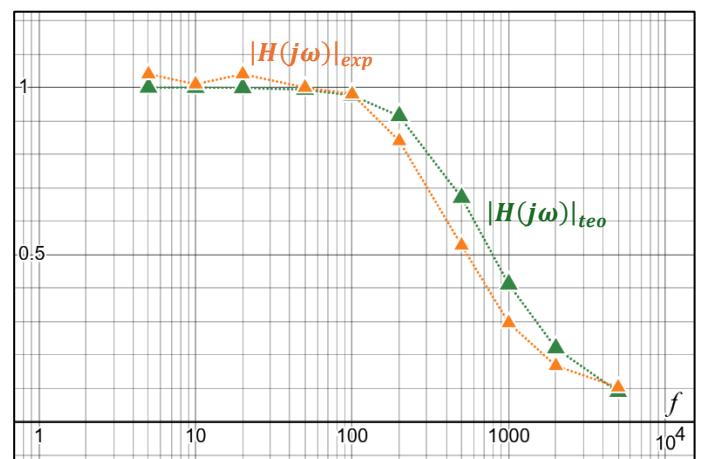


Figura 11: Grafica de $|H(j\omega)|$ teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia. (eje x escala logarítmica)

Se observa en la gráfica comparativa de la Figura 11, como los datos experimentales siguen la misma tendencia global que los valores teóricos.

Se estableció una escala logarítmica que permitió tomar una perspectiva global de la tendencia del sistema ya que se evaluó una gran escala de frecuencias. Esto permitió ver los valores más pequeños con mayor claridad. A su vez, al ver la totalidad de la curva, permitió identificar las

similitudes entre lo teórico y lo experimental, comparando las pendientes a la vez que los puntos individuales.

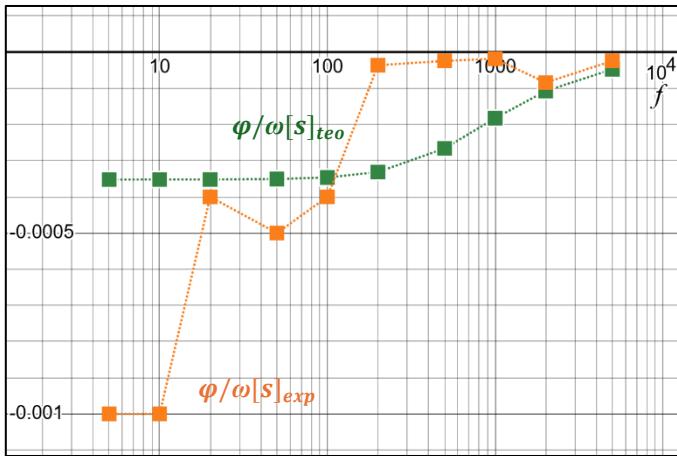


Figura 12: Grafica de $\phi/\omega[s]$ o delay teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia (eje x escala logarítmica)

En relación con la fase teórica y la fase medida en el laboratorio, a bajas frecuencias el delay experimental se muestra cercano al cero (0.0001 a 0.0005). Esto coincide con el valor teórico en el que se ven puntos verdes cercanos al cero. Se analizó también como en la *Figura 12*, a frecuencias medias (500Hz - 1000Hz), los valores teóricos se elevan con tendencia creciente, sin embargo, los valores experimentales también aumentan bruscamente. Evaluando la *Figura 12*, en $f=5\text{Hz}$, se presenta un porcentaje de error relativo de 184%, el cual puede ser atribuible a la baja resolución temporal en frecuencias bajas.

Es coherente ya que la discrepancia disminuya con la frecuencia, al igual que se muestra en la *Tabla 2*. Aunque, en altas frecuencias, el delay se vuelve más difícil de medir, el porcentaje de error disminuyó notablemente siendo este de 0.28% para $f = 1000\text{Hz}$. Sin embargo, los resultados inconsistentes como el aumento brusco de delay de 10Hz – 20Hz, se deben a errores de manejo del cursor del osciloscopio. Se investigó, y este último presenta una tolerancia en los cursores de 2%. [3]

Otro aspecto que merece ser analizado es la diferencia entre los valores del módulo y fase para ambos casos, cuando la resistencia es de $1.66\text{k}\Omega$ (caso 1) y 166Ω (caso 2). Para realizar esta comparación se graficó sus módulos y fases teóricos de manera comparativa.

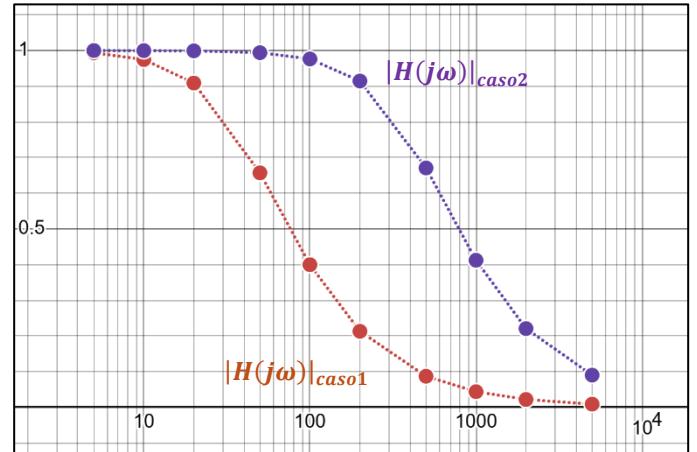


Figura 13: Grafica de $|H(j\omega)|$, para distintos valores de.(eje x escala logarítmica)

Al comparar los módulos en ambos casos en simultáneo en la *Figura 13*, se observó la diferencia más notoria en el desplazamiento de la curva del caso 1 hacia la izquierda decreciendo antes en comparación con la curva del caso 2.

Físicamente, se desplazó hacia frecuencias más bajas. Esto está directamente enlazado con la diferencia de las resistencias, ya que, al aumentar la resistencia (caso 1, $1.66\text{k}\Omega$), la frecuencia de corte disminuye. Sin embargo, en ambos casos la forma es la esperada de un pasa-bajos, se approxima a uno en las frecuencias más bajas, mientras que después de la frecuencia de corte se ve una caída progresiva.

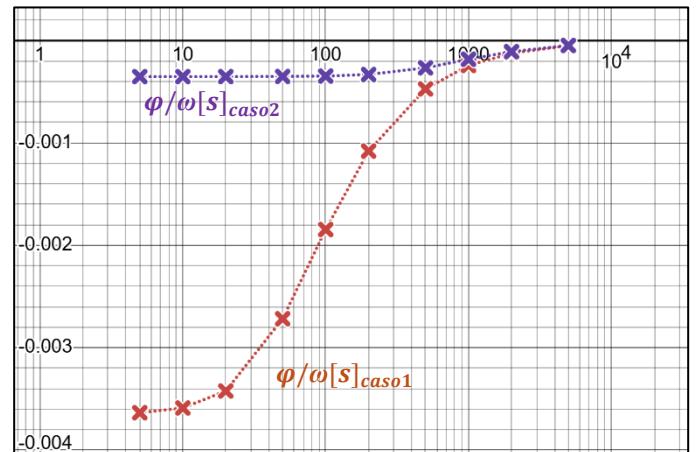


Figura 14: Grafica de $\phi/\omega[s]$ o delay teórica y experimental del sistema a sinusoidales de distinta frecuencia (eje x escala logarítmica)

La *Figura 14* compara las fases de los dos casos, se observa una similitud en la forma que toma la gráfica. El caso 1, al tener mayor resistencia, la constante de tiempo aumenta también. Esto provoca un retardo de fase, que se describe como la curva más pronunciada. A su vez, genera un rango más amplio en el eje y.

El caso 2, responde más rápido al tener menor resistencia, se ve un menor retardo en las cruces violetas de la *Figura 14*. Nuevamente se utilizó una escala logarítmica que

permitió visualizar mejor el comportamiento en altos rangos de frecuencia.

A pesar de las diferencias descritas anteriormente, las curvas presentan una forma similar, esto quiere decir que el sistema tiene una dinámica comparable utilizando distintas resistencias, simplemente difieren en la velocidad de respuesta.

CONCLUSIÓN

En esta actividad se logró construir un modelo teórico para un circuito RC mediante una ecuación diferencial con coeficientes contantes. A partir del análisis del sistema descrito por esta, utilizando las herramientas de la transformada de Fourier y características de los sistemas LTI, se obtuvo una expresión $h(t)$, la cual permitió caracterizar el comportamiento completo del sistema.

Al comparar el modelo con un circuito físico, se analizó como las respuestas ante entradas tipo impulso, escalón y pulso rectangular, se ajustan coherentemente a las predicciones teóricas previamente discutidas. Se logró observar como la carga y descarga del capacitor son procesos complementarios determinados por la condición inicial del mismo. Si el valor inicial es 0, se produce la carga; mientras que, si parte desde un valor máximo, se observa la descarga. EN ambos casos la dinámica está dada por la misma constante de tiempo RC , lo que, luego de analizar, demostró la coherencia entre el modelo ideal teórico y los datos experimentales.

Asimismo, se evaluó la salida del sistema para distintas sinusoides y, como se espera de un sistema LTI, las salidas mantenían la misma frecuencia al variarla entre 5Hz y 5000Hz. Sin embargo, en cuanto a la amplitud y fase, aunque se encuentran similitudes no concuerdan perfectamente con las esperadas. Algunas discrepancias pueden ser atribuibles al proceso de medida (uso de cursores con 2% de tolerancia) y a las limitaciones propia del proceso de medición en el osciloscopio. Además, pueden haber surgido efectos no lineales producidos por las propias imperfecciones inherentes del circuito, probablemente generados por el uso de los 3 capacitores en paralelo.

Esta experiencia permitió validar los conceptos teóricos mediante la experimentación. Estos incluyen el entendimiento del comportamiento dinámico de un circuito RC, el modelado de este mediante ecuaciones diferenciales, los sistemas LTI y su respuesta en frecuencia, y las limitaciones experimentales debido a las mediciones e instrumentos utilizados.

A su vez, fortaleció la comprensión de los modelos matemáticos aplicados en sistemas físicos. Se destaca la importancia de integrar tanto los fundamentos teóricos con la práctica y análisis crítico lo que permitió un estudio completo sobre el sistema dinámico presente, un circuito RC.

Referencias

- [1] Tau-The Time constant. (s. f.). ElectronicTutorials. Recuperado 27 de noviembre de 2025, de <https://www.electronics-tutorials.ws/rc/time-constant.html#:~:text=Crecimiento%20exponencial%20del%20voltaje%20a,el%20condensador%20est%C3%A1%20completamente%20cargado.>
- [2] GeoGebra Classic - GeoGebra. (s. f.). <https://www.geogebra.org/classic/zeyaj5hu>
- [3] Good Will Instrument Co., Ltd. (2020). *GDS-1000A-U Series digital storage oscilloscope (datasheet)*. GW Insteck. <https://www.gwinstek.com/en-global/products/downloadSeriesDownNew/1864/142>

El material utilizado a lo largo de este estudio se encuentra en este [link](#), además, se pueden ver las gráficas, las imágenes y datos para el análisis anterior.