Matemática Discreta
Tópicos da Linguagem e da Lógica Matemáticas

Texto da Semana 3, Parte 2

Equivalência

Sumário

Neste texto, iniciamos as aplicações de simbolizações e tabelas na resolução de problemas lógicos que estão associados diretamente com a prática matemática.

Abordamos a noção de equivalência de enunciados (Seção 1); a noção de interpretação (Seção 2); e o *Problema da Equivalência* e sua resolução por meio de tabelas (Seção 2).

Depois de estudarmos este texto, vamos ser capazes de: usar tabelas para decidir quando dois enunciados (construídos por aplicações dos conectivos) são equivalentes ou não (Exercícios 1 e 2).

1 Equivalência de enunciados

Na prática, dependendo de como entendemos o significado de um enunciado, ele pode ser simbolizado de mais de uma maneira.

Exemplo 1 O enunciado

$$\textsf{não é o caso que } 2 \textsf{ não é par} \tag{1}$$

pode ser interpretado como

$$\textsf{não (não (2 é par))}$$

e, portanto, pode ser simbolizado diretamente como

$$\neg\neg p,$$

de acordo com a legenda

$$p \;:\; \textsf{2 é par.}$$

Mas, levando em conta que dizer que 2 não é par é o mesmo que dizer que 2 é ímpar, e que dizer que 2 não é ímpar é o mesmo que dizer que 2 é par, temos que (1) quer dizer, simplesmente, que 2 é par. Assim, uma outra simbolização mais simples para ele, de acordo com a mesma legenda, pode ser

$$p.$$

□

Observe que (1) e

2 é par

são enunciados completamente distintos, por exemplo, o primeiro é uma negação e o segundo é atômico. Agora, quando estamos analisando estes enunciados levando em conta apenas a semântica dos conectivos, podemos considerar que eles expressam a mesma informação.

Do que foi dito acima, surge, então, a questão de

> decidir se dois enunciados simbolizados de maneira distinta expressam ou não o mesmo conteúdo.

2 Interpretações para dois enunciados e Método das Tabelas para Equivalência

Vamos ver agora como a questão levantada ao final da Seção 1 pode ser resolvida com o uso de tabelas, quando os enunciados em questão têm apenas ocorrências dos conectivos. Da mesma forma que na Seção 3 da Parte 1 do Texto da Semana 3, o passo essencial é: identificar os contextos relevantes para a determinação dos valores dos enunciados com suas *interpretações*, ou seja, atribuições de valores aos enunciados atômicos a partir dos quais eles são formados.

Interpretações para dois enunciados

Sejam φ e ψ dois enunciados simbolizados, não necessariamente distintos.

Uma *interpretação* para φ e ψ é uma atribuição de valores, V ou F, para todas as variáveis que ocorrem em φ e ψ, de modo que a cada variável seja atribuído um único valor.

Exemplo 2 (a) Os enunciados p e $\neg\neg p$ só têm ocorrências de p. Portanto, possuem duas interpretações:

p
V
F.

(b) Os enunciados $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ só têm ocorrências de p, q. Portanto, possuem quatro interpretações:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F.

(c) Os enunciados $p \to (q \to r)$ e $(p \to q) \to r$ só têm ocorrências de p, q, r. Portanto, possuem oito interpretações:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F.

Observe que, para cada interpretação para a variável p, os enunciados p e $\neg\neg p$ assumem os mesmos valores, como vemos ao comparar a primeira e a terceira <u>colunas</u> da tabela $(*)$:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F
$\Uparrow$		$\Uparrow$

Analogamente, para cada interpretação para as variáveis p, q, os enunciados $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ assumem os mesmos valores, como vemos ao comparar a quarta e a sétima colunas da tabela $(**)$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
			$\Uparrow$			$\Uparrow$

Método das Tabelas para Equivalência

Sejam φ e ψ enunciados simbolizados.

Dizemos que φ e ψ são *equivalentes* se, para cada interpretação para φ e ψ, os valores de φ e ψ são iguais.

Surge, então, o *Problema da Equivalência* de enunciados, isto é, o problema de

dados dois enunciados, classificá-los como equivalentes ou não.

Vamos ver, agora, como esta questão pode ser resolvida com o uso de tabelas, quando o argumento só envolve enunciados construídos por aplicação dos conectivos.

Exemplo 3 (a) A tabela $(*)$ na página 17 mostra que os enunciados p e $\neg\neg p$ são equivalentes. Esta equivalência garante que não precisamos escrever duas aplicações sucessivas do conectivo $\neg$.

(b) A tabela $(**)$ na página 17 mostra que os enunciados $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ são equivalentes. Esta equivalência garante que a negação de uma conjunção pode ser reescrita como uma disjunção de negações.

(c) Vamos agora verificar que os enunciados $p \to (q \to r)$ e $(p \to q) \to r$ *não são equivalentes*. Isto é, que a maneira como agrupamos os enunciados componentes em aplicações iteradas do conectivo $\to$ é relevante para a determinação do valor do enunciado.

Para mostrar isto, devemos mostrar que

não é o caso que para cada interpretação para p, q, r, os valores de $p \to (q \to r)$ e $(p \to q) \to r$ são iguais.

Ou seja, devemos mostrar que

para ao menos uma interpretação para p, q, r, os valores de $p \to (q \to r)$ e $(p \to q) \to r$ são diferentes.

De fato, comparando a quinta e a sétima colunas da tabela:

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	
V	V	V	V	V	V	V	
V	V	F	F	F	V	F	
V	F	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	V	F	V	
F	V	V	V	V	V	V	
F	V	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	V	F	
				$\Uparrow$		$\Uparrow$	

observamos que na sexta linha (descontando a linha de referência),

> quando p é F, q é V e r é F, o enunciado $p \to (q \to r)$ é V e o enunciado $(p \to q) \to r$ é F.

Como os valores de $p \to (q \to r)$ e $(p \to q) \to r$ são diferentes para pelo menos uma interpretação, eles não são equivalentes. $\square$

O método que usamos para resolver o problema da equivalência de enunciados simbolizados pode ser resumido em 5 passos:

Método das Tabelas para Equivalência:

Sejam φ e ψ enunciados simbolizados nos quais ocorrem (exatamente) as variáveis $p_1, \ldots, p_m$.

A verificação da equivalência de φ e ψ pode ser feita mediante a execução dos seguintes passos, que constroem a *tabela conjunta* de φ e ψ:

(1) Em uma *linha de referência*, escrevemos as variáveis $p_1, \ldots, p_m$.

(2) Abaixo da linha de referência, escrevemos, como usual, todas as interpretações para $p_1, \ldots, p_m$.

(3) Utilizando as tabelas dos conectivos, calculamos gradativamente todos os valores de cada enunciado simbolizado utilizado na formação de φ, até obter o valor de φ.

(4) Utilizando as tabelas dos conectivos, calculamos gradativamente todos os valores de cada enunciado simbolizado utilizado na formação de ψ que ainda não foram avaliados, até obter o valor de ψ.

(5) Comparamos a coluna rotulada com φ com a coluna rotulada com ψ. Se elas são iguais, φ e ψ são equivalentes. Caso contrário, não são.

2.1 Observações

Observação 1 Construir a tabela conjunta de φ e ψ e comparar se as colunas rotuladas com φ e com ψ nesta tabela são iguais ou não, é o mesmo que construir a tabela do enunciado $\varphi \leftrightarrow \psi$ e verificar se na última coluna desta tabela ocorre somente V.

Assim, temos:

> O problema da equivalência de dois enunciados φ e ψ pode ser resolvido tanto pela construção e exame da sua tabela conjunta, quanto pela verificação de se a bi-implicação $\varphi \leftrightarrow \psi$ é V em todas as suas interpretações.

Observação 2 Existe uma infinidade de pares de enunciados equivalentes. De fato, uma lista infinita trivial é:

$$\begin{array}{ccc} p & \text{e} & \neg\neg p \\ \neg p & \text{e} & \neg\neg\neg p \\ \neg\neg p & \text{e} & \neg\neg\neg\neg p \\ & \vdots & \end{array}$$

Mas, como veremos adiante, alguns pares de enunciados equivalentes são mais importantes do que outros, pois expressam propriedades dos conectivos que (1) exclarecem as interrelações existentes entre eles; (2) apontam semelhanças e diferenças que eles possuem com relação a partículas de outros domínios da Matemática como, por exemplo, as operações aritméticas.

2.2 Exercícios

Exercício 1 Determine, usando tabelas, se os enunciados dados são equivalentes.

(i) $p \wedge (\neg q)$ e $(\neg p) \wedge q$
(ii) $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
(iii) $p \rightarrow (q \wedge r)$ e $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
(iv) $p \rightarrow (q \vee r)$ e $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
(v) $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$

Exercício 2 Determinar a equivalência de enunciados é uma habilidade que todo estudante de Matemática deve possuir pois, muitas vezes, uma afirmação matemática não é feita de uma forma direta (ou seja, da maneira que o leitor espera) mas, sim, na forma de um enunciado equivalente. Neste exercício, vemos vários exemplos desta situação.

Verifique se os seguintes enunciados são equivalentes ou não. *Isto é, simbolize-os e utilize tabelas para decidir se são equivalentes.* (Usualmente, empregamos os sinais de pontação — principalmente, ponto e vírgula e dois pontos — na tentativa de deixar a estrutura do enunciado mais clara.)

(i) não é o caso que: x é primo se, e somente se, x é ímpar
e
x é primo ou ímpar

(ii) se r é perpendicular a s e s é perpendicular a t, então r é perpendicular a t
e
se r não é perpendicular a s e s não é perpendicular a t, então r não é perpendicular a t

(iii) s é perpendicular a t segue de: r é paralela a s e perpendicular a t
e
r é paralela a s e s não é perpendicular a t acarreta em r não é perpendicular a t

(iv) se x é par e primo, então x é diferente de 2
e
se $x = 2$, então x nem é par nem primo

(v) não é o caso que este triângulo é retângulo e ao mesmo tempo obtusângulo
e
este triângulo é retângulo e, portanto, não é obtusângulo

Antes de ler as respostas e as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Respostas do Exercício 1*:** (i) Não são equivalentes. Na tabela de $[p \wedge (\neg q)] \leftrightarrow [(\neg p) \wedge q]$ ocorre F na interpretação $p : V$ e $q : F$. (ii) Equivalentes. Na tabela de $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ ocorre V em todas as interpretações. (iii) Equivalentes. Na tabela de $[p \to (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (p \to r)]$ ocorre V em todas as interpretações. (iv) Equivalentes. Na tabela de $[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \to q) \vee (p \to r)]$ ocorre V em todas as interpretações. (v) Não são equivalentes. Na tabela de $[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [p \wedge (q \vee r)]$ ocorre F na interpretação $p : F$, $q : V$ e $r : V$. ***Resolução do Exercício 2*:**

(i) Legenda: p : x é primo; i : x é ímpar. Simbolização: $\neg(p \leftrightarrow i)$ e $p \vee i$. Na tabela de $\neg(p \leftrightarrow i) \leftrightarrow (p \vee i)$ ocorre F na interpretação $p : V$ e $i : V$ (**Confira esta informação!**). Não são equivalentes.

(ii) Legenda: p : r é perpendicular a s; q : s é perpendicular a t; r : r é perpendicular a t. Simbolização: $(p \wedge q) \to r$ e $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r$. Na tabela de $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r)$ ocorre F na interpretação $p : V$, $q : V$, $r : F$. (**Confira esta informação!**) Não são equivalentes. (iii) Como

Enunciados da forma φ segue de ψ são reescritos como se ψ, então φ.

o primeiro pode ser rescrito: se ((r é paralela a s) e (r é perpendicular a t)), então (s é perpendicular a t). Como

Enunciados da forma φ acarreta em ψ são reescritos como se φ, então ψ.

o segundo pode ser reescrito: se (r é paralela a s) e (não (s é perpendicular a t)) então, (não (r é perpendicular a t)). Legenda:

p : r é paralela a s
q : r é perpendicular a t
r : s é perpendicular a t.

Simbolização: $(p \wedge q) \rightarrow r$ e $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$. Na tabela de $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$ ocorre V em todas as interpretações (**Confira esta informação!**). São equivalentes. (iv) Como

Enunciados da forma nem φ nem ψ são reescritos como (não φ) e (não ψ).

o segundo pode ser reescrito: se ($x = 2$), então [(não x é par) e (não x é primo)] }. Legenda:

p : x é par
q : x é primo
r : $x = 2$

Simbolização: $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ e $r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. Na tabela de $[(p \wedge q) \rightarrow \neg r] \leftrightarrow [r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)]$ ocorre F na interpretação $p : V$, $q : F$ e $r : V$ (**Confira esta informação!**). Não são equivalentes. (v) Como

Enunciados da forma φ ao mesmo tempo que ψ são reescritos como φ e ψ.

o primeiro pode ser reescrito: não (este triângulo é retângulo e este triângulo é obtusângulo). Como

Enunciados da forma φ portanto ψ são reescritos como φ e (se φ, então ψ).

o segundo pode ser reescrito: este triângulo é retângulo e [se este triângulo é retângulo, então não (este triângulo é obtusângulo)]. Legenda:

r : este triângulo é retângulo
o : este triângulo é obtusângulo,

Simbolização: $\neg(r \wedge o)$ e $r \wedge (r \rightarrow \neg o)$. Na tabela de $\neg(r \wedge o) \leftrightarrow [r \wedge (r \rightarrow \neg o)]$ ocorre F na interpretação $r : F$ e $o : V$. (**Confira esta informação!**). Não são equivalentes.
