1 Tabelas dos conectivos

O estudo da *avaliação* de enunciados consiste em, dado um enunciado (proferido em um certo contexto) determinar se ele é verdadeiro ou falso (naquele contexto).

Inicialmente, vamos avaliar os enunciados de acordo com a maneira como eles são formados pela aplicação de conectivos a enunciados atômicos. Posteriormente, vamos avaliar enunciados formados por aplicações de mais duas partículas.

(1) Os adjetivos

verdadeiro e falso

são chamados de *valores*, quando são usadas na avaliação de enunciados da maneira que será especificada.

(2) Vamos simbolizar os valores de acordo com a tabela abaixo:

valor	símbolo
verdadeiro	V
falso	F.

Estes são os únicos símbolos adotados para a simbolização dos valores.

Semântica dos conectivos

Quanto à avaliação de enunciados formados por seu intermédio, em Matemática, os conectivos são usados de acordo com as seguintes regras bem determinadas:

Regra de avaliação do não:

Em matemática, quando negamos um enunciado, simplesmente, trocamos o seu valor:

$$\neg\varphi \text{ é } V \text{ quando } \varphi \text{ é } F,$$
$$\neg\varphi \text{ é } F \text{ quando } \varphi \text{ é } V.$$

Isto pode ser resumido na *tabela de avaliação do não*:

φ	$\neg\varphi$
V	F
F	V.

Regra de avaliação do e:

Em matemática, quando afirmamos uma conjunção, simplesmente, afirmamos ambos os enunciados:

$$\varphi \wedge \psi \text{ é } V \text{ quando } \varphi \text{ e } \psi \text{ são ambos } V,$$
$$\varphi \wedge \psi \text{ é } F \text{ quando ao menos um dentre } \varphi \text{ e } \psi \text{ é } F.$$

Isto pode ser resumido na *tabela de avaliação do e*:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F.

Regra de avaliação do ou:

Em matemática, quando afirmamos uma disjunção, simplesmente, apresentamos duas alternativas que não se excluem necessariamente:

$$\varphi \vee \psi \text{ é } V \text{ quando ao menos um dentre } \varphi \text{ e } \psi \text{ é } V,$$
$$\varphi \vee \psi \text{ é } F \text{ quando } \varphi \text{ e } \psi \text{ são ambos } F.$$

Isto pode ser resumido na *tabela de avaliação do ou*:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F.

É natural considerarmos que enunciados verdadeiros "têm mais valor" do que enunciados falsos. Ou seja, é do senso comum considerarmos que $F < V$ (isto é, que F "vale menos" do que V). Além disso, quando afirmamos uma implicação $\varphi \to \psi$, é natural considerarmos que "o valor de φ garante (sustenta) o valor de ψ". Ora, como consideramos que $F < V$, não podemos considerar como V uma implicação cujo antecedente é V e cujo consequente é F pois, neste caso, estamos "passando" de um valor maior para um valor menor.

No estudo da avaliação de enunciados formados por aplicação do se ... então esta ideia é levada às suas últimas consequências:

Regra de avaliação do se então:

Em Matemática, quando afirmamos uma implicação, simplesmente, afirmamos que "a verdade não diminui", quando "passamos" do entecendente para o consequente, ou seja, uma implicação é V se, e somente se, nela, "a verdade não passa de V para F":

$$\varphi \to \psi \text{ é } F \text{ quando } \varphi \text{ é } V \text{ e } \psi \text{ é } F,$$
$$\varphi \to \psi \text{ é } V \text{ em todos os outros casos.}$$

Isto pode ser resumido na seguinte *tabela de avaliação do se então*:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V.

Tabela de avaliação do se e somente se:

Em matemática, quando afirmamos uma biimplicação, simplesmente, afirmamos que os enunciados componentes têm os mesmos valores:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ é } V \text{ quando } \varphi \text{ e } \psi \text{ têm o mesmo valor,}$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ é } F \text{ quando } \varphi \text{ e } \psi \text{ têm valores distintos.}$$

Isto pode ser resumido na seguinte *tabela de avaliação do se e somente se*:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V.

Exemplo 1 Dados seguintes enunciados e seus respectivos valores:

Paris é a capital da França	:	V
Rio é uma cidade maravilhosa	:	V
2 é composto	:	F
4 é primo	:	F,

temos que:

(a)	Paris não é a capital da França	:	F
(b)	Paris não é a capital da França e Rio é uma cidade maravilhosa	:	F
(c)	não é o caso que: 2 é composto ou 4 é primo	:	V
(d)	se Paris não é a capital da França, então 4 não é primo	:	V
(e)	Rio é uma cidade maravilhosa se, e somente se, 2 não é composto	:	V.

1.1 Observações

Observação 1 Tabelas de avaliação também são chamadas de *tabelas de valores* ou *tabelas-de-verdade* ou, ainda, simplesmente, *tabelas-verdade*.

Observação 2 Em resumo, dados os enunciados φ e ψ, a maneira como os conectivos

não , e , ou , se ... então e se, e somente se

são usados em contextos matemáticos na determinação dos valores dos enunciados moleculares é sumarizada nas seguintes *tabelas de avaliação dos conectivos*:

φ	$\neg\varphi$
V	F
F	V

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V.

Você deve ter estas tabelas na memória pois elas são as únicas ferramentas que podem ser utilizadas na avaliação de enunciados moleculares formados por meio dos conectivos.

1.2 Exercícios

Exercício 1 Dados os seguintes enunciados e seus respectivos valores:

0 é par	:	V
1 é par	:	F
2 é par	:	V
2 é primo	:	V
3 é par	:	F

determine o valor de cada enunciado abaixo, de acordo com as tabelas de avaliação dos conectivos:

(i)	0 não é par	(ii)	1 não é par
(iii)	0 é par e 2 é par	(iv)	0 é par e 1 é par
(v)	1 é par e 2 é par	(vi)	1 é par e 3 é par
(vii)	2 é par ou 2 é primo	(viii)	2 é par ou 1 é par
(ix)	1 é par ou 2 é primo	(x)	1 é par ou 3 é par
(xi)	se 0 é par, então 2 é par	(xii)	se 0 é par, então 1 é par
(xiii)	se 1 é par, então 0 é par	(xiv)	se 1 é par, então 3 é par
(xv)	0 é par se, e somente se, 2 é par	(xvi)	0 é par se, e somente se, 1 é par
(xvii)	1 é par se, e somente se, 2 é par	(xviii)	1 é par se, e somente se, 3 é par

Exercício 2 Determine o valor de cada enunciado abaixo:

(i)	$\neg(8+2=11) \land (2^3 > 3^2)$	(ii)	$(2^{2^2}$ é par$) \lor (2^{2^2} > 2)$
(iii)	$(8-3=4) \to (\sqrt{2}$ é algébrico$)$	(iv)	$\neg(0=1) \leftrightarrow \neg(\sqrt{2}$ é racional$)$

2 Avaliação de enunciados

Como os Exercícios 1 e 2 sugerem, para avaliar um enunciado molecular é necessário e suficiente que tenhamos os valores dos enunciados atômicos componentes. Como vimos na Parte 2 do Texto da Semana 2, os enunciados atômicos são da forma

E é P, ou seja, uma expressão e uma propriedade

ou da forma

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ são R, ou seja, mais de uma expressão e uma relação.

Assim, temos:

Assim, temos:

(1) Dado um enunciado atômico da forma E é P, quando o objeto denotado por E possui a propriedade expressa por P, o enunciado é V. Caso contrário, isto é, quando o objeto denotado por E não possui a propriedade expressa por P, o enunciado é F.

(2) Dado um enunciado atômico da forma $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são R, quando os objetos denotados por $E_1, E_2, \ldots, E_n$ estão relacionados pela relação expressa por R, o enunciado é V. Caso contrário, isto é, quando os objetos denotados por $E_1, E_2, \ldots, E_n$ não estão relacionados pela relação expressa por R, o enunciado é F.

A avaliação de um enunciado atômico pode ser uma tarefa bastante trivial ou uma tarefa extremamente difícil, pois depende do nosso conhecimento sobre os objetos, propriedades ou relações aos quais o enunciado se refere.

Exemplo 2 Qualquer pessoa que já tenha cursado o Ensino Básico sabe que o enunciado

2^{2^2} é par

é V.

Por outro lado, uma pessoa que só tem esse nível de conhecimento dificilmente saberá avaliar corretamente o enunciado

π é transcendente

como V. □

Um mesmo enunciado atômico pode ser avaliado como V em um dado contexto e como F em outro.

Exemplo 3 O enunciado

D. Pedro II é imperador do Brasil

é avaliado como F antes de 1840, como V de 1840 até 1889, e como F novamente a partir de 1890.

2.1 Observação

Observação 3 Levando em conta o que foi dito acima, vamos sempre considerar que:

Um dado enunciado atômico é verdadeiro em certos contextos e é falso em outros. Mesmo que saibamos que ele é verdadeiro e não conheçamos os contextos nos quais ele é falso ou, alternativamente, saibamos que ele é falso e não conheçamos os contextos nos quais ele é verdadeiro.

Este é um procedimento usual nos estudos de Linguagem e Lógica Matemáticas; embora pareça estranho no caso de enunciados de conteúdo matemático aparentemente simples, como

2+3+5 é um número negativo

e

O triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo.

De fato, proferidos em seus contextos usuais, estes enunciados são F e V, respectivamente. Além disso, não parece muito fácil determinar contextos nos quais eles são V e F, respectivamente. Mas, de acordo com o que foi dito acima, vamos considerar que estes contextos existem.

2.2 Exercícios

Exercício 3 Classifique cada enunciado atômico abaixo como V ou F:

(i) 1 é um número transcedente
(ii) Anderson Silva é o recordista no número de vitórias consecutivas no UFC
(iii) o número de átomos no universo observável é ilimitado
(iv) Paul Erdös foi um grande matemático
(v) a matriz $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível

Exercício 4 Classifique cada enunciado molecular abaixo como V ou F (*Como nos Exercícios 1 e 2, temos que utilizar conhecimentos matemáticos básicos para avaliar os componentes dos enunciados moleculares. Usualmente, empregamos vírgulas e parênteses para demarcar a maneira como certos enunciados são formados.*):

(i) não é o caso que $0 \leq 0$
(ii) $1+2=2+1$ e $1-2=2-1$
(iii) $2+3=5$ ou $5-3=2$
(iv) se $1+2=4$, então $1=0$
(v) $0<1$ se, somente se, $0 \leq 1$
(vi) $2>0$ e $2>1$, ou $2>3$
(vii) $-2<-1$ e $\neg((-2)^2 \geq 2^2)$
(viii) $\neg$(10 é par) ou $\neg$(10 é racional)
(ix) $4<3$ ou, se 2 é par, então $\sqrt{4}<3$
(x) $\sqrt{16}=6$ se, somente se, $\sqrt{121}=11$

3 Interpretações e tabela de um enunciado simbolizado

Dado um enunciado φ, formado por aplicações dos conectivos a enunciados atômicos, duas situações podem acontecer:

(1) Sabemos os valores dos componentes e podemos, a partir daí, por meio das tabelas dos conectivos, determinar de maneira direta o valor de φ

ou

(2) não sabemos os valores dos componentes e, para determinar o valor de φ, devemos primeiro pesquisar estes valores, de maneira a poder aplicar as tabelas dos conectivos.

Como vimos:

A determinação dos valores dos enunciados atômicos pode depender estritamente dos nossos conhecimentos gerais e, portanto, não é uma tarefa da Lógica.

Por outro lado:

Dada uma atribuição qualquer de valores a enunciados atômicos, não importando qual seja, podemos determinar de maneira iterada (usando as tabelas de avaliação dos concectivos) o valor de qualquer enunciado construído a partir deles por aplicações sucessivas dos conectivos.

Assim, um passo natural na análise lógica de um enunciado é associar a ele uma tabela que lista todas as possíveis atribuições de valores aos seus componentes e lista também os valores que o enunciado pode assumir, em cada caso.

Vamos apresentar agora, algumas definições que nos permitem descrever este processo de maneira precisa.

Interpretações para um enunciado

Uma *interpretação* para um enunciado simbolizado φ é uma atribuição de valores, V ou F, a todas as letras que ocorrem em φ, de modo que a cada letra seja atribuído um único valor.

Exemplo 4 (a) O enunciado simbolizado

$$p$$

é uma letra e, portanto, possui apenas duas interpretações, dadas na tabela:

p
V
F.

Cada interpretação corresponde a uma das linhas da tabela, a partir da segunda linha.

(b) O enunciado simbolizado

$$p \wedge \neg p$$

também possui ocorrências de apenas uma letra, p. Por isso, ele possui apenas as duas interpretações, dadas na tabela do item (a)

(c) O enunciado simbolizado

$$(p \wedge q) \to p$$

possui ocorrências de duas letras, p e q. Portanto, ele possui as quatro interpretações dadas na tabela:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F.

(d) O enunciado simbolizado

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

possui ocorrências de três letras, p, q e r. Portanto, ele possui as oito interpretações dadas na tabela:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabela de um enunciado

A cada enunciado simbolizado φ corresponde uma *tabela de avaliação*, que descreve o "comportamento de verdade" de φ, isto é, que valores φ assume em cada uma das suas interpretações.

Seja φ um enunciado simbolizado no qual ocorrem (exatamente) as letras p_1, p_2, $\ldots$, p_m.

Por exemplo, para ilustrar as explicações, vamos considerar o enunciado simbolizado

$$(p \wedge q) \to [(\neg p) \to (\neg q)] \qquad (1)$$

no qual ocorrem exatamente as letras p e q.

A *tabela* de φ é construída mediante a execução dos seguintes passos:

1. Em uma *linha de referência*, escrevemos as letras $p_1, \ldots, p_m$.

   Por exemplo, o primeiro passo para construir a tabela de (1) é escrever

p	q

2. Abaixo da linha de referência, escrevemos todas as interpretações para φ.

   Por exemplo, o segundo passo para construir a tabela de (1) é escrever

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

3. Utilizando as tabelas de avaliação dos conectivos, calculamos gradativamente todos os valores de cada enunciado simbolizado utilizado na formação de φ, até obter o valor de φ.

   Este terceiro passo é o mais complexo. Em primeiro lugar, observe que os enunciados simbolizados utilizados na formação de (1) são:

$$p \wedge q \quad , \quad \neg p \quad , \quad \neg q \quad , \quad \neg p \to \neg q$$

   Agora, aplicando sucessivamente as tabelas dos conectivos a $p \wedge q$, $\neg p$, $\neg q$, e $\neg p \to \neg q$, obtemos a seguinte sequência de tabelas que ilustram a construção da *tabela de avaliação* de (1):

(i) De acordo com a tabela do $\wedge$, para $p \wedge q$, temos a tabela parcial:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(ii) De acordo com a tabela do $\neg$, para $\neg p$, temos a tabela parcial:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

(iii) Analogamente, de acordo com a tabela do $\neg$, para $\neg q$, temos a tabela parcial:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

(iv) De acordo com a tabela do $\to$, para $\neg p \to \neg q$, temos a tabela parcial:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \to (\neg q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V

(v) Finalmente, de acordo com a tabela do $\to$, temos a tabela de $(p \wedge q) \to [(\neg p) \to (\neg q)]$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \to (\neg q)$	$(p \wedge q) \to [(\neg p) \to (\neg q)]$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V.

4. Ao final do processo, a tabela formada é a *tabela de avaliação de* φ.

3.1 Observação

Observação 4 Cada interpretação de um enunciado simbolizado φ (formado por aplicações dos conectivos) representa um <u>contexto</u> no qual os enunciados atômicos (simbolizados pelas letras) que ocorrem em φ são avaliados.

Como o valor do enunciado pode ser determinado a partir dos valores dos enunciados atômicos que o compõem, quando listamos todas as interpretações, estamos listando todos os <u>contextos relevantes</u> para a avaliação do enunciado.

3.2 Exercícios

Exercício 5 Em cada item abaixo, determine o valor de q, de acordo com as informações dadas:

3.2 Exercícios

Exercício 5 Em cada item abaixo, determine o valor de q, de acordo com as informações dadas:

(i)	$p : V$ e $p \wedge \neg q : V$	(ii)	$p : F$ e $p \vee q : V$
(iii)	$p : V$ e $p \rightarrow q : V$	(iv)	$p : F$ e $q \rightarrow p : V$
(v)	$p : F$ e $p \leftrightarrow q : F$		

Exercício 6 Sabendo que $p \wedge q : V$ e $p \rightarrow r : F$, determine o valor de cada enunciado simbolizado:

(i)	$[\neg\neg\neg(p \wedge \neg q)] \wedge (\neg p \wedge \neg q)$	(ii)	$[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \vee r$
(iii)	$\{\neg\neg[(\neg q) \wedge r]\} \rightarrow \neg\neg p$	(iv)	$[\neg\neg\neg(p \rightarrow \neg q)] \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
(v)	$\langle\{[(q \vee r) \wedge s] \rightarrow t\} \vee p\rangle \rightarrow (q \wedge r)$		

Exercício 7 Determine, se possível, uma interpretação para as letras p, q, r, s, na qual $p \rightarrow (r \vee s)$ seja F e $(q \wedge \neg s) \leftrightarrow p$ seja V.

Exercício 8 Construa a tabela de cada enunciado abaixo:

(i) $p \vee (p \rightarrow \neg p)$

(ii) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

(iii) $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)] \rightarrow [(\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg r)]$

(iv) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [\neg p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg r)]$

Exercício 9 Dado um enunciado φ com n componentes, onde $n = 1$, 2 ou 3, o número i de interpretações de φ é dado na seguinte tabela:

n	i
1	2
2	4
3	8

(i) Liste todas as interpretações de um enunciado que possui 4 componentes: p, q, r e s.

(ii) Liste todas as interpretações de um enunciado que possui 5 componentes: p, q, r, s e t.

(iii) Faça uma *conjectura* (isto é, busque um padrão geral a partir destes exemplos específicos) definindo uma fórmula que determina o número de interpretações de um enunciado que possui ocorrências de n componentes: p_1, p_2, $\ldots$, p_n.