

# 1 Conectivos: simbolização e sintaxe

O estudo da *formação* de enunciados consiste em, dado um enunciado:

- (1) analisá-lo, classificando-o como atômico ou molecular e, quando molecular,
- (2) explicitar a maneira como ele é formado a partir de enunciados atômicos.

A principal ferramenta empregada no estudo da formação de enunciados é a *simbolização*.

Inicialmente, vamos simbolizar apenas enunciados formados por aplicações das partículas

não é o caso que , e , ou , se ... então , se, e somente se

a enunciados atômicos. Posteriormente, vamos simbolizar enunciados formados por aplicações de mais duas partículas.

As partículas

não é o caso que , e , ou , se ... então , se, e somente se

são chamadas de *conectivos lógicos*, quando são usadas na formação de enunciados da maneira que será especificada.

A simbolização começa com a atribuição de símbolos aos conectivos.

Simbolizamos os conectivos de acordo com a tabela:

conectivo	símbolo
não	$\neg$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
se ... então	$\rightarrow$
se e somente se	$\leftrightarrow$

Estes são os únicos símbolos adotados para a simbolização dos conectivos.

Além disso, denotamos enunciados genéricos pelas letras gregas minúsculas:

$\alpha$	alfa	$\beta$	beta	$\gamma$	gama	$\delta$	delta
$\theta$	teta	$\lambda$	lambda	$\mu$	mi	$\rho$	rô
$\sigma$	sigma	$\tau$	tau	$\phi$	fi	$\psi$	psi,

usualmente indexadas por números naturais. Também vamos utilizar a letra grega  $\phi$  estilizada, escrevendo-a como  $\varphi$ .

Regra de formação do e:

O conectivo

e

é aplicado a dois enunciados  $\varphi$  e  $\psi$ , não necessariamente distintos e tomados na ordem dada, e forma o enunciado

$\varphi \wedge \psi$ ,

chamado a *conjunção* de  $\varphi$  e  $\psi$ .

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo  $(\varphi) \wedge (\psi)$ ,  $(\varphi \wedge \psi)$  ou até mesmo  $((\varphi) \wedge (\psi))$ .

## Sintaxe dos conectivos

Quanto à sua aplicação na formação de enunciados, os conectivos seguem as seguintes regras bem determinadas:

Regra de formação do não:

O conectivo

não

é aplicado a um enunciado  $\varphi$  e forma o enunciado

$\neg\varphi$ ,

chamado a *negação* de  $\varphi$ .

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo  $\neg(\varphi)$ ,  $(\neg\varphi)$  ou até mesmo  $(\neg(\varphi))$ .

Regra de formação do ou:

O conectivo

ou

é aplicado a dois enunciados  $\varphi$  e  $\psi$ , não necessariamente distintos e tomados na ordem dada, e forma o enunciado

$\varphi \vee \psi$ ,

chamado a *disjunção* de  $\varphi$  e  $\psi$ .

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo  $(\varphi) \vee (\psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$  ou até mesmo  $((\varphi) \vee (\psi))$ .

### Regra de formação do se ... então:

O conectivo

se ... então

é aplicado a dois enunciados  $\varphi$  e  $\psi$ , não necessariamente distintos e tomados na ordem dada, e forma o enunciado

$$\varphi \rightarrow \psi,$$

chamado a *implicação* de  $\psi$  por  $\varphi$  (observe a ordem em que os enunciados são mencionados).

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo  $(\varphi) \rightarrow (\psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$  ou até mesmo  $((\varphi) \rightarrow (\psi))$ .

Mas, observe que nunca escrevemos implicações usando a ‘seta dupla’  $\Rightarrow$ .

### Regra de formação do se e somente se:

O conectivo

se, e somente se

é aplicado a dois enunciados  $\varphi$  e  $\psi$ , não necessariamente distintos e tomados na ordem dada, e forma o enunciado

$$\varphi \leftrightarrow \psi,$$

chamado a *bi-implicação* de  $\varphi$  e  $\psi$ .

**Exemplo 1** Os enunciados

$\neg$  (eu faço os exercícios)  
 $[\neg$  (eu faço os exercícios)]  $\wedge$  (eu quero passar)  
 $(\text{eu faço os exercícios}) \vee [\neg$  (eu passo na matéria)]  
 $(\text{eu faço os exercícios}) \rightarrow (\text{eu passo na matéria})$   
 $[\neg$  (eu passo na matéria)]  $\leftrightarrow [\neg$  (eu faço os exercícios)]

são uma negação, uma conjunção, uma disjunção, uma implicação e uma bi-implicação, respectivamente.

## 2 Enunciados componentes

Para analisar e simbolizar um enunciado é essencial que saibamos explicitar corretamente a maneira como ele é formado a partir de enunciados atômicos, em conformidade com as regras de formação dos conectivos. Vamos, agora, estudar este processo de maneira detalhada.

Sejam  $\varphi$  um enunciado e  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  enunciados atômicos.

Dizemos que  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são os *componentes* de  $\varphi$ , quando  $\varphi$  é formado a partir de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  pela aplicação (zero, uma, ou mais vezes) dos conectivos lógicos.

O primeiro passo para a simbolização é determinar os enunciados componentes.

**Exemplo 2** (a) O componente de

$x$  é primo

é

$x$  é primo.

(b) O componente de

ela não gosta de bebidas amargas

é

ela gosta de bebidas amargas.

(c) Os componentes de

está chovendo ou está fazendo sol

são

está chovendo  
está fazendo sol.

## 2.1 Observação

**Observação 1** Como os componentes são enunciados atômicos, eles não possuem ocorrências de conectivos.

Por exemplo, o componente de

não é o caso que  $x$  não é primo

é

$x$  é primo.

Os componentes de

se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio

são

$x$  é primo

$x$  é igual a 1

$x$  tem um fator próprio.

## 2.2 Exercícios

**Exercício 1** Determine o(s) componente(s) de cada enunciado abaixo.

- (i) 2 é ímpar
- (ii) 3 não é par
- (iii) eu trabalho e os outros ficam ricos
- (iv)  $f(x)$  não é derivável ou  $f(x)$  é contínua
- (v) se estudo para a prova, então não vou à praia e não vou ao cinema
- (vi) sou realizado se, e somente se, planto uma árvore, escrevo um livro e tenho um filho

**Exercício 2** Determine o(s) componente(s) de cada enunciado abaixo. *Observe que algumas frases (expressões ou propriedades) estão implícitas nos enunciados, mas devem ser escritas explicitamente nos componentes.*

- (i) João é esperto
- (ii) Ricardo não é bobo
- (iii) perdoar é fácil e faz bem
- (iv) João ou Ricardo voltou atrás
- (v) se João pediu desculpas, então provou que é humilde
- (vi) se aceitou as desculpas, então ele provou que é generoso

## 3 Legendas

O segundo passo para a simbolização é simbolizar os componentes. Isto é feito através da noção de *legenda de simbolização*:

(1) Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  enunciados atômicos, distintos dois a dois.

Uma *legenda* para  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  é um esquema da forma:

$$\begin{array}{ll} l_1 & : \varphi_1 \\ l_2 & : \varphi_2 \\ & \vdots \\ l_n & : \varphi_n \end{array}$$

onde  $l_1, l_2, \dots, l_n$  são  $n$  letras distintas, usualmente escolhidas dentre as letras minúsculas do alfabeto.

(2) Seja  $\varphi$  um enunciado.

Uma *legenda* para  $\varphi$  é uma legenda para os componentes de  $\varphi$ .

**Exemplo 3** (a) Uma legenda para o enunciado atômico

ela gosta de bebidas amargas

pode ser:

$g$  : ela gosta de bebidas amargas.

(b) Uma legenda para o enunciado molecular

ela não gosta de bebidas amargas

pode ser a mesma já definida no item (a).

(c) Uma legenda para o enunciado molecular

não é o caso que  $x$  não é primo

pode ser:

$p$  :  $x$  é primo.

(d) Uma legenda para o enunciado molecular

está chovendo ou está fazendo sol

pode ser:

$c$  : está chovendo  
 $s$  : está fazendo sol.

(e) Uma legenda para o enunciado molecular

se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio

pode ser:

$p$  :  $x$  é primo  
 $u$  :  $x$  é igual a 1  
 $f$  :  $x$  tem um fator próprio.

(f) Uma legenda para o enunciado molecular

se 2 é par e 3 é par, então 2 é par

pode ser:

$d$  : 2 é par  
 $t$  : 3 é par.

### 3.1 Observações

**Observação 2** Todos os enunciados que ocorrem nas legendas:

- (1) são atômicos e, por isto, não podem possuir ocorrências de conectivos;
- (2) têm suas expressões, propriedades e relações escritas de maneira explícita e, por isto, enunciados abreviados ou escritos de maneira parcial não podem ocorrer nas legendas.

**Observação 3** Em uma legenda para um enunciado  $\varphi$ , cada um dos componentes de  $\varphi$  deve ser denotado por uma letra diferente. Para facilitar a análise dos enunciados, como ilustrado no Exemplo 3, procuramos usar “letras sugestivas”.

**Observação 4** Dada um enunciado  $\varphi$ , *ocorrências distintas de um mesmo enunciado atômico em  $\varphi$  são consideradas como distintas, mas são denotadas pela mesma letra*.

Por exemplo, o enunciado

eu vou, eu vou e eu vou

possui três ocorrências do enunciado

eu vou.

Uma legenda para ele é, simplesmente,

$v$  : eu vou.

### 3.2 Exercício

**Exercício 3** Para cada enunciado abaixo, faça o que se pede: (a) Determine seu(s) componente(s). *Observe que alguns conectivos foram escritos de uma forma estilizada. Por isto, quando necessário, reescreva o enunciado, de modo a tornar a sua estrutura mais aparente.* (b) Baseado na solução do item (a), defina uma legenda para o enunciado

- (i)  $P$  é um ponto de acumulação
- (ii) 4 não é um quadrado perfeito
- (iii) 4 nunca foi um número primo
- (iv) eu trabalho e eu ganho dinheiro
- (v) eu trabalho, mas não ganho dinheiro
- (vi) eu não estudo ou eu não me divirto
- (vii) se eu não vou ao jogo, então eu lavo o carro
- (viii) caso eu lave o carro, eu vou ao jogo
- (ix) eu vou ao jogo se eu não lavar o carro
- (x) eu lavo o carro quando vou ao jogo
- (xi) o dia está nublado se, e somente se, o sol está encoberto
- (xii) o dia não está nublado quando, e somente quando, o sol brilha no céu

## 4 Simbolização de enunciados com conectivos

Após definir uma legenda, o último passo para a simbolização é, simplesmente, simbolizar.

**Exemplo 4** (a) Dada a legenda

$g$  : ela gosta de bebidas amargas,

o enunciado

ela gosta de bebidas amargas

pode ser simbolizado por

$g$ .

(b) Dada a mesma legenda do item (a), o enunciado

ela não gosta de bebidas amargas

pode ser simbolizado por

$\neg g$ .

(c) Dada a legenda

$p$  :  $x$  é primo,

o enunciado

não é o caso que  $x$  não é primo

pode ser simbolizado por

$$\neg(\neg p)$$

ou, simplesmente,

$$\neg\neg p.$$

(d) Dada a legenda

$c$  : está chovendo

$s$  : está fazendo sol,

o enunciado

está chovendo ou está fazendo sol

pode ser simbolizado por

$$c \vee s.$$

(e) Dada a legenda

$p$  :  $x$  é primo

$u$  :  $x$  é igual a 1

$f$  :  $x$  tem um fator próprio,

o enunciado

se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio

pode ser simbolizado por

$$(\neg p) \rightarrow [u \vee (\neg f)]$$

ou, simplesmente,

$$\neg p \rightarrow (u \vee \neg f).$$

(f) Dada a legenda

$d$  : 2 é par

$t$  : 3 é par,

o enunciado

se 2 é par e 3 é par, então 2 é par

pode ser simbolizado por

$$(d \wedge t) \rightarrow d.$$

## 4.1 Observações

**Observação 5** A simbolização de um enunciado é um processo complexo que explicita a sua *forma*, transformando-o em um objeto mais adequado para a análise lógica. Ela consiste, essencialmente, de três partes:

- (1) exame da estrutura do enunciado, de modo a determinar seus componentes e a maneira como ele é formado;
- (2) criação de uma legenda para simbolizá-lo;
- (3) simbolização propriamente dita, baseada na legenda criada.

**Observação 6** A simbolização de um enunciado deve mostrar corretamente de que maneira o enunciado é obtido a partir dos enunciados atômicos que o compõem, por aplicações dos conectivos. Isto é, em geral, quando, no processo de simbolização, “não respeitamos” a maneira como um enunciado é formado por aplicações dos conectivos, nem sempre obtemos um enunciado simbolizado com a mesma estrutura que o enunciado original.

Por exemplo, de acordo com a legenda

$p$  : 2 é ímpar

$q$  : 1 é ímpar

$r$  : 3 é par,

o enunciado

se 2 é ímpar, então 1 é ímpar e 3 é par

pode ser simbolizada como

$$p \rightarrow (q \wedge r).$$

Mas, ele não pode ser simbolizado como

$$(p \rightarrow q) \wedge r$$

pois, como veremos adiante, enquanto a implicação

se 2 é ímpar, então 1 é ímpar e 3 é par

é verdadeira, a conjunção

se 2 é ímpar, então 1 é ímpar; e 3 é par

é falsa.



## 4.2 Exercícios

**Exercício 4** Para cada enunciado abaixo, faça o que se pede: (a) Classifique-o como atômico ou molecular. (b) Se ele for atômico, classifique-o como expressão e propriedade ou mais de uma expressão e relação. (c) Se ele for molecular, classifique-o como negação, conjunção, disjunção, implicação ou bi-implicação, destacando a partícula e os enunciados a partir dos quais ele é formado. (d) Defina uma legenda para o enunciado e simbolize-o de acordo com a legenda definida.

- (i) eu gosto de Lógica
- (ii) Lógica não é difícil
- (iii) não é o caso que 8 não é maior do que 7
- (iv) Matemática Discreta não é fácil e Matemática Discreta é interessante
- (v) 25 não é um quadrado perfeito e 25 não é um múltiplo de 5
- (vi) eu estudo bastante ou eu não passo em Matemática Discreta
- (vii)  $f$  está bem definida e o gráfico de  $f$  é uma reta, ou  $f$  não é contínua
- (viii) se ela aprende com facilidade, então: eu vou estudar com ela e ela vai me ensinar a matéria
- (ix) se  $x^2$  é ímpar e  $x$  não é diferente de 0, então  $x$  não é par
- (x) eu passo em Matemática Discreta se, e somente se, eu estudo bastante e eu tiro as minhas dúvidas
- (xi)  $n$  é um número primo se, e somente se,  $n$  não é igual a 1 e  $n$  não possui fatores próprios

**Exercício 5** Simbolize os enunciados a seguir, de acordo com a seguinte legenda

- $p_1$  : Eliane possui um Porsche
- $p_2$  : Kátia possui um Porsche
- $p_3$  : Marília possui um Porsche
- $f_1$  : Eliane possui uma Ferrari
- $f_2$  : Kátia possui uma Ferrari
- $f_3$  : Marília possui uma Ferrari
- $z_1$  : Eliane possui um Zenvo
- $z_2$  : Kátia possui um Zenvo
- $z_3$  : Marília possui um Zenvo

- (i) Eliane não possui um Porsche e Kátia sim
- (ii) Eliane possui um Porsche e Kátia não
- (iii) nem Eliane nem Kátia possuem Ferraris
- (iv) Kátia ou Marília possui um Zenvo
- (v) Kátia ou Marília não possui um Zenvo

**Exercício 6** Simbolize os enunciados a seguir, de acordo com a legenda definida no Exercício 5.

- (i) se Eliane possui um Zenvo, Kátia e Marília não possuem Porches
- (ii) se Eliane não possui um Zenvo, Kátia e Marília sim
- (iii) se Eliane possui um Zenvo, Kátia ou Marília também
- (iv) alguma das três possui uma Ferrari
- (v) alguma das três possui ambos uma Ferrari e um Zenvo
- (vi) nenhuma das três possui um Porche
- (vii) todas as três possuem Porches