

1 Expressões e enunciados

Os símbolos e/ou frases da Linguagem Matemática podem ser classificados como *expressões* ou *enunciados*.

(1) Uma *expressão* é um símbolo e/ou frase que denota um objeto matemático, em um dado contexto.

(2) Um *enunciado* é um símbolo e/ou frase que expressa uma propriedade de um objeto matemático ou estabelece uma relação entre vários objetos matemáticos, em um dado contexto.

Exemplo 1 A frase

o maior lado do triângulo ABC é menor que 2013

é um enunciado que possui ocorrências das expressões

o maior lado do triângulo ABC
o triângulo ABC
2013.

1.1 Observação

Observação 1 Expressões também são chamadas de *termos*. Enunciados também são chamados de *sentenças* ou *proposições*.

1.2 Exercícios

Exercício 1 Classifique cada símbolo e/ou frase abaixo como expressão ou enunciado.

- | | |
|-----------------------|--|
| (i) 2 é primo | (ii) o sucessor de 2012 |
| (iii) x e y | (iv) (x, y) está no primeiro quadrante |
| (v) $5 \times 4 = 21$ | |

Exercício 2 Classifique como expressão ou enunciado:

- (i) o menor número inteiro que é par e está entre 1 e 10
- (ii) o menor número inteiro que é par está entre 1 e 10

2 Constantes e variáveis

As expressões podem ser classificadas em duas categorias, de acordo com a maneira como elas denotam objetos:

- (1) Dizemos que uma expressão é *constante*, em um dado contexto, se ela denota um objeto fixo e bem determinado e não denota nenhum outro objeto naquele mesmo contexto.
- (2) Dizemos que uma expressão é *variável* se ela denota um objeto fixo e bem determinado, em um dado contexto, mas poderia denotar qualquer objeto (do mesmo tipo que o objeto já denotado), naquele mesmo contexto.

Exemplo 2 (a) A frase

1 é um número natural

é um enunciado que possui ocorrência da expressão

1.

Como se refere a um número específico, bem conhecido, 1 é uma constante do tipo *número*.

(b) A frase

o triângulo ABC é isósceles

é um enunciado que possui ocorrência da expressão

o triângulo ABC .

Como os pontos A , B e C não estão especificados, o triângulo ABC é uma variável do tipo *figura*.

(c) A frase

se x é par, então x^2 é par

é um enunciado que possui ocorrência das expressões

x
 x^2 .

Como o valor de x não está especificado, x e x^2 são variáveis do tipo *número*.

(d) A frase

o eixo $0x$ é perpendicular ao eixo $0y$

é um enunciado que possui ocorrência das expressões

o eixo $0x$
o eixo $0y$.

Como $0x$ e $0y$ são retas orientadas específicas, bem conhecidas, o eixo $0x$ e o eixo $0y$ são constantes do tipo *figura*.

2.1 Observação

Observação 2 Não existe um consenso universal sobre quais símbolos e/ou sequências de símbolos da Linguagem Matemática devem ser adotados como constantes ou variáveis. De fato, algumas expressões, como

$$\text{o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5}$$
$$\sqrt{2}$$

são universalmente empregadas como constantes; enquanto que outras, como

$$x$$
$$\text{a função } f(x)$$

são universalmente empregadas como variáveis; mas também existem expressões como

$$e$$
$$\phi$$

cujos empregos como constante ou variável dependem de certas convenções que podem mudar de texto para texto.

3 Estendendo a noção de enunciado

Sob o ponto de vista da Linguagem e da Lógica Matemáticas, três características dos enunciados são as mais relevantes:

- (1) Cada enunciado pode ser classificado como *verdadeiro* ou *falso*, de maneira exclusiva, em um dado contexto. Isto é, dado um enunciado qualquer e o contexto no qual ele está inserido, ou ele é verdadeiro ou ele é falso, mas não é simultaneamente verdadeiro e falso.
- (2) Cada enunciado pode ser classificado de maneira exclusiva como *atômico* ou *molecular*, apenas pela maneira como ele está escrito e não pelo seu significado.
- (3) Enunciados podem ser combinados entre si para formar enunciados mais complexos, por meio de certas partículas da Linguagem Matemática.

A seguir, vamos estudar detalhadamente estas características dos enunciados. Mas, antes, temos algumas observações importantes que estendem a noção de enunciado, da Linguagem Matemática para a certas frases da Língua Portuguesa.

3.1 Observação

Observação 3 Nos estudos de Linguagem e Lógica *Matemáticas* é usual, estendermos todos os conceitos que são introduzidos também para algumas expressões e frases da Língua Portuguesa. Por esta razão, em nossos estudos, além de enunciados sobre conteúdos matemáticos, vamos considerar também enunciados sobre os mais variados conteúdos, como:

Sócrates é homem
Luiza e ela são irmãs
se ela é carioca, então ela é brasileira
todo homem é mortal.

Como estes exemplos sugerem, em certos enunciados, os nomes próprios são usados como constantes e os pronomes pessoais são usados como variáveis. Levando esta sugestão adiante:

Em geral, vamos classificar os nomes próprios como constantes e os pronomes pessoais como variáveis.

3.2 Exercícios

Exercício 5 Classifique cada expressão abaixo como constante ou variável. Em (ii) e (iii), estamos nos referindo a bem conhecida dupla de cantores sertanejos.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| (i) eu | (ii) Zezé de Camargo e Luciano |
| (iii) o irmão mais velho de Luciano | (iv) o Campeão Brasileiro de 2009 |
| (v) um amigo | |

Exercício 6 Classifique cada frase abaixo como expressão ou enunciado. Em (ii), estamos nos referindo a bem conhecida apresentadora da TV.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| (i) 2 está entre 1 e 3 | (ii) o marido de Angélica |
| (iii) $3!$ não é um número par | (iv) $(-1, 1)$ está sobre o eixo $0x$ |
| (v) $\sqrt{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{x^2}}$ | |

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

Resolução do Exercício 5: (i) Variável. (ii) Constante. (iii) Constante. (iv) Constante. (v) Variável. **Resolução do Exercício 6:** (i) Enunciado. A frase afirma que três objetos estão relacionados. Possui ocorrência do verbo ‘estar’. (ii) Expressão. A frase é usada para denotar um objeto. (iii) Enunciado. A frase afirma que um objeto não possui uma propriedade. Possui ocorrência do verbo ‘ser’. (iv) Enunciado. A frase afirma que um par de objetos está relacionado com um outro objeto. Possui ocorrência do verbo ‘estar’. (v) Expressão. A frase é usada para denotar um objeto.

4 Enunciados atômicos

Recordamos que um *enunciado* é um símbolo e/ou frase que expressa uma propriedade de um objeto ou estabelece uma relação entre vários objetos, em um dado contexto.

Os enunciados podem ser classificados de maneira exclusiva como *atômicos* ou *moleculares*.

Em suas formas mais simples, os *enunciados atômicos* são de duas formas:

- (1) uma expressão e uma *propriedade*;
- (2) mais de uma expressão e uma *relação*.

Propriedades são aplicáveis a somente um objeto de cada vez; relações são aplicáveis a dois ou mais objetos de cada vez.

Exemplo 3 (a) A frase

$$n(n+1) \text{ é par}$$

é um enunciado da forma uma expressão e propriedade.

A expressão é

$$n(n+1)$$

e a propriedade é

ser par.

(b) A frase

$$\overline{PQ} \text{ e } \overline{RS} \text{ são colineares}$$

é um enunciado da forma duas expressões e relação.

A primeira expressão é

$$\overline{PQ}$$

a segunda expressão é

$$\overline{RS}$$

e a relação é

serem colineares.

4.1 Observação

Observação 4 Na Linguagem Matemática, é comum o uso de enunciados atômicos que envolvem mais de duas expressões.

Por exemplo, o enunciado da Aritmética

$$6 \text{ é primo com } 35 \text{ e } 143$$

possui três expressões

6
35
143

e uma relação

ser primo com

que, neste caso, está sendo aplicada a três objetos.

Já, o enunciado da Geometria do Plano

\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} e \overline{SP} formam um retângulo

possui quatro expressões

\overline{PQ}
 \overline{QR}
 \overline{RS}
 \overline{SP}

e uma relação

formarem um retângulo

que, neste caso, está sendo aplicada a quatro objetos.

4.2 Exercícios

Exercício 7 Para cada enunciado atômico abaixo, faça o que se pede: (a) determine se ele é da forma expressão e propriedade ou da forma expressões e relação; (b) destaque as expressões, propriedades e relações envolvidas.

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| (i) eu sou aluno | (ii) Carolina é tutora |
| (iii) eu e Augusto somos amigos | (iv) $\frac{1}{2}$ é racional |
| (v) P e Q estão em um mesmo plano | |

Exercício 8 Para cada enunciado atômico abaixo, determine se ele é da forma expressão e propriedade ou da forma expressões e relação; e destaque as expressões, propriedades e relações.

- | | |
|---|-------------------------|
| (i) 1 é a unidade | (ii) 1 e x são iguais |
| (iii) (5, 12, 13) é um terno pitagórico | (iv) $2^2 + 3^2 > 5^2$ |
| (v) y está no intervalo $[0, 1]$ | |

5 Enunciados moleculares

Os *enunciados moleculares* são classificados em sete categorias. Em uma primeira abordagem, vamos considerar “apenas” enunciados de cinco categorias. O estudo dos enunciados das outras duas categorias será feito posteriormente.

Em suas formas mais simples, os *enunciados moleculares* são de cinco tipos:

- (1) Uma *negação* é um enunciado obtido pela aplicação da partícula
- não é o caso que,
- escrita às vezes simplesmente como
- não,
- a um enunciado.
- (2) Uma *conjunção* é um enunciado obtido pela aplicação da partícula
- e
- a dois enunciados (não necessariamente distintos).
- (3) Uma *disjunção* é um enunciado obtido pela aplicação da partícula
- ou
- a dois enunciados (não necessariamente distintos).
- (4) Uma *implicação* é um enunciado obtido pela aplicação da partícula
- se ... então
- a dois enunciados (não necessariamente distintos).

- (5) Uma *bi-implicação* é um enunciado obtido pela aplicação da partícula
- se, e somente se
- a dois enunciados (não necessariamente distintos).

Exemplo 4 Os seguintes enunciados são moleculares:

não é o caso que 2 é par	: negação
2 é par e x é primo	: conjunção
não é o caso que 2 é par ou não é o caso que 2 é par	: disjunção
se 2 é par, então 4 não é o menor número par	: implicação
3 é ímpar se, e somente se, 3 não é múltiplo de 2	: bi-implicação

□

Tão importante quanto classificar um enunciado como molecular é determinar a partir de que enunciados e por meio de que partículas ele é formado.

Exemplo 5 (a) O enunciado

não é o caso que 2 é par

é formado a partir do enunciado

2 é par

pela aplicação do

não é o caso que.

(b) O enunciado

2 é par e x é primo

é formado a partir dos enunciados

2 é par

x é primo

pela aplicação do

e.

(c) O enunciado

não é o caso que 2 é par ou não é o caso que 2 é par

é formado a partir de duas ocorrências do enunciado

não é o caso que 2 é par

por aplicação do

ou.

(d) O enunciado

se 2 é par, então 4 não é o menor número par

é formado a partir dos enunciados

2 é par

4 não é o menor número par

pela aplicação do

se ... então.

(e) O enunciado

3 é ímpar se, e somente se, 3 não é múltiplo de 2

é formado a partir dos enunciados

3 é ímpar

3 não é múltiplo de 2

pela aplicação do

se, e somente se.

5.1 Observações

Observação 5 A classificação de um enunciado como atômico ou molecular decorre apenas da maneira como ele está escrito e não do seu significado. Em particular:

Vamos adotar momentaneamente a convenção de considerar como moleculares somente os enunciados que possuem ocorrências explícitas das partículas:

não é o caso que , e , ou , se ... então , se, e somente se

Todos os outros são considerados como atômicos.

Por exemplo, o enunciado

2 é ímpar

é atômico, embora, em certos contextos, ele tenha o mesmo significado que o enunciado molecular

2 não é par.

Já o enunciado

não é o caso que $\sqrt{2}$ é racional

é molecular, embora, em certos contextos, ele tenha o mesmo significado que o enunciado atômico

$\sqrt{2}$ é irracional.

Observação 6 A ordem em que os enunciados ocorrem escritos na formação de um enunciado molecular pode ser relevante. Isto é, em geral, quando trocamos a ordem das ocorrências dos enunciados usados na formação de um enunciado molecular, nem sempre obtemos um enunciado com o mesmo significado que o enunciado original.

Por exemplo, se estamos nos referindo a números reais, o enunciado

se x é positivo, então x^2 é positivo

não tem o mesmo significado que o enunciado

se x^2 é positivo, então x é positivo.

De fato, o primeiro é verdadeiro, qualquer que seja o número real que x assume como valor, enquanto que o segundo é falso quando x assume como valor um número negativo.

Observação 7 O número de vezes em que um enunciado ocorre na formação de outro enunciado pode ser relevante. Isto é, em geral, quando “simplificamos” um enunciado, eliminando ocorrências repetidas de enunciados usados na sua formação, nem sempre obtemos um enunciado com o mesmo significado que o enunciado original.

Por exemplo, o enunciado

se Mariana está acessando a Internet, então Mariana está acessando a Internet

não tem o mesmo significado que o enunciado

Mariana está acessando a Internet.

De fato, o primeiro é verdadeiro em qualquer contexto, enquanto que o segundo pode ser verdadeiro em alguns contextos e falso em outros.

Observação 8 Em certos contextos, a análise de um enunciado pode ser simplificada se o reescrevemos — muitas vezes, usando conhecimentos matemáticos básicos. f Por exemplo, o enunciado atômico

8 é composto

pode ser reescrito como a conjunção

8 é diferente de 0, 8 é diferente de 1 e 8 não é primo.

Observe que aqui a vírgula é usada como e.

Já o enunciado

2 ou $\sqrt{2}$ é natural

pode ser reescrito como a disjunção

2 é natural ou $\sqrt{2}$ é natural.

A reescrita de enunciados é uma habilidade importante, que será trabalhada ao longo dos nossos estudos.

5.2 Exercícios

Exercício 9 Classifique cada enunciado a seguir como atômico ou molecular. Se ele for atômico, classifique-o como expressão e propriedade ou expressões e relação, destacando as expressões, propriedades e relações envolvidas. Se ele for molecular, classifique-o como negação, conjunção, disjunção, implicação ou bi-implicação, destacando a partícula e os enunciados a partir dos quais ele é formado.

- (i) 4 é um quadrado perfeito
- (ii) 3 é menor do que 2
- (iii) P e Q não são simétricos em relação ao centro da circunferência
- (iv) 6 é par e 6 é múltiplo de 3
- (v) se $\det(A) \neq 0$, então A possui inversa
- (vi) x é racional se, e somente se, x pode ser escrito como uma fração

Exercício 10 Reescreva cada enunciado a seguir, de acordo com o que se pede.

- (i) 2 é par , como uma negação.
- (ii) 6 e 28 são perfeitos , como uma conjunção.
- (iii) r ou s passa por P , como uma disjunção.
- (iv) 3 não é menor do que 0 , como uma disjunção.
- (v) x não é positivo e nem negativo , como um enunciado atômico.