NOTAS DE AULA

Curso: Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas - TADS		**Período Letivo:** 2023-2
Disciplina: Lógica Computacional e Estatística		**Professor (a):** Ederson Schmeing
Data: 30/08/2023	**Turma:** 2	**Turno:** Noturno
Observação:		

Título: Logica de predicados

A lógica proposicional, que estudamos até agora, cobre a análise de proposições compostas proposições simples ligadas por conectivos.

- **Conectivos proposicionais:**
  ¬ (não),
  ∨ (ou inclusivo),
  ∧ (e),
  ⇒ (condicional, implica ou “se, então”) e
  ⇔ (bi-condicional, bi-implicação ou “se e somente se”);

Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações matemáticas.

1 - “Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados”, e que

2 - “Ivan está matriculado em Introdução à Lógica Computacional”.

Intuitivamente, podemos, então, concluir que

3 - “ Ivan é um estudante dedicado.”

Este tipo de inferência só é possível após introduzirmos o conceito de predicados e quantificadores.

*Inferir **é deduzir um resultado, por lógica, com base na interpretação de outras informações**. Inferir também pode significar chegar a uma conclusão a partir de outras perceções ou da análise de um ou mais argumentos. **Exemplo: Se eu estudar, irei ser aprovado.***

Predicados

Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:

- $x \geq 33$
- $x + y = z$
- O aluno **x** tirou a maior nota da sala na prova.

Tais afirmações são escritas em termos de variáveis.

A menos que os valores das variáveis sejam especificados, as afirmações não são verdadeiras nem falsas.

Como não possuem valor de verdade, elas não são proposições.

Exemplo 1

"x é um número real"

pode ser dividida em duas partes:

1 - a primeira parte, a variável **x**, é o sujeito da afirmação,

2 - a segunda parte "**é um número real**" é um predicado, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

A afirmação "x é um número real" pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável x assumir.

- Quando $x = \pi$, a afirmação "x é um número real" é verdadeira.
- Quando $x = \sqrt{-2}$, a afirmação "x é um número real" é falsa.

Podemos ver esta afirmação como uma função proposicional

P(x): "x é um número real"

que mapeia valores de x para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

- $P(\pi) = V$
- $P(\sqrt{-2}) = F$

Predicado: é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

Intuitivamente, predicados:

- dão qualidades a sujeitos,
- relacionam sujeitos entre si, ou
- relacionam sujeitos a objetos.

Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis.

Um predicado

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de n variáveis é chamado de um predicado n-ário.

Exemplo 2

Seja P(x) o predicado unário (de 1 variável) "$x \geq 10$"

- $P(15) = V$

pois substituindo x por 15 em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação **verdadeira**.

- $P(\pi) = F$

pois substituindo x por π em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação **falsa**.

Exemplo 3

Seja C (x, y) o predicado binário “x é capital de y ”.

- C (Brasília, Brasil) = V

pois substituindo x por Brasília e y por Brasil em “x é capital de y ”, obtemos uma afirmação **verdadeira**.

- C (Amsterdam, Alemanha) = F

pois substituindo x por Amsterdam e y por Alemanha em “x é capital de y ”, obtemos uma afirmação **falsa**.

Exemplo 4

Seja S(x, y , z) o predicado ternário “x + y = z”.

- S(1, 4, 5) = V

pois substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em “x + y = z”, obtemos uma afirmação **verdadeira**.

- S(4, 5, 1) = F

pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em “x + y = z”, obtemos uma afirmação **falsa**.

- S(0, 0, 0) = T

pois substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 em “x + y = z”, obtemos uma afirmação **verdadeira**.

Quantificadores

Como um predicado não tem valor de verdade em si, é preciso instanciar os valores de suas variáveis para transformá-lo em uma proposição.

Para transformar um predicado em uma proposição, podemos

- atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou
- quantificar em qual faixa de valores de cada variável a proposição pode ser considerada verdadeira.

Em português, usamos palavras como "**nenhum**", "**todos**" e "**algum**" para quantificar predicados.

Por exemplo, o predicado

"O computador x do laboratório está ligado"

não tem valor de verdade em si, mas as seguintes proposições têm:

- "Nenhum computador do laboratório está ligado."
- "Todos os computadores do laboratório estão ligados."
- "Algum computador do laboratório está ligado."

Dado um predicado de várias variáveis, o domínio de discurso, ou universo de discurso, ou simplesmente domínio é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

- No predicado

"$x \geq 2$",

o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ ou o dos inteiros $\mathbb{Z}$.

- No predicado

"A pessoa x nasceu no país y ",

o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo.

O domínio de um predicado é essencial para sua quantificação.

Dado um predicado P(x), sua **quantificação universal** é

$\forall x : P(x)$

significando:

"Para todos os valores **x** no domínio, P(x) é verdadeiro"

ou simplesmente

"Para todo x no domínio, $P(x)$"

O símbolo $\forall$ é o símbolo de **quantificador universal.**

A proposição $\forall x : P(x)$ é

- **verdadeira** se P(x) é verdadeiro para todo x no domínio,
- **falsa** se há algum x no domínio tal que $P(x)$ seja falso.

  um elemento x tal que $P(x)$ = F é um **contra-exemplo** para $\forall x : P(x)$

Exemplo 5

Considere o universo de discurso $D=1,2,3,4,5$. A proposição

$\forall x : x^2 \geq x$

é verdadeira ou falsa?

Solução.
Temos que $1^2 \geq 1, 2^2 \geq 2, 3^2 \geq 3, 4^2 \geq 4, 5^2 \geq 5$

Portanto temos que P(1), P(2), P(3), P(4) e P(5) são todos verdadeiros, e a proposição universal é, consequentemente, também verdadeira.

É possível definir o universo de discurso já na proposição quantificada:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x+1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
- $\forall y \in \mathbb{Z}^+ : -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.

Dado um predicado P(x), sua **quantificação existencial** é

$\exists x : P(x)$

significando

“Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro”

ou simplesmente

“Existe x no domínio tal que $P(x)$”

O símbolo ∃ é o símbolo de **quantificador existencial.**

A proposição $\exists x : P(x)$ é

- **verdadeira** se $P(x)$ é verdadeiro para ao menos um x no domínio,
- **falsa** se para todo x no domínio P(x) é falso.

  Um elemento x tal que $P(x)$= T é uma **testemunha** de $\exists x : P(x)$.

Exemplo 6

Seja $E = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ o universo de discurso. A proposição

$\exists m : m^2 = m$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

- $5^2 = 2 \neq 5$
- $6^2 = 36 \neq 6$
- $7^2 = 49 \neq 7$
- $8^2 = 64 \neq 8$
- $9^2 = 81 \neq 9$
- $10^2 = 100 \neq 10$

Portanto a proposição existencial é falsa.

Exemplo 7

Seja $\mathbb{Z}$ o universo de discurso. A proposição

$$\exists m : m2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Temos que $1^2 = 1$ logo 1 é uma **testemunha** de que $m2 = m$ para pelo menos um inteiro m.

Portanto a proposição existencial é verdadeira.

Note que nos dois exemplos anteriores o predicado usado foi o mesmo $\exists m : m2 = m$, mas a alteração do universo de discurso fez com que uma proposição quantificada fosse falsa (quando $m \in \{5,6,7,8,9,10\}$, enquanto a outra fosse verdadeira (quando $m \in \mathbb{Z}$).

Quantificação sobre domínios finitos

Quando o domínio de um quantificador é finito, podemos expressar os quantificadores universal e existencial em termos da lógica proposicional.

A proposição universal em um domínio finito $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo $x \in D$:

$$\forall x : P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \ldots \wedge P(x_n).$$

A proposição existencial em um domínio finito $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo $x \in D$:

$$\forall x : P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \ldots \vee P(x_n).$$

Exercícios

1) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, sabendo que o domínio das variáveis consiste nos números inteiros $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

a) $\forall n: n^2 \geq 0$

b) $\exists n: n^2 = 2$

c) $\forall n \in \mathbb{Z}: n^2 \geq n$

d) $\exists n: n^2 < n$

e) $\exists n \in \mathbb{Z}: n^3 > n$

d) $\forall n \in \mathbb{Z}: n^3 > n$

2) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, sabendo que o domínio das variáveis consiste no conjunto $A=\{1,2,3,4,5,\}$.

a) $\exists x: x+7=4$

b) $\exists y \in A: y+3<5$

c) $\exists z: 3z>12$

d) $\forall x: x>7$

e) $\forall y: y+2<7$

f) $\forall z \in A: 4z-z^2 \neq 0$