Faculdade SENAC
Rua Recife, 2283 – Centro - 85.810-031
Cascavel - PR
Fone: (45) 3392-1210
http://www.pr.senac.br/

NOTAS DE AULA

Curso: Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas - TADS		**Período Letivo:** 2023-2
Disciplina: Lógica Computacional e Estatística		**Professor (a):** Ederson Schmeing
Data: 01/08/2023 e 09/08/2023	**Turma:** 2	**Turno:** Noturno
Observação:		

Título: Logica proposicional: Princípios, proposição simples e compostas. Conectivos proposicionais. Fórmulas proposicionais.

Definição de Lógica: a lógica é o estudo sobre a natureza do raciocínio e do conhecimento. Ela é usada para formalizar e justificar os elementos do raciocínio empregados nas demonstrações / provas de teoremas.

A lógica clássica se baseia em um mundo bivalente ou binário (visão restrita do mundo real), onde os conhecimentos são representados por sentenças que só podem assumir dois valores verdade (verdadeiro ou falso). Portanto, nesse contexto, uma demonstração é um meio de descobrir uma verdade pré-existente deste mundo.

Lógica Proposicional: é a forma mais simples de lógica. Nela os fatos do mundo real são representados por sentenças sem argumentos, chamadas de proposições.

Exemplo:

Mundo real	**Proposição lógica**
Hoje está chovendo	P
A rua está molhada	Q
Se está chovendo, então a rua está molhada.	$P \Rightarrow Q$

Definição (proposição): uma proposição é uma sentença, de qualquer natureza, que pode ser qualificada de verdadeiro ou falso.

Exemplos:

$1+1=2$	é uma proposição **verdadeira** da aritmética.
$0>1$	é uma proposição **falsa** da aritmética.

Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, esta não é uma proposição. Alguns exemplos deste tipo de sentença são apresentados abaixo:

Exemplos:

- Frases Interrogativas (Qual o seu nome?).
- Frases Imperativas (Preste atenção!).
- Paradoxos Lógicos (Esta frase é verdadeira).

Exercício de fixação:

1) Boa sorte!
2) Todas as mulheres possuem sua beleza.
3) Ederson não é irmão do Anderson.
4) Não faça isto!
5) Machado de Assis é escritor.
6) Quantos haitianos moram no Brasil?
7) O Ivan é gerente de banco.
8) O Ivan é estudante de TADS.
9) O curso de TADS do SENAC é promissor.
10) Banana Nanica é uma fruta brasileira.

Princípios

1) Princípio da identidade: "uma proposição verdadeira é verdadeira; uma proposição falsa é falsa".
2) Princípio da não-contradição: "nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo".
3) Princípio do terceiro-excluído: "uma proposição ou será verdadeira ou será falsa: não há outra possibilidade".

Lógica e Computação

Na computação, a lógica pode ser utilizada, entre outras coisas, para:

- Conceber circuitos lógicos (o raciocínio do computador é um raciocínio lógico);
- Representar conhecimento (programação lógica);
- Validar algoritmos e corrigir programas (testes lógicos das especificações em engenharia de software).

Sintaxe

Linguagem e Alfabeto

O conjunto de fórmulas da lógica proposicional é denominado $L_{\oslash}$ (lógica de ordem $\oslash$). Cada fórmula deste conjunto é uma proposição gerada pela concatenação de símbolos pertencentes ao alfabeto da lógica proposicional, definido inicialmente.

Este alfabeto é infinito, constituído por:

- **Símbolos verdade:** True e False;
- **Símbolos proposicionais:** $P, Q, R, S, P_1, P_2, P_3, etc$
- **Conectivos proposicionais:**
  $\neg$ (não),
  $\wedge$ (ou inclusivo),
  $\vee$ (e),
  $\Rightarrow$ (condicional, implica ou "se, então") e
  $\Leftrightarrow$ (bi-condicional, bi-implicação ou "se e somente se");
- **Símbolos de pontuação:** $($ e $)$

Vale ressaltar que, assim como na linguagem portuguesa, nem toda a concatenação é válida, ou seja, pertence à linguagem da lógica proposicional.

As fórmulas proposicionais são construídas, a partir do alfabeto proposicional, de acordo com as seguintes regras:

1) Todo símbolo verdade é uma fórmula;
2) Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
3) Se P é uma fórmula, então a sua negação $\neg P$ também é uma fórmula;
4) Se P e Q são fórmulas, então:

   a) A disjunção de P e Q ($P \vee Q$) também é uma fórmula;
   b) A conjunção de P e Q ($P \wedge Q$) também é uma fórmula;
   c) A implicação de P em Q ($P \Rightarrow Q$) também é uma fórmula;
   d) A bi-implicação de P e Q ($P \Leftrightarrow Q$) também é uma fórmula;

Nesta definição, as fórmulas mais elementares são os símbolos verdade e proposicionais. A partir destes e utilizando as regras 3 e 4, recursivamente, é possível obter um conjunto infinito de fórmulas.

Note que o conectivo ¬ é unário (aplicado sobre uma única fórmula) e fica na ordem pré-fixa, enquanto que os demais conectivos são binários (aplicado sobre duas fórmulas) e fica na ordem infixa.

Exemplos de fórmulas válidas

$P \lor Q$ $\qquad ((\neg R) \Rightarrow X)$ $\qquad ((P \Leftrightarrow (\neg Y)) \lor (Q \Rightarrow (R \land V)))$

As construções acima são fórmulas proposicionais, pois podem ser derivadas a partir da aplicação das regras de construção descritas.

Exemplos de fórmulas inválidas

PQR $\qquad (R\, True \Rightarrow\ )$ $\qquad (False \lor\ \land (\Leftrightarrow Q\, P))$

As construções acima não constituem fórmulas proposicionais, pois não é possível derivá-las a partir das regras descritas.

Exercício

Dado os símbolos proposicionais P e Q . Mostre que $((P \land Q) \lor ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q)))$ é uma fórmula proposicional.

Solução:

P e Q são fórmulas	Aplica a Regra 2
$P \land Q$ é fórmula	Aplica a Regra 4.b
$(\neg P)$ e $(\neg Q)$ são fórmulas	Aplica a Regra 3
$((\neg P) \land (\neg Q))$ é fórmula	Aplica a Regra 4.c
$((P \land Q) \lor ((\neg P) \land (\neg Q)))$ é fórmula	Aplica a Regra 4.b

Faculdade SENAC
Rua Recife, 2283 – Centro - 85.810-031
Cascavel - PR
Fone: (45) 3392-1210
http://www.pr.senac.br/

Precedência dos Conectivos

Os símbolos de pontuação (parênteses), assim como na aritmética, são empregados para priorizar um “cálculo proposicional”. Esses símbolos podem ser omitidos quando isto não altera o significado da fórmula proposicional.

$$((\neg(\neg P)) \Rightarrow Q) \equiv \neg\neg P \Rightarrow Q$$

Observação: A fórmula $\neg(X \wedge Y)$ na pode ser escrita sem parênteses: $\neg(X \wedge Y) \neq \neg X \wedge Y$ **.**

Se em uma fórmula, os parênteses não são usados, o cálculo proposicional deve seguir a seguinte ordem de prioridade:

$\neg$	Maior precedência
$\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$	Precedência intermediária.
$\vee$ e $\wedge$	Menor precedência

Exemplo: $P \vee Q \Rightarrow R \equiv P \vee (Q \Rightarrow R)$

$\neg P \wedge Q \Leftrightarrow R \equiv (\neg P) \wedge (Q \Leftrightarrow R)$

Além da precedência, também existem as regras de associatividade, que definem a prioridade no cálculo para conectivos de mesma precedência. São elas:

$\vee$ e $\wedge$	Conectivos associativos à esquerda)
$\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$	(conectivos associativos à direita)

Exemplo: $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge R$

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Leftrightarrow R)$

Exercício

Elimine o maior número possível de parênteses da fórmula, sem alterar seu significado original: $((\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z))$.

Solução: $(\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z)$

$\neg X \vee (\neg(X \vee Y) \vee Z)$

Faculdade SENAC
Rua Recife, 2283 – Centro - 85.810-031
Cascavel - PR
Fone: (45) 3392-1210
http://www.pr.senac.br/

Exercício de fixação

Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida. Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar a sua interpretação.

a) $(P \wedge Q) \Rightarrow ((Q \Leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$

b) $\vee Q \Rightarrow R$

c) $(P \vee R) \Rightarrow (Q \Leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$

d) $(PQ \vee True)$

e) $((\neg(\neg P)) \Leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \Rightarrow R)) \wedge P))$

f) $(\neg P \Rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

Agradecimento ao Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins.