Demonstrações no Mathematica em uma Introdução à Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas

Um notebook dinâmico e educacional para TQC

Por Bruno Gehlen F . da Silva

Capítulo #1: Introdução e Teoria

Contexto Histórico

O século XX iniciou com a grande descoberta da física quântica por Max Planck e seus estudos sobre a quantização da matéria e o Corpo Negro, permitindo descrever várias oscilações de diferentes modos confinados em uma cavidade (explicando a Catástrofe do Ultravioleta). Albert Einstein interpretou essa quantização como partículas sem massa chamadas fótons e utilizou essas novas descobertas para determinar seus Coeficientes, além do famoso Efeito Fotoelétrico. Com este novo formalismo, é possível utilizar os operadores de Aniquilação e Criação em modos de energia (ou momento) e até mesmo encontrar a Taxa de Transição entre diferentes estados quânticos.

No mesmo século, também houve enormes avanços na área da relatividade: não há um referencial absoluto, a luz viaja a uma velocidade constante e, dependendo da velocidade do observador, diferentes grandezas físicas podem ser medidas. Descobriram-se observáveis invariantes de Lorentz (simétricos por todo o Grupo de Poincaré), pois já se sabia que rotações mantinham normas inalteradas, e agora haviam os Boosts de Lorentz. Também foi descoberto que esses boosts se reduzem às transformações de referencial de Galileu no regime das baixas energias (validando ainda a física clássica tradicional), e então passou-se a lidar com objetos traduzidos como campos e operadores invariantes sob todas essas transformações, sejam elas contínuas ou discretas no universo.

Hoje em dia, a humanidade já foi capaz de conciliar ambas as teorias na então chamada de Teoria Quântica de Campos (TQC), onde, diferente da mecânica quântica usual, a quantidade de partículas do sistema pode ser modificada ao longo dos processos, sendo assim a base para diversos sistemas de diferentes áreas da física moderna, como o estudo da Matéria Condensada e a Física de Partículas em si. A maneira como a TQC é construída permite que a matriz S (de espalhamento, “scattering”) seja utilizada de forma que, tomando que as interações ocorram em um tempo muito curto comparado o resto do espalhamento e tratando os campos como operadores que criam e/ou aniquilam partículas de certos estados, é possível descrever qualquer processo onde entrem *n* partículas e saiam *m* outras.

Formalismo Rápido

Falando propriamente sobre nossa teoria, é necessário lembrar alguns aspectos básicos da Teoria Quântica de Campos. Após a chamada “segunda quantização”, onde são estabelecidas as relações de comutação locais (em tempos iguais) entre os operadores de criação/aniquilação e a normalização dos estados, além de também definir a ação desses operadores em um estado de uma partícula:

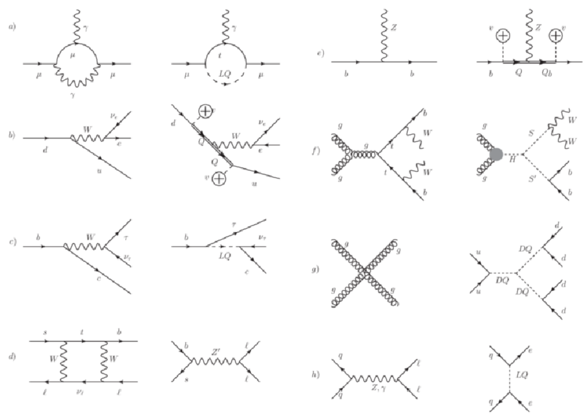
$$[a_k, a_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \qquad \langle 0|0\rangle = 1 \qquad a_p^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}|\vec{p}\rangle$$

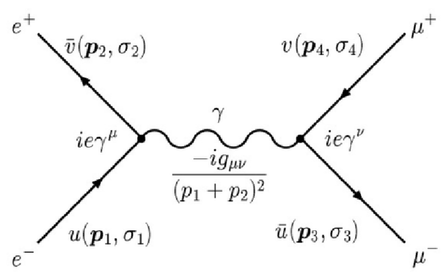
define-se que ***n*** partículas podem simultaneamente ocupar um estado de momento ***p***, resultando na soma direta dos espaços de Hilbert das ***i*** partículas, também chamado de espaço de Fock, permitindo agora a introdução de *Campos Escalares Quânticos*:

$$F_\nu(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu H^{\otimes n} \qquad \phi_0(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}\right),$$

que são soluções da equação de Klein-Gordon e portanto podem ser decompostos em ondas planas. Processos semelhantes se aplicam em *Campos Spinoriais* (que descrevem férmions), o que demanda um aprofundamento no estudo das representações do Grupo de Poincaré **ISO(1,3)** (possui rotações, boosts de Lorentz, inversão temporal e por paridade) e sobre o que são spinores em si, e *Campos Tensoriais*, como do fóton e do hipotético gráviton, que exigem bases com *polarizações* para cada um dos índices do objeto, relacionados com spin inteiro (bósons).

É possível então deduzir as Regras de Feynman, tanto no *espaço de posição* quanto de *momento*, que ajudam durante o já bem estabelecido formalismo de Diagramas de Feynman, estes sendo representações das séries perturbativas que surgem ao calcular as funções entre *n*-pontos de teorias interagentes:





Toda a ideia de diagramas e funções de muitos pontos facilita os cálculos pois basta que todas as amplitudes (chance de um estado inicial chegar em um estado final) que podem físicamente contribuir para o processo sejam somadas, além de sutilidades como soma sobre spins e polarizações . Além disso, é chegado um momento em que é necessário estudar o processo de *Renormalização* de teorias já que a inserção de loops nos diagramas, apesar de incrementar a presição, acaba criando divergências nos observáveis, o que certamente não é compatível com quase tudo observado no universo atual, e portanto é necessário deformar a teoria em uma certa escala e fazer modificações em passos intermediários dos cálculos de forma que os observáveis extraídos agora sejam finitos.

Capítulo #2: Cálculos

Primeiros Cálculos

Agora, iniciam-se os cálculos de alguns espalhamentos já conhecidos para avaliar a autenticidade da teoria descrita até aqui. Tomando o famoso *Espalhamento de Møller*, algo extremamente natural na eletrodinâmica quântica escalar, onde dois elétrons se aproximam e se repelem ao trocar um fóton, $e^- e^- \longrightarrow e^- e^-$. Pela Lagrangiana, nota-se que os diagramas possíveis são o *canal-t* e *canal-u*, então, definindo as grandezas necessárias (variáveis de Mandelstam) e sabendo a contribuição de cada vértice e propagador interno dos diagramas:

Outros Campos

Renormalização