Demonstrações no Mathematica em uma Introdução à Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas

Um notebook dinâmico e educacional para TQC

Por Bruno Gehlen F . da Silva

Capítulo #1: Introdução e Teoria

Contexto Histórico

O século XX iniciou com a grande descoberta da física quântica por Max Planck e seus estudos sobre a quantização da matéria e o Corpo Negro, permitindo descrever várias oscilações de diferentes modos confinados em uma cavidade (explicando a Catástrofe do Ultravioleta). Albert Einstein interpretou essa quantização como partículas sem massa chamadas fótons e utilizou essas novas descobertas para determinar seus Coeficientes, além do famoso Efeito Fotoelétrico. Com este novo formalismo, é possível utilizar os operadores de Aniquilação e Criação em modos de energia (ou momento) e até mesmo encontrar a Taxa de Transição entre diferentes estados quânticos.

No mesmo século, também houve enormes avanços na área da relatividade: não há um referencial absoluto, a luz viaja a uma velocidade constante e, dependendo da velocidade do observador, diferentes grandezas físicas podem ser medidas. Descobriram-se observáveis invariantes de Lorentz (simétricos por todo o Grupo de Poincaré), pois já se sabia que rotações mantinham normas inalteradas, e agora haviam os Boosts de Lorentz. Também foi descoberto que esses boosts se reduzem às transformações de referencial de Galileu no regime das baixas energias (validando ainda a física clássica tradicional), e então passou-se a lidar com objetos traduzidos como campos e operadores invariantes sob todas essas transformações, sejam elas contínuas ou discretas no universo.

Hoje em dia, a humanidade já foi capaz de conciliar ambas as teorias na então chamada de Teoria Quântica de Campos (TQC), onde, diferente da mecânica quântica usual, a quantidade de partículas do sistema pode ser modificada ao longo dos processos, sendo assim a base para diversos sistemas de diferentes áreas da física moderna, como o estudo da Matéria Condensada e a Física de Partículas em si. A maneira como a TQC é construída permite que a matriz S (de espalhamento, “scattering”) seja utilizada de forma que, tomando que as interações ocorram em um tempo muito curto comparado o resto do espalhamento e tratando os campos como operadores que criam e/ou aniquilam partículas de certos estados, é possível descrever qualquer processo onde entrem *n* partículas e saiam *m* outras.

Formalismo Rápido

Falando propriamente sobre nossa teoria, é necessário lembrar alguns aspectos básicos da Teoria Quântica de Campos. Após a chamada “segunda quantização”, onde são estabelecidas as relações de comutação locais (em tempos iguais) entre os operadores de criação/aniquilação e a normalização dos estados, além de também definir a ação desses operadores em um estado de uma partícula:

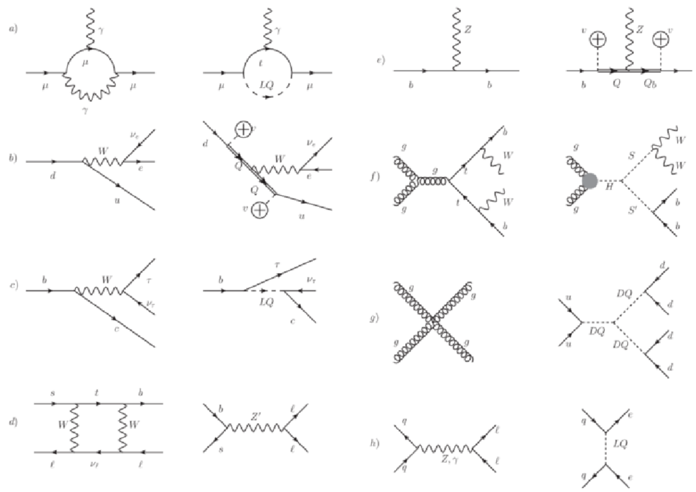
$$[a_k, a_p^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \qquad \langle 0|0\rangle = 1 \qquad a_p^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}|\vec{p}\rangle$$

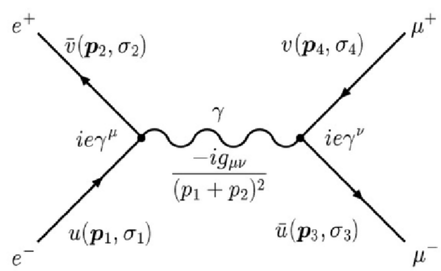
define-se que ***n*** partículas podem simultaneamente ocupar um estado de momento ***p***, resultando na soma direta dos espaços de Hilbert das ***i*** partículas, também chamado de espaço de Fock, permitindo agora a introdução de *Campos Escalares Quânticos*:

$$F_\nu(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu H^{\otimes n} \qquad \phi_0(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}\right),$$

que são soluções da equação de Klein-Gordon e portanto podem ser decompostos em ondas planas. Processos semelhantes se aplicam em *Campos Spinoriais* (que descrevem férmions), o que demanda um aprofundamento no estudo das representações do Grupo de Poincaré **ISO(1,3)** (possui rotações, boosts de Lorentz, inversão temporal e por paridade) e sobre o que são spinores em si, e *Campos Tensoriais*, como do fóton e do hipotético gráviton, que exigem bases com *polarizações* para cada um dos índices do objeto, relacionados com spin inteiro (bósons).

É possível então deduzir as Regras de Feynman, tanto no *espaço de posição* quanto de *momento*, que ajudam durante o já bem estabelecido formalismo de Diagramas de Feynman, estes sendo representações das séries perturbativas que surgem ao calcular as funções entre *n*-pontos de teorias interagentes:



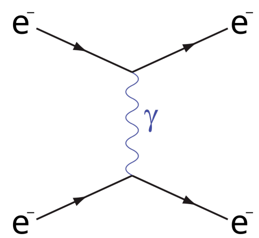


Toda a ideia de diagramas e funções de muitos pontos facilita os cálculos pois basta que todas as amplitudes (chance de um estado inicial chegar em um estado final) que podem fisicamente contribuir para o processo sejam somadas, além de sutilidades como soma sobre spins e polarizações . Além disso, é chegado um momento em que é necessário estudar o processo de *Renormalização* de teorias já que a inserção de loops nos diagramas, apesar de incrementar a precição, acaba criando divergências nos observáveis, o que certamente não é compatível com quase tudo observado no universo atual, e portanto é necessário deformar a teoria em uma certa escala e fazer modificações em passos intermediários dos cálculos de forma que os observáveis extraídos agora sejam finitos.

Capítulo #2: Cálculos

Primeiros Cálculos

Agora, iniciam-se os cálculos de alguns espalhamentos já conhecidos para avaliar a autenticidade da teoria descrita até aqui. Tomando o famoso *Espalhamento de Møller*, algo extremamente natural na eletrodinâmica quântica escalar, onde dois elétrons se aproximam e se repelem ao trocar um fóton:



$$e^- e^- \longrightarrow e^- e^-,$$

Pela Lagrangiana, nota-se que os diagramas possíveis são o canal-t e canal-u (e isso pode ser visto com o auxílio do pacote *FeynArts*), e então, definindo a contração de índices e grandezas necessárias (variáveis de Mandelstam) :

```
In[1]:= normLortz[x_, y_] := (x[[1]] * y[[1]]) - (x[[2]] * y[[2]]) - (x[[3]] * y[[3]]) - (x[[4]] * y[[4]]);
          (*com a assinatura da métrica Lorentziana dada por (+,-,-,-)*)
        p1 = {p10, p11, p12, p13};
        p2 = {p20, p21, p22, p23};
        p3 = {p30, p31, p32, p33};
        p4 = {p40, p41, p42, p43};
          (*definição dos 4-momentos inicialmente genéricos*)

In[6]:= sups1 = {e > 0, g > 0, λ > 0, α == e^2/(4 π),
           normLortz[p1 + p2, p1 + p2] == s,
           (*normLortz[p3+p4,p3+p4]==s,*)
           normLortz[p1 - p3, p1 - p3] == t,
           (*normLortz[p2-p4,p2-p4]==t,*)
           normLortz[p1 - p4, p1 - p4] == u
           (*normLortz[p2-p3,p2-p3]==u*)
          };
          (*constante de acomplamento e variáveis de mandelstam;
        são as suposições que vão ser usadas nos cálculos*)
        sups2 = {
           normLortz[p1 + p3, p2 + p4] == s - u,
           (p12 p22 + p13 p23 - p10 (p20 + p30) + p11 (p21 + p31) + p12 p32 + p13 p33 -
               p20 p40 - p30 p40 + p21 p41 + p31 p41 + p22 p42 + p32 p42 + p23 p43 + p33 p43) == s - t
          };

In[]:=  << FeynArts`;(*Carregamento do pacote FeynArts caso queira visualizar os diagramas*)
        Paint[InsertFields[CreateTopologies[0, 2 → 2], {F[1, {1}], F[1, {1}]} → {F[1, {1}], F[1, {1}]},
          Model → "QED", GenericModel → "QED"], ColumnsXRows → 2, PaintLevel → {Classes}]
         (*Utilizando o pacote FeynArts para ver os possíveis
          diagramas para um espalhamento férmions 2→2*)

        FeynArts 3.11 (25 Mar 2022)
```

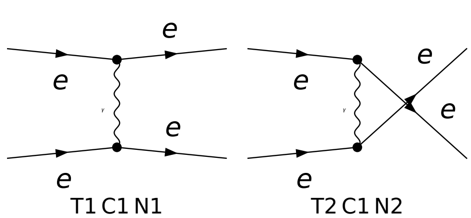
```
by Hagen Eck, Sepp Kueblbeck, and Thomas Hahn

loading generic model file
 /home/brunogehlen/Documentos/wolfram-qft/FeynArts-3.11/Models/QED.gen
> $GenericMixing is OFF
generic model {QED} initialized

loading classes model file
 /home/brunogehlen/Documentos/wolfram-qft/FeynArts-3.11/Models/QED.mod
> 7 particles (incl. antiparticles) in 2 classes
> $CounterTerms are ON
> 1 vertices
> 3 counterterms of order 1
classes model {QED} initialized

inserting at level(s) {Generic, Classes}
> Top. 1: 0 Generic, 0 Classes insertions
> Top. 2: 0 Generic, 0 Classes insertions
> Top. 3: 1 Generic, 1 Classes insertions
> Top. 4: 1 Generic, 1 Classes insertions
in total: 2 Generic, 2 Classes insertions
> Top. 1 aebf/cedf/ef.m, 0 diagrams
> Top. 2 aebf/cfde/ef.m, 0 diagrams
```

e e → e e



Out[]= FeynArtsGraphics[{e, e} → {e, e}][((T1 C1 N1) (T2 C1 N2) ; Null Null)] além dos componentes da seção de choque:

```
In[8]:= vert[g_] := ⅈ g;
      (*Cada vértice dá um fator (ⅈ g)*)
propEsc[p_, m_] := ⅈ / (normLortz[p, p] - m^2);
propFot[p_] := -ⅈ / normLortz[p, p];
      (*O propagador depende do diagrama que contribue*)
      notação O
mDiagramaQEDescalar[m_, g_, numVert_, numPropFot_, pIn_, pOut_, pPropg_] :=
  (vert[g]^numVert) *
   (propFot[pPropg]^numPropFot) *
   (normLortz[pIn, pOut]) * (-ⅈ);

      (*Os fatores ℏ foram retirados pois m^2 ≪ s, t, u e estamos no gauge de Feynman*)
      (*constantes como c e ℏ já estão definidos como 1*)
ℳQEDEsc = mDiagramaQEDescalar(*Um alias para diminuir o tamanho da função*);

In[]:= crossSectionQEDCM[m_, g_, s_, t_, u_] :=
  (1 / (64 * π^2 * normLortz[p1 + p2, p1 + p2])) * Abs[(ℳQEDEsc[m, g, 2, 1, p1 + p2, p3 + p4, p1 + p2] /. s) +
                                                  valor absoluto
     (ℳQEDEsc[m, g, 2, 1, p1 - p3, p2 - p4, p1 - p3] /. t) +
     (ℳQEDEsc[m, g, 2, 1, p1 - p4, p2 - p3, p1 - p4] /. u)]^2;
(*O total será a soma das contribuções, e neste caso apenas os diagramas T e U*)
notação O
dσdΩ[m_, g_, s_, t_, u_] := Simplify[
                            simplifica
   Simplify[crossSectionQEDCM[m, g, s, t, u], Assumptions → sups1], Assumptions → sups2];
   simplifica                                  premissas              premissas
      (*Um alias para diminuir o tamanho da função, assumir acoplamentos
 positivos e assumir as variáveis de Mandelstam e suas relações*);
```

encontra - se que a seção de choque será dada por

```
In[]:= secao = dσdΩ[m_e, e, 0, 1, 1]
```

Out[]=
$$\frac{\alpha^2 \, \mathrm{Abs}\left[\frac{(t-u)(s-t-u)}{t\,u}\right]^2}{4\,s}$$

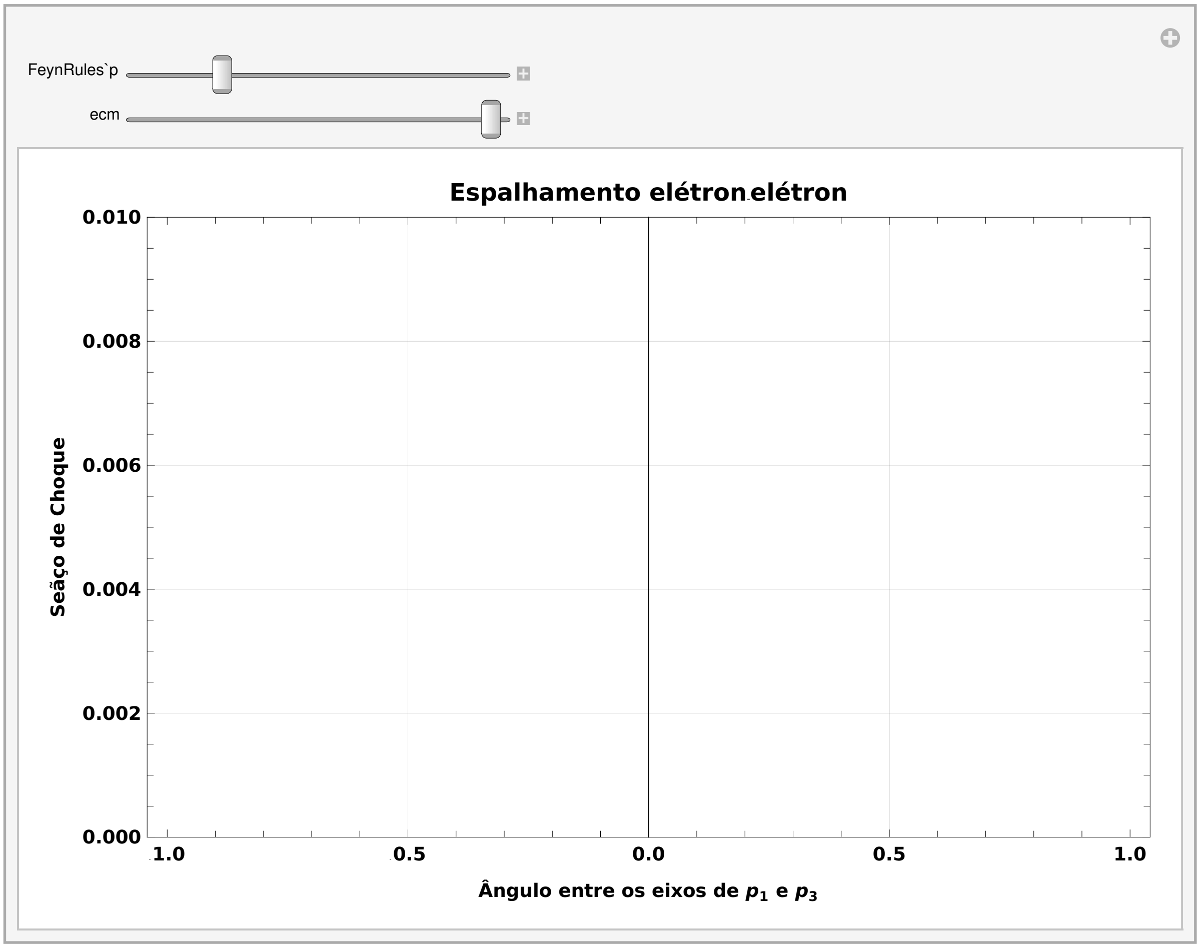
condizente com a literatura! Escrevendo as variáveis de Mandelstam em função do ângulo

```
In[]:= sups3 = {t → 2 (a^2) (Cos[θ] - 1), u → 2 (a^2) (-Cos[θ] + 1), α → 1/137, s → 4 b^2};
                          cosseno               cosseno
```

é possível plotar a seção de choque no limite relativístico:

In[]:=
```
secaoplot = secao /. sups3;
Manipulate[Plot[secaoplot /. {a → p, b → ecm}, {θ, 0, π/2}, PlotRange → {0, 0.01}, Frame → True,
  FrameLabel → {"Ângulo entre os eixos de p1 e p3", "Seãço de Choque"},
  LabelStyle → Directive[Bold, 10], Ticks → Automatic,
  ImageSize → Large, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "Espalhamento elétron-elétron"], {{p, 3}, 1, 10}, {{ecm, 10}, 1, 10}]
```

Out[]=



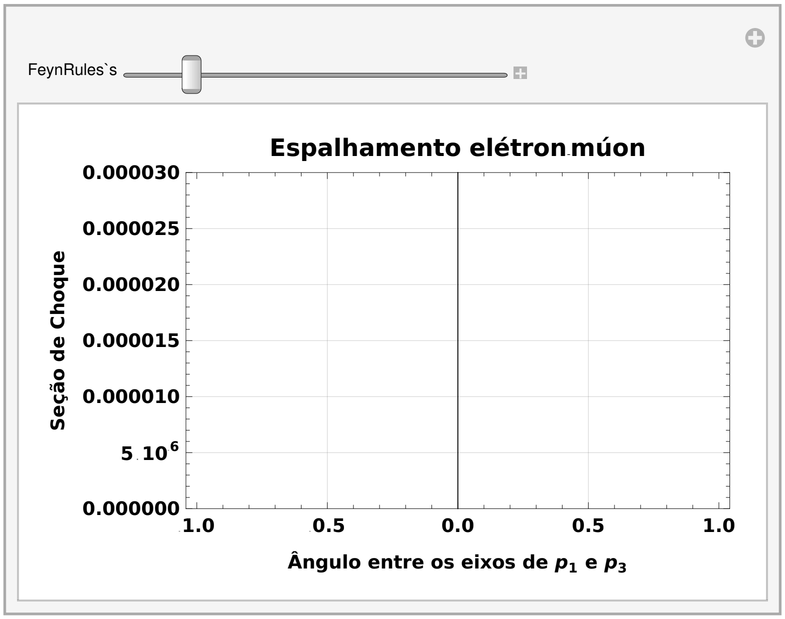
Outros Campos

Plotando a seção de choque do espalhamento elétron-múon no limite relativístico:

In[]:=
```
secchoqmuon = (1/137^2)*(1/(4*a))*(1+Cos[θ]^2);
                                       cosseno

Manipulate[Plot[secchoqmuon /. {a -> s}, {θ, 0, π/2}, PlotRange -> {0, 0.00003}, Frame -> True,
manipula   gráfico                                  intervalo do gráfico          quadro   verdad
  FrameLabel -> {"Ângulo entre os eixos de p1 e p3", "Seção de Choque"},
  legenda do quadro
  LabelStyle -> Directive[Bold, 10], Ticks -> Automatic, ImageSize -> Medium,
  estilo de eti  diretiva  negrito   marc    automático  tamanho da  tamanho mediano
  GridLines -> Automatic, PlotLabel -> "Espalhamento elétron-múon"], {{s, 1}, 0.01, 7}]
  grade de l   automático   etiqueta de gráfico
```

Out[]=



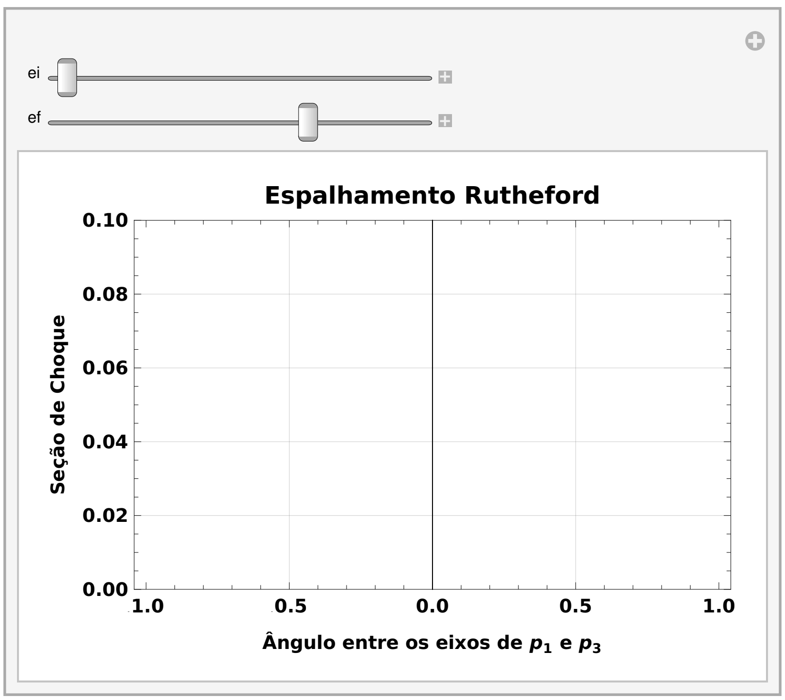
Plotando outras seções de choque como a do *Espalhamento Rutheford* e *Compton*, tem-se:

In[]:=
```
secchoqruth = ((α^2)/(4*a*Sin[θ/2]))*(b/a)*(Cos[θ/2]^2 + ((a - b)/mp)*Sin[θ/2]^2);
                           seno            cosseno                      seno

sups4 = {α → 1/137, mp → 938};

Manipulate[
manipula
 Plot[Evaluate[secchoqruth /. sups4] /. {a → ei, b → ef}, {θ, 0, π/2}, PlotRange → {0, 0.1},
 grá  calcula                                                         intervalo do gráfico
  Frame → True, FrameLabel → {"Ângulo entre os eixos de p1 e p3", "Seção de Choque"},
  quadro  ver   legenda do quadro
  LabelStyle → Directive[Bold, 10], Ticks → Automatic,
  estilo de eti  diretiva  negrito   marc    automático
  ImageSize → Medium, GridLines → Automatic,
  tamanho da   taman   grade de l   automático
  PlotLabel → "Espalhamento Rutheford"], {ei, 0.1, 10}, {{ef, 7}, 0.1, 10}]
  etiqueta de gráfico
```

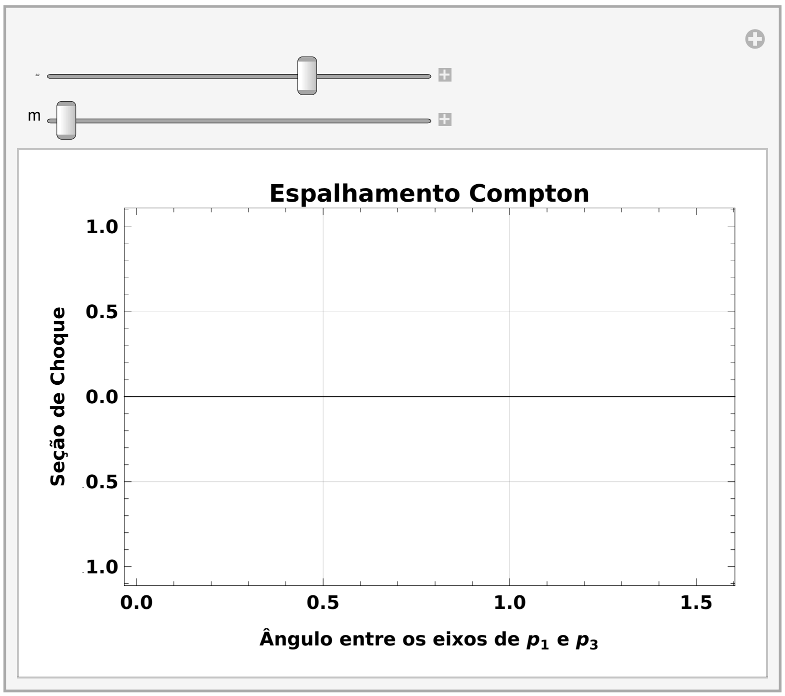
Out[]=



In[]:=
```
secchoqcompt = ((π*α^2)/(2*a^2))*((1+Cos[θ])/(4))*((1)/((b^2/(2*a^2))*(1-Cos[θ])));
                                     cosseno                                cosseno

sups5 = {α → 1/137};

Manipulate[Plot[Evaluate[secchoqcompt /. sups5] /. {a → ω, b → m}, {θ, 0, π/2}, Frame → True,
manipula    grá  calcula                                                      quadro  verdadeiro
  FrameLabel → {"Ângulo entre os eixos de p1 e p3", "Seção de Choque"},
  legenda do quadro
  LabelStyle → Directive[Bold, 10], Ticks → Automatic, ImageSize → Medium,
  estilo de eti  diretiva  negrito     marc     automático   tamanho da  tamanho mediano
  GridLines → Automatic, PlotLabel → "Espalhamento Compton"], {{ω, 7}, 0.1, 10}, {m, 0.1, 10}]
  grade de l   automático   etiqueta de gráfico
```

Out[]=


Além disso, também é possível também calcular os possíveis decaímentos das partículas de uma lagrangiana em outras duas, por meio do pacote *FeynRules*, que possui essa funcionalidade nativamente, como pode ser visto:

```
In[]:= $FeynRulesPath = SetDirectory[FileNameJoin[{NotebookDirectory[], "feynrules-current"}]]
                        define diretório une nome do  diretório do notebook
  (*Define-se o diretório do pacote FeynRules, documentado em seu site oficial*);
  << FeynRules` (*Checa-
     se o bom carregamento do pacote (alguns erros podem aparecer, são ignoráveis)*);
  SetDirectory[$FeynRulesPath <> "/Models/SM"]
  define diretório
   (*Defin-se o diretório do modelo do Modelo Padrão*);
  LoadModel["SM.fr"](*Carrega-se o modelo do Modelo Padrão*);
  LoadRestriction["Massless.rst", "DiagonalCKM.rst"]
   (*Carrega-se as restrições do Modelo Padrão*);
  FeynmanGauge = True;
                 verdadeiro
```

```
 - FeynRules -
Version: 2.3.49 (29 September 2021).
Authors: A. Alloul, N. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, B. Fuks

Please cite:
    - Comput.Phys.Commun.185:2250-2300,2014 (arXiv:1310.1921);
    - Comput.Phys.Commun.180:1614-1641,2009 (arXiv:0806.4194).

http://feynrules.phys.ucl.ac.be

The FeynRules palette can be opened using the command FRPalette[].
This model implementation was created by
N. Christensen
C. Duhr
B. Fuks
Model Version: 1.4.7
http://feynrules.phys.ucl.ac.be/view/Main/StandardModel
For more information, type ModelInformation[].

   - Loading particle classes.
   - Loading gauge group classes.
   - Loading parameter classes.

Model Standard Model loaded.
Loading restrictions from Massless.rst : PRIVATE`FR$restrictionCounter / 18
Loading restrictions from DiagonalCKM.rst : PRIVATE`FR$restrictionCounter / 3
Restrictions loaded.
```

In[]:= **decay = ComputeWidths[FeynmanRules[LSM]]**

Starting Feynman rule calculation.

Expanding the Lagrangian...

Expanding the indices over 2 cores

Collecting the different structures that enter the vertex.

98 possible non-zero vertices have been found → starting the computation: FeynRules`FR$FeynmanRules / 98.

93 vertices obtained.

Flavor expansion of the vertices distributed over 2 cores: FeynRules`FR$Count1 / 93

Computing the squared matrix elements relevant for the 1→2 decays:

FeynRules`FR$DecayCounter / 40

Out[]= $\left\{\left\{\{H, b, \bar{b}\}, \frac{3\left(-4\,MB^2+MH^2\right)\sqrt{-4\,MB^2\,MH^2+MH^4}\;yb^2}{16\,\pi\,\mathrm{Abs}[MH]^3}\right\},\right.$

$\left\{\{H, ta, \bar{ta}\}, \frac{\left(MH^2-4\,MTA^2\right)\sqrt{MH^4-4\,MH^2\,MTA^2}\;ytau^2}{16\,\pi\,\mathrm{Abs}[MH]^3}\right\}, \left\{\{H, t, \bar{t}\}, \frac{3\left(MH^2-4\,MT^2\right)\sqrt{MH^4-4\,MH^2\,MT^2}\;yt^2}{16\,\pi\,\mathrm{Abs}[MH]^3}\right\},$

$\left\{\{H, W^+, W\}, \frac{e^4\sqrt{MH^4-4\,MH^2\,M_W^2}\left(MH^4-4\,MH^2\,M_W^2+12\,M_W^4\right)vev^2}{256\,M_W^4\,\pi\,s_w^4\,\mathrm{Abs}[MH]^3}\right\},$

$\left\{\{Z, W^+, W\}, \frac{c_w^2\,e^2\sqrt{-4\,M_W^2\,MZ^2+MZ^4}\left(-48\,M_W^6-68\,M_W^4\,MZ^2+16\,M_W^2\,MZ^4+MZ^6\right)}{192\,M_W^4\,\pi\,s_w^2\,\mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$

$\left\{\{H, Z, Z\}, \frac{e^4\sqrt{MH^4-4\,MH^2\,MZ^2}\left(MH^4-4\,MH^2\,MZ^2+12\,MZ^4\right)\left(c_w^2+s_w^2\right)^4 vev^2}{512\,c_w^4\,MZ^4\,\pi\,s_w^4\,\mathrm{Abs}[MH]^3}\right\},$

$\left\{\{W, u, \bar{d}\}, \frac{e^2\,M_W^4}{16\,\pi\,s_w^2\,\mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\}, \left\{\{W, c, \bar{s}\}, \frac{e^2\,M_W^4}{16\,\pi\,s_w^2\,\mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\},$

$$\left\{\{W, t, \bar{b}\}, -\frac{e^2 \left(MB^4 + MT^4 + MT^2 M_W^2 - 2 M_W^4 + MB^2 \left(-2 MT^2 + M_W^2\right)\right) \sqrt{MB^4 + \left(MT^2 - M_W^2\right)^2 - 2 MB^2 \left(MT^2 + M_W^2\right)}}{32 M_W^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\},$$

$$\left\{\{b, W', t\}, \frac{e^2 \left(MB^4 + MT^4 + MT^2 M_W^2 - 2 M_W^4 + MB^2 \left(-2 MT^2 + M_W^2\right)\right) \sqrt{MB^4 + \left(MT^2 - M_W^2\right)^2 - 2 MB^2 \left(MT^2 + M_W^2\right)}}{64 M_W^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MB]^3}\right\},$$

$$\left\{\{t, W, b\}, \frac{e^2 \left(MB^4 + MT^4 + MT^2 M_W^2 - 2 M_W^4 + MB^2 \left(-2 MT^2 + M_W^2\right)\right) \sqrt{MB^4 + \left(MT^2 - M_W^2\right)^2 - 2 MB^2 \left(MT^2 + M_W^2\right)}}{64 M_W^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MT]^3}\right\},$$

$$\left\{\{W, ve, \bar{e}\}, \frac{e^2 M_W^4}{48 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\}, \left\{\{W, vm, \bar{mu}\}, \frac{e^2 M_W^4}{48 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\},$$

$$\left\{\{W, vt, \bar{ta}\}, \frac{e^2 \left(MTA^2 - M_W^2\right)^2 \left(MTA^2 + 2 M_W^2\right)}{96 M_W^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[M_W]^3}\right\}, \left\{\{ta, W', vt\}, \frac{e^2 \left(MTA^2 - M_W^2\right)^2 \left(MTA^2 + 2 M_W^2\right)}{64 M_W^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MTA]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, u, \bar{u}\}, \frac{e^2 MZ^4 \left(9 c_w^4 - 6 c_w^2 s_w^2 + 17 s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\}, \left\{\{Z, c, \bar{c}\}, \frac{e^2 MZ^4 \left(9 c_w^4 - 6 c_w^2 s_w^2 + 17 s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, t, \bar{t}\}, \frac{e^2 \sqrt{-4 MT^2 MZ^2 + MZ^4} \left(-9 c_w^4 \left(MT^2 - MZ^2\right) - 6 c_w^2 \left(11 MT^2 + MZ^2\right) s_w^2 + \left(7 MT^2 + 17 MZ^2\right) s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, d, \bar{d}\}, \frac{e^2 MZ^4 \left(9 c_w^4 + 6 c_w^2 s_w^2 + 5 s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\}, \left\{\{Z, s, \bar{s}\}, \frac{e^2 MZ^4 \left(9 c_w^4 + 6 c_w^2 s_w^2 + 5 s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, b, \bar{b}\}, \frac{e^2 \sqrt{-4 MB^2 MZ^2 + MZ^4} \left(-9 c_w^4 \left(MB^2 - MZ^2\right) + 6 c_w^2 \left(-7 MB^2 + MZ^2\right) s_w^2 + \left(-17 MB^2 + 5 MZ^2\right) s_w^4\right)}{288 c_w^2 \pi s_w^2 \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, ve, \bar{ve}\}, \frac{e^2\, MZ^4 \left(c_w^2 + s_w^2\right)^2}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\}, \left\{\{Z, vm, \bar{vm}\}, \frac{e^2\, MZ^4 \left(c_w^2 + s_w^2\right)^2}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, vt, \bar{vt}\}, \frac{e^2\, MZ^4 \left(c_w^2 + s_w^2\right)^2}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\}, \left\{\{Z, e, \bar{e}\}, \frac{e^2\, MZ^4 \left(c_w^4 - 2\, c_w^2\, s_w^2 + 5\, s_w^4\right)}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, mu, \bar{mu}\}, \frac{e^2\, MZ^4 \left(c_w^4 - 2\, c_w^2\, s_w^2 + 5\, s_w^4\right)}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\},$$

$$\left\{\{Z, ta, \bar{ta}\}, \frac{e^2 \sqrt{-4\, MTA^2\, MZ^2 + MZ^4} \left(c_w^4 \left(-MTA^2 + MZ^2\right) - 2\, c_w^2 \left(5\, MTA^2 + MZ^2\right) s_w^2 + \left(7\, MTA^2 + 5\, MZ^2\right) s_w^4\right)}{96\, c_w^2\, \pi\, s_w^2\, \mathrm{Abs}[MZ]^3}\right\}\}$$

Renormalização

Após estudar o processo de renormalização, é possível tentar aplica-lo para um toy model de uma lagrangiana escalar com interação dada por phi^3/3!. Sua amplitude será dada por

In[]:=
```
ℳloop = (-i g^2/2) Integrate[1/(2π)^4 (i/(k^2)) (i/(k^2)), {k, 0, ∞}]
              integra
```

Integrate : Integral of $\frac{1}{16\, k^4\, \pi^4}$ does not converge on $\{0, \infty\}$.

e aplicando a Parametrização de Feynman (e o shift $k \to k - p (1 - x)$), além de introduzir o regulador de Pauli-Villars, é possível reduzir esforços e encontrar que a amplitude para o propagador do campo escalar . (com m->0) é:

In[]:=
```
cond = {g > 0, m == 0, p > 0, Λ > 0};
ℳloop = -(g^2/(32 π^2)) (Integrate[Log[(m^2 - p^2 x (1 - x))/Λ^2], {x, 0, 1}, Assumptions → cond] - i π)
         integra       logaritmo                                    premissas
```

Out[]=
$$-\frac{g^2 \left(-2 + \mathrm{Log}\left[\frac{p^2}{\Lambda^2}\right]\right)}{32\, \pi^2}$$

agora finito após a regularização.

É possível fazer o mesmo para a teoria da QED (escalar e spinorial), onde a primeira das duas novamente terá um termo divergente com $1/k^4$ para o propagador do fóton a 1-loop fermiônico no meio, e

que ao expandir d . 4 . . e tomar o limite . . 0, tem-se que

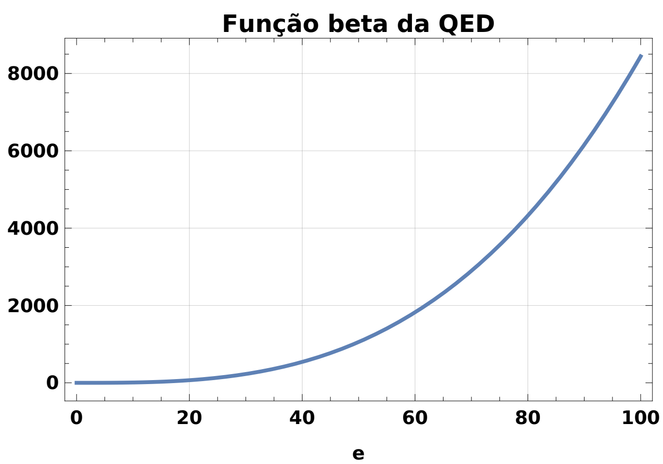
Outro fator importante para a Renormalização é a Função Beta de uma teoria, que diz como seu acoplamento varia de acordo com a escala de energia (o “running” desse acoplamento). É possível analisar como elas podem evoluir conforme as escalas de energia vão crescendo; então para a QED e QCD, tem-se as funções

In[]:=
```
βQED[e_] := e^3/(12 π^2);
βQCD[g_] := -(11 - (ns/6) - (2 nf/3)) (g^3/(16 π^2));
```

que podem ser plotadas, e é visto que:

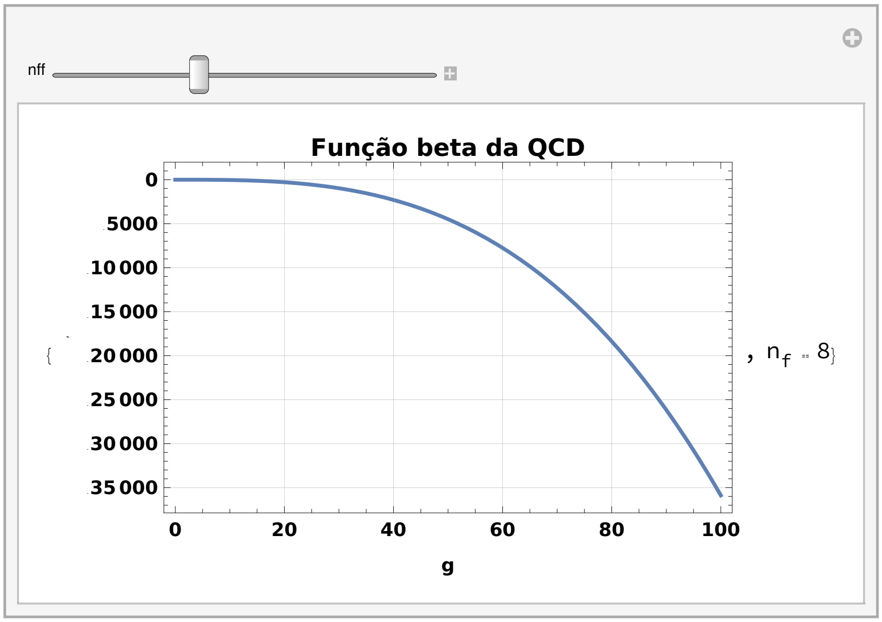
In[]:=
```
plot1 = Plot[βQED[e], {e, 0, 100}, Frame → True, FrameLabel → {"e", "β"},
          gráfico                            quadro  ver   legenda do quadro
  LabelStyle → Directive[Bold, 10], Ticks → Automatic, ImageSize → Medium,
  estilo de eti  diretiva  negrito     marc    automático   tamanho da  tamanho
  GridLines → Automatic, PlotLabel → "Função beta da QED"]
  grade de l  automático  etiqueta de gráfico
```

Out[]=



In[]:=
```
plot2 =
 Manipulate[{Plot[βQCD[g] /. {ns → 0, nf → nff}, {g, 0, 100}, Frame → True, FrameLabel → {"g", "β"},
 manipula      gráfico                                            quadro  ver     legenda do quadro
    LabelStyle → Directive[Bold, 10], Ticks → Automatic, ImageSize → Medium,
    estilo de eti   diretiva  negrito     marc     automático     tamanho da  tamanho mediano
    GridLines → Automatic, PlotLabel → "Função beta da QCD"], nf == nff}, {{nff, 8}, 1, 20, 1}]
    grade de l   automático   etiqueta de gráfico
```

Out[]=



onde n_s é o número de bósons com cor e n_f o número de sabores (flavors) da teoria. É possível ver o comportamento da ***Liberdade Assintótica***, já conhecido da QCD, onde o acoplamento tende a diminuir com a escala de energia (pelo menos para um número de sabores < 16).

****Implementações com o pacote FeynRules serão formuladas em futuras atualizações***