UNIVERSIDADE DE AVEIRO

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2018/2019) PL 08

Palavras-chave: Cadeias de Markov, matriz de transição, múltiplas transições, estado estacionário, estados absorventes, tempo até à absorção, simulação.

Nota: Adopte a a definição da matriz de transição (de estados) em que o elemento t_{ij} da matriz corresponde à probabilidade de transição do estado j para o estado i.

1. Considere a seguinte situação e responda às alíneas abaixo:

   Um aluno do primeiro ano de um curso de Engenharia tem todas as semanas 2 aulas Teórico-Práticas de uma Unidade Curricular X às 9:00, às quartas e sextas.

   Todos os dias que tem aulas desta UC, decide se vai à aula ou não da seguinte forma: Se tiver estado presente na aula anterior a probabilidade de ir à aula é 70 %; se faltou à anterior, a probabilidade de ir é 80 %.

   (a) Se estiver presente na aula de quarta numa determinada semana, qual a probabilidade de estar presente na aula de quarta da semana seguinte ?

   Sugestão: Comece por definir a matriz de transição e o vetor estado correspondentes.

   (b) Se não estiver presente na aula de quarta numa determinada semana, qual a probabilidade de estar presente na aula de quarta da semana seguinte ?

   (c) Sabendo que esteve presente na primeira aula, qual a probabilidade de estar na última aula, assumindo que o semestre tem exactamente 15 semanas de aulas e não existem feriados?

   (d) Represente num gráfico a probabilidade de faltar a cada uma das 30 aulas, assumindo que a probabilidade de estar presente na primeira aula é de 85 %.

2. Considere a seguinte "dança" de grupos: Divide-se uma turma em 3 grupos (A, B e C) no início do semestre e no final de cada aula efectuam-se os seguintes movimentos:

   - $1/3$ do grupo A vai para o grupo B e outro $1/3$ do grupo A vai para o grupo C;
   - $1/4$ do grupo B vai para A e $1/5$ de B vai para C
   - Metade do grupo C vai para o grupo B; a outra mantém-se no grupo C.

   (a) Crie em Matlab a matriz de transição.

   Confirme que se trata de uma matriz estocástica.

   (b) Crie o vector relativo ao estado inicial considerando que no total temos 90 alunos, o grupo A tem o dobro da soma dos outros dois e os grupos B e C têm o mesmo número de alunos.

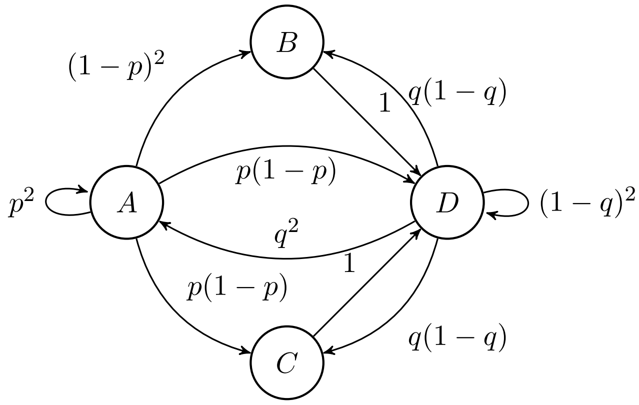
   (c) Quantos elementos integrarão cada grupo no fim da aula 30 considerando como estado inicial o definido na alínea anterior?

   (d) Quantos elementos integrarão cada grupo no fim da aula 30 considerando que inicialmente se distribuiram os 90 alunos equitativamente pelos 3 grupos?

3. Crie uma matriz de transição para uma cadeia de 20 estados gerando os elementos dessa matriz com a ajuda da função rand(). Com base nessa matriz:

   (a) Qual a probabilidade de o sistema fazer uma transição entre o primeiro e o último estado em 20 transições ? E em 40 ? E em 100 ?

4. Considere o seguinte diagrama representativo de uma Cadeia de Markov:



(a) Defina, em Matlab, a matriz de transição T. Assuma $p = 0,4$ e $q = 0,6$;

(b) Qual a probabilidade de o sistema chegar ao estado B após 10 transições adicionais caso inicialmente se encontre no estado A ?
E de chegar a cada um dos outros estados para as mesmas condições ?

(c) Visualize o comportamento desta cadeia usando o Markov chain "playground", disponível em `http://setosa.io/markov/index.html`.

5. Suponha que observa o estado do tempo uma vez por dia (por exemplo, de manhã às 11:00) e que considera três estados possíveis: sol, nuvens e chuva. Assumindo que o tempo no dia $n+1$ apenas depende do tempo no dia n e que as probabilidades de transição são as da tabela seguinte, responda às questões abaixo:

dia n \ dia $n+1$ →	sol	nuvens	chuva
sol	0,7	0,2	0,1
nuvens	0,2	0,3	0,5
chuva	0,3	0,3	0,4

(a) Defina, em Matlab, a correspondente matriz de transição;

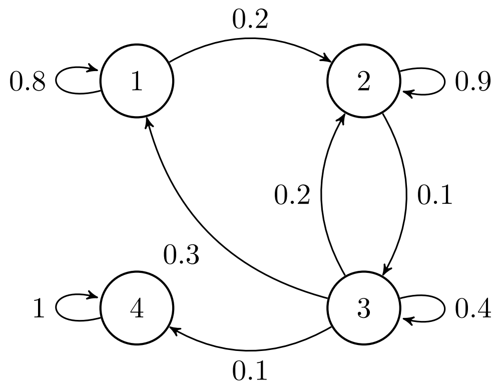
(b) Assumindo que a observação inicial (digamos no dia 0) é que o dia é de sol, qual a probabilidade do dia 2 ser de chuva ?

(c) Calcule as n primeiras potências de T (n=20) e apresente num gráfico a evolução dos vários elementos da matriz em função de n;

(d) Repita o processo da alínea anterior parando-o assim que o máximo do módulo da diferença entre os valores dos elementos da matriz em duas iterações consecutivas não exceda 10^{-4};

(e) ** TPC ** Visualize o comportamento desta cadeia usando o Markov chain "playground", disponível em `http://setosa.io/markov/index.html`.

6. Considere o seguinte conjunto de páginas web ligadas entre si:



   (a) Escreva a matriz de transição H (de Hyperlinks), com H_{ji} sendo a probabilidade de ir da página i para a página j num único passo. Crie em Matlab/Octave essa matriz.
   (b) Qual a probabilidade de começando na página 1 ao fim de 1000 passos estar na página 2? Estava à espera deste valor?
   (c) Determine a probabilidade de chegar à página j a partir da página i, em 1,2,10 e 100 passos.
   (d) Determine a matriz Q.
   (e) Determine a matriz fundamental F.
   (f) Qual a média (valor esperado) do número de passos necessários para atingir a página 4 começando na página 1? e se começarmos na página 2? e se iniciarmos na página 3?
   (g) Qual o tempo até à absorção das páginas 1 a 3?
   (h) Modifique a matriz H para aumentar esse tempo (até à absorção) e recalcule Q, F e o tempo até à absorção.
   (i) Confirme os valores dos pontos anteriores através de simulação (faça a média de várias simulações). Use o código Octave no verso como base para criar a suas simulações.

7. Três amigos, a Ana, o Bernardo e a Catarina, resolveram trocar dinheiro entre si uma vez por dia durante um ano da seguinte maneira: A Ana dá 20% do que tem ao Bernardo e fica com o resto para si. O Bernardo dá 10% do que tem à Ana, dá 30% do que tem à Catarina e fica com o resto para si. A Catarina dá 5% do que tem à Ana, dá 20% do que tem ao Bernardo e fica com o resto para si. O dinheiro é transferido electronicamente, sem arredondamento, às 23h59m de cada dia e é creditado na conta de cada um no início do dia seguinte.

   Sabendo que às 12h do dia 1 de Janeiro de 2015 a Ana tinha 100 euros, que o Bernardo tinha 200 euros e que a Catarina tinha 30 euros, responda às seguintes questões:

   (a) Às 12h do dia 4 de Janeiro, quanto dinheiro tinha cada um dos amigos?

   Resposta: Ana ____________

   Bernardo ____________

   Catarina ____________

   (b) Logo depois da passagem de ano para o ano de 2016, com quanto dinheiro vai ficar cada um dos amigos?

   Resposta: Ana ____________

   Bernardo ____________

   Catarina ____________

   (c) Em que dia, no formato dia do mês e mês, passa a Catarina a ter mais de 130 euros?

   Resposta: ____________

```
# an example state transition matrix (page 3 is absorving)
H = [0.9 0.5 0 ;
     0.1 0.4 0 ;
     0   0.1 1 ];
# the fundamental matrix
Q = H(1:2,1:2);
F = inv(eye(2)-Q)

# given a transition matrix and the current state,
# this function returns the next state
function state = nextState(H, currentState)
     # find the probabilities of reaching all pages starting at the current one
     probVector = H(:,currentState);  # Attention: it is a column vector
     # n is the number of pages, that is, H is n x n
     n = length(probVector);
     # pick the next page randomly according to those probabilities
     state = discrete_rnd(1:n, probVector);
endfunction

# random walk on the graph according to state transition matrix H
# first = initial state, last = terminal or absorving state
function state = crawl(H, first, last)
     # the sequence of states will be saved in the vector "state"
     # initially, the vector contains only the initial state
     state = [first];
     # keep moving from page to page until page "last" is reached
     while (1)
          state(end+1) = nextState(H, state(end));
          if (state(end) == last) break; endif
     endwhile
endfunction

# pick the next page randomly according to those probabilities
# states = vector with states (numbers), probVector = probability vector
function state = discrete_rnd(states, probVector)
#...  To be developed


# how to use crawl()
state = crawl(H, 1, 3);
```