Lema do Bombeamento – LR

em ↳

- Interesse: L infinita ⇒ regular ou não
  Logo se as finitas tem um AF (reconhece)
  a idéia do LB é mostrar de algumas
  Linguagens não podem ser "bombeadas".
  Logo: $L \notin LR$.

- Se "LR" é infinita e puder se "bombeada" então L é regular!

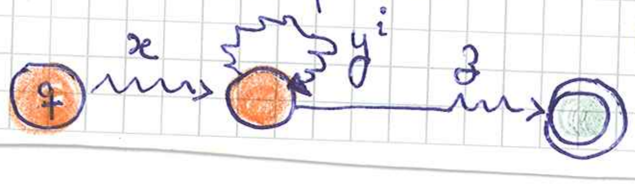
- Lema do Bombeamento (LB): as LR permitem um BOMBEAMENTO de sub-cadeias internas, em um comprimento MÍNIMO (compto do bombeamento), tal que esta sub-cadeia possa ser REPETIDA várias vezes na palavra e esta AINDA permanecer como REGULAR!

Lema:

p: um comprimento do bombeamento (mínimo) => BOMBEAMENTO MÍNIMO + CAMINHO

$s \in A$ (uma palavra $s \in A$ REGULAR)

s: pode ser sub-dividida em 3 partes xyz.



Assim os critérios para validar estas repetições:

1. para todo $i \geq 0$, faz $xy^iz \in A_{reg.}$
2. $|y| > 0$ ou seja $y \neq \Lambda$
3. $|xy| \leq p$ (nada quanto a z)

Assim:

$|s|$: comprimento de s

y^i : i cópias de y são concatenadas entre si y^i

$y^0 = \Lambda$ mas $|y| > 0$.

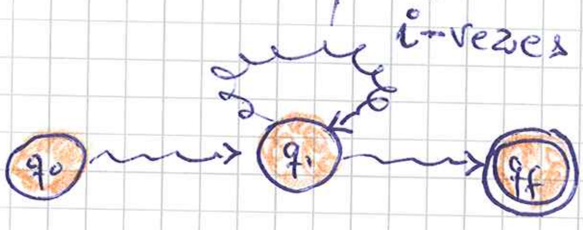
→ Logo o objetivo é dividir s em xyz segundo 1, 2 e 3.

→ x ou z podem ser Λ mas não y!

→ Quanto a p?

R: utiliza-se como parâmetro $|Q|$ de um AFD, pois ao se "quebrar" xyz e validar essa repetição em i

i-vezes o ciclo! $i \geq 0$



Ex: $(q_0, abbc) \vdash (q_1 bbc) \vdash (q_1 bc) \vdash (q_1 c) \vdash q_f$

3

Ex: Demonstre que $B = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$ não é regular.

Estratégia: Suponha que seja REGULAR $\Longrightarrow$ contradição a ser encontrada! CONTRADIÇÃO

Hipótese:

- Seja p um comprimento do bombeamento
- Escolhe $s = 0^p 1^p$ assim $s \in B$
- Assim $0^p 1^p$ admite a separação em xyz tal que $i \geq 0$. Logo, vamos mostrar que os 3 requisitos do LB ($1 \wedge 2 \wedge 3$) são impossíveis:

1º A cadeia y contém apenas "0s" $\mid y^i = (0^p)^i$ assim z tem apenas "1s", e $x = \lambda$ mas xy^iz terá que ser verdade (é o LM) mas $xyyz$ ou $0^p 0^p 1^p$ valida-se que tal palavra não pertence a A. $\underline{(0^p)^i 1^p}$ p/A $\forall i$

Logo uma contradição!

2º A cadeia y contém somente 1's. assim xy^i e $z = \lambda$ novamente $|y| > 0$ está ok mas $0^p (1^p)^i$ leva-se a contradição pois $0^p \underbrace{1^p 1^p 1^p}_{i\text{-vezes} \ldots} \notin B$

3º a cadeia y contém 0's e 1's
assim x e $z = \Lambda$ logo $(0^p 1^p)^i$
será $s = x(0^p 1^p)^i z$ mas ao
bombearmos

$$s' = \underbrace{(0^p 1^p)(0^p 1^p) \ldots (0^p 1^p)}_{i\text{- vezes}} \qquad \underline{i > 0}$$

contudo $s' \notin B$
contradição . . . .

Portanto: $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular!
$n \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

C.Q.D.

Considerações

PS: A condição $\underline{3}$ $|xy| \leq p$ mas nada
sobre z. logo $z = \Lambda$ não há problema!
Se $x \neq \Lambda \iff x = 0^k$ varios k's. logo
$0^k\, 0^{p-k} 1^p$ corresponde há uma palavra válida de B
contudo esta de ser separável em $xy^i z$
logo tem-se: $\underbrace{0^k}_{x} \underbrace{(0^{p-k} 1^p)^i}_{y} \underbrace{z}_{\Lambda}$

mas $(0^{p-k} 1^p)^i$ não pertence a B ! C.Q.D
contradição !

Ex: Demonstre $B = \{ 01^n0 \mid n \geq 0 \}$ é regular!

Estratégia: Validar critérios 1, 2 e 3

1 ⇒ $s = 01^n0 \iff xy^iz$. → um AFD de 2 estados no mínimo!

Seja p um bombeato $p > 1$, assim 01^p0

1º Seja $|01^p0| \geq 4$ se $p > 1$

No princípio 1, para $\forall_i \; xy^iz \in B$
logo $x = 0$, y contenha só 1's e $z = 0$
assim $y^i = 1^i$.

2º Se $|y| > 0$ então $x = 0$, $z = 0$ e $y = 1^i$
ma aí é óbvio! Mas aí podemos (tbém) ter combinações:

a) $\underbrace{01^{i-k}}_{x}\underbrace{1^k}_{y^i}\underbrace{0}_{z}$ ok pois $|y| > 0$

b) $\underbrace{0}_{x}\underbrace{1^k}_{y^i}\underbrace{1^{i-k}0}_{z}$ ok pois $|y| > 0$

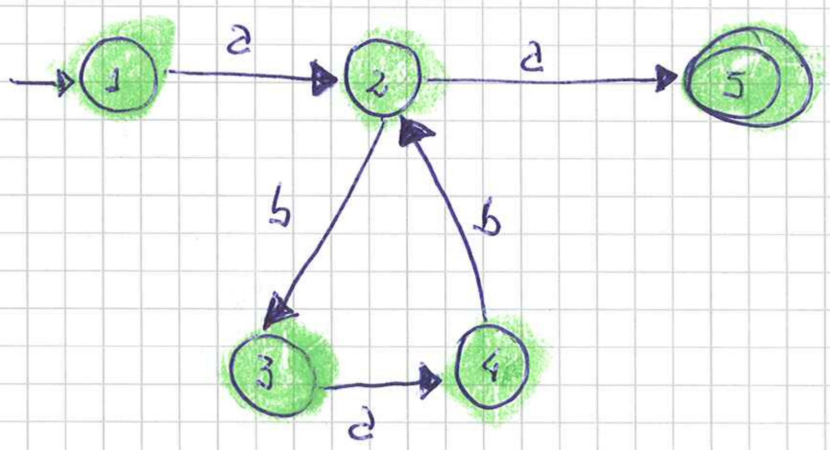
tanto a) como b) 1^k o 1 é bombeado k-vezes

3º $|xy| \leq p$ digamos $p = 2$ tem $x = 0$
$y = 1$ assim $z = 1^{i-1}0$

Exercícios:

Demonstre que $A = \{ a(bab)^n a \mid n \geq 0 \}$ é regular.

Um AFD seria facilmente obtido por:



para haver bombeamento $n \geq 1$ logo $P = 5$ (mín)

Assim um parâmetro de avaliar o bombeamento é $P = 5$, pois há um ciclo em $(bab)^i$ o qual torna esta Regular infinita.

Demonstre que as linguagens abaixo NÃO são regulares:

1º $L_1 = \{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \}$ ... é infinita e não regular infinitos estados!

2º $L_2 = \{ a^{n^2} \mid n \geq 0 \} = \{ \lambda, a, a^4, a^9, a^{16} \ldots \}$ quadrados perfeitos