LFA0001 – Linguagens Formais e Autômatos
Aula 04
Autômato Finito Não-Determinístico

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2016

Sumário

Não Determinismo

Caracteriza-se por *escolhas* no trajeto da computação

Em Autômatos Finitos

- a partir de um estado e de um símbolo, determina-se um **conjunto** de estados seguintes
- **não** aumenta o poder computacional

Não Determinismo

O Autômato Finito assumirá um **conjunto** de estados alternativos

- pode-se pensar como uma multiplicação da unidade de controle
- cada alternativa possuirá uma unidade de controle independente
- sem recursos compartilhados

Atenção: isto não é paralelismo de processamento.

Autômato Finito Não-Determinístico

Definição (Autômato Finito Não-Determinístico)

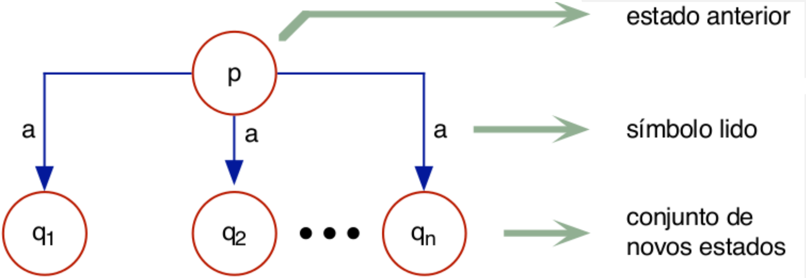
Um AFN é uma estrutura $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ tal que

- Σ é o alfabeto de símbolos de entrada
- Q é o conjunto finito de estados
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ é a função (parcial) de transição ou função programa
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ são os estados finais.

Portanto uma transição é dada como $\delta(q, a) = \{q_1, \ldots, q_n\}$.

Autômato como Diagrama

$$\delta(p, a) = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$



Computação de um AFN

Sucessiva aplicação da função programa

- para cada símbolo da entrada
- mudam-se os possíveis estados do autômato
- até ocorrer uma condição de parada

Função Programa Estendida:

- entrada: conjunto finito de estados e palavra
- saída: conjunto finito de estados

UDESC

Função Programa Estendida

Definição (Função Programa Estendida)

Dado $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ um autômato finito não determinístico, sua função programa estendida

$$\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

é definida indutivamente como segue, sendo $P \subseteq Q$, $a \in \Sigma$ e $w \in \Sigma^*$:

- $\delta^*(P, \varepsilon) = P$
- $\delta^*(P, aw) = \delta^*(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$

Parada do Processamento

Aceita a entrada

- após processar o último símbolo da fita
  existe pelo menos um *estado final*
  dentre os estados resultantes

Rejeita a entrada

- após processar o último símbolo da fita
  todos os estados resultantes
  são *não finais*
- programa indefinido para *todos* os estados do argumento

Linguagem Aceita/Rejeitada

Definição (Linguagem Aceita/Rejeitada)

Dado $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ um autômato finito não-determinístico, a **linguagem aceita** ou **linguagem reconhecida** por M é

$$L(M) = \mathrm{ACEITA}(M) = \{w \mid \delta^*(\{q_0\}, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

e a **linguagem rejeitada** por M é

$$\begin{aligned}\mathrm{REJEITA}(M) = \ & \{w \mid \delta^*(\{q_0\}, w) \cap F = \varnothing \text{ ou} \\ & \delta^*(\{q_0\}, w) \text{ é indefinida}\}\end{aligned}$$

Exemplo

Sendo $\Sigma = \{a, b\}$

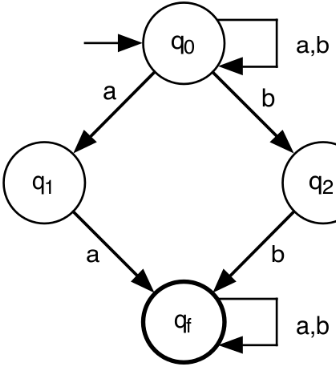
$$L_5 = \{w \mid w \text{ possui } aa \text{ ou } bb \text{ como subpalavra}\}$$

$$M_5 = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \delta_5, q_0, \{q_f\} \rangle$$

δ_5	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_f\}$	$-$
q_2	$-$	$\{q_f\}$
q_f	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$

UDESC

Exemplo



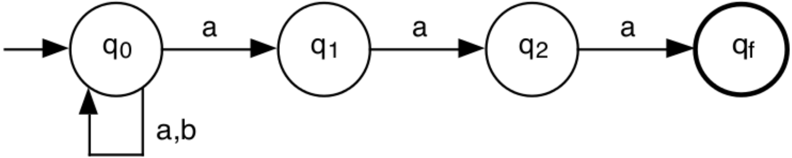
- ciclo em q_0 realiza uma varredura em toda a entrada
- caminho $q_0 - q_1 - q_f$ garante a ocorrência de aa
- caminho $q_0 - q_2 - q_f$ garante a ocorrência de bb

Exemplo

Sendo $\Sigma = \{a, b\}$

$$L_6 = \{w \mid w \text{ possui } aaa \text{ como sufixo}\}$$

$$M_6 = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \delta_6, q_0, \{q_f\} \rangle$$



Equivalência entre AFD e AFN

Aparentemente, pode-se pensar que o não-determinismo pode acrescentar poder computacional ao autômato finito.

Porém a classe dos Autômatos Finitos Determinísticos é **equivalente** à classe dos Autômatos Finitos Não Determinísticos.

Prova-se que:

- A partir de um AFN N, constrói-se um AFD N_D que aceita a mesma linguagem de N.
- A partir de um AFD M, constrói-se um AFN M_N que aceita a mesma linguagem de M.

AFN→AFD

- Estados do AFD simulam combinações de estados alternativos do AFN
- Prova da simulação: por indução no tamanho da palavra de entrada.

AFN→AFD

Seja $N = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ um AFN qualquer.
Construiremos o AFD

$$N_D = \langle \Sigma, Q_D, \delta_D, \langle q_0 \rangle, F_D \rangle$$

onde:

- Q_D são todas as **combinações** de estados de Q
  - notação: $\langle q_1 q_2 \dots q_N \rangle$
  - ordem é indiferente: $\langle q_u q_v \rangle = \langle q_v q_u \rangle$
  - imagem de todos os estados alternativos de N
- $\delta_D : Q_D \times \Sigma \to Q_D$

$\delta_D(\langle q_1 \dots q_n \rangle, a) = \langle p_1 \dots p_m \rangle$ sse $\delta^*(\{q_1, \dots, q_n\}, a) = \{p_1, \dots, p_m\}$

AFN→AFD

- $\langle q_0 \rangle$ é o estado inicial
- F_D é o conjunto de estados $\langle q_1 q_2 \dots q_n \rangle \in Q_D$ tal que $\exists q_i \in F$ para $i = 1, 2, \dots, n$

Prova da equivalência: mostrar que

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, w) = \langle q_1 \dots q_u \rangle \text{ sse } \delta^*(\{q_0\}, w) = \{q_1, \dots, q_u\}$$

AFN→AFD

Base da indução $|w| = 0$. Portanto $w = \varepsilon$

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, \varepsilon) = \langle q_0 \rangle \text{ sse } \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$$

Verdadeiro, pela definição de função programa estendida.

AFN→AFD

Hipótese de indução $|w| = n$ e $n \geq 1$. Suponha que

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, w) = \langle q_1 \dots q_u \rangle \text{ sse } \delta^*(\{q_0\}, w) = \{q_1, \dots, q_u\}$$

Passo de indução $|wa| = n + 1$ e $n \geq 1$

$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, wa) =$	[definição δ_D^*]
$\delta_D^*(\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, w), a) =$	[hipótese de indução]
$\delta_D^*(\langle q_1 \dots q_u \rangle, a) =$	[definição δ_D^*]
$\delta_D^*(\delta_D(\langle q_1 \dots q_u \rangle, a), \varepsilon) =$	
$\delta_D^*(\langle p_1 \dots p_v \rangle, \varepsilon) =$	[definição δ_D^*]
$\langle p_1 \dots p_v \rangle$ sse	[definição δ_D]
$\{p_1, \dots, p_v\} =$	[definição δ^*]
$\delta^*(\{q_1, \dots, q_u\}, a) =$	[hipótese de indução]
$\delta^*(\{q_0\}, wa)$	

Equivalência entre AFD e AFN

Equivalência: AFN$\leftrightarrow$AFD

Fizemos AFN$\rightarrow$AFD

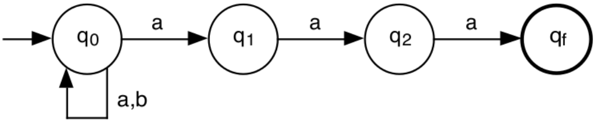
Como mostrar AFD$\rightarrow$AFN?

☺

Exemplo: AFN→AFD

Sendo $\Sigma = \{a, b\}$ e $L_6 = \{w \mid w$ possui aaa como sufixo$\}$

$$M_6 = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \delta_6, q_0, \{q_f\} \rangle$$

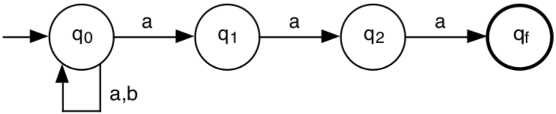


$$M_{6_D} = \langle \{a, b\}, Q_D, \delta_{6_D}, \langle q_0 \rangle, F_D \rangle$$

$Q_D = \{\langle q_0 \rangle, \langle q_1 \rangle, \langle q_2 \rangle, \langle q_f \rangle, \langle q_0 q_1 \rangle, \langle q_0 q_2 \rangle, \ldots, \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle\}$
$F_D = \{\langle q_f \rangle, \langle q_0 q_f \rangle, \langle q_1 q_f \rangle, \ldots, \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle\}$

Exemplo: AFN→AFD

AFN

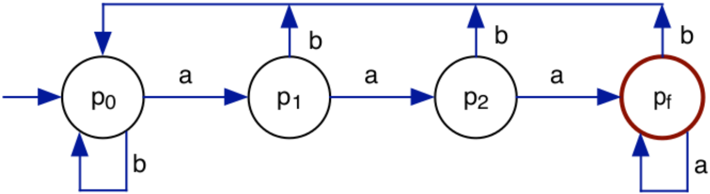


AFD

δ_{6_D}	a	b
$\langle q_0 \rangle$	$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$

UDESC

Exemplo: AFN→AFD



$$\langle q_0 \rangle = p_0 \qquad \langle q_0 q_1 q_2 \rangle = p_2$$
$$\langle q_0 q_1 \rangle = p_1 \qquad \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle = p_f$$

Exercícios

Para cada linguagem a seguir, todas sobre $\Sigma = \{a, b\}$, defina um autômato finito não-determinístico.

$L_{42} = \{w \mid \text{o sufixo de } w \text{ é } ba\}$
$L_{59} = \{w_1 w_2 w_1 \mid w_2 \in \{a, b\}^* \text{ e } |w_1| = 3\}$
$L_{731} = \{w \mid \text{o quarto símbolo da direita para a esquerda é } a\}$

Formalize a prova de que, dado um AFD, existe um AFN equivalente.