UDESC

LFA0001 – Linguagens Formais e Autômatos
Aula 07
Gramáticas Regulares

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2016

Sumário

Introdução

Gramáticas Lineares

Gramática Regular

Linguagem Regular ⇔ Gramática Regular

Gramática Regular

Formalismo axiomático (gerador)

Gramáticas, em geral

- permite definir qualquer linguagem computável
- para linguagens regulares: restrições nas regras de produção

Gramáticas Regulares

- 4 formas de restringir as regras de produção

Gramáticas Lineares

Definição

Uma gramática $G = \langle V, T, P, S \rangle$ é dita

Linear à Direita (GLD) se suas produções forem da forma

$$A \rightarrow wB \text{ ou } A \rightarrow w$$

Linear à Esquerda (GLE) se suas produções forem da forma

$$A \rightarrow Bw \text{ ou } A \rightarrow w$$

Linear Unitária à Direita (GLUD) se for uma GLD tal que

$$|w| \leq 1$$

Linear Unitária à Esquerda (GLUE) se for uma GLE tal que

$$|w| \leq 1$$

onde $A, B \in V$ e $w \in T^*$.

Gramáticas Lineares

Lado esquerdo de uma produção:

- Somente um símbolo de V

Lado direito de uma produção:

- No máximo um símbolo de V
- Sempre antecede (ou sempre sucede) uma palavra de terminais

Equivalência das Gramáticas Lineares

Teorema

Seja L uma linguagem. Então:

- *L é gerada por uma GLD sse*
- *L é gerada por uma GLE sse*
- *L é gerada por uma GLUD sse*
- *L é gerada por uma GLUE.*

Demonstração: exercício.

Gramática Regular

Definição (Gramática Regular)

$G = \langle V, T, P, S \rangle$ é uma gramática regular se G for uma gramática linear.

Definição (Linguagem Gerada)

Seja $G = \langle V, T, P, S \rangle$ uma gramática. A linguagem gerada por G é

$$L(G) = \text{GERA}(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^+ w\}$$

Exemplo

Gramática Regular para a linguagem $a(ba)^*$

Linear à Direita $G = \langle\{S, A\}, \{a, b\}, P, S\rangle$

- $S \rightarrow aA$
- $A \rightarrow baA \,|\, \varepsilon$

Linear à Esquerda $G = \langle\{S\}, \{a, b\}, P, S\rangle$

- $S \rightarrow Sba \,|\, a$

Linear Unitária à Direita $G = \langle\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S\rangle$

- $S \rightarrow aA$
- $A \rightarrow bB \,|\, \varepsilon$
- $B \rightarrow aA$

Linear Unitária à Esquerda $G = \langle\{S, A\}, \{a, b\}, P, S\rangle$

- $S \rightarrow Aa \,|\, a$
- $A \rightarrow Sb$

Exemplo

Gramática Regular para a linguagem $(a+b)^*(aa+bb)$

Linear à Direita $G = \langle \{S, A\}, \{a, b\}, P, S \rangle$

- $S \rightarrow aS \,|\, bS \,|\, A$
- $A \rightarrow aa \,|\, bb$

Linear à Esquerda $G = \langle \{S, A\}, \{a, b\}, P, S \rangle$

- $S \rightarrow Aaa \,|\, Abb$
- $A \rightarrow Aa \,|\, Ab \,|\, \varepsilon$

Atenção!

Gramática Linear à Esquerda **e** Linear à Direita

- **Não** é uma gramática regular
- A linguagem gerada poderá **não** ser regular

Produções simultaneamente do tipo (supondo $|w| \geq 1$)

- $A \rightarrow wB$ e
- $A \rightarrow Bw$

podem criar uma gramática para, por exemplo, a linguagem

$$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

que **não é** linguagem regular. (Exercício)

Gramática Regular $\rightarrow$ Linguagem Regular

Teorema: Se L é gerada por uma gramática regular, então L é linguagem regular.
Demonstração: Por indução.

- Dada uma GLUD G qualquer
- Construir AFε M tal que

$$\text{ACEITA}(M) = \text{GERA}(G)$$

M simula das derivações de G

- demonstração por indução no número de derivações

Gramática Regular → Linguagem Regular

Suponha $G = \langle V, T, P, S \rangle$ uma GLUD. Seja o AFε

$$M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$$

- $\Sigma = T$
- $Q = V \uplus \{q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $q_0 = S$

Tipo de Produção	Transição Gerada
$A \to \varepsilon$	$\delta(A, \varepsilon) = q_f$
$A \to a$	$\delta(A, a) = q_f$
$A \to B$	$\delta(A, \varepsilon) = B$
$A \to aB$	$\delta(A, a) = B$

Gramática Regular → Linguagem Regular

M simula as derivações de G, ou seja, ACEITA(M) = GERA(G)

Base: $S \Rightarrow^1 \alpha$. Quatro casos:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha = \varepsilon & \text{existe } S \to \varepsilon & \text{Logo, } \delta(S, \varepsilon) = q_f \\
\alpha = a & \text{existe } S \to a & \text{Logo, } \delta(S, a) = q_f \\
\alpha = A & \text{existe } S \to A & \text{Logo, } \delta(S, \varepsilon) = A \\
\alpha = aA & \text{existe } S \to aA & \text{Logo, } \delta(S, a) = A
\end{array}
$$

Hipótese: $S \Rightarrow^n \alpha$, $n > 1$. Dois casos:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha = w & \text{então } \delta^*(S, w) = q_f & (1) \\
\alpha = wA & \text{então } \delta^*(S, w) = A & (2)
\end{array}
$$

Gramática Regular $\rightarrow$ Linguagem Regular

Passo: $S \Rightarrow^{n+1} \alpha$. Então (2) é a única hipótese que importa e

$$S \Rightarrow^{n} wA \Rightarrow^{1} \alpha$$

Quatro casos:

- $\alpha = w\varepsilon = w$. Existe $A \rightarrow \varepsilon$. Logo

$$\delta^*(S, w\varepsilon) = \delta(\delta^*(S, w), \varepsilon) = \delta(A, \varepsilon) = q_f$$

- $\alpha = wb$. Existe $A \rightarrow b$. Logo

$$\delta^*(S, wb) = \delta(\delta^*(S, w), b) = \delta(A, b) = q_f$$

- $\alpha = wB$. Existe $A \rightarrow B$. Logo

$$\delta^*(S, w\varepsilon) = \delta(\delta^*(S, w), \varepsilon) = \delta(A, \varepsilon) = B$$

- $\alpha = wbB$. Existe $A \rightarrow bB$. Logo

$$\delta^*(S, wb) = \delta(\delta^*(S, w), b) = \delta(A, b) = B$$

Exemplo

Construção de AFε a partir de uma GR

$$G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S \rangle$$

- $S \to aA$
- $A \to bB \mid \varepsilon$
- $B \to aA$

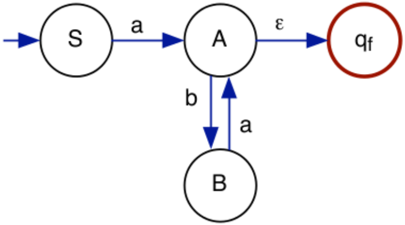
Exemplo

Construção de AFε a partir de uma GR

$$G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S \rangle$$

- $S \rightarrow aA$
- $A \rightarrow bB \mid \varepsilon$
- $B \rightarrow aA$

$$M = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, q_f\}, \delta, S, \{q_f\} \rangle$$



Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Regular

Teorema: Se L é linguagem regular, então existe G, gramática regular que gera L.

Demonstração: Por indução. L é linguagem regular, então

- existe AFD $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ tal que ACEITA$(M) = L$

Construiremos uma GLUD G tal que

$$\text{GERA}(G) = \text{ACEITA}(M)$$

onde a derivação simula a função programa estendida.

Linguagem Regular → Gramática Regular

Suponha AFD $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ tal que ACEITA(M) $= L$
Seja a gramática regular

$$G = \langle V, T, P, S \rangle$$

- $V = Q \uplus \{S\}$
- $T = \Sigma$
- suponha $q_i, q_k \in Q$, $q_f \in F$ e $a \in \Sigma$

Transição	Produção
–	$S \to q_0$
–	$q_f \to \varepsilon$
$\delta(q_i, a) = q_k$	$q_i \to aq_k$

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Regular

GERA(G) = ACEITA(M)? Indução no tamanho da palavra.

Base: $|w| = 0$

- por definição, $S \rightarrow q_0$ é produção
- se $\varepsilon \in$ ACEITA(M), então
  - q_0 é estado final
  - $q_0 \rightarrow \varepsilon$ é produção

$$S \Rightarrow q_0 \Rightarrow \varepsilon$$

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Regular

Hipótese: $|w| = n$ com $n \geq 1$ e $\delta^*(q_0, w) = q$. Dois casos:

- q não é final. Suponha $S \Rightarrow^n wq$
- q é final. Suponha $S \Rightarrow^n wq \Rightarrow w$

Passo: $|wa| = n + 1$ e $\delta^*(q_0, wa) = p$. Então

$$\delta(\delta^*(q_0, w), a) = \delta(q, a) = p$$

- p não é final

$$S \Rightarrow^n wq \Rightarrow^1 wap$$

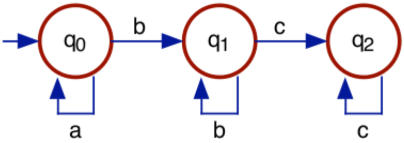
- p é final

$$S \Rightarrow^n wq \Rightarrow^1 wap \Rightarrow^1 wa$$

Exemplo

Construção de uma GR a partir de um AFD

$$M = \langle \{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\} \rangle$$



Exemplo

$$G = \langle \{q_0, q_1, q_2, S\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$$

Transição	Produção
–	$S \to q_0$
–	$q_0 \to \varepsilon$
–	$q_1 \to \varepsilon$
–	$q_2 \to \varepsilon$
$\delta(q_0, a) = q_0$	$q_0 \to aq_0$
$\delta(q_0, b) = q_1$	$q_0 \to bq_1$
$\delta(q_1, b) = q_1$	$q_1 \to bq_1$
$\delta(q_1, c) = q_2$	$q_1 \to cq_2$
$\delta(q_2, c) = q_2$	$q_2 \to cq_2$