

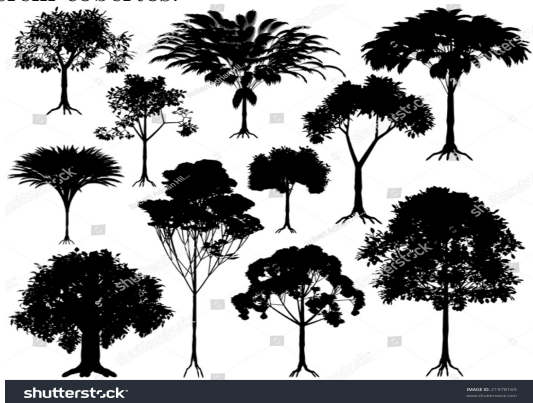
## 1 Árvores

- Apresentação
- Árvores Genéricas
- Aplicações
- Árvore Binária de Busca
- Balanceamento
- Rotações
- Árvores AVL
- Árvore de Espalhamento

# Capítulo 06 – Árvores

Pontos fundamentais a serem cobertos:

- 1 Contexto e motivação
- 2 Definição
- 3 Implementações
- 4 Exercícios



# Definição

- Uma árvore é uma estrutura hierárquica composta por nós e ligações entre eles
- Pode ser vista como um grafo acíclico
- Cada nó possui somente um pai e zero ou mais filhos
- Muitas definições ...

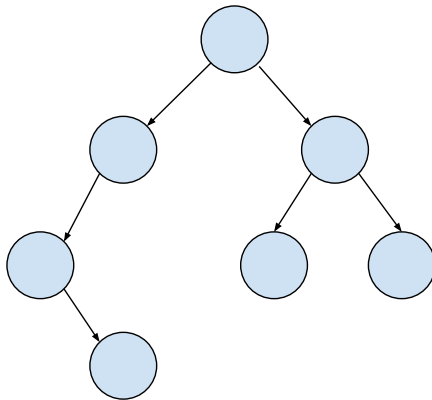
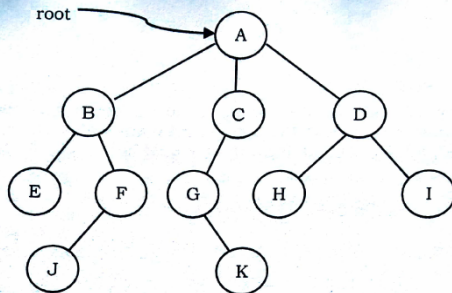


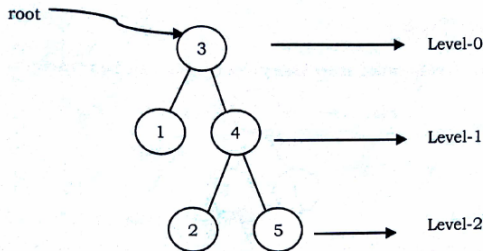
Figura 1: Exemplo de uma árvore

# Características – Requisitos

- Como é um nó?
- Qual o grau de um nó?
- Como devem estar estruturados os valores dos nós?
- O que é uma chave do nó?
- O que é a altura?
- Nível?
- Caminho
- ...

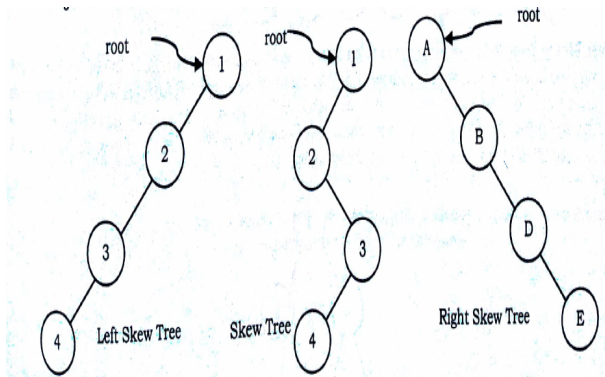


- The **root** of a tree is the node with no parents. There can be at most one root node in a tree (node A in the above example).
- An **edge** refers to the link from parent to child (all links in the figure).
- A node with no children is called **leaf node** (E, J, K, H and I).
- Children of same parent are called **siblings** (B, C, D are siblings of A, and E, F are the siblings of B).
- A node *p* is an **ancestor** of node *q* if there exists a path from root to *q* and *p* appears on the path. The node *q* is called a **descendant** of *p*. For example, A, C and G are the ancestors of K.
- The set of all nodes at a given depth is called the **level** of the tree (B, C and D are the same level). The root node is at level zero.



- The *depth* of a node is the length of the path from the root to the node (depth of *G* is 2,  $A - C - G$ ).
- The *height* of a node is the length of the path from that node to the deepest node. The height of a tree is the length of the path from the root to the deepest node in the tree. A (rooted) tree with only one node (the root) has a height of zero. In the previous example, the height of *B* is 2 ( $B - F - J$ ).
- *Height of the tree* is the maximum height among all the nodes in the tree and *depth of the tree* is the maximum depth among all the nodes in the tree. For a given tree, depth and height returns the same value. But for individual nodes we may get different results.
- The size of a node is the number of descendants it has including itself (the size of the subtree *C* is 3).
- If every node in a tree has only one child (except leaf nodes) then we call such trees *skew trees*. If every node has only left child then we call them *left skew trees*. Similarly, if every node has only right child then we call them *right skew trees*.

# Glossário – 03





# Árvores Genéricas

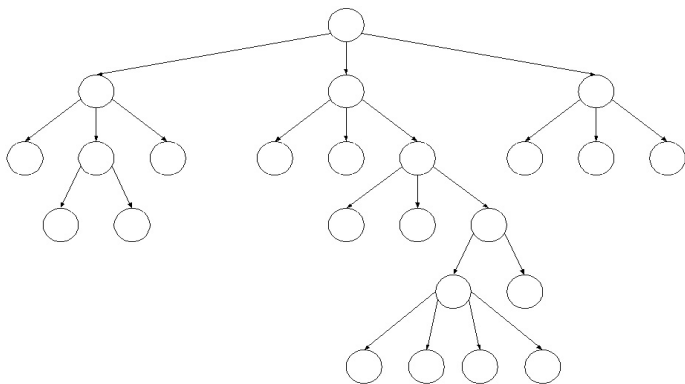


Figura 2: Usando os problemas de árvores genéricas para apresentar Árvores Binárias (AB)

# Transformando uma Árvore Genérica em Binária

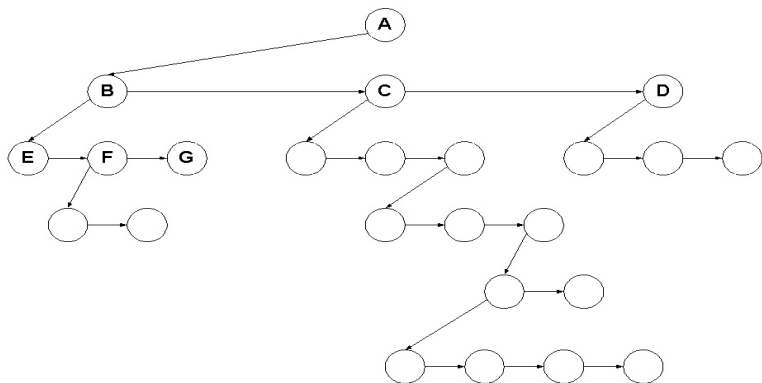


Figura 3: Usando os problemas de árvores genéricas para apresentar Árvores Binárias(AB)

# Representação Computacional de uma Árvore Genérica

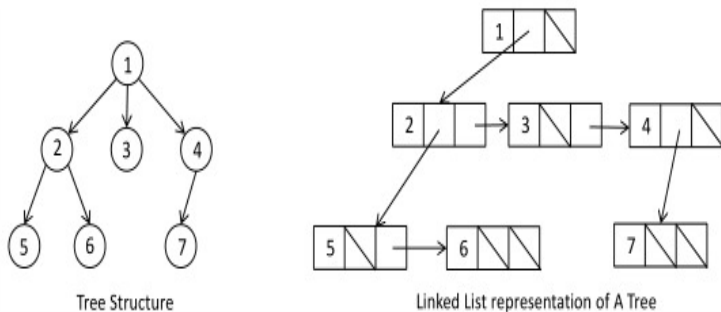
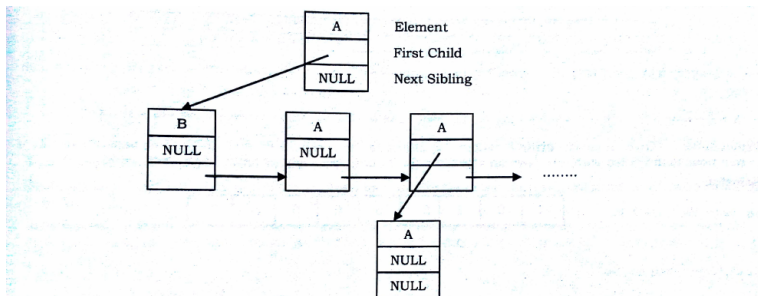


Figura 4: Felizmente há um algoritmo que transforme Árvore Genéricas em Binárias (AB)

# Representação Computacional de uma Árvore Genérica



Based on this discussion, the tree node declaration for general tree can be given as:

```
struct TreeNode {  
    int data;  
    struct TreeNode *firstChild;  
    struct TreeNode *nextSibling;  
};
```

**Note:** Since we are able to convert any generic tree to binary representation; in practice we use binary trees. We can treat all generic trees with a first child/next sibling representation as binary trees.

Figura 5: Veja a *struct* ... lembra o quê?

- Área de compiladores: análise sintática
- Estruturas hierárquicas em geral
- 
-

# Aplicação de Árvores

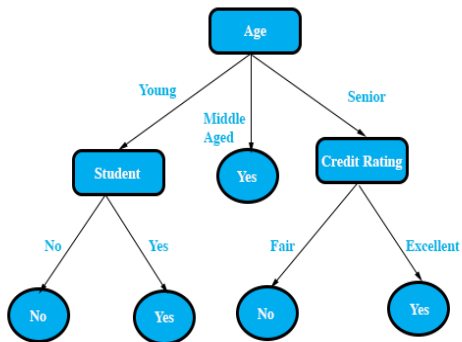
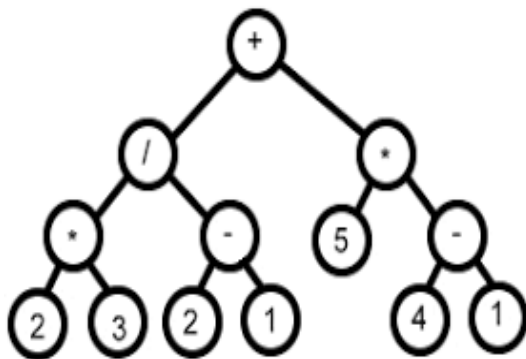


Figura 6: Árvore de Decisão

# Aplicação de Árvores



Expression tree for  $2 \cdot 3 / (2 - 1) + 5 \cdot (4 - 1)$

Figura 7: Árvores de expressões – binárias – novamente

# Árvores Binárias de Buscas - ABBs

- Árvores Genéricas (AGs): foram utilizadas para motivação as ABBs
- Computacionalmente, as ABBs tem um interesse maior que as AGs
- Assim, se inicia com ABBs, e seus algoritmos serão adaptados as AGs



# Árvores Binárias de Buscas - ABBs

- Árvores Genéricas (AGs): foram utilizadas para motivação as ABBs
- Computacionalmente, as ABBs tem um interesse maior que as AGs
- Assim, se inicia com ABBs, e seus algoritmos serão adaptados as AGs

## Definição:

Árvore onde cada nó possui até 2 filhos. O filho da esquerda só pode conter chaves menores do que a do pai, enquanto que o filho da direita só comporta chaves maiores do que a do pai.

# Árvore Binária de Busca

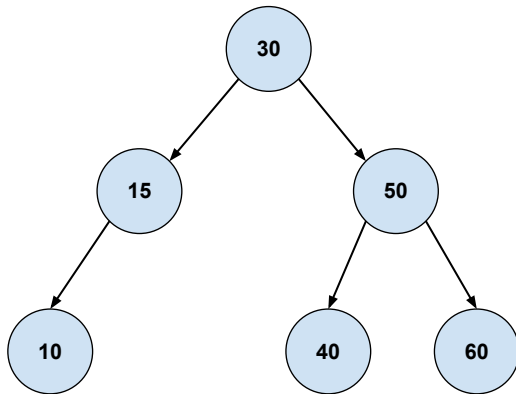
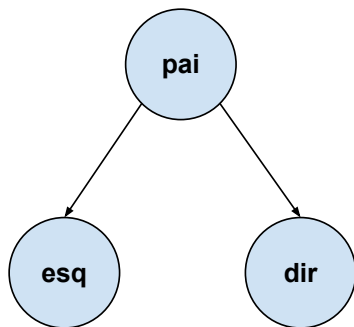


Figura 8: Exemplo de árvore binária de busca

# Árvore Binária de Busca



```
struct ArvoreBinaria {  
    struct ArvoreBinaria* esq;  
    struct ArvoreBinaria* dir;
```

```
    // contém a chave e os dados satélite  
    Tipoltem valor;  
};
```

Figura 9: Estrutura básica / nó

## Operações Básicas

- Inserção
- Busca
- Remoção

## Usos Comuns

- Dicionários / vetores associativos
- Filas de prioridades

Quando a árvore está balanceada todas as três operações podem ser implementadas com complexidade computacional igual a  $O(\log n)$ .

No pior caso (desbalanceamento) estas operações possuem complexidade  $O(n)$  [?].

# Árvore Binária de Busca - Inserção

```
INSERÇÃO(ARVORE, ITEM) {  
    SE ITEM->CHAVE = ARVORE->CHAVE  
        ARVORE->ITEM = ITEM  
        return  
  
    SE ITEM->CHAVE < ARVORE->CHAVE  
        SE ARVORE->ESQ = NULO ENTÃO  
            ARVORE->ESQ = ARVORE(ITEM)  
        SENÃO  
            INSERÇÃO(ARVORE->ESQ, ITEM)  
    SENÃO  
        SE ARVORE->DIR = NULO ENTÃO  
            ARVORE->DIR = ARVORE(ITEM)  
        SENÃO  
            INSERÇÃO(ARVORE->DIR, ITEM)  
}
```

# Árvore Binária de Busca - Inserção

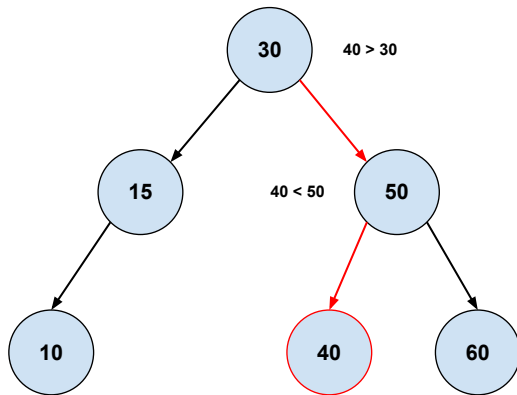


Figura 10: Exemplo de inserção da chave 40

# Árvore Binária de Busca - Inserção

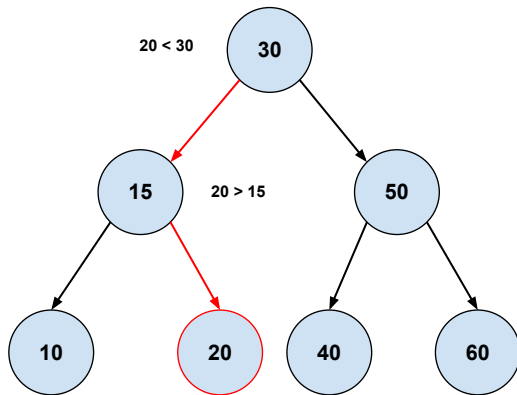


Figura 11: Exemplo de inserção da chave 20



# Árvore Binária de Busca - Busca

```
BUSCA(ARVORE, CHAVE) {  
    SE ARVORE = NULO  
        return NULO  
  
    SE ARVORE->CHAVE = CHAVE  
        return ARVORE  
  
    SE CHAVE < ARVORE->CHAVE  
        return BUSCA(ARVORE->ESQ, CHAVE)  
    SENÃO  
        return BUSCA(ARVORE->DIR, CHAVE)  
}
```

# Árvore Binária de Busca - Remoção

A remoção de um nó se enquadra em um dos seguintes casos:

- ① Remoção de um nó folha (nenhum filho)
- ② Remoção de um nó com somente um filho
- ③ Remoção de um nó com dois filhos

O tratamento de cada caso foi apresentado em sala de aula.

Uma árvore binária de busca balanceada garante operações de busca, inserção e remoção com complexidade  $O(\log n)$ , onde  $n$  é o número de nós, o que a torna atrativa para diversas aplicações.

Determinadas sequências de inserções ou remoções podem fazer com que uma ABB fique desbalanceada, tornando suas operações  $O(n)$ .

# Cálculo da Altura

```
ALTURA(ARVORE) {  
    SE ARVORE = NULO  
        return -1  
  
    A1 = ALTURA(ARVORE->DIR)  
    A2 = ALTURA(ARVORE->ESQ)  
  
    return maior(A1, A2) + 1  
}
```

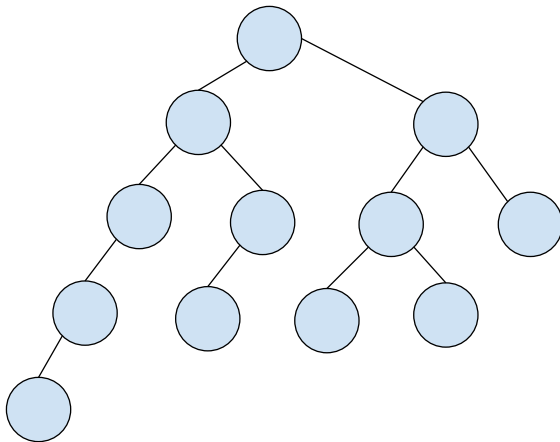


Figura 12: Exercício: determine a altura de cada subárvore.

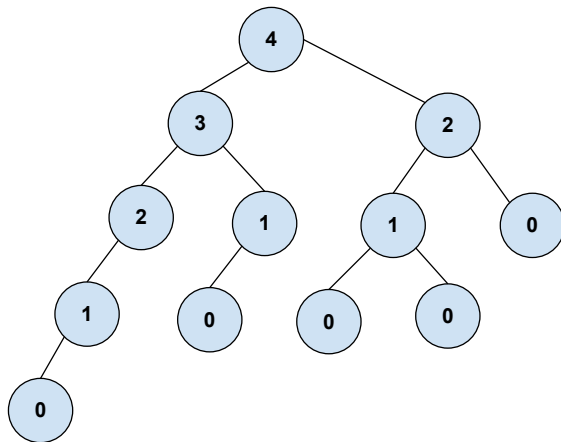


Figura 13: Resposta do exercício.

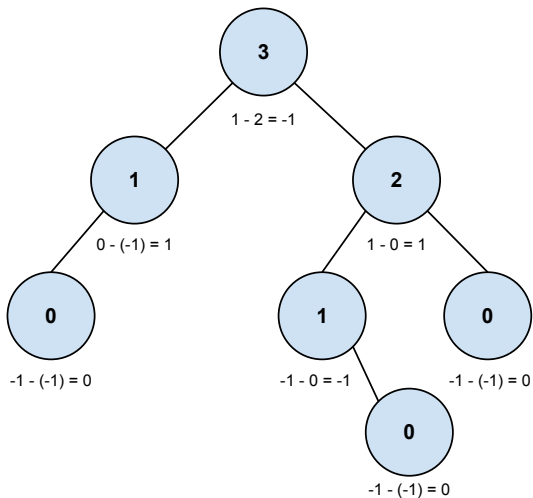
# Cálculo do Fator de Balanceamento

```
FB(ARVORE) {  
    A1 = ALTURA(ARVORE->ESQ)  
    A2 = ALTURA(ARVORE->DIR)  
    return A1 - A2  
}
```

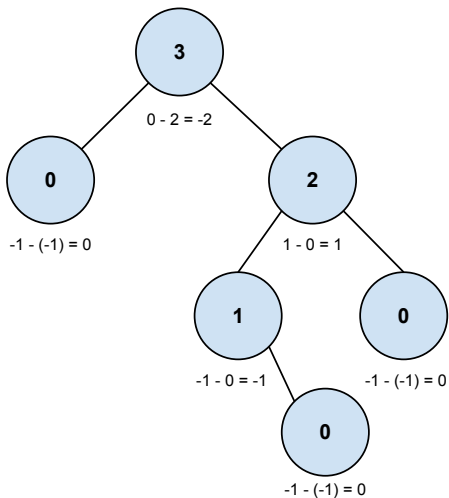
- Uma ABB está balanceada quando cada nó possui um FB igual a -1, 0 ou 1
- Uma inserção ou remoção pode tornar uma árvore desbalanceada, necessitando de rotações para o seu balanceamento



# Exemplo de ABB Balanceada



# Exemplo de ABB Desbalanceada

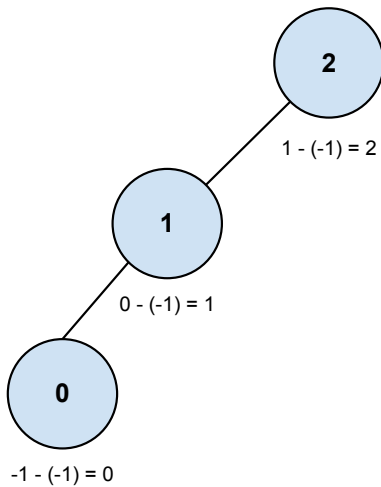


# Operação de rotação

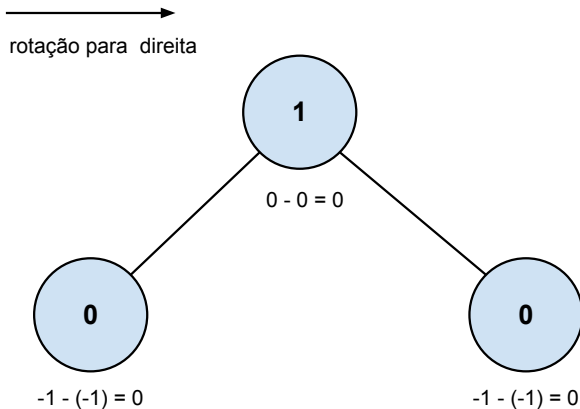
```
ROTACAO_DIREITA(RAIZ) {  
    PIVO      = RAIZ->ESQ  
    RAIZ->ESQ = PIVO->DIR  
    PIVO->DIR = RAIZ  
    RAIZ      = PIVO  
}
```

```
ROTACAO_ESQUERDA(RAIZ) {  
    PIVO      = RAIZ->DIR  
    RAIZ->DIR = PIVO->ESQ  
    PIVO->ESQ = RAIZ  
    RAIZ      = PIVO  
}
```

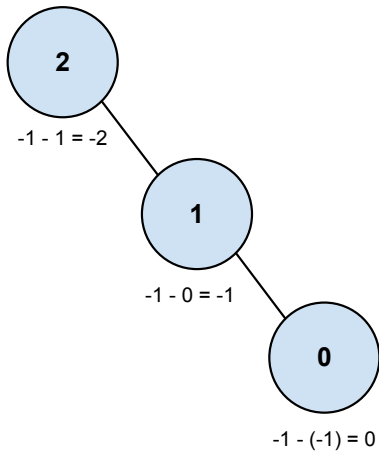
# Rotação para Direita



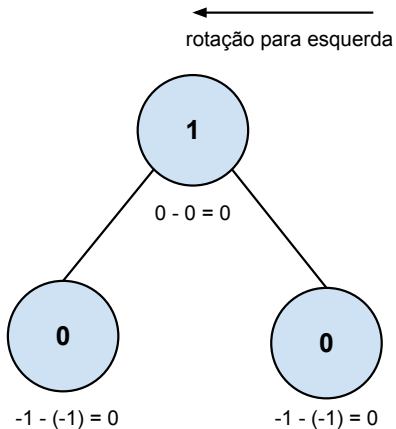
# Rotação para Direita



# Rotação para Esquerda



# Rotação para Esquerda



- **AVL** desenvolvida por G. M. **Adelson-Velskii** and E. M. **Landis**
- Garante o balanceamento da árvore ao realizar rotações após cada inserção ou remoção na ABB



# Balanceamento - Inserção

```
BALANCEAMENTO(RAIZ) {  
    SE FB(RAIZ) = -2 ENTÃO  
        SE FB(RAIZ->DIR) = -1 ENTÃO  
            ROTACAO_ESQUERDA(RAIZ)  
        SENÃO  
            ROTACAO_DIREITA(RAIZ->DIR)  
            ROTACAO_ESQUERDA(RAIZ)  
    SENÃO SE FB(RAIZ) = 2 ENTÃO  
        SE FB(RAIZ->ESQ) = 1 ENTÃO  
            ROTACAO_DIREITA(RAIZ)  
        SENÃO  
            ROTACAO_ESQUERDA(RAIZ->DIR)  
            ROTACAO_DIREITA(RAIZ)  
}
```

- Para que a árvore tenha um bom desempenho, é essencial que o balanceamento seja calculado eficientemente, isto é, sem a necessidade de percorrer toda a árvore após cada modificação
- Manter a árvore estritamente balanceada após cada modificação tem seu preço (desempenho). Árvores AVL são utilizadas normalmente onde o número de consultas é muito maior do que o número de inserções e remoções e quando a localidade de informação não é importante

# Árvore de Espalhamento

- Reestrutura a árvore em cada operação de inserção, busca ou remoção por meio de operações de rotação
- Nome original: *splay tree* [?]. Não confundir com a Árvore N-Ária de Espalhamento (ANE) criada por professores da UDESC

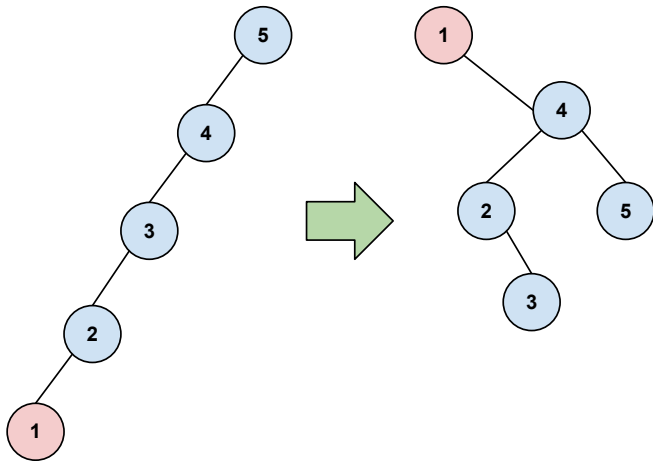
# Árvore de Espalhamento

- Evita a repetição de casos ruins [ $O(n)$ ] devido ao seu rebalanceamento natural
- Não realiza o cálculo de fatores de balanceamento, simplificando sua implementação
- Pior caso para uma operação se mantém  $O(n)$ , mas, ao considerar uma cadeia de operações, *garante* uma complexidade amortizada de  $O(\log n)$  para suas operações básicas

# Árvore de Espalhamento

- Se baseia na operação de espalhamento, que utiliza rotações para mover uma determinada chave até a raiz
- A sua complexidade  $O(\log n)$  em uma análise amortizada é garantida pelas rotações efetuadas, o que a difere do uso simples de heurísticas como o *mover para a raiz*

## Exemplo - Espalhamento pela chave 1



# Operações Básicas

**Espalhamento** Move a chave desejada para a raiz por uma sequência bem definida de operações de rotação

**Busca** Busca uma chave na árvore

**Inserção** Insere uma nova chave na árvore

**Remoção** Remove uma chave da árvore

- Uma árvore de espalhamento é uma árvore binária de busca válida, logo operações como os percursos (pré-em-pós) são idênticas as operações em uma ABB
- As operações de inserção, busca e remoção podem ser definidas com base na operação de espalhamento



# Árvore de Espalhamento - Busca

```
BUSCA(RAIZ, CHAVE) {  
    return ESPALHAMENTO(RAIZ, CHAVE)  
}
```

# Árvore de Espalhamento - Inserção

```
INSERE(RAIZ, CHAVE) {  
    INSERE_ABB(RAIZ, CHAVE)  
    return ESPALHAMENTO(RAIZ, CHAVE)  
}
```

# Árvore de Espalhamento - Remoção

```
REMOVE(RAIZ, CHAVE) {  
    RAIZ = ESPALHAMENTO(RAIZ, CHAVE)  
  
    SE RAIZ->DIR ENTÃO  
        AUX = ESPALHAMENTO(RAIZ->DIR, CHAVE)  
        AUX->ESQ = RAIZ->ESQ  
    SENÃO  
        AUX = RAIZ->ESQ  
  
    return AUX  
}
```

# Estratégias de Espalhamento

Duas estratégias:

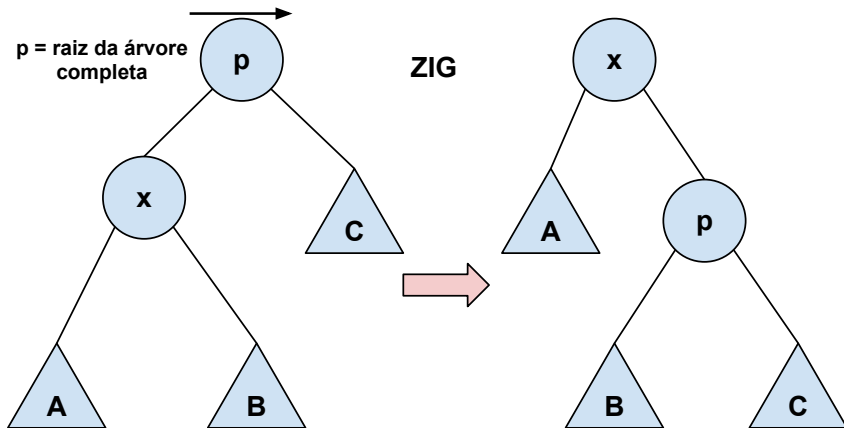
**Bottom-Up** Parte do nó acessado e o movimenta para a raiz da árvore por meio de rotações

**Top-Down** Parte do nó raiz, rotacionando e *removendo do caminho* os nós entre a raiz e o nó desejado, armazenando-os em duas árvores auxiliares, remontando a árvore completa na sua etapa final.

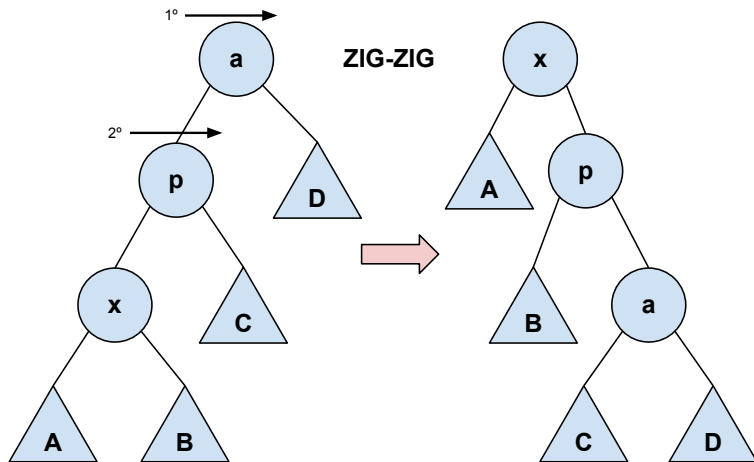
# Espalhamento Bottom-Up

- Na estratégia Bottom-Up, a operação de espalhamento realiza rotações subindo gradativamente de níveis, a partir da chave desejada
- Enquanto a chave não estiver na raiz, deve-se verificar qual o caso aplicável (ZIG, ZIG-ZIG ou ZIG-ZAG) e realizar as rotações necessárias

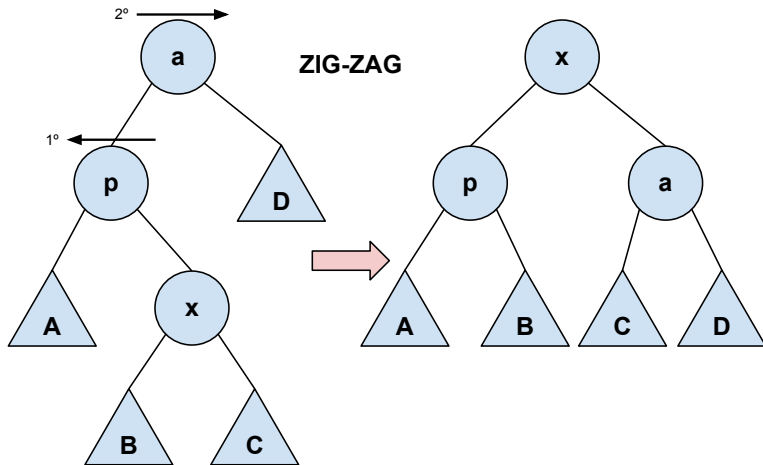
## Caso 1: ZIG



## Caso 2: ZIG-ZIG



## Caso 3: ZIG-ZAG

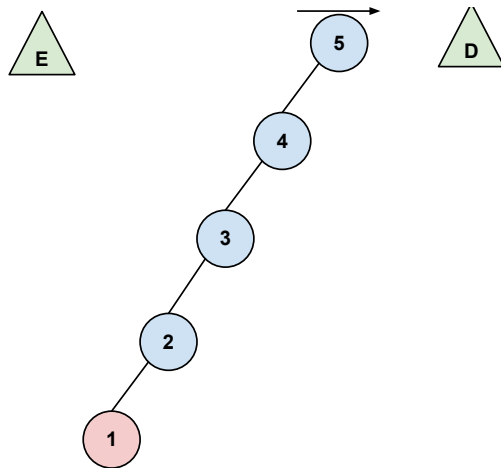




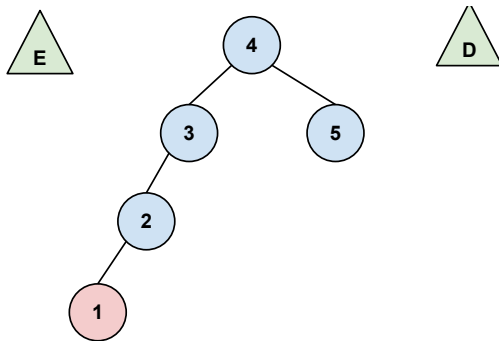
# Espalhamento Top-Down

- Na estratégia Top-Down as chaves que estão no caminho da chave desejada para a raiz são rotacionadas e removidas para árvores auxiliares seguindo uma sequência de operações bem definidas
- Quando a chave desejada chega até a raiz, a árvore é remontada pelo retorno das chaves removidas

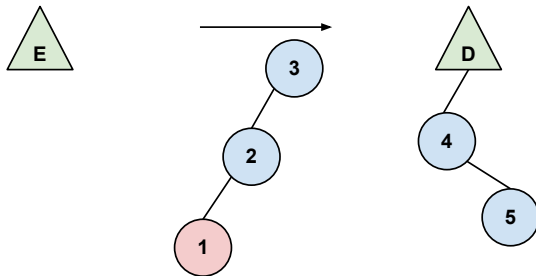
## Exemplo: Top-Down 1/6



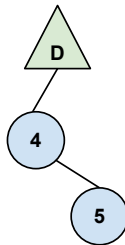
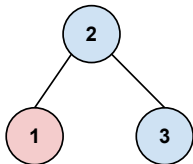
## Exemplo: Top-Down 2/6



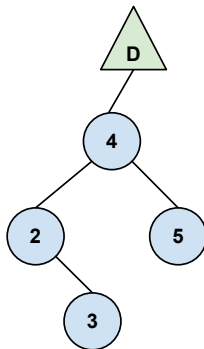
## Exemplo: Top-Down 3/6



## Exemplo: Top-Down 4/6



## Exemplo: Top-Down 5/6



## Exemplo: Top-Down 6/6

