LFA0001 – Linguagens Formais e Autômatos
Aula 05
Autômato Finito com Movimentos Vazios

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2016

Sumário

Movimentos Vazios

Autômato Finito com Movimentos Vazios

Equivalência entre AFN e AFε

Movimento Vazio

- Transição *sem a leitura* de símbolo da fita
- Interpretado como um não determinismo interno ao autômato
  - transição encapsulada
  - excetuando-se por uma eventual mudança de estados
  - nada mais pode ser observado
- Facilita algumas construções e demonstrações
- **Não** aumento o poder de reconhecimento de linguagens

Autômato Finito com Movimentos Vazios

Definição (Autômato Finito com Movimentos Vazios)

Um AFε é uma estrutura $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ tal que

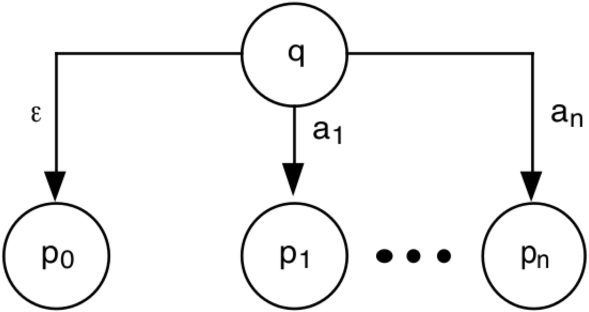
- Σ é o alfabeto de símbolos de entrada
- Q é o conjunto finito de estados
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ é a função (parcial) de transição ou função programa
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ são os estados finais.

Um *movimento vazio* ou *transição vazia* são as transições da forma

$$\delta(p, \varepsilon) = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

Autômato como Diagrama

$\delta(q, \varepsilon) = \{p_0\}$ $\quad$ $\delta(q, a_1) = \{p_1\}$ $\quad \dots \quad$ $\delta(q, a_n) = \{p_n\}$



Computação de um AFε

Processamento de uma transição vazia

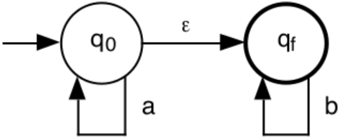
- não-determinístico
- assume simultaneamente os estados origem e destino da transição
- análoga a um AFN

Exemplo: AFε

Linguagem sobre $\{a, b\}$ que aceita as palavras em que os símbolos a devem anteceder todos os símbolos b

$$M_7 = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_f\}, \delta_7, q_0, \{q_f\} \rangle$$

δ_7	a	b	ε
q_0	$\{q_0\}$	$-$	$\{q_f\}$
q_f	$-$	$\{q_f\}$	$-$



Computação de um AFε

Computação de transições vazias a partir de um estado

Definição (Computação Vazia para um Estado)

Dado AFε $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ a **computação vazia** ou função **fecho vazio** de um estado é

$$\delta_\varepsilon : Q \to 2^Q$$

indutivamente definida por:

- $\delta_\varepsilon(q) = \{q\}$, caso $\delta(q, \varepsilon)$ seja indefinida
- $\delta_\varepsilon(q) = \{q\} \cup \delta(q, \varepsilon) \cup (\bigcup_{p \in \delta(q,\varepsilon)} \delta_\varepsilon(p))$, caso contrário

Computação de um AFε

Computação de transições vazias a partir de um conjunto de estados

Definição (Computação Vazia de Estados)

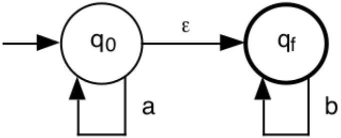
Dado AFε $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ a **computação vazia** ou função **fecho vazio** de um conjunto de estados $\delta_\varepsilon^* : 2^Q \rightarrow 2^Q$ é

$$\delta_\varepsilon^*(P) = \bigcup_{q \in P} \delta_\varepsilon(q)$$

Por simplicidade, tanto δ_ε quanto δ_ε^* serão denotados por

$$\delta_\varepsilon$$

Exemplo: Computação Vazia



- $\delta_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_f\}$
- $\delta_\varepsilon(q_f) = \{q_f\}$
- $\delta_\varepsilon(\{q_0, q_f\}) = \{q_0, q_f\}$

Computação de um AFε

Sucessiva aplicação da função programa

- para cada símbolo da entrada
- aplicação de δ e δ_ε
- até ocorrer condição de parada

Portanto, antes de processar a próxima transição de leitura de símbolo

- determinar estados atingíveis por movimentos vazios

Função Programa Estendida

Definição (Função Programa Estendida)

Dado $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ um autômato finito com movimentos vazios, sua função programa estendida

$$\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

é definida indutivamente como segue, sendo $P \subset Q$, $a \in \Sigma$ e $w \in \Sigma^*$:

- $\delta^*(P, \varepsilon) = \delta_\varepsilon(P)$
- $\delta^*(P, wa) = \delta_\varepsilon(R)$ onde $R = \{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(P, w)\}$

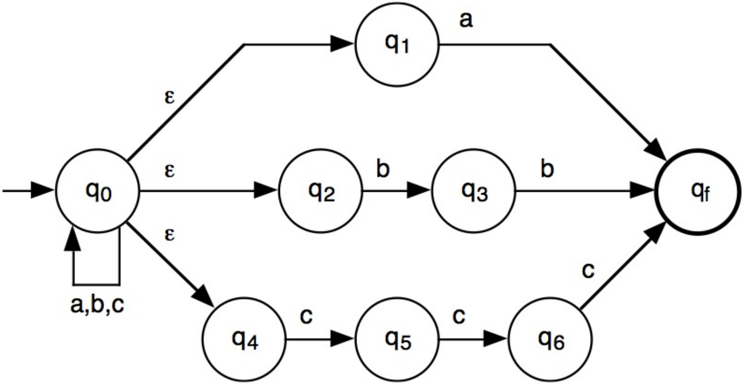
Parada do Processamento – Linguagem Aceita/Rejeitada

Tal como a do Autômato Não Determinístico

Exemplo

Sendo $\Sigma = \{a, b, c\}$ e a linguagem
$L_8 = \{w \mid w$ possui como sufixo a ou bb ou $ccc\}$

$$M_8 = \langle \{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_f\}, \delta_8, q_0, \{q_f\} \rangle$$



Exemplo

$$\begin{aligned}
\delta^*(\{q_0\}, abb) &= \delta_\varepsilon(\{r\ \ r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_0\}, ab)\}) && (1)\\
\delta^*(\{q_0\}, ab) &= \delta_\varepsilon(\{r\ \ r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_0\}, a)\}) && (2)\\
\delta^*(\{q_0\}, a) &= \delta_\varepsilon(\{r\ \ r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\}) && (3)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\} = \delta_\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_4\} && \text{considerado em (3)}\\
&\delta^*(\{q_0\}, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\} && \text{considerado em (2)}\\
&\delta^*(\{q_0\}, ab) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} && \text{considerado em (1)}
\end{aligned}$$

Resulta na computação:

$$\delta^*(\{q_0\}, abb) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$$

Equivalência entre AFN e AFε

A classe dos Autômatos Finitos Não Determinísticos é **equivalente** à dos Autômatos com Movimento Vazio.
Prova-se que:

- A partir de AFε E, contrói-se AFN E_N que aceita a mesma linguagem de E.
- A partir de AFN N constrói-se AFε N_E que aceita a mesma linguagem de N.

AFε $\rightarrow$AFN

- Construção de uma função programa sem movimentos vazios
- conjunto de estados destino de cada transição não-vazia
  - ampliado com os demais estados possíveis de serem atingidos exclusivamente por transições vazias

AFε $\rightarrow$AFN

Seja $E = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ um AFε qualquer.
Construiremos o AFN

$$E_N = \langle \Sigma, Q, \delta_N, q_0, F_N \rangle$$

onde:

- $\delta_N : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ é tal que

$$\delta_N(q, a) = \delta^*(\{q\}, a)$$

- F_N é o conjunto de todos os estados $q \in Q$ tal que

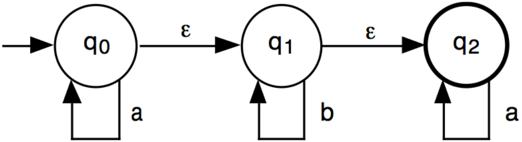
$$\delta_\varepsilon(q) \cap F \neq \varnothing$$

  ou seja, são os estados que atingem estados finais via computações vazias.

Exemplo: Construção de AFN a partir de AFε

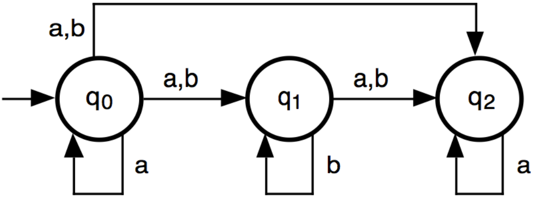
$$M_9 = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta_9, q_0, \{q_2\} \rangle$$

δ_9	a	b	ε
q_0	$\{q_0\}$	$-$	$\{q_1\}$
q_1	$-$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$-$	$-$



Exemplo: Construção de AFN a partir de AFε

$$M_{9_N} = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta_{9_N}, q_0, F_N \rangle$$



Exemplo: Construção de AFN a partir de AFε

$F_N = \{q_0, q_1, q_2\}$

- $\delta_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta_\varepsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}$

Na construção de δ_{9_N}

- $\delta_9^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta_9^*(\{q_1\}, \varepsilon) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_9^*(\{q_2\}, \varepsilon) = \{q_2\}$

Exemplo: Construção de AFN a partir de AFε

Assim, δ_{9_N} é tal que

- $\delta_{9_N}(q_0, a) = \delta_9^*(\{q_0\}, a) =$
  $\delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta_{9_N}(q_0, b) = \delta_9^*(\{q_0\}, b) =$
  $\delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\}) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_{9_N}(q_1, a) = \delta_9^*(\{q_1\}, a) =$
  $\delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_1\}, \varepsilon)\}) = \{q_2\}$

Exemplo: Construção de AFN a partir de AFε

- $\delta_{9_N}(q_1, b) = \delta_9^*(\{q_1\}, b) = \delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_1\}, \varepsilon)\}) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_{9_N}(q_2, a) = \delta_9^*(\{q_2\}, a) = \delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_2\}, \varepsilon)\}) = \{q_2\}$
- $\delta_{9_N}(q_2, b) = \delta_9^*(\{q_2\}, b) = \delta_\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{q_2\}, \varepsilon)\})$ é indefinida.