LFA0001 – Linguagens Formais e Autômatos
Aula 10
Autômatos Finitos com Saída

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2016

Sumário

Autômatos Finitos com Saída

Saída de AFDs, AFNs e AFεs:
Aceita/Rejeita

- Extensão de Autômatos Finitos
- Objetivo: geração de palavra de saída
- Não altera o poder computacional

Autômatos Finitos com Saída

Saídas associadas...

- às transições: Máquina de Mealy
    - Ao passar por uma transição
    - o autômato pode escrever na fita de saída
- aos estados: Máquina de Moore
    - Ao chegar em um estado
    - o autômato pode escrever na fita de saída

Saída

Não é memória auxiliar

- não pode ser lida

Utiliza uma fita de saída

- diferente da fita de entrada
- move somente para a direita
- utiliza alfabeto próprio
    - alfabeto de símbolos de saída
    - pode ser igual ao alfabeto de entrada

Autômatos Finitos com Saída

Resultado do processamento:

- condição Aceita/Rejeita
- informação contida na fita de saída

Definição das Máquinas de Mealy e de Moore:

- modificações sobre definição de AFD

Máquina de Mealy

Definição (Máquina de Mealy)

Uma Máquina de Mealy é um AFD com saída nas transições

$$M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F, \Delta \rangle$$

onde:

- Σ é o alfabeto de entrada
- Q é o conjunto (finito) de estados
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Delta^*$ é a função de transição
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais
- Δ é o alfabeto de saída

Computação

Para a entrada *w*

- sucessiva aplicação da função programa
- para cada símbolo de *w*
- até ocorrer uma condição de parada

Palavra vazia como saída:

- nenhuma gravação é realizada
- não move o cabeçote da fita de saída

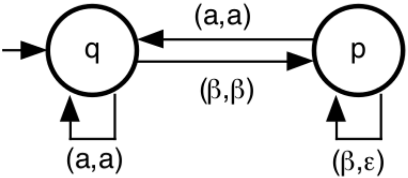
Se todas as transições tiverem ε como saída

- processa como um AFD

Exemplo

Máquina de Mealy que compacta brancos em um texto

$$M = \langle \{a, \beta\}, \{q, p\}, \delta, q, \{q, p\}, \{a\beta\} \rangle$$



UDESC

Máquina de Moore

Definição (Máquina de Moore)

Uma Máquina de Moore é um AFD com saída nos estados

$$M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F, \Delta, \delta_S \rangle$$

onde:

- Σ é o alfabeto de entrada
- Q é o conjunto (finito) de estados
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ é a função de transição
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais
- Δ é o alfabeto de saída
- $\delta_S : Q \rightarrow \Delta^*$ é a função (total) de saída

UDESC

Computação

Para a entrada w

- sucessiva aplicação da função programa
  - para cada símbolo de w
  - até ocorrer uma condição de parada
- juntamente com a sucessiva aplicação da função de saída
  - a cada estado atingido

Palavra vazia como saída:

- nenhuma gravação é realizada
- não move o cabeçote da fita de saída

Se todas as transições tiverem ε como saída

- processa como um AFD

Equivalência Mealy e Moore

Não é válida para a entrada vazia!

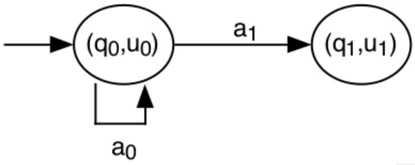
Demais casos:

- Construída através dos teoremas a seguir

Máquina de Moore $\rightarrow$ Máquina de Mealy

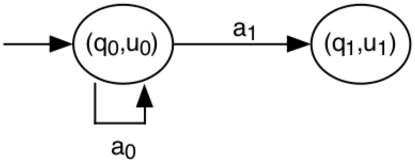
Toda Máquina de Moore pode ser simulada por uma Máquina de Mealy para entradas não vazias.

Problema: Estado inicial da Máquina de Moore
Exemplo:

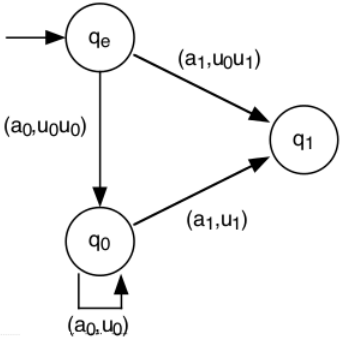


Solução

Moore:



Mealy equivalente:



Demonstração

Seja $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F, \Delta, \delta_S \rangle$ uma Máquina de Moore qualquer Mealy correspondente:

$$ME = \langle \Sigma, Q \uplus \{q_e\}, \delta_{ME}, q_e, F, \Delta \rangle$$

Estado q_e:

- novo estado
- usado somente na primeira transição executada
- garante a geração da saída referente ao estado inicial q_0 da Máquina de Moore original

Função programa δ_{ME}

- $\delta_{ME}(q_e, a) = (\delta(q_0, a), \delta_S(q_0)\delta_S(\delta(q_0, a)))$
- $\delta_{ME}(q, a) = (\delta(q, a), \delta_S(\delta(q, a)))$

UDESC

Demonstração

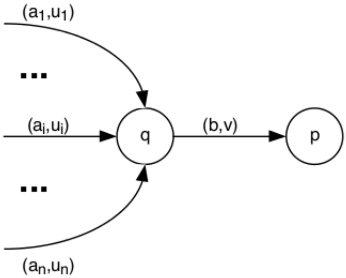
Indução no tamanho da palavra de entrada prova que, de fato, ME simula M

- ao reconhecer a entrada $a_1 a_2 \ldots a_n$
- se M passa pelos estados $q_0, q_1, \ldots, q_n$
  e gera as saídas $u_0, u_1, \ldots, u_n$
- então ME passa pelos estados $q_e, q_0, q_1, \ldots, q_n$
  e gera as saídas $u_0, u_1, \ldots, u_n$

Máquina de Mealy → Máquina de Moore

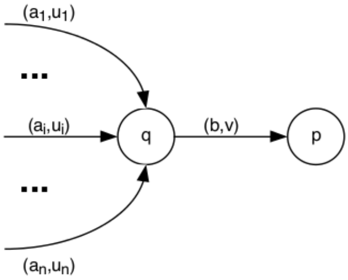
Toda Máquina de Mealy pode ser simulada por uma Máquina de Moore

Problema: Estado que é destino de diversas transições diferentes
Exemplo:

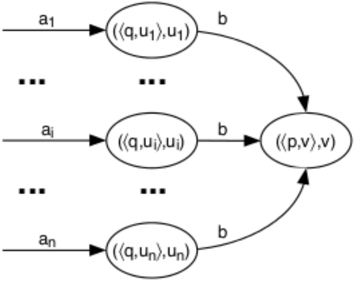


Solução

Mealy:



Moore equivalente:



Máquina de Moore Correspondente

Em geral, tem mais estados do que a Máquina de Mealy original.

Transições com saídas diferentes que atingem um mesmo estado:

- simulado por diversos estados (um para cada saída)
- estado será um par ordenado $\langle \text{estado}, \text{saída} \rangle$

Demonstração

Seja $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F, \Delta \rangle$ uma Máquina de Mealy qualquer
Moore correspondente:

$$MO = \langle \Sigma, (Q \times S(\delta)) \uplus \{\langle q_0, \varepsilon \rangle\}, \delta_{MO}, \langle q_0, \varepsilon \rangle, F \times S(\delta), \Delta, \delta_S \rangle$$

- $S(\delta)$: imagem de δ, restrita à componente saída
  - conjunto de saídas possíveis de M
- δ_{MO} é tal que
  - se $\delta(q_0, a) = (q, u)$

$$\delta_{MO}(\langle q_0, \varepsilon \rangle, a) = \langle q, u \rangle$$

  - se $\delta(q, b) = (p, v)$, então, para cada $\delta(q_i, a_i) = (q, u_i)$

$$\delta_{MO}(\langle q, u_i \rangle, b) = \langle p, v \rangle$$

- a função de saída δ_S é tal que, para o estado $\langle q, u \rangle$

$$\delta_S(\langle q, u \rangle) = u$$

Demonstração

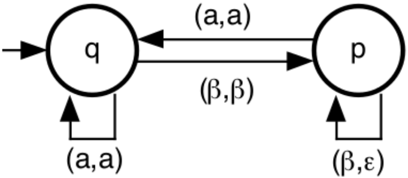
Indução no tamanho da palavra de entrada prova que, de fato, MO simula M

- ao reconhecer a entrada $a_1 a_2 \ldots a_n$
- se M passa pelos estados $q_0, q_1, \ldots, q_n$
  e gera as saídas $u_1, \ldots, u_n$
- então MO passa pelos estados $\langle q_0, \varepsilon\rangle, \langle q_1, u_1\rangle, \ldots, \langle q_n, u_n\rangle$
  e gera as saídas $\varepsilon, u_1, \ldots, u_n$

UDESC

Exemplo

Dada a Máquina de Mealy compactadora de brancos

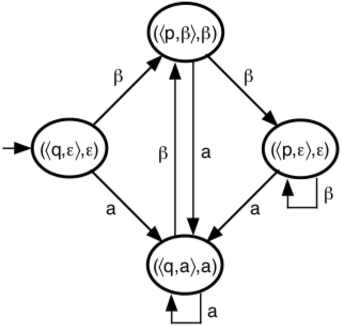


Exemplo

Mealy: $M = \langle \{a, \beta\}, \{q, p\}, \delta, q, \{q, p\}, \{a\beta\} \rangle$
Moore equivalente:

$$MO = \langle \{a, \beta\}, Q, \delta_{MO}, \langle q, \varepsilon \rangle, F, \{a, \beta\}, \delta_S \rangle$$

onde $Q = F = \{q, p\} \times \{\varepsilon, a, \beta\}$



Exercícios

1. Defina formalmente:
   - (a) A função programa estendida para a Máquina de Mealy
   - (b) As seguintes funções estendidas para a Máquina de Moore:
     1. Função programa
     2. Função de saída

UDESC

Exercícios

2. Desenvolva um autômato finito com saída sobre o alfabeto de entrada $\{x, \beta, \bullet\}$. O objetivo é tratar brancos (β) corretamente em um texto. Assim, a máquina deve analisar um texto (palavra sobre o alfabeto), garantindo que:
   - sejam eliminados brancos contíguos
   - o texto deve iniciar por x e terminar por $\bullet$
   - sejam eliminados eventuais β antes de um $\bullet$
   - antes de um $\bullet$ exista um x

   Note que o sutômato somente pode alterar os brancos no texto. Caso o resto do texto não esteja de acordo com as regras, deve ser rejeitado pela máquina, não importando a saída gerada. Por exemplo:
   - a entrada $\beta\beta xx\beta\beta xx\beta\beta xx\beta\beta \bullet \beta\beta\beta$ deve ser aceita gerando a saída $xx\beta xx\beta xx\bullet$
   - a entrada $\bullet x$ deve ser rejeitada