

Cours de traitement du signal

PREMIERE PARTIE

ZARADER J.L
MILGRAM M.
ACHARD C.

2002/2003

Bibliographie

L. Schwartz : " Théorie des distributions " ; Ed. Hermann

E. Roubine : " Distributions Signal " ; Ed. Eyrolles

J. Max : " Méthodes et techniques du traitement du signal " ; 2 Tomes ; Ed. Masson

F. de Coulon : " Théorie et traitement des signaux " ; Ed. Dunod

A. Spatarü : " Théorie de la transmission de l'information " ; Ed. Masson

M. Bellanger : " Traitement numérique du signal " ; Ed. Masson

M. Kunt : " Traitement numérique des signaux " ; Ed. Dunod

Chapitre I - Généralités

I - Définitions.

Le signal est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

Le traitement du signal (T.S) est une discipline technique qui a pour objet l'élaboration, la détection et l'interprétation des signaux porteurs d'informations.

Cette discipline s'appuie sur la théorie du signal qui donne une description mathématique des signaux. Cette théorie fait essentiellement appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, l'électricité et l'étude des processus aléatoires.

Historiquement, le traitement des signaux apparaît au début du XX^{ième} siècle, en même temps que l'électronique (Fleming, 1905, détection et amplification de signaux faibles). On peut cependant noter des premiers travaux au XIX^{ième} avec l'invention du télégraphe électrique (Morse, Cooke, Wheatstone, 1830), du téléphone (Bell, 1876) et de la radio (Marconi, Popov, 1895).

Hormis la contribution apportée par Fourier (1822, Travaux sur la propagation de la chaleur), la théorie du signal apparaît en 1930 avec les premiers travaux de Wiener et Kintchine sur les processus aléatoires, et ceux de Nyquist et Hartley sur la quantité d'informations transmise sur une voie télégraphique.

Les contributions essentielles, au traitement du signal et à la théorie du signal n'interviennent qu'après la seconde guerre mondiale. Invention du transistor en 1948, travaux de Shannon sur la communication, de Wiener sur le filtrage optimal et de Schwartz sur les distributions.

Les applications du traitement du signal sont nombreuses (Télécommunication, Géophysique, Reconnaissance des formes, Biomédical, Acoustique, etc...).

Exemples

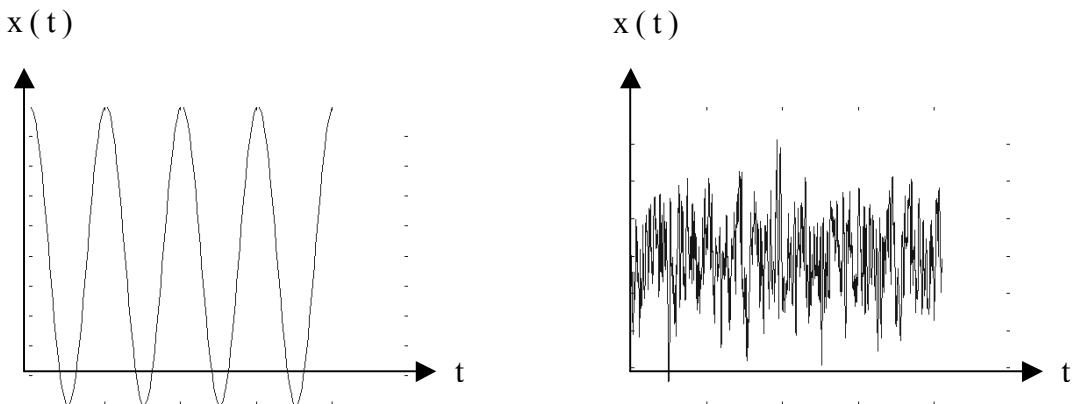
- Contrôle Radar: Ici l'analyse fréquentielle joue un rôle fondamental.
- Codage de la Parole : La reconnaissance de la parole nécessite le traitement d'une grande quantité de données. Le codage permet de réduire cette quantité, en éliminant les redondances et en conservant l'information utile.
- Les Télécommunications : Si les 17 Millions d'abonnés au téléphone étaient reliés 2 à 2 il faudrait $(17M)^2/2$ câbles. Heureusement les travaux sur la modulation, l'échantillonnage et la transmission permettent d'émettre, sur une même voie, des milliers de messages.
- Traitement des Images : Restauration d'images dégradées par du bruit, compression d'images (vidéoconférence), analyse d'images médicales, imagerie ultra-sonore (échographie)
- Télémétrie ultra-sonore : exemple d'un échos reçu après une émission à 40Khz
- Recherche géophysique : l'écho d'une onde acoustique sur les différentes couches renseigne sur la composition et la géométrie des roches

II - Classification des signaux.

Il existe différents modes de classification :

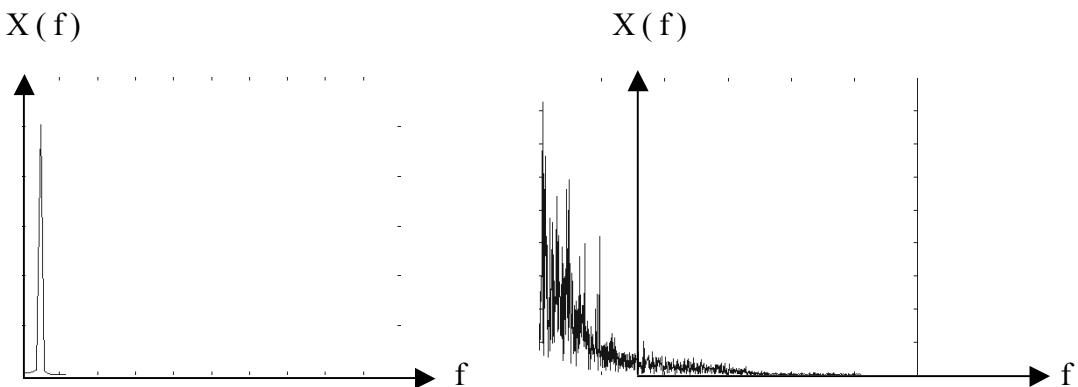
1°) Morphologique:

On distingue les signaux selon leur évolution temporelle :



2°) Spectrale:

On classe les signaux suivant la bande de fréquence qu'ils occupent.



Les fréquences peuvent être plus ou moins hautes et la bande de fréquence occupée peut être plus ou moins large.

3°) Energétique:

Définition de l'énergie : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

Définition de la puissance moyenne :

- pour des signaux quelconques, $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt \right]$
- pour des signaux périodiques de période T, $P = \frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt$

Il existe deux grands types de signaux :

- Les signaux à énergie finie $E < \infty$

On dit aussi qu'ils sont de carré sommable. Les signaux à support borné (limités dans le temps) sont à énergie finie.

- Les signaux à puissance moyenne finie $0 < P < \infty$

C'est le cas de tous les signaux périodiques.

Remarques :

- Un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle ($P = 0$).
- Un signal à puissance moyenne finie (non nulle) possède une énergie E infinie.

4°) Typologique :

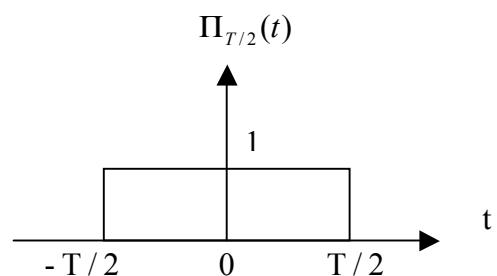
On distingue les signaux suivant que leur évolution est déterministe ou aléatoire :

- Signal déterministe : il peut être prédit par un modèle mathématique connu.
- Signal Aléatoire : il a un comportement imprévisible. On le décrit grâce à des outils statistiques (densité de probabilités, moyenne, variance,...).

III - Quelques signaux importants.

- Porte :

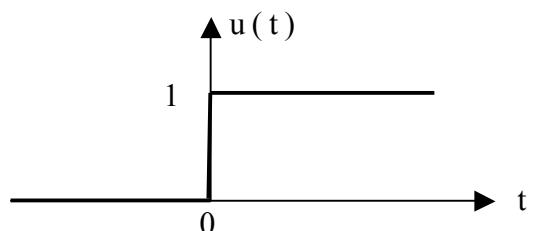
$$\Pi_{\frac{T}{2}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



- Echelon d'Heavyside :

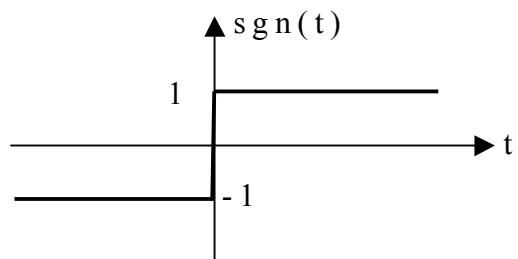
-

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



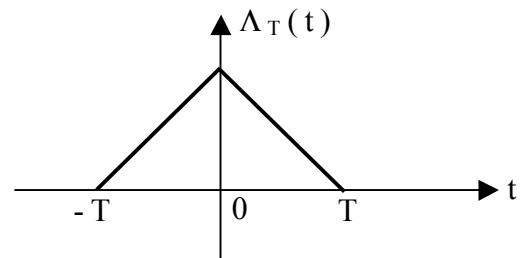
- Signe :

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



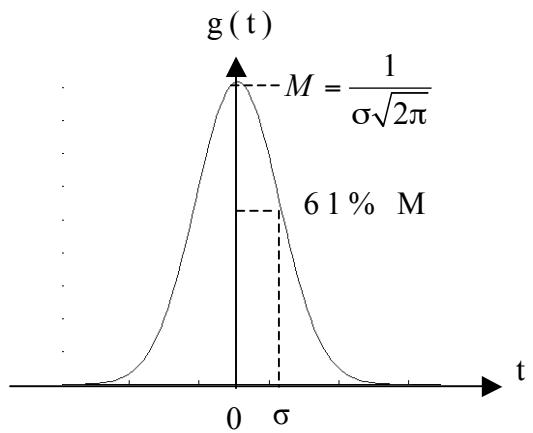
- Triangulaire :

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



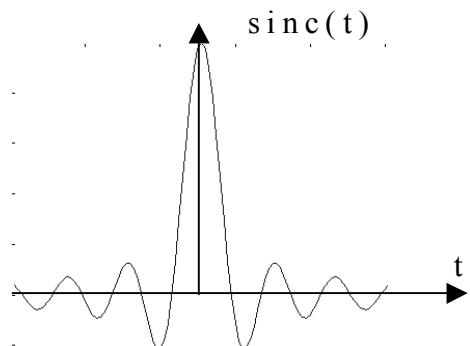
- Gaussienne :

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$



- Sinus Cardinal :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$



IV - Règle de l'Hopital :

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues et dérivables en t_0 et telles que :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow t_0} \{g(t)\} = 0 \text{ (resp } \pm \infty)$$

Alors:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \right\} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{f'(t)}{g'(t)} \right\}$$

Exemple : $\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos(t)}{1} \right\} = 1$

V - Distributions.

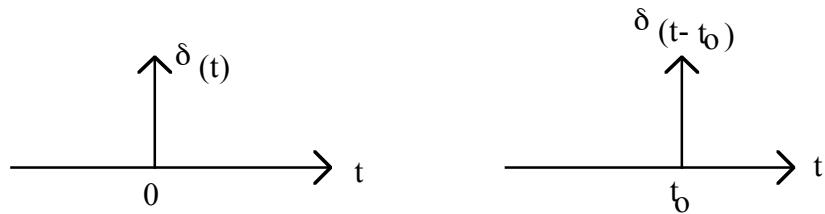
1° Définition

Nous nous intéresserons, dans ce paragraphe, à la distribution de Dirac. Pour de plus amples renseignements sur la théorie des distributions, on pourra consulter les ouvrages L. Schwartz et E. Roubine.

Les distributions généralisent la notion de fonctions numériques, en simplifiant certaines opérations effectuées par l'analyse classique. La distribution de Dirac, notée $\delta(t)$, tient une place particulièrement importante en traitement du signal. En effet, elle intervient dans un grand nombre d'applications telles que l'échantillonnage, la modulation ou le filtrage.

La distribution de Dirac est aussi appelée pic ou impulsion de Dirac. Certains auteurs parlent abusivement de "fonction" de Dirac et la définissent par :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \delta(t) = +\infty & \text{si } t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



2°) Propriétés

- Produit par une fonction f(t) :

$$f(t)\delta(t) = f(0) \delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0)$$

Cela signifie que l'aire associée au pic de Dirac n'est plus unitaire, mais vaut $f(0)$ ou $f(t_0)$.

- Intégration :

D'après les résultats précédents on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

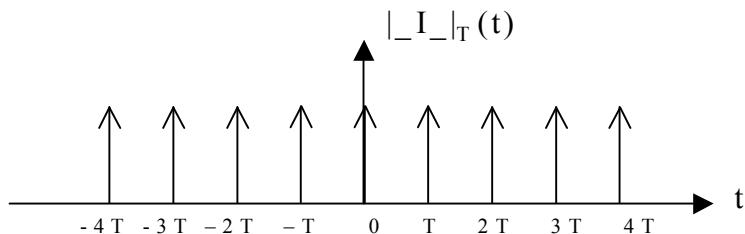
et bien sûr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

- Peigne de Dirac

Pour en terminer avec les distributions, on citera le peigne de Dirac, noté $|_I|_T(t)$. Cette distribution est constituée d'une suite d'impulsions de Dirac, régulièrement espacées d'une durée T . On a :

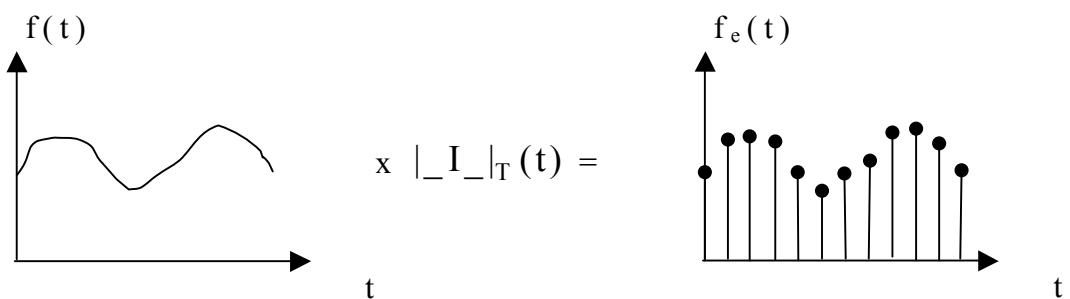
$$|_I|_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$



Le produit de cette distribution par une fonction $f(t)$ donne une suite d'impulsions de Dirac d'aire égale à $f(kT)$:

$$f(t)|_I|_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t-kT)$$

On pose : $f_e(t) = f(t) |_I|_T(t)$. On dit que $f_e(t)$ est une fonction échantillonnée.



Chapitre II - Séries et transformée de FOURIER

On présente dans ce chapitre les principaux outils mathématiques nécessaires au traitement des signaux.

I - Séries de FOURIER.

1°) Définition

Soit $f(t)$ un signal périodique de période T ($T > 0$). Si $f(t)$ possède un nombre fini de sauts sur une période, alors il existe une suite C_n telle que :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+j2\pi\frac{nt}{T}}$$

Cette série converge vers $f(t)$, si $f(t)$ est continue en t . Les C_n sont couramment appelées raies, composantes ou harmoniques du signal et se calculent par projection:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) e^{-j2\pi\frac{nt}{T}} dt$$

- C_0 : composante continue = $\frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) dt$
- C_1 : 1^{ère} Harmonique ou fondamentale du signal $f(t)$.
- C_n : contribution de la $n^{\text{ième}}$ harmonique.

Propriétés :

- Si $f(t)$ réelle alors $C_n = C_{-n}^*$ ($f(t) = f^*(t)$)
- Si $f(t)$ réelle et paire alors C_n réel ($f(t) = f^*(t) = f(-t)$)
- Si $f(t)$ réelle et impaire alors C_n imaginaire ($f(t) = -f(-t) = f^*(t)$)

Le *spectre* du signal, représenté par les C_n , peut être décomposé en :

- Un *spectre d'amplitude* = $|C_n|$
- Un *spectre de puissance* = $|C_n|^2$
- Un *spectre de phase* = $\text{Arg}(C_n)$

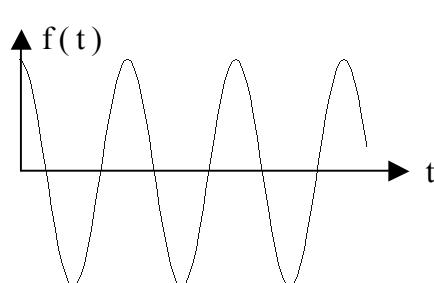
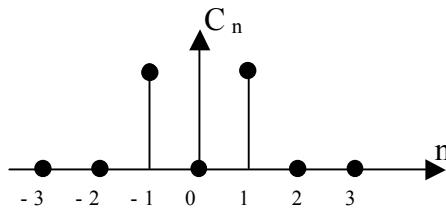
Exemple 1

Soit C_n une suite définie par:

$$C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad C_n = 0, \quad \text{si} \quad n \neq (1, -1).$$

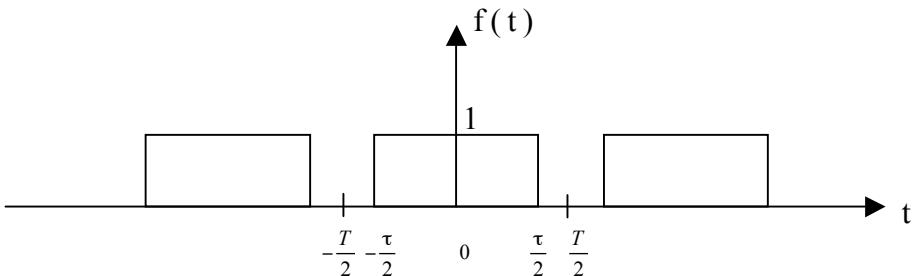
Déterminer $f(t)$?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+j2\pi\frac{nt}{T}} = \frac{A}{2} (e^{j2\pi\frac{t}{T}} + e^{-j2\pi\frac{t}{T}}) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$



Exemple 2

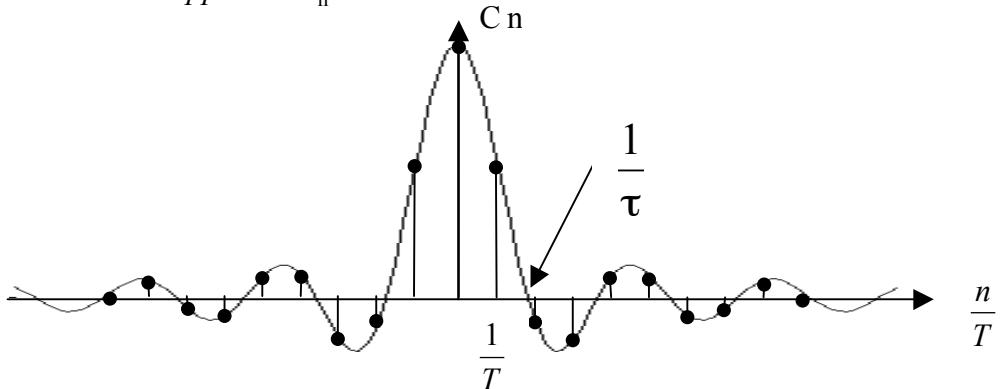
On considère le signal carré périodique $f(t)$ défini par :



Calculer son spectre.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi\frac{nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi\frac{nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \frac{\left[e^{-j2\pi\frac{nt}{T}} \right]^{\frac{\tau}{2}}_{-\frac{\tau}{2}}}{-2\pi j \frac{n}{T}} = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(2\pi\frac{n\tau}{2T}\right)}{\frac{\pi n}{T}} = \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\pi\frac{n\tau}{T}\right)$$

Le sinc constitue l'*enveloppe* des C_n

Remarques

- La décomposition en C_n introduit la notion de "fréquences négatives". Ces fréquences n'ont aucun sens physique, elles permettent uniquement de simplifier le calcul.
- Dans le cas où le signal $f(t)$ est réel, le spectre d'amplitude est symétrique car $C_n = C_{-n}^*$ d'où $|C_n| = |C_{-n}|$.

2° Relation de Parseval

La relation de Parseval montre qu'il y a "conservation" de la puissance P lorsque l'on passe d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle. En effet, on a :

$$P = \frac{1}{T} \int_{(T)} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Démonstration

$$P = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) f^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_n C_m^* \langle g_n(t), g_m^*(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Exemple

Dans le cas du signal $A \cos(\frac{2\pi t}{T})$ la puissance est $P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{A^2}{2}$

II - Transformée de FOURIER (TF).

1°) Définition

La transformation de Fourier est une extension de la décomposition en série de Fourier, mais pour des signaux quelconques. Intuitivement on peut considérer un signal non périodique comme un signal dont la période $T \rightarrow +\infty$. Ainsi la somme discrète et le facteur $1/T$ intervenant dans la décomposition en série de Fourier deviennent respectivement une intégrale, et une petite variation de fréquence df . On définit la Transformée de Fourier (TF), notée $X(f)$, du signal $x(t)$ par:

$$\boxed{\begin{aligned} TF \{x(t)\} &= X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ TF^{-1}\{X(f)\} &= x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df \end{aligned}}$$

$X(f)$ est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent, dans le domaine fréquentiel, de $-\infty$ à $+\infty$.

Notation

Dans la suite du cours, les signaux seront représentés par des minuscules x, s, \dots les TF correspondantes par des majuscules X, S, \dots Le temps par la variable t ou τ et la fréquence par f ou v

Définitions

- Spectre d'amplitude = $|X(f)|$
- Spectre (ou densité spectrale) de puissance = $|X(f)|^2$
- Spectre de phase = $\text{Arctg} \left(\frac{\text{Im } \{X(f)\}}{\text{Re } \{X(f)\}} \right) = \varphi(f)$

Remarques

- La symétrie entre la TF et la TF^{-1} montre l'existence d'une dualité entre temps et fréquences. Toutes les informations contenues dans le signal sont contenues dans le spectre.
- La dimension des variables t et f est la seconde et le Hertz. Cependant on peut aussi exprimer cela en mètre et mètre $^{-1}$, on parle alors de fréquences spatiales.

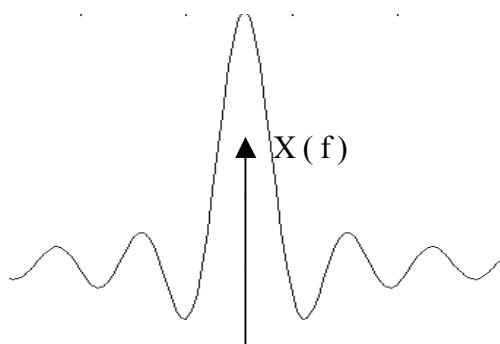
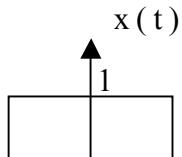
Exemple

Considérons la fonction porte :

$$x(t) = \prod_{\frac{\tau}{2}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt$$

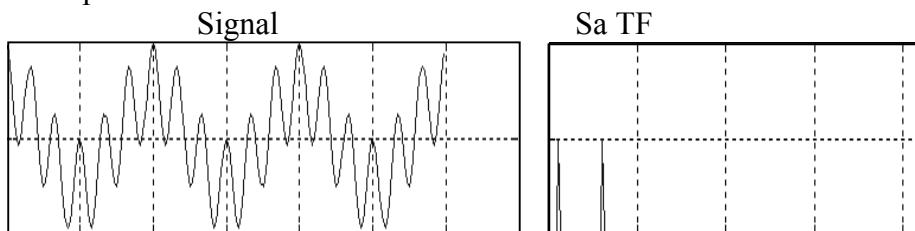
$$X(f) = \frac{\left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi f} = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \text{sinc}(\pi f \tau)$$



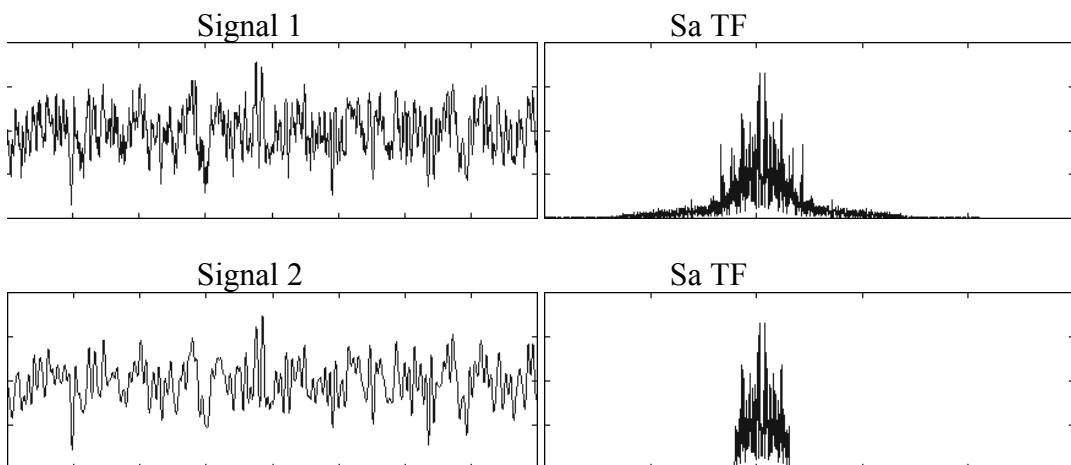
Remarques

- Il est souvent plus aisé d'interpréter certains phénomènes physiques dans le domaine fréquentiel. C'est l'intérêt essentiel de la TF.

Exemple :



La TF du signal est composée de 2 raies, on a donc la somme de deux sinus ou cosinus (il faudrait voir la phase).



On possède deux réalisations physiques du même phénomène. La première a des variations très brusques, on voit que son spectre possède des fréquence élevées, la deuxième a des variations plus lentes et, par conséquence, une gamme de fréquence plus petite.

2^e) Propriétés

- Linéarité** : TF et TF^{-1} sont des opérateurs linéaires.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda x(t) + y(t) \stackrel{\text{TF}}{\Leftrightarrow} \lambda . X(f) + Y(f)$$

- Similitude** : Une dilatation dans le domaine temporel correspond  une contraction dans le domaine fréquentiel

$$\forall a \in \mathbb{R}, x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Démonstration :

En posant $at = t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j2\pi ft} dt = \text{Signe}(a) \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)t'} dt' = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- Translations**

$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} \exp(-j2\pi f t_0) X(f)$
$X(f - f_0) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} \exp(+j2\pi f_0 t) x(t)$

Démonstration :

En posant $t - t_0 = t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Démonstration identique pour la translation de fréquence.

- Dérivation en temps**

$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow 2\pi j f X(f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (2\pi j f)^n X(f)$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= \frac{d^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right]}{d t^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d^n (e^{j2\pi f t})}{d t^n} df \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= \text{TF}^{-1} \left\{ (2\pi j f)^n X(f) \right\} \end{aligned}$$

- Dérivation en fréquence**

$\frac{dX(f)}{df} \xrightarrow[\text{TF}]{\text{TF}^{-1}} -2\pi j t x(t)$
$\frac{d^n X(f)}{df^n} \Leftrightarrow (-2\pi j t)^n x(t)$

- Parité**

Si $x(t)$ est un signal réel et pair alors son spectre $X(f)$ est réel et pair.

Démonstration :

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi f t} dt \xrightarrow[t' = -t]{\downarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi(-f)t} dt' \\ X(f) &= X(-f) \rightarrow X(f) \text{ pair} \\ X(f) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right]^* = X(f)^* \rightarrow X(f) \text{ réel} \end{aligned}$$

- Propriétés**

- Si $x(t)$ est réel et impair, son spectre $X(f)$ est imaginaire et impair.
- Si $x(t)$ est de carré sommable alors $X(f)$ est de carré sommable

Les transformées à connaître

$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$e^{+2\pi j f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-2\pi j f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2j} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$
$ I_T(t) $	$= \frac{1}{T} I_{\frac{T}{2}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$

Ces fonctions seront utilisées fréquemment, par la suite.

3° Relation de PARSEVAL

Cette relation est comparable à celle qui existe pour des signaux périodiques. Soit $x(t)$ un signal de carré sommable (ou à énergie finie) et qui admet $X(f)$ pour TF, on a :

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f') e^{j2\pi f't} df' \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi t(f'-f)} dt \right] df df' \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est égale à la TF de la fonction unité calculée à la fréquence $f-f$, soit $\delta(f-f)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f-f') df' \right] df$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f-f') df' = X^*(f)$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ est appelée *densité spectrale d'énergie* ou parfois, abusivement, *densité spectrale de puissance*.

Chapitre III - Convolution et Corrélation

I - Convolution.

1°) Définition

La convolution est un opérateur fondamental en traitement du signal. Il provient de la théorie des systèmes linéaires et invariants. Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre, c'est à dire la réponse du filtre lorsque l'entrée est un impulsion de Dirac:



La relation entre une entrée quelconque $x(t)$ et la sortie $y(t)$ du filtre est la convolution:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u) du$$

2°) Propriétés

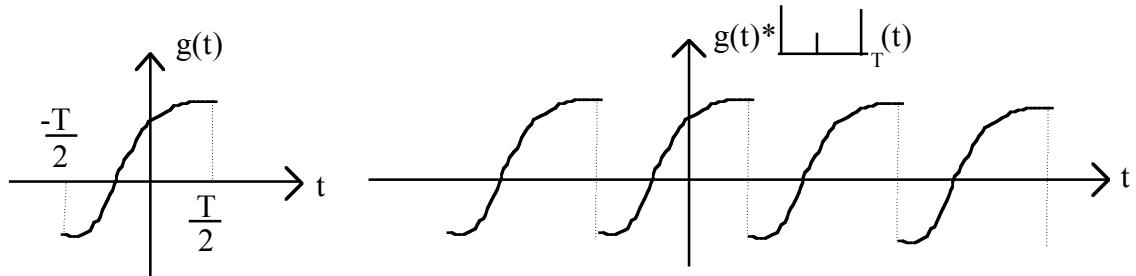
- *Commutativité* : $x(t)*g(t) = g(t)*x(t)$
- *Distributivité* : $[x(t) + s(t)]*g(t) = x(t)*g(t) + s(t)*g(t)$
- *Associativité* : $[x(t)*s(t)]*g(t) = x(t)*[s(t)*g(t)]$
- $\delta(t)$ élément neutre : $\delta(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)g(t-u) du = g(t)$
- $\delta(t-t_0)$ élément de translation :

$$\delta(t-t_0)*g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t_0)g(t-u) du = g(t-t_0)$$
- *Dérivation* : $(x(t)*y(t))' = x'(t)*y(t) = x(t)*y'(t)$
- On en déduit que la convolution par le peigne de Dirac $|_I|_T(t)$ a pour effet de périodiser le signal. En effet :

$$\begin{aligned} |_I|_T(t)*g(t) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \right] * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(t-kT)*g(t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t-kT) \end{aligned}$$

Exemple 1

Soit $g(t)$ un signal défini sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Le produit de convolution $|_I|_T(t)*g(t)$ restitue un signal périodique :



Exemple 2

Produit de convolution de Dirac:

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

3°) Théorème de PLANCHEREL

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux ayant pour transformée $X(f)$ et $Y(f)$. PLANCHEREL a démontré que :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{TF}(x(t) * y(t)) &= X(f)Y(f) \\ \text{TF}(x(t)y(t)) &= X(f) * Y(f) \end{aligned}}$$

Démonstration

$$\text{TF}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du \right] e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) e^{-j2\pi f t} dt \right] du$$

$$\text{TF}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] e^{-j2\pi f u} du = X(f)Y(f)$$

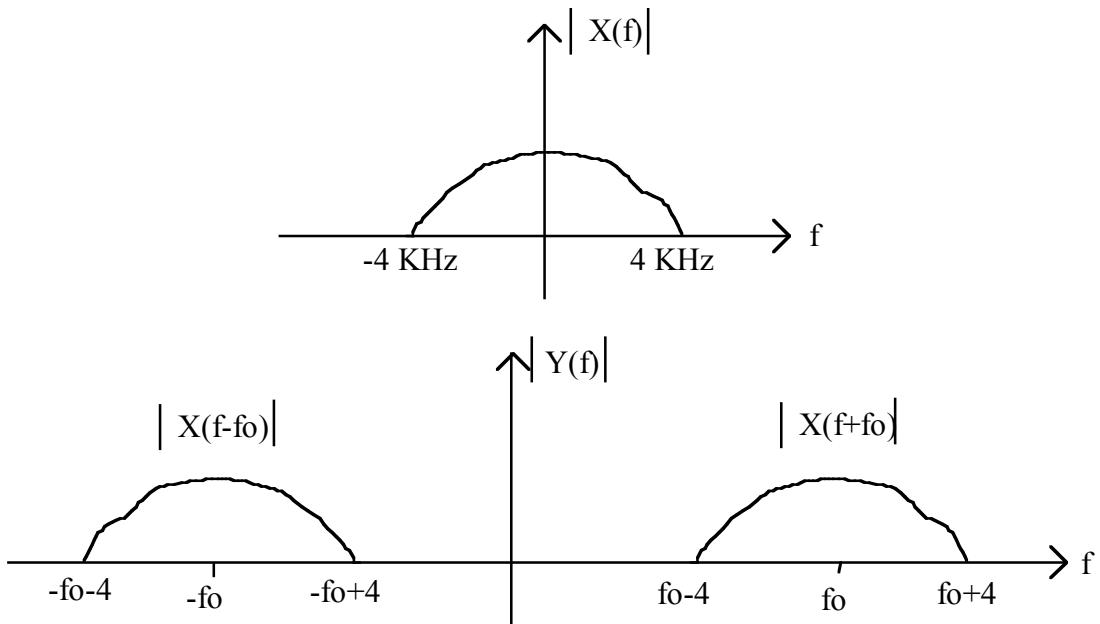
La seconde relation se démontre de la même façon.

4°) Application à la modulation

Ce théorème est utilisé dans de nombreuses applications. Prenons l'exemple du téléphone où le problème est de transmettre simultanément et sur un même canal de transmission un grand nombre de messages.

Considérons, dans un premier temps, un message $x(t)$ qui occupe la bande [-4KHz, 4KHz] (bande passante de la voix humaine définie par les Télécommunications). Comment translater son spectre $X(f)$ autour des fréquences f_0 et $-f_0$? Pour réaliser cela, il suffit de multiplier $x(t)$ par $\cos(2\pi f_0 t)$. D'après le théorème de PLANCHEREL on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) * \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] \\ y(t) &= x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow Y(f) = \frac{X(f - f_0)}{2} + \frac{X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

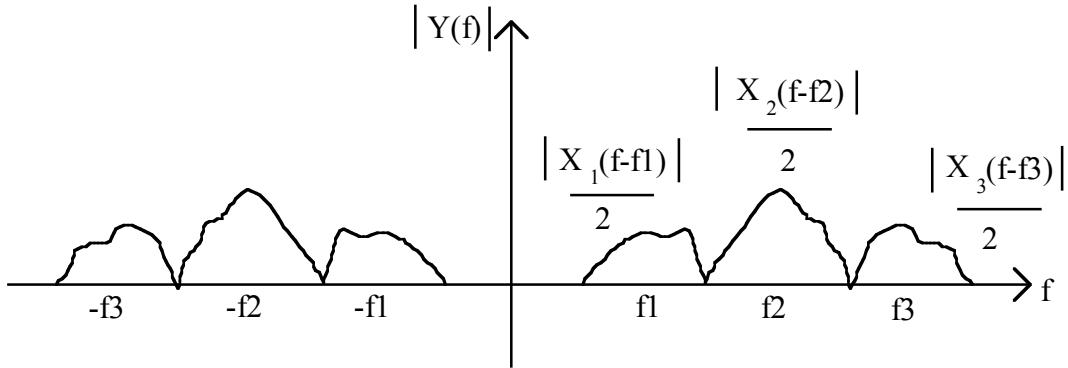


Cette opération est appelée modulation d'amplitude sans porteuse (MASP), bien que f_0 soit appelée porteuse. Il existe d'autres types de modulations (fréquence, phase,...). On pourra consulter sur ce point l'ouvrage de A.Spataru.

En conclusion, si l'on désire transmettre simultanément et sur une même ligne les signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, il suffit de construire le signal $y(t)$:

$$y(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_1 t) + \dots + x_n(t) \cos(2\pi f_n t)$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont les porteuses associées à $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.



En réception, pour retrouver le message $x_i(t)$, il faut filtrer $y(t)$ par un filtre passe-bande $[f_i - 4\text{KHz}, f_i + 4\text{KHz}]$ puis démoduler le signal de sortie du filtre (translation du spectre autour de l'origine des fréquences) afin que le message soit audible.

5°) Relation entre série de Fourier et TF

Soient $x(t)$ un signal périodique de période T , il peut être décomposé en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j \frac{n}{T} t}$$

En prenant la T.F. de cette expression, $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ (1)

Soit $x_T(t)$ le signal tronqué sur une période défini par :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$x(t)$ s'exprime comme une convolution de $x_T(t)$ et un peigne de Dirac :

$$x(t) = x_T(t) * |I_T|_T(t)$$

Soit, en prenant la T.F. :

$$X(f) = \frac{1}{T} X_T(f) |I_T|_T(f)$$

Soit encore :

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (2)$$

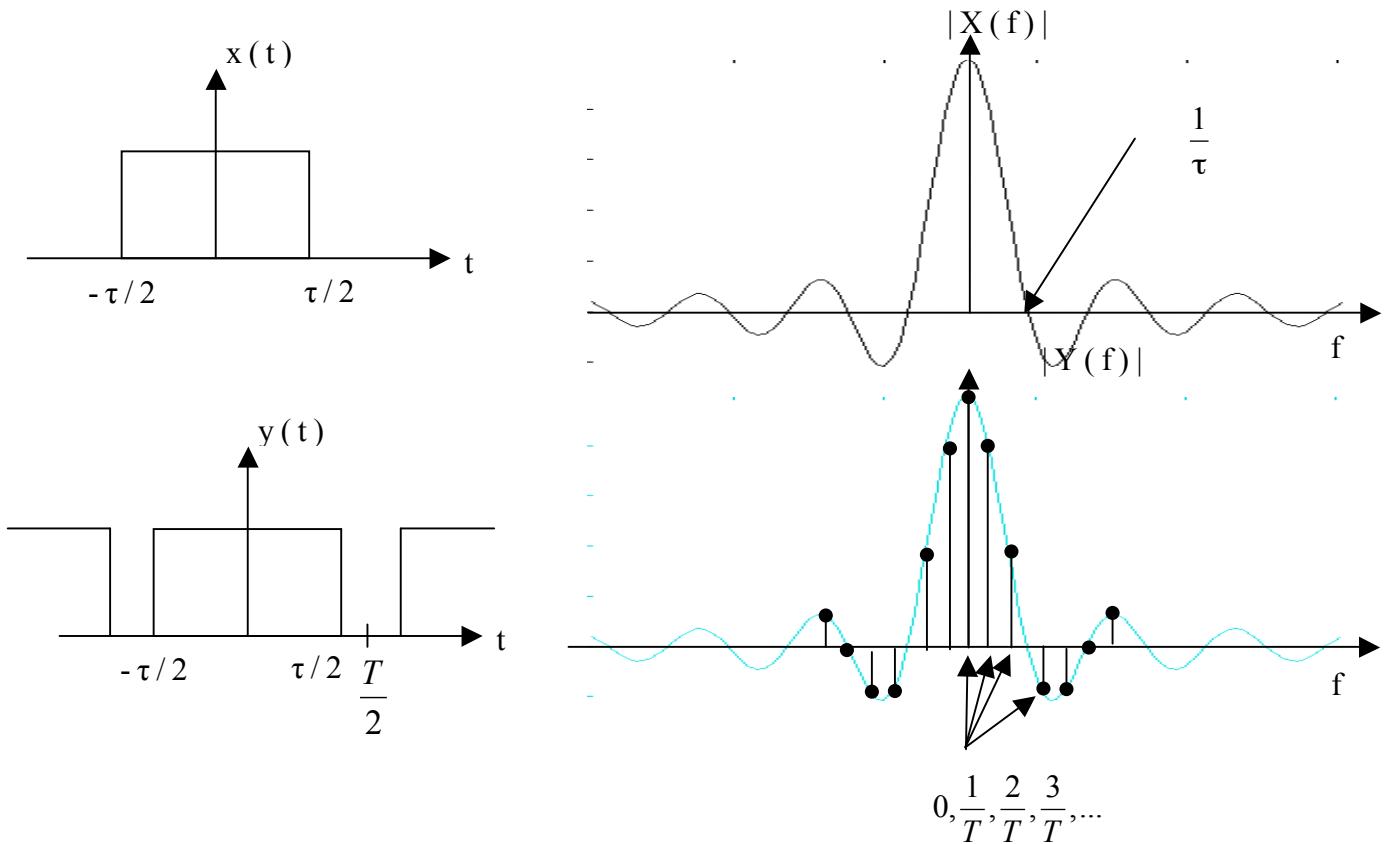
En comparant les expressions (1) et (2) on trouve :

$$C_n = \frac{X_T\left(\frac{n}{T}\right)}{T}$$

On remarque en étudiant l'équation (2) que quelque soit le signal périodique $x(t)$, son spectre est discret et a des valeurs non nulle tous les $1/T$. D'autre part, ces valeurs sont obtenues, à un facteur près, après échantillonnage du spectre du signal tronqué.

Exemple :

Soit $x(t) = \prod_{\tau/2}(t)$, sa transformée de Fourier $X(f) = \tau \sin c(\pi f \tau)$. Supposons maintenant que l'on périodise $x(t)$ tous les T pour obtenir le signal $y(t)$. La TF de $y(t)$ est, à un facteur près, une discréétisation de $X(f)$:



II – Corrélation

1°) Définition

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie, la fonction d'intercorrélation $C_{xy}(\tau)$ est définie par :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

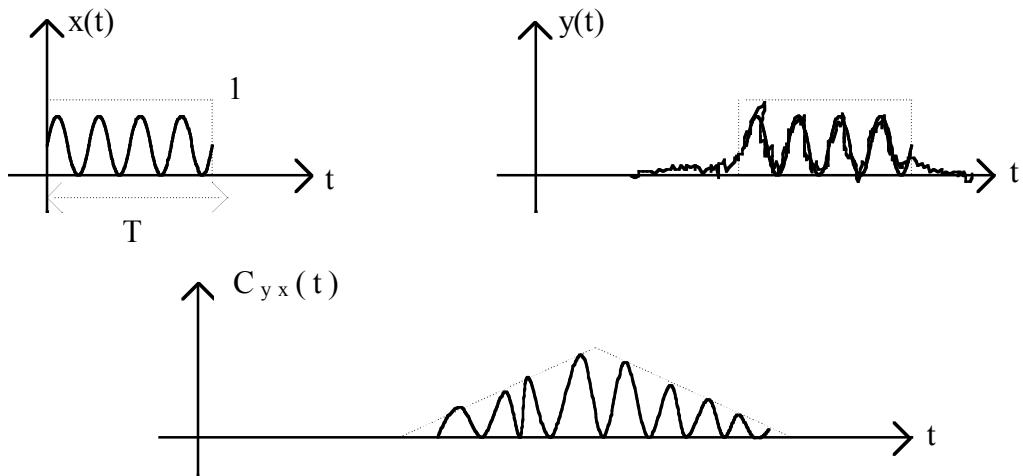
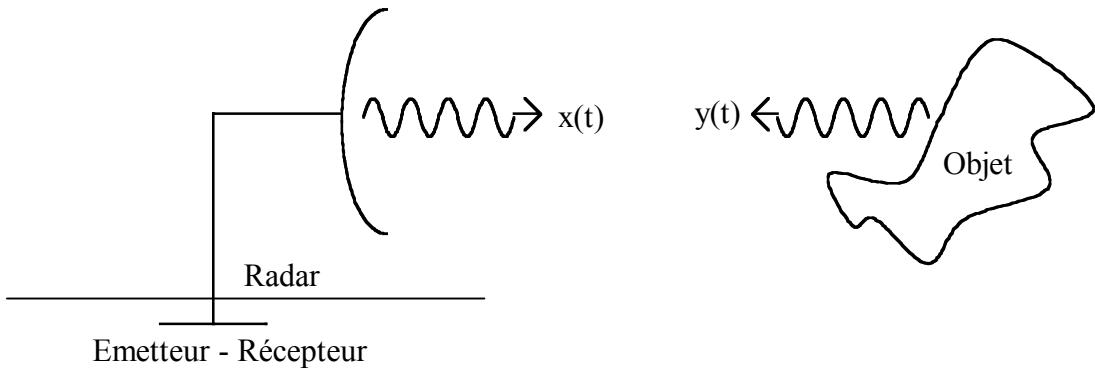
Ce produit scalaire mesure les similitudes en forme et position des signaux. Ces similitudes peuvent évoluer au cours du temps τ . On remarque de plus, que $C_{xy}(\tau)$ restitue l'énergie d'interaction entre les signaux $x(t)$ et $y(t - \tau)$.

Si $C_{xy}(\tau) = 0$ on dit que les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont décorrélés ou orthogonaux.

Si $x(t)=y(t)$, $C_{xx}(\tau)$ est appelé fonction *d'autocorrélation* du signal $x(t)$.

Exemple 1

Un radar émet une impulsion sinusoïdale $x(t)$ sur un objet fixe et reçoit le signal bruité $y(t)$.



Le maximum τ_0 donne la distance à l'objet. En effet si v_0 est la vitesse de propagation de l'onde on a :

$$d = \frac{v_0 \tau_0}{2} \leftarrow \text{trajet Aller et Retour}$$

2°) Théorème de Wiener-Kintchine

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie. La TF de la fonction d'intercorrélation est égale à la densité interspectrale d'énergie (ou densité spectrale mutuelle).

$$\boxed{\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = S_{xy}(f) \\ S_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t') e^{+j2\pi ft'} dt' \\ &= X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t') e^{-j2\pi ft'} dt' \right]^* = X(f)Y^*(f) \end{aligned}$$

Si $x(t)=y(t)$ alors $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$.

$S_{xx}(f)$ est la *densité spectrale d'énergie*. C'est une *fonction réelle positive*.

4°) Relation Convolution - Corrélation

Si $C_{xy}(\tau)$ est l'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $y(t)$ alors:

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Démonstration

$$\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f) = X(f) Y^*(f)$$

$$\text{d'où : } C_{xy}(\tau) = \text{TF}^{-1}\{S_{xy}(f)\} = x(t) * \text{TF}^{-1}\{Y^*(f)\}$$

$$\text{avec, } \text{TF}^{-1}\{Y^*(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) e^{j2\pi f\tau} df = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi f(-\tau)} df \right]^* = y^*(-\tau)$$

III - Cas des signaux à puissance moyenne finie.

Dans le cas où les signaux sont à puissance moyenne finie, la convolution s'écrit :

$$x(t) * y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(u)y(t-u) du \right\}$$

De même la corrélation est définie par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau) dt \right\}$$

Si de plus les $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques et de même période T_0 , on peut simplifier les expressions précédentes:

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(u)y(t-u) du \\ C_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t-\tau) dt \end{aligned}$$

IV - Analyse spectrale.

L'analyse spectrale des signaux tient une place importante dans un grand nombre d'applications (télécommunications, géophysique, biochimie,...). On peut citer comme exemple, l'analyse spectrale de signaux de parole qui fournit une indication sur le sexe du locuteur. En effet, les signaux de parole sont en grande partie voisins (quasi-périodiques). La hauteur de la fréquence fondamentale est d'environ 100-150 Hz pour un homme, 150-250 Hz pour une femme et peut aller jusqu'à 400 Hz pour un enfant.

L'analyse d'un signal ne peut s'effectuer que sur une durée finie $[t_0, t_1]$. Si $x(t)$ est le signal initial, le signal observé $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = x(t)f(t)$$

où $f(t)$ est nulle en dehors de $[t_0, t_1]$. $f(t)$ est appelée fenêtre d'observation ou fonction de pondération.

La fenêtre idéale est celle qui ne modifiera pas le spectre $X(f)$ du signal $x(t)$, c'est à dire telle que :

$$S(f) = X(f) * F(f) = X(f)$$

on en déduit :

$$F(f) = \delta(f) \Rightarrow f(t) = 1$$

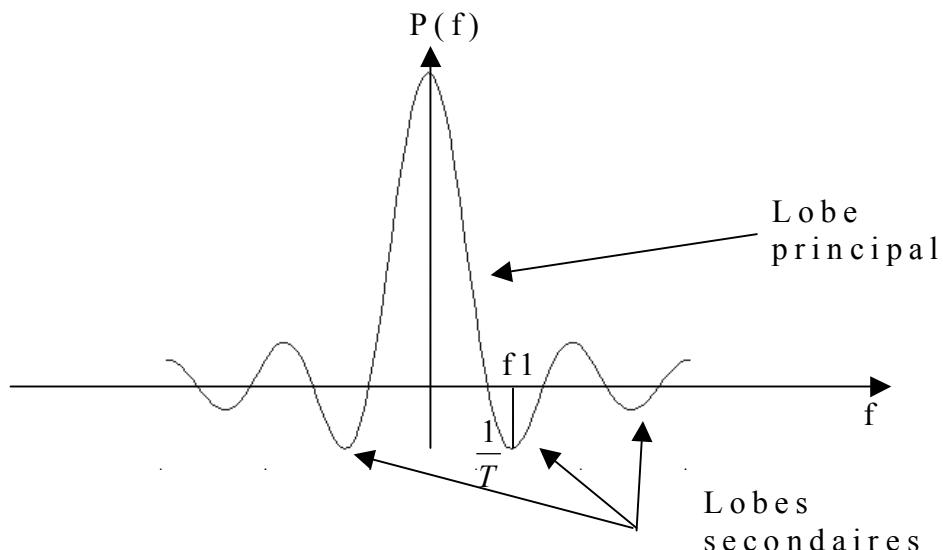
La fonction unité ($f(t) = 1$) définie sur $]-\infty, +\infty[$ n'est pas une fenêtre. On en déduit cependant que la transformée de Fourier d'une fenêtre "satisfaisante", c'est à dire modifiant peu $X(f)$, doit s'approcher du pic de Dirac.

a) La fonction Porte $\prod_{\frac{T}{2}}(t)$,

Elle est aussi appelée fenêtre naturelle et fut la première utilisée. Sa transformée $P(f)$ est :

$$P(f) = \text{TF}\left[\prod_{\frac{T}{2}}(t)\right] = T \text{sinc}(\pi f T)$$

$P(f)$ est constitué d'un lobe principal et de lobes secondaires. Comme on le verra, toutes les transformées de Fourier de fenêtres de pondération possèdent un lobe principal et des lobes secondaires.



Pour restituer au mieux le spectre $X(f)$, il faut que le lobe principal soit le plus étroit possible. De plus pour éviter une dispersion (leakage) de l'énergie vers des fréquences éloignées, il faut que les lobes secondaires soient faibles.

Pour comparer les différentes fenêtres on utilise essentiellement deux critères:

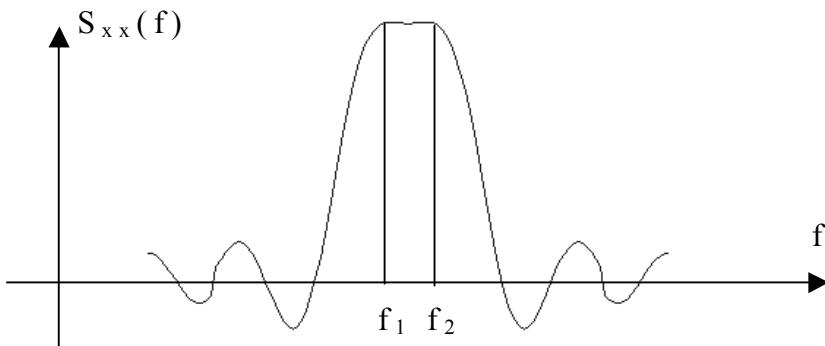
- La largeur de Bande à : B
- L'amplitude relative du 1^{er} lobe secondaire : Q

$$Q = 20 \log_{10} \left| \frac{P(f_1)}{P(0)} \right|$$

Où $|P(f_1)|$ est l'amplitude maximale du 1^{er} lobe secondaire.

Dans le cas de la fenêtre naturelle on trouve $B = \frac{1}{T}$ et $Q = -13 \text{ dB}$.

B définit la résolution ou pouvoir séparateur du spectre. Si $X(f)$ est constitué de deux raies aux fréquences très proches f_1 et f_2 ($|f_1 - f_2| < B$), il ne sera pas possible de les distinguer.

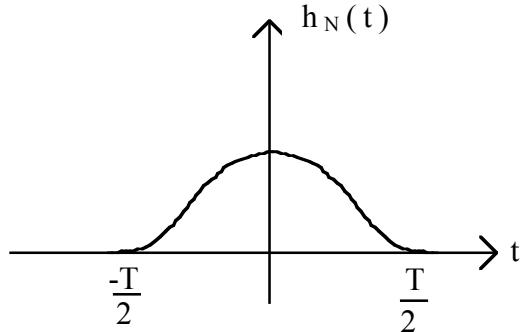


La fenêtre naturelle est peu utilisée, en analyse spectrale, car elle présente des lobes secondaires de forte amplitude. Un très grand nombre de fenêtres ont été proposées. Celles ci sont généralement choisies en fonction de l'application.

b) Fenêtre de Hanning :

Elle est définie par :

$$\begin{cases} h_N(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{2\pi t}{T}) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ h_N(t) = 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



$$H_N(f) = \frac{1}{2} P(f) + \frac{1}{4} P\left(f + \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4} P\left(f - \frac{1}{T}\right) \quad \text{avec : } P(f) = TF\left\{\prod_{\frac{T}{2}}(t)\right\}$$

$$\boxed{B = \frac{2}{T}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = -32 \text{ dB}}$$

c) Fenêtre de Hamming :

R.W. Hamming a étudié une famille de fonctions définies par:

$$\begin{cases} h_m(t) = \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ h_m(t) = 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

La valeur de α qui minimise Q est $\alpha = 0,54$. On a alors $\boxed{B = \frac{2}{T}}$ et $\boxed{Q = -52 \text{ dB}}$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve la fenêtre de Hanning.

V - Filtrage.

1°) Réponse incicielle

Soit S un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soient $x(t)$ l'entrée de ce filtre et $y(t)$ la sortie :

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \text{et} \quad Y(f) = H(f)X(f)$$

On appelle réponse indicielle, la réponse du filtre à un échelon.

$$y_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t) \text{ avec } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La réponse indicielle s'obtient en intégrant la réponse impulsionnelle. En effet :

$$y_{\text{ind}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} h(t - \tau) d\tau$$

$$y_{\text{ind}}(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'$$

d'où :

$$\boxed{y_{\text{ind}}(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'}$$

2°) Définitions :

- $H(f)$ est la fonction de transfert
- $H(0)$ est le gain statique du filtre.
- Un filtre est dit réalisable si sa réponse impulsionnelle est causale ($h(t) = 0$, $\forall t < 0$). Ceci traduit le fait qu'il ne peut y avoir d'effets avant la cause.
- On appelle réponse harmonique, la réponse du filtre à une entrée de type :

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\text{alors : } y(t) = e^{j2\pi f_0 t} * h(t)$$

$$\text{d'où : } Y(f) = \delta(f-f_0)H(f) = H(f_0) \delta(f-f_0)$$

soit, après transformation inverse :

$$y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} = H(f_0) x(t)$$

$$y(t) = |H(f_0)| e^{j\varphi(f_0)} x(t)$$

Cette relation est intéressante pour l'identification des systèmes. En effet, lorsque le filtre est inconnu (Boite Noire), il suffit de faire varier f_0 et d'observer la sortie $y(t)$ pour connaître les caractéristiques fréquentielles du filtre $(|H(f_0)|, \varphi(f_0))$.

3°) Dérivation :

Soit $y(t)$ la sortie d'un filtre, de réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$\boxed{y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)}$$

Démonstration

$$\text{TF}\{y'(t)\} = Y(f) \cdot 2\pi j f = 2\pi j f \cdot X(f) \cdot H(f)$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \text{TF}^{-1}\{2\pi j f \cdot X(f)\} H(f) \\ \text{TF}^{-1}\{2\pi j f \cdot H(f)\} X(f) \end{array} \right\} = x'(t) * h(t) = h'(t) * x(t)$$

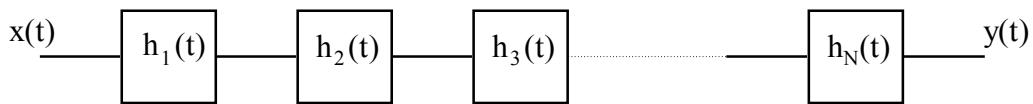
4°) Stabilité

Un filtre est stable si pour toute entrée bornée, la sortie reste bornée. On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit stable est que sa réponse impulsionnelle soit absolument intégrable :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \text{ existe.}}$$

5°) Filtres cascades :

Considérons N filtres F_1, F_2, \dots, F_N de réponse impulsionnelle $h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)$.



$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t) \text{ et } Y(f) = X(f) \prod_{i=1}^N H_i(f)$$

6°) Fréquence de coupure :

La définition de la fréquence de coupure F_c est :

- en Traitement du signal
 F_c est telle que : $\forall f > F_c ; H(f) = 0$.
- en Automatique
 F_c est telle que : $|H(F_c)| = 1$.
- En Electronique :

$$F_c \text{ est telle que : } |H(F_c)|^2 = \frac{\text{Max}(|H(f)|^2)}{2}.$$

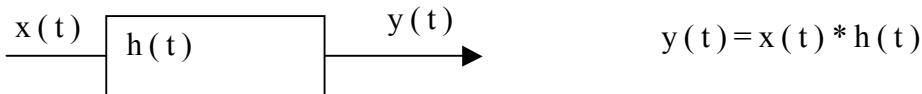
VI - Déconvolution.

Il est fréquent de se trouver devant le problème d'isoler un signal utile lorsque celui-ci est combiné par convolution avec d'autres signaux. On peut citer l'exemple d'un signal physique qui ne peut être observé qu'à travers un système linéaire (qui peut être l'instrument de mesure lui-même). Deux méthodes sont principalement utilisées pour résoudre ce problème :

- Le filtrage inverse : le signal est filtré par un filtre dont la réponse fréquentielle est l'inverse de la transformée de Fourier du signal perturbateur. Ceci impose d'avoir une connaissance précise et détaillée du signal indésirable, ce qui n'est pas toujours le cas.
- Utilisation de systèmes homomorphiques convolutifs.

1. Déconvolution par filtrage inverse

Considérons le système de mesure suivant :



On n'a pas accès à $x(t)$ directement, mais à $y(t)$ (réponse du signal au banc de mesure). Le problème consiste alors à retrouver $x(t)$ à partir de $y(t)$, $h(t)$ étant supposé connu dans un premier temps.

En faisant la TF de $y(t)$, on a $Y(f) = X(f)H(f)$, soit,

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)}$$

Il suffit alors de prendre la TF^{-1} de $X(f)$ pour retrouver $x(t)$.



Le problème de cette méthode est que $H(f)$ intervient dans une division. Une petite imprécision sur $H(f)$ entraîne donc une forte variation de $X(f)$. D'autre part, la méthode n'est pas valide lorsque $H(f)=0$ pour certaines fréquences (division par 0).

Détermination de $h(t)$ ou $H(f)$

Pour déterminer $h(t)$, il suffit d'envoyer au système un message $x(t)$ parfaitement connu et occupant la plus grande gamme de fréquence possible (l'idéal serait d'envoyer un bruit blanc). On se ramène alors dans la même configuration que précédemment ($y(t)=x(t)*h(t)$) sauf que dans ce cas, $x(t)$ est connu et on cherche à déterminer $h(t)$.

2. Déconvolution par utilisation de systèmes homomorphiques

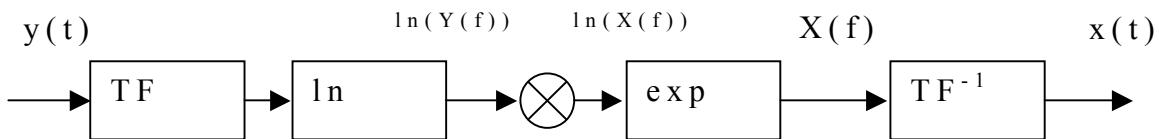
On se place dans le même cas que précédemment, à savoir, $y(t)=x(t)*h(t)$.

Dans le domaine de Fourier, on a $Y(f)=X(f).H(f)$ et, en prenant le logarithme complexe,

$$\ln(Y(f)) = \ln(X(f)) + \ln(H(f))$$

Soit, $\ln(X(f)) = \ln(Y(f)) - \ln(H(f))$

On fait alors une exponentielle complexe pour retrouver $X(f)$, puis une TF^{-1} pour obtenir $x(t)$.



Cette méthode est beaucoup moins sensible aux imprécisions sur $H(f)$ que la précédente (il intervient cette fois ci au niveau d'une soustraction).

Logarithme complexe

$Y(f)$ est complexe. On peut donc le mettre sous la forme :

$$Y(f) = r e^{j\Phi} \quad \text{avec} \begin{cases} r : \text{module de } Y(f) \\ \Phi : \text{phase de } Y(f) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ln\{Y(f)\} &= \ln(r e^{j\Phi}) = \ln(r) + j\Phi \\ &= \ln|Y(f)| + j \arg\{Y(f)\} \end{aligned}$$

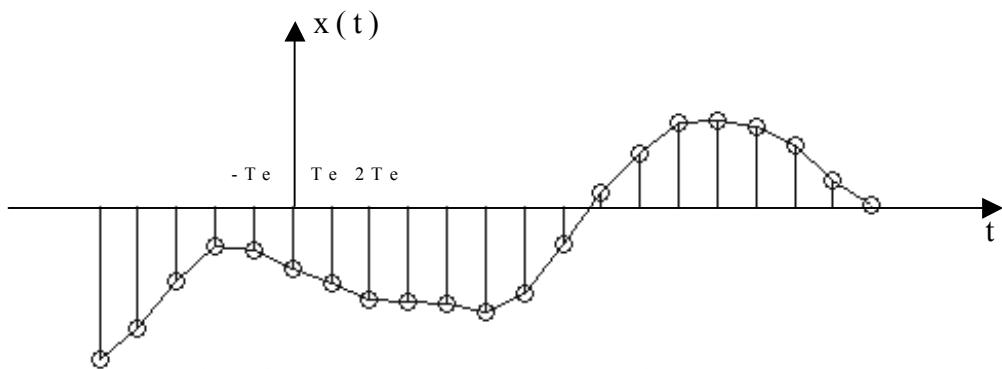
Chapitre IV - Echantillonnage

I - Echantillonnage idéal.

L'évolution constante, observée depuis 15 ans dans le domaine des circuits intégrés, a transformé le monde des applications. En effet, la puissance des calculateurs, et plus particulièrement des processeurs spécialisés en traitement du signal, permet de traiter numériquement un grand nombre de problèmes, rendant obsolètes certains traitements analogiques. De plus le numérique autorise des opérations interdites en analogique (Filtrage Non-Causal, modulation temporelle, ...).

Cette numérisation du signal nécessite dans un premier temps l'échantillonnage du signal puis sa quantification.

- L'échantillonnage correspond à une discréttisation en temps du signal.
- La quantification permet d'associer une valeur numérique à l'échantillon prélevé. C'est une discréttisation en amplitude. Les valeurs discrètes obtenues sont codées sur un ou plusieurs bits.



L'objectif du traitement numérique du signal est d'extraire les informations contenues dans le signal analogique initial $x(t)$. Il est donc impératif de conserver ces informations après échantillonnage. Pour cela nous étudierons les différentes opérations temporelles et fréquentielles effectuées.

Soient $x(t)$ le signal analogique et $x_e(t)$ le signal échantillonné. Soient T_e la période d'échantillonnage et $F_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage. Le signal $x_e(t)$ est obtenu par multiplication de $x(t)$ par un peigne de Dirac.

$$x_e(t) = x(t) \lfloor I \rfloor_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k T_e)$$

d'où :

$$\boxed{x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t-k T_e)}$$

Pour ne perdre aucune information, il faut que cette transformation $(x(t) \rightarrow x_e(t))$ soit réversible.

Déterminons le spectre $X_e(f)$ du signal $x_e(t)$:

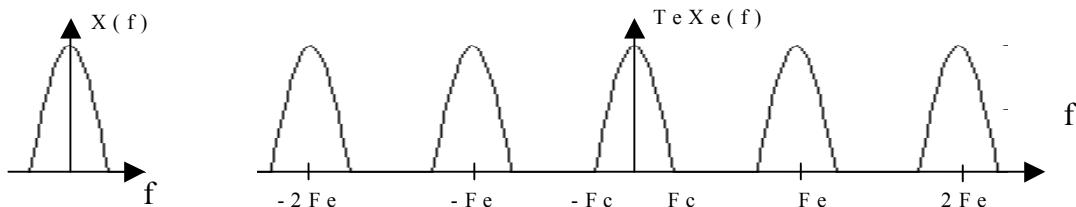
$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF\{x_e(t)\} = TF\{x(t) \lfloor I \rfloor_{T_e}(t)\} = X(f) * TF\{\lfloor I \rfloor_{T_e}(t)\} \\ &= X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right)}$$

Cette relation montre que $X_e(f)$ est obtenue, à un facteur près ($1/T_e$), par une simple périodisation en fréquence du spectre $X(f)$. Le spectre est reproduit tous les $F_e = 1/T_e$. Cette périodisation peut s'effectuer suivant trois cas de figures:

1^{er} cas

$X(f)$ est à support borné, sa fréquence de coupure est F_c et $F_e > 2F_c$.

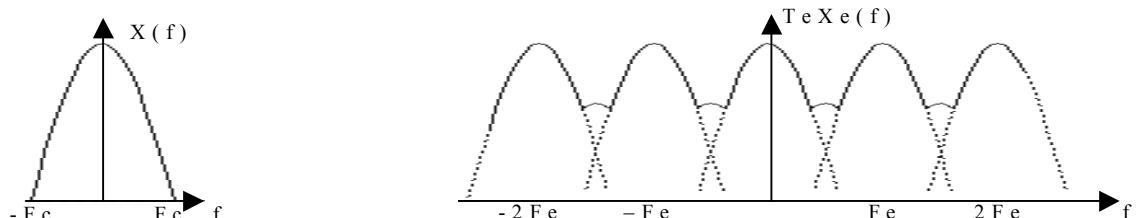


On constate qu'au prix d'un simple filtrage passe-bas idéal, de fréquence de coupure $F_e/2$, on retrouve $\underline{X(f)}$, donc $x(t)$:

Les informations initiales ne sont pas perdues.
La transformation $(x(t) \rightarrow x_e(t))$ est réversible.
On a correctement échantillonné le signal.

2^{ème} cas

$X(f)$ est à support borné, sa fréquence de coupure est F_c et $F_e < 2F_c$



Il est clair que le spectre initial $X(f)$ est déformé. On ne peut pas obtenir $X(f)$ à partir de $X_e(f)$, donc :

Les informations initiales sont perdues.
La transformation est irréversible.
On a mal échantillonné le signal.

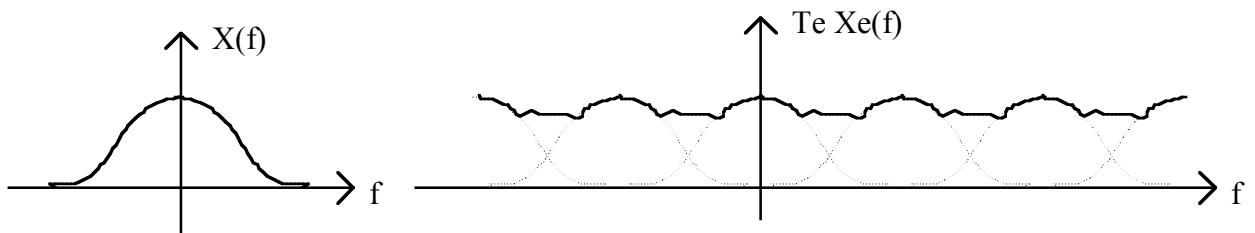
Remarque :

Si après l'échantillonnage les spectres translatés $X(f)$ se chevauchent, on dit qu'il y a repliement spectral, recouvrement spectral ou encore "aliasing".

3^{ème} cas

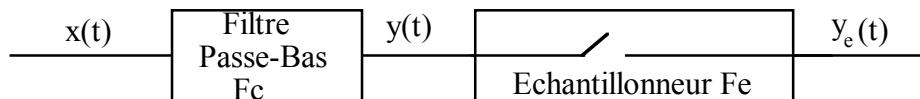
$X(f)$ est à support non-borné.

Dans ce cas, il est évident qu'il y aura repliement spectral.



Il apparaît donc impossible d'échantillonner un tel signal.

En pratique, on filtrera le signal $x(t)$ par un filtre passe bas de fréquence de coupure F_c , puis on échantillonnera le signal de sortie du filtre à une fréquence $F_e > 2 F_c$.



Théorème de Shannon

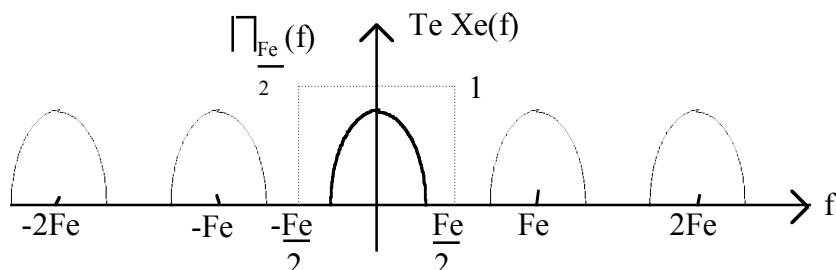
Un signal $x(t)$ à spectre $X(f)$ borné sur l'intervalle $[-F_c, F_c]$ est correctement échantillonné si $F_e > 2 F_c$.

Exemple : $x(t) = \cos(2\pi F_o t) \Rightarrow F_c = F_o$ et $F_e > 2 F_o$.

II - Reconstruction du signal.

Pour retrouver $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on supposera que le signal a été correctement échantillonné ($F_e > 2 F_c$). Déterminer $x(t)$ revient à isoler $X(f)$ dans $X_e(f)$. Ceci est possible en multipliant $X_e(f)$ par une porte en fréquence $\prod_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}}(f)$ de hauteur T_e :

$$X(f) = T_e X_e(f) \prod_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}}(f)$$



$$\begin{aligned} x(t) &= T F^{-1} \{X(f)\} = T_e T F^{-1} \left\{ X_e(f) \prod_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}}(f) \right\} = T_e x_e(t) * T F^{-1} \left\{ \prod_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}}(f) \right\} \\ &= T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * F_e \operatorname{sinc}(\pi F_e t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) (\delta(t - kT_e) * \operatorname{sinc}(\pi F_e t)) \end{aligned}$$

d'où :

Texte

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}(\pi F_e (t - kT_e))$$

C'est la formule d'interpolation de Shannon.

Remarques :

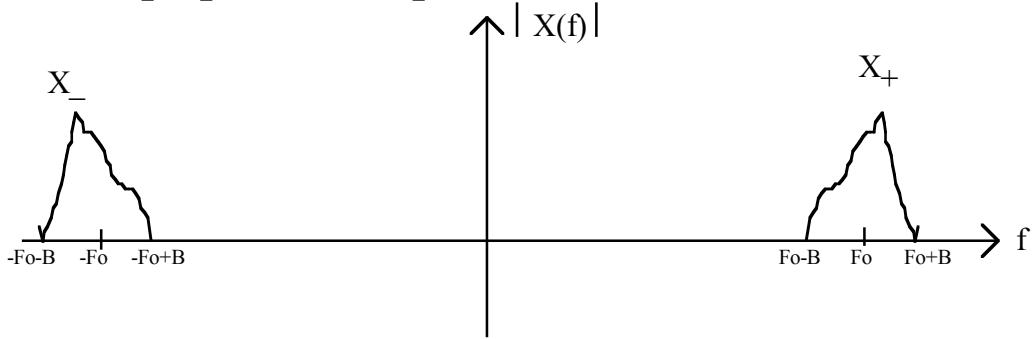
- Cette formule n'est pas utilisable en temps réel car elle nécessite la connaissance à l'instant t de tous les échantillons ($-\infty \rightarrow +\infty$).
- Sur-échantillonner n'apporte aucune information supplémentaire.

- Les fonctions $s_n(t) = \text{sinc}(\pi F_e(t - nT_e))$ sont orthogonales. On en déduit que toute fonction à spectre borné $[-F_c, F_c]$ peut être décomposée sur la base $\{s_n(t)\}$.

III - Sous-échantillonnage.

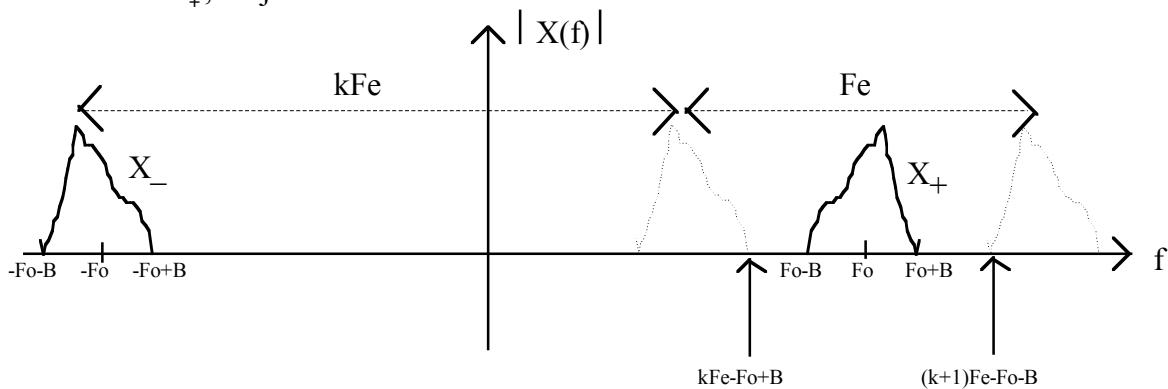
On appelle sous-échantillonnage, l'échantillonnage d'un signal à une fréquence inférieure à celle de Shannon, c'est à dire telle que $F_e < 2 F_c$. **Ceci n'est possible que dans le cas suivant.**

Soit $x(t)$ un signal dont le spectre est nul en dehors des bandes $[-F_0 - B, -F_0 + B] \cup [F_0 - B, F_0 + B]$. (Ex: Modulation d'amplitude de porteuse F_0).



On suppose que $F_0 \gg B$, le signal est dit à bande étroite. Selon Shannon, on devrait échantillonner $x(t)$ avec une fréquence $F_e > 2(F_0 + B)$. Cependant, on peut exploiter la nullité des spectres entre les bandes $[-F_0 - B, -F_0 + B]$ et $[F_0 - B, F_0 + B]$, en translatant les motifs X_- et X_+ dans cette bande et en prenant soin que X_+ et X_- ne se chevauchent pas.

Supposons que la $k^{\text{ième}}$ translatée de X_- précède X_+ , sans recouvrement, et que la $k + 1^{\text{ième}}$ translatée suive X_+ , toujours sans recouvrement :



Les bornes de ces translatées doivent vérifier les relations :

$$\begin{cases} kF_e - F_0 + B < F_0 - B \\ (k+1)F_e - F_0 - B > F_0 + B \end{cases}$$

Soit pour F_e , la condition :
$$\frac{2(F_0 + B)}{k+1} < F_e < \frac{2(F_0 - B)}{k}$$

Il faut de plus que :
$$\frac{2(F_0 + B)}{k+1} < \frac{2(F_0 - B)}{k}$$

On obtient la condition suivante sur k :

$$\boxed{k < \frac{F_0 - B}{2B}} \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Chapitre V - Transformée de Fourier Discrète (T.F.D)

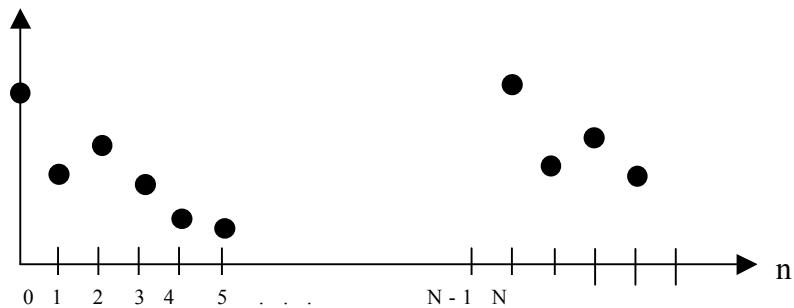
I - Transformée de Fourier Discrète (TFD).

1°) Définition

La transformée de Fourier discrète, sur N points, du signal discret $x(k)$ est définie par :

$$T F D_N \{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Le pas en fréquence est $\Delta f = F_e/N$. Δf est l'écart entre deux raies du spectre. On a ainsi la valeur de la TFD que pour les fréquences multiples de F_e/N . Δf est appelé résolution ou pas en fréquence.



Calculons $X(n+N)$:

$$\begin{aligned} X(n+N) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} e^{-j2\pi k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = X(n) \end{aligned}$$

Ceci est logique : le signal de départ est échantillonné avec la fréquence d'échantillonnage F_e . Son spectre est donc périodique tous les F_e . Le pas en fréquence étant $\Delta f = F_e/N$, la fréquence F_e correspond à N points. On a donc :

$$X(n) = X(n+N)$$

Remarque

Les notations $x(k)$ (échantillon temporel) et $X(n)$ (échantillon fréquentiel) sont abusives. On devrait écrire :

$$\begin{cases} x(kT_e) \\ X(n \Delta f) \end{cases} \text{ avec } \Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T}$$

2°) TFD inverse

La transformée de Fourier discrète inverse, sur N points est définie par :

$$x_l(k) = T F D_N^{-1} \{X(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

II - Convolution discrète.

Soient $x(k)$ et $y(k)$ deux signaux périodiques sur N points. Le produit de convolution de ces signaux est donné par :

$$z(k) = x(k) * y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k - i)$$

Il est périodique de période N .

On peut montrer que la TFD de $z(k)$ est définie par :

$$Z(n) = T F D \{z(k)\} = X(n) Y(n)$$

IV - Corrélation.

Pour les mêmes signaux x et y que précédemment,

$$C_{xy}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y^*(i - k).$$

Elle est périodique de période N .

On peut montrer dans ce cas que :

$$S_{xy}(n) = T F D_N \{C_{xy}(k)\} = X(n) Y^*(n)$$

Chapitre VI Transformée en Z

I - Définitions

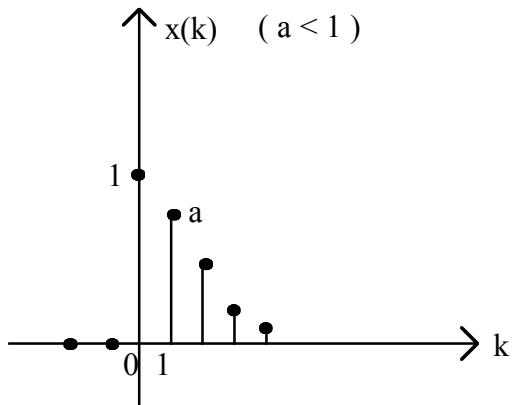
La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites. Cette transformation est comparable à la Transformée de Laplace bilatérale qui généralise la TF dans le cas de systèmes continus.

Soit $x(k)$ un signal discret. Sa transformée en Z est donnée par :

$$TZ \{x(k)\} = Z[x(k)] = X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k}$$

où Z est une variable complexe.

Exemple : Considérons le signal $x(k)$ défini par $x(k) = a^k u(k)$, où a est un réel positif et $u(k)$ l'échelon unité.



X(Z) s'écrit :

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a Z^{-1})^k$$

$$X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \quad \text{si } |aZ^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |Z|$$

Quelques TZ importantes :

$x(k) = u(k) = \text{échelon}$	$X(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$
$x(k) = a^k u(k)$	$X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$
$x(k) = \delta(k)$	$X(Z) = 1$
$x(k) = \Pi_N \left(k - \frac{N}{2} \right)$	$X(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1}} ; 0 < Z < +\infty$

II - Propriétés

1°) Linéarité

Soient $X(Z)$ et $Y(Z)$ les TZ des suites $x(k)$ et $y(k)$. La TZ est linéaire.

$$\boxed{\forall \lambda \in C \quad \lambda x(k) + y(k) \xrightarrow{T.Z} \lambda X(Z) + Y(Z)}$$

2°) Retard

Si $x(k)$ a pour transformée $X(Z)$ alors :

$$Z[x(k - k_0)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k - k_0) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-(k+k_0)}$$

d'où : $\boxed{Z[x(k - k_0)] = Z^{-k_0} X(Z)}$

3°) Dérivation de la TZ :

La dérivée de $X(Z)$ par rapport à Z s'écrit :

$$\frac{d X(Z)}{d Z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k x(k) Z^{-k-1} = -Z^{-1} TZ \{k x(k)\}$$

d'où : $\boxed{k x(k) \xrightarrow{T.Z} -Z \frac{d X(Z)}{d Z}}$

4°) Convolution :

Soit $y(k)$ le produit de convolution des signaux $x(k)$ et $h(k)$:

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(k - i)$$

$$\boxed{Y(Z) = H(Z)X(Z)}$$

III - Transformée en Z inverse

1°) Division polynomiale :

Si $X(Z)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle, alors la division polynomiale restitue directement les échantillons $x(k)$.

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

Exemple

Prenons, par exemple, $X(Z) = \frac{1}{1 - a Z^{-1}}$

En effectuant la division polynomiale on trouve :

$$\begin{array}{c} 1 \\ a Z^{-1} \\ a^2 Z^{-2} \\ a^3 Z^{-3} \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 - a Z^{-1} \\ \hline 1 + a Z^{-1} + a^2 Z^{-2} + a^3 Z^{-3} + \dots \end{array} \right.$$

Par récurrence on obtient $x(k) = a^k u(k)$

2°) Décomposition en éléments simples :

Soit $X(Z)$ une fraction rationnelle qui s'écrit :

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{Z - Z_i}$$

On retrouve $x(k)$ par TZ inverse des éléments $\frac{a_i}{Z - Z_i}$:

$$TZ^{-1} \left[\frac{a_i}{Z - Z_i} \right] = a_i Z_i^k u(k)$$

Exemple

$$X(Z) = \frac{1}{Z^2 - 3Z + 2} = \frac{1}{(Z - 1)(Z - 2)} = \frac{1}{Z - 2} - \frac{1}{Z - 1}$$

$$\text{d'où } X(Z) = Z^{-1} \left[\frac{1}{1 - 2Z^{-1}} - \frac{1}{1 - Z^{-1}} \right] = Z^{-1} \left[TZ \{ 2^k u(k) - u(k) \} \right]$$

$$Z^{-1} \text{ est l'opérateur retard d'où } x(k) = [2^{k-1} - 1] u(k - 1)$$

IV - Relation entre la TF-TZ

Soit $x(t)$ un signal discret défini non-nul aux instants kT_e :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

$$\text{On en déduit : } X(f) = \text{TF}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-2\pi jfkT_e}$$

$$\text{ou encore : } X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) (e^{2\pi jfT_e})^{-k} \quad (1)$$

Soit $X(Z)$ la TZ de la suite $x(kT_e)$ on a:

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) Z^{-k} \quad (2)$$

En comparant les équations (1) et (2), on trouve :

$$X(f) = X(Z) \Big|_{Z = e^{2\pi j f T_e}}$$

La TF est donc obtenue en parcourant la TZ sur le cercle unité.

Remarque: En posant $Z = e^{2\pi j(f + \frac{1}{T_e})T_e}$, on retrouve la relation $X(f + \frac{1}{T_e}) = X(f)$.