Programación Avanzada

10 de Mayo 2021

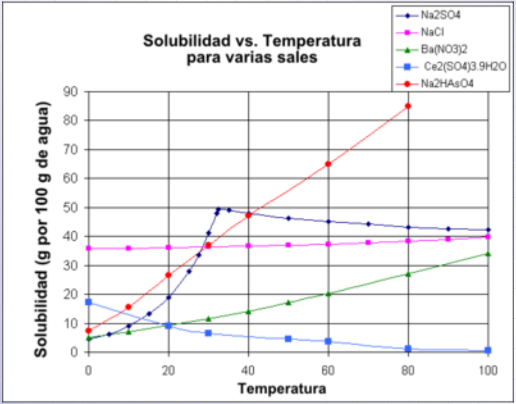
Ajuste de Curvas: Interpolación de Lagrange

Bruno M. Breggia

UNER - Facultad de Ingeniería

1 Interpolación

Interpolación

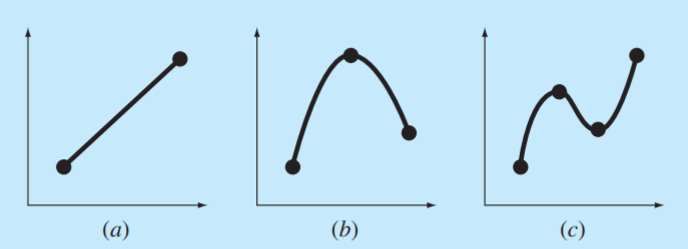


Interpolación en química

Interpolación de Lagrange

Interpolamos con... polinomios

Lagrange propone ünir los puntosçon un polinomio, dando mayor sensación de continuidad en toda la curva (derivadas continuas).



2 puntos → recta
3 puntos → parábola
4 puntos → cúbica
...

Fundamento matemático

Para un conjunto de n puntos en el plano (de abscisas distintas), existe un y sólo un polinomio de grado $n-1$ que pase por todos esos puntos.

Forma polinómica

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \quad (1)$$

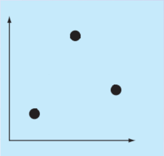
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad (2)$$

Lagrange nos propone construir un polinomio de grado $n-1$ no a partir de sus coeficientes $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, sino a partir de n puntos que pasan por él.
¿Cómo lo hace?

Armamos el interpolador de Lagrange

Supóngase que tenemos 3 puntos:

X	Y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2



Queremos una función continua $f(x)$ que tome los valores y_i correspondientes a cada valor x_i. Necesitamos algo de la forma:

$$f(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

Los *coeficientes variables* $L_i(x)$ son funciones que valen 1 sólo si $x = x_i$. Valen 0 si x es igual a cualquier otro valor de abscisa de la tabla.

Armamos el interpolador de Lagrange

Los coeficientes $L_i(x)$ son *polinomios*, y se denominan **Polinomios interpoladores de Lagrange**. Tenemos un $L(x)$ por cada punto conocido. Para el punto (x_0, y_0) del ejemplo anterior, tenemos:

$$L_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x_0 \\ 0, & \text{si } x = x_1, x_2 \end{cases}$$

Los coeficientes L_1, L_2 siguen el mismo patrón. Si evaluamos $f(x)$ en x_0, tendremos...

$$\begin{aligned} f(x_0) &= L_0(x_0)\, y_0 + L_1(x_0)\, y_1 + L_2(x_0)\, y_2 \\ f(x_0) &= 1\, y_0 + 0\, y_1 + 0\, y_2 \end{aligned}$$

Comprobamos que el punto (x_0, y_0) pertenece a la función. Lo mismo ocurriá para los demás puntos.

Armamos el interpolador de Lagrange

¿Cómo se implementa $L_0(x)$?
Consideramos todos los valores x_i (excepto x_0) como raíces de un polinomio en forma factorizada.

$$(x-x_1)(x-x_2) \quad \rightarrow \quad \text{vale 0 si } x = x_1, x_2$$

Si $x = x_0$, queremos que nos dé la unidad, sin embargo, esta expresión no resultará necesariamente en uno:

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)$$

Para que nos dé la unidad, deberemos normalizarlo (dividir el polinomio por el valor anterior, el cual es una *constante*).

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

Este polinomio vale 1 para x_0, y vale 0 para x_1, x_2. ¡Hemos construido el polinomio interpolador de Lagrange para el primer término de nuestra función interpolante!

Armamos el interpolador de Lagrange

Para finalizar, nuestra función interpolante es de la forma:

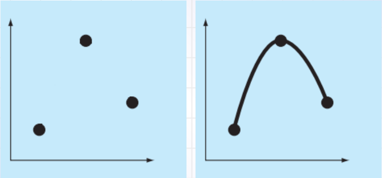
$$f(x) = L_0(x)\ y_0 + L_1(x)\ y_1 + L_2(x)\ y_2$$

Donde:

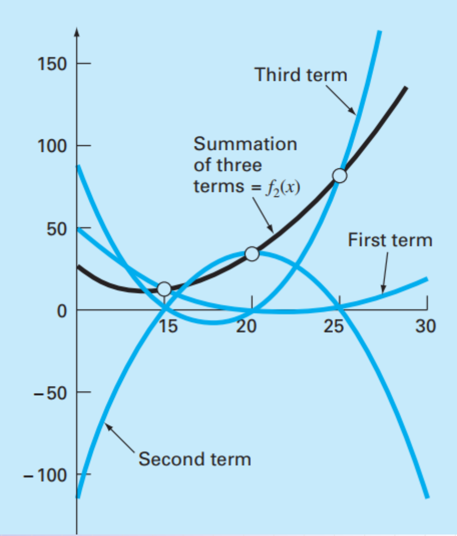
$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Como los polinomios de Lagrange $L_i(x)$ son todos de 2do orden, la función interpolante $f(x)$ también lo será.



Armamos el interpolador de Lagrange



- Formulación General

La forma de Lagrange

Un polinomio de grado $n-1$ puede expresarse como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, L_i(x)$$

Donde $L_i(x)$ es el *polinomio interpolador de Lagrange*, y está dado por:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

De forma compacta, un polinomio en **forma de Lagrange** se expresa como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

4 Algunas Desventajas

Desventajas

Demasiado tiempo de cómputo (complejidad $O(n^2)$): por cada punto a calcular se incurre en una doble iteración (una sumatoria y una productoria).
Fenómeno de Runge: oscilaciones en los extremos de intervalos discretos equiespaciados.