# Interpolación de Lagrange Matricial

Bruno M. Breggia

13 de mayo de 2021

Formas de representar un polinomio (de orden $n-1$):

- **Serie de potencias**:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \\ f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \end{aligned}$$

- **Forma factorizada**: donde $\{r_i\}$ son las $n-1$ raíces del polinomio.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r_1)(x-r_2)...(x-r_{n-2})(x-r_{n-1}) \\ f(x) &= \prod_{i=1}^{n-1}(x-r_i) \end{aligned}$$

- **Forma de Lagrange**: donde $\{(x_i, y_i)\}$ son $n$ puntos que pertenecen al polinomio.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Un polinomio en forma de Lagrange se puede trabajar para obtener los coeficientes $\{a_i\}$ de serie de potencia. Trabajarlo como serie de potencias es de mayor comodidad a la hora de evaluar el polinomio para un valor de abscisas dado. Evaluar el polinomio con la forma de Lagrange es computacionalmente más costoso por ser de complejidad $O(n^2)$.

Partiremos para el caso en que tengamos 4 puntos, y por inducción matemática se podrá generalizar la fórmula para $n$ puntos cualesquiera.

## Lagrange con 4 puntos

Téngase $n = 4$ puntos con abscisas distintas:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| $x_3$ | $y_3$ |

El polinomio de orden 3 que interpola estos 4 puntos expresado en forma de Lagrange (expandido), es de la forma:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 +$$
$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

Si rescatamos la parte que es constante en cada término (en azul), podemos expresar este polinomio como el resultado de un producto punto de la forma:

$$\begin{bmatrix} y_0/(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3) \\ y_1/(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3) \\ y_2/(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3) \\ y_3/(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{bmatrix}$$

El vector a la izquierda es una constante, y el de la derecha consiste en polinomios de grado $n-1$ en forma factorizada, y con el término de mayor orden normalizado ($a_{n-1}=1$). El vector constante en azul, que llamaremos $\vec{b}$, tiene componentes que siguen el siquiente patrón:

$$b_i = \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n=1}(x_i - x_j)}$$

El vector de polinomios, que llamaremos $\vec{\Gamma}(x)$, lo trabajamos por aparte. Desarrollamos cada componente de este vector en serie de potencia.

$$\vec{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} x^3 - x^2(x_1+x_2+x_3) + x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - x_1x_2x_3 \\ x^3 - x^2(x_0+x_2+x_3) + x(x_0x_2+x_0x_3+x_2x_3) - x_0x_2x_3 \\ x^3 - x^2(x_0+x_1+x_3) + x(x_0x_1+x_0x_3+x_1x_3) - x_0x_1x_3 \\ x^3 - x^2(x_0+x_1+x_2) + x(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2) - x_0x_1x_2 \end{bmatrix}$$

A este vector lo podemos descomponer en un producto matricial entre una matriz $M$ de coeficientes, y un vector $\vec{x}$ de potencias de $x$.

$$\vec{\Gamma}(x) \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & -(x_1+x_2+x_3) & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 & -x_1x_2x_3 \\ 1 & -(x_0+x_2+x_3) & x_0x_2+x_0x_3+x_2x_3 & -x_0x_2x_3 \\ 1 & -(x_0+x_1+x_3) & x_0x_1+x_0x_3+x_1x_3 & -x_0x_1x_3 \\ 1 & -(x_0+x_1+x_2) & x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2 & -x_0x_1x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las filas de $M$ consisten en sumas de productos de los $\{x_k\}, k \neq i$, para $i$ el índice de fila. A su vez, típico del desarrollo en serie de potencias de un polinomio factorizado, tenemos que cada coeficiente es la suma de todas las *combinaciones* de las raíces agrupados de a $j \in [0, n-1]$, con $j$ el índice de columna. Además, columna de por medio, los valores están multiplicados por $-1$.

Los elementos de la matriz $M$ se expresan como:

$$m_{ij} = (-1)^j \sum_{\substack{A \in P(\{x_k\} - \{x_i\}) \\ |A| = j}} \left( \prod_{x_k \in A} x_k \right)$$

Donde $P(\{x_k\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos posibles del conjunto de raíces $\{x_k\}$ del polinomio, y $|A|$ es el cardinal del conjunto $A$. Nótese que la cantidad de conjuntos $A$ con cardinalidad $j$, para $j \in [0, n-1]$, es $\binom{n-1}{j}$.

Con estas matrices, es posible expresar la función interpolante de Lagrange como: $f(x) = \vec{b}^T(M\vec{x})$. Donde la única operación utilizada es la operación matricial común. Como el producto matricial es asociativo, se lo puede expresar como: $f(x) = (\vec{b}^T M)\vec{x}$, en el cual el vector $\vec{k} = \vec{b}^T M$ es el vector de coeficientes $\{a_i\}$ de series de potencia de la función $f(x)$.

# Producto de tensores

Si consideramos todos los vectores y matrices hasta aquí obtenidos como tensores dimensión $n = 4$, diremos que los vectores $\vec{b}, \vec{x}$ son tensores de orden 1, y la matriz $M$ es un tensor de orden 2.

Dicho esto, el producto entre $\vec{b}$ y $M$ puede obtenerse mediante el producto diádico entre estos dos elementos, trabajado con notación indicial.

$$\vec{b} = b_i \mathbf{e_i} \qquad M = m_{jk} \mathbf{e_j} \mathbf{e_k}$$

El producto de vectores $\vec{k} = \vec{b}^T M$ se traduce a un producto de tensores $\vec{k} = \vec{b} \cdot M$

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= \vec{b} \cdot M \\
\vec{k} &= b_i\mathbf{e_i} \cdot m_{jk}\mathbf{e_j}\mathbf{e_k} \\
\vec{k} &= b_i\ m_{jk}\ (\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j}\mathbf{e_k}) \\
\vec{k} &= b_i\ m_{jk}\ (\delta_{ij}\mathbf{e_k}) \\
\vec{k} &= b_i\ m_{ik}\ \mathbf{e_k}
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que cada elemento del vector de coeficientes **k** se expresa, en forma desarrollada, como:

$$k_j = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\ m_{ij}$$

Este resultado se puede obtener también mediante el producto matricial común entre $\vec{b}$ y $M$, con las correspondientes transposiciones.

Con el vector de coeficientes $\vec{k}$, podemos expresar el polinomio en forma matricial como:

$$f(x) = \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} x^{n-1} \\ ... \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$