La Transformada de Laplace

Breggia, Bruno M.

¿Qué tanto nos pueden predecir las matemáticas? Aquí les presentaremos la muy revolucionadora **Transformada de Laplace**, elemento importantísimo en el análisis de señales y sistemas, y por demás útil en modelar físicamente al Universo, brindándonos de un medio por el cual predecir fenómenos y comportamientos...

1. La utilidad de la herramienta

La Transformada de Laplace es una potente herramienta matemática que juega un rol clave en:

- Análisis y diseño de sistemas de ingeniería
- Resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas
- Estudio de señales y sistemas (sistemas mecánicos, circuitos eléctricos)
- Sistemas de control

2. Integrales impropias

Antes de adentrarnos a lo más interesante, la transformada de Laplace, recalcaremos el importante concepto de integral impropia, ya verán por qué.

Definición 2.1. Integral Impropia
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ una función de variable real a valores reales o complejos. Entonces

$$\int_a^b f(t)\ dt$$

...se define bajo las siguientes condiciones:

- $\mathrm{Dom}(f)$ es un conjunto acotado
- f está acotada en el intervalo $[a, b]$

Si alguna de estas condiciones *no* se cumple, denominaremos a la integral como **integral impropia**.

Tenemos entonces dos condiciones que si se violan, nos dan lugar a las integrales impropias. Acorde a cuál regla se viole, tendremos una integral impropia de primera o segunda especie:

- Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ integrable en $[a, \varepsilon]$ $\forall \varepsilon \geq a$.
  Si $\mathrm{Dom}(f)$ no es un conjunto acotado, entonces se dice que la integral impropia

$\int\limits_a^{+\infty} f(t)\ dt$ es de **primera especie** sólo si converge (o existe) el límite

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int\limits_a^{\varepsilon} f(t)\ dt$$

- Sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ integrable en $[\varepsilon, b]\ \forall \varepsilon \in (a, b]$.

  Si f no está acotada en a, entonces se dice que la integral impropia $\int\limits_{a^+}^{b} f(t)\ dt$ es de **segunda especie** sólo si converge (o existe) el límite

$$\lim_{\varepsilon \to a^+} \int\limits_{\varepsilon}^{b} f(t)\ dt$$

Definición 2.2. Convergencia
Sea $f(t)$ una función de la variable real $t \in [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$, continua o con una cantidad finita de discontinuidades de salto finito.
Se dice que la integral impropia $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\ dt$ **converge** (o **existe**) cuando:

- Para el caso en que $\mathrm{Dom}(f)$ no esté acotado, si existe el límite:

$$\lim_{b \to \infty} \int\limits_0^{b} f(t)\ dt$$

- Para el caso en que $f(t)$ no está acotada en $t = 0$, si existe el límite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t)\ dt$$

3. Una fórmula para dominarlos a todos

No esperen más. A continuación, la definición de la Transformada de Laplace. Pero antes cabe recalcar, de ahora en más se hará un *pequeño* cambio en la notación: la unidad imaginaria será $\mathbf{j}$, y no la i de imaginario, por cuestiones ingenieriles (en este nuevo contexto, la i suele representar corriente eléctrica, y no nos queremos confundir).

Definición 3.1. La Transformada de Laplace
Sea $f(t)$ una función de la variable real $t \in [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $ó$ $\mathbb{C}$ continua o seccionalmente continua. Sea $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.
Si existe la integral impropia $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$ para ciertos valores de s, se dice que dicha integral es la **Transformada de Laplace** de $f(t)$, y se indica:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt$$

El conjunto de valores para los cuales converge la integral se denomina **región de convergencia** de la transformada.

A $\mathscr{L}\{\cdot\}$ se lo denomina **Operador Transformada de Laplace** de $f(t)$ y se escribe:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

siendo $F(s)$ la **Transformada de Laplace** de $f(t)$.

Este operador transforma una función de dominio de tiempo t en una función de dominio de frecuencia compleja s. Es una de toda una familia de **transformaciones integrales**:

$$\mathscr{T}\{f(t)\} = \int\limits_a^{b} K(u,t)\; f(t)\; dt = F(u)$$

Desglosando el operador $\mathscr{L}\{\cdot\}$

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt$$

- $f(t)$ es una **función** continua o seccionalmente continua en el tiempo, definida en $[0, +\infty)$
- $\mathscr{L}\{f(t)\}$ es el **operador** transformada de Laplace
- e^{-st} es el **núcleo** de la Transformación
- s es la variable que representa la **frecuencia compleja** ($s \in \mathbb{C}$)
- $F(s)$ es la **Transformada de Laplace** de $f(t)$

Funciones elementales

A continuación una tabla con las transformadas de Laplace de funciones elementales

$f(t)$	$F(s)$	Región de Convergencia
c	$\frac{c}{s}$	$\mathfrak{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathfrak{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathfrak{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathfrak{Re}(s) > \mathfrak{Re}(a)$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathfrak{Re}(s) > \lvert\mathfrak{Im}(a)\rvert$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathfrak{Re}(s) > \lvert\mathfrak{Im}(a)\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathfrak{Re}(s) > \lvert\mathfrak{Re}(a)\rvert$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathfrak{Re}(s) > \lvert\mathfrak{Re}(a)\rvert$

La Transformada Bilateral

Si te quedaste incómodo pensando por qué la transformada es una integral que parte de 0 hasta infinito y no desde infinito negativo, esta nueva definición te dejará satisfecho.

Definición 3.2. La Transformada Bilateral de Laplace
Si $f(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, se define la **Transformada de Laplace Bilateral** como:

$$\mathscr{L}_B\{f(t)\} = F(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt$$

si se da que dicha integral impropia existe.

Definición 3.3. Función causal
Si $f(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, se dice que es una función causal si $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

Esta definición de función causal nos viene a dar la idea de que trataremos con funciones, o *señales*, que modelarán fenómenos con respecto al tiempo, el cual no tiene valor alguno en instantes por detrás del 0 (¿o alguna vez programaron alguna cita en tiempo negativo?). Por ello, en cualquier valor negativo, la función vale cero. Usando precisamente este tipo de funciones, con una $f(t)$ causal, tenemos:

$$\mathscr{L}_B\{f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt$$

Condiciones Suficientes

Hablemos ahora de algo que nos debería incumbir, y que quizás no le hayan dado mucha importancia, pero que no por ello deja de ser esencial... ¿toda función causal en el dominio de tiempo real tiene una transformada de Laplace en el dominio de frecuencia compleja? Hemos visto anteriormente que hay valores restringidos de $s \in \mathbb{C}$ para los cuales se cumple que la transformada es igual a la expresión $F(s)$. Esto es clara indicación de que no es aplicable para todo complejo. Y en caso de que no exista número complejo alguno que nos permita elaborar tal transformada, diremos entonces que *no existe* la transformada de Laplace para la función $f(t)$ dada.

Diremos entonces que la Transformada de Laplace de $f(t)$ existe si y sólo si la integral impropia de la definición converge para al menos algunos valores de $s \in \mathbb{C}$. Esto está, en parte, relacionado con el acotamiento de la función $f(t)$, con el factor e^{-st} en el núcleo de la transformada actuando como factor de convergencia en que los valores permitidos de $\mathfrak{Re}(s)$ son aquellos para los que la integral converge.

Entonces, antes de introducir condiciones suficientes sobre $f(t)$ para la existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$, introducimos una nueva definición:

Definición 3.4. Funciones de Orden Exponencial
Una función $f(t)$ es de **orden exponencial** cuando $t \to \infty$ si existen un número real σ y constantes reales positivas M y T tales que:

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}, \qquad \forall t > T$$

Lo que nos dice esta definición es que una función $f(t)$ es de orden exponencial si no crece más rápido que una función exponencial de la forma $Me^{\sigma t}$.

Ejemplo 1. La función $f(t) = e^{3t}$ es de orden exponencial con $\sigma \geq 3$.

Ejemplo 2. Se verificará si $f(t) = t^3$ para $t \geq 0$ es de orden exponencial. Dado que

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 + ...$$

para cualquier $\alpha > 0$, entonces se tiene que

$$t^3 < \frac{6}{\alpha^3}\, e^{\alpha t}$$

Así que $f(t) = t^3$ es de orden exponencial con $\sigma > 0$.

Ejemplo 3. La función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial, ya que crece más rápidamente que $Me^{\sigma t}$ cuando $t \to \infty$ cualesquiera sean los valores de M y σ.

En los ejemplos anteriores, los valores de σ que hemos hallado son en realidad los mínimos valores que podría tomar σ para que la función en cuestión se encuentre acotada por la función exponencial $Me^{\sigma t}$. Nos interesa precisamente el menor sigma posible, porque tenemos de esta manera, con el M que más nos convenga, lo que denominaremos **abscisa de convergencia** σ_c, el cual viene a ser la máxima cota inferior del conjunto de valores posibles de σ.

Entonces, en el primer ejemplo $\sigma_c = 3$, en el segundo ejemplo $\sigma_c = 0$, y en el tercero simplemente $\nexists\ \sigma_c$.

Ya con las herramientas necesarias, concluimos esta sección con el siguiente Teorema de Existencia de la Transformada de Laplace:

Teorema 3.1. *Existencia de la Transformada de Laplace*

Si la función causal $f(t)$ es continua a trozos en $[0, +\infty)$ y es de orden exponencial con abscisa de convergencia σ_c, entonces existe la transformada de Laplace con región de convergencia $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$ en el dominio complejo. Esto es:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt, \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$$

`NOTA:` este teorema nos brinda *condiciones suficientes, no necesarias* para la existencia de la transformada de Laplace. Es decir, si se cumplen las condiciones para $f(t)$, entonces posee transformada de Laplace. Pero si *no* las cumple, esto no quiere decir que no posee Transformada. Puede no cumplir con estas condiciones y aun así poseer una transformada de Laplace para cierta región de convergencia en el plano complejo.

Propiedades de la Transformada

Sinceramente, no vamos a estar como monos calculando la transformada de Laplace de $f(t)$ siempre a partir de la definición... eso sería calcular muchas integrales, calcular límites, y encima imponer las restricciones necesarias sobre $s \in \mathbb{C}$ para conocer dónde converge la transformada obtenida. Y si en el camino te quedas trabado en medio de la nada, habrías encontrado una brusca manera de darte cuenta de que la función $f(t)$ simplemente no posee transformada de Laplace.

Es por esto que a la Transformada de Laplace se la estudia como un operador de funciones con sus propias propiedades de cálculo, que nos permitirán calcular la transformada de funciones complicadas a partir del conocimiento de la transformada de funciones más elementales. Tómense estas propiedades como sus mandamientos, y todo saldrá bien...

Las propiedades a tratar serán:

- Linealidad
- Primer Teorema de la Traslación
- Derivada de la transformada
- Transformada de la derivada
- Transformada de la integral

Linealidad

Por definirse en términos de una integral, la transformada hereda de ella la propiedad de linealidad.

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones que poseen transformadad de Laplace para $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_{c1}$ y $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_{c2}$ respectivamente, con α y β constantes cualesquiera, entonces:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}, \qquad \mathfrak{Re}(s) > \text{máx}(\sigma_{c1}, \sigma_{c2})$$

//Demostrar

Primer Teorema de la Traslación

El primer teorema de la traslación, también conocida como **Teorema de la Modulación Exponencial**, viene dado por:

Si $f(t)$ es una función que tiene una transformada de Laplace $F(s)$, con $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$, entonces la función $e^{at} f(t)$ también tiene una transformada de Laplace dada por:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c + \mathfrak{Re}(a)$$

//Demostrar

Derivada de la Transformada

Esta propiedad es una muy potente, que relaciona operaciones en el dominio de tiempo t con aquellas en el dominio transformado s. Es conocida tembién como la propiedad de la **multiplicación por** t. A continuación su enunciado:

Si $f(t)$ es una función cuya transformada de Laplace es $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ con $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$, entonces la función $t^n f(t)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ también tiene transformada de Laplace dada por:

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \, \tfrac{d^n F(s)}{ds^n}, \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$$

//Demostrar

Transformada de la Derivada

Sea $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$ para $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$. Sean $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ continuas en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial. Si $f^{(n)}(t)$ es continua o seccionalmente continua en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial, entonces existe su transformadad de Laplace y es:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s^0 f^{(n-1)}(0), \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$$

O de manera más concisa:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0), \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$$

//Demostrar

Transformada de la Integral

Sea $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$ para $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$. Entonces su primitiva también posee transformada de Laplace, y si $g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$, con $g(0) = 0$, entoces:

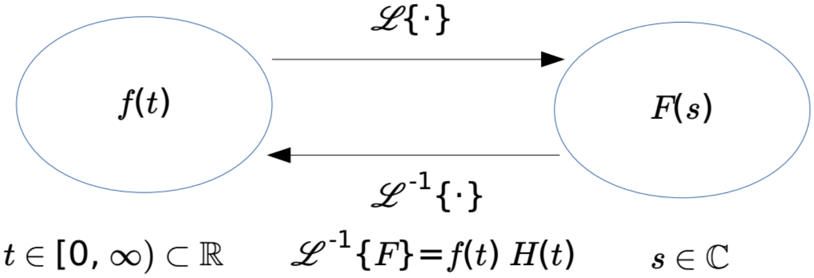
$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}, \qquad \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$$

//Demostrar

La Transformada Inversa

Si ustedes la pidieron, aquí se las dejo: la **Tansformada Inversa de Laplace**. Todo lo que se transforma, se puede antitransformar, o al menos, este es el caso para la Transformada de Laplace (no puedo hablar por las demás transformadas existentes).

La intuición aquí no puede fallar, si la función *causal* de variable real $f(t)$ tiene como transformada a $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces la función de variable compleja $F(s)$ tiene como transformada inversa a $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

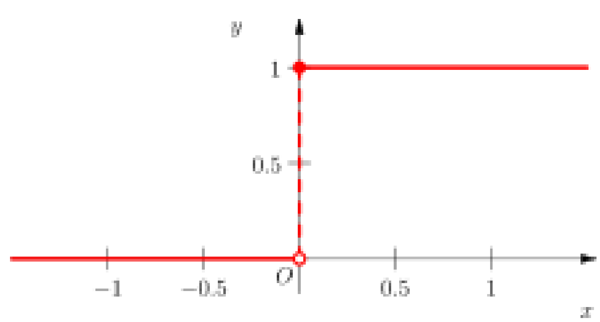


El escalón unitario de Heaviside

A continuación presentamos una función que nos será de bastante utilidad de ahora en adelante, y se conoce como la **función escalón unitario**, o **función escalón de Heaviside**. Se define como sigue:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0. \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Por cómo está definida, deberían reconocerla como una función causal: vale cero para cualquier t menor que 0. Y no sólo eso, sino que para todo t restante vale la unidad. Esto lo convierte por excelencia en la herramienta que nos permitirá convertir cualquier otra función $f(t)$ que no sea causal, en una que sí lo sea, con sólo multiplicarla por $H(t)$, de manera tal que le removemos la parte por detrás de $t = 0$, y conservamos intacta la parte donde $t \geq 0$. De esta forma, nos garantizamos que para cualquier función real $f(t)$, se tiene que $f(t)H(t)$ **es causal**.



Entonces, si tenemos una función $f(t) : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$, tenemos que:

$$f(t)H(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \geq 0. \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Y con ello hemos convertido a $f(t)$ a la causalidad. Amén.

Conocer a la función escalón de Heaviside es de suma importancia a la hora de calcular transformadas inversas, ya que toda función cuya transformada calculemos, se asumirá ser causal, y por consiguiente, toda trasnformada inversa que calculemos, *nos deberá dar como resultado una función causal.* Y para darlo a entender, lo expresaremos de la forma $f(t)H(t)$, pudiendo ser $f(t)$ una función en donde se puede dar que $f(t) \neq 0,\ t < 0$, pero eso ya no importaría, ya que truncamos su comportamiento por detrás de $t = 0$ al multiplicarla por la función de Heaviside.

La antitransformada: la definición formal

Dada la función de variable compleja $F(s)$, si existe $f(t)$ causal tal que $\mathscr{L}\{f(s)\} = F(s)$, entonces se denomina a $f(t)$ la ***transformada inversa de Laplace*** *de $F(s)$ y se indica:*

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

En caso de que $f(t)$ no sea causal, entonces se define:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)H(t)$$

Al operador $\mathscr{L}^{-1}\{\cdot\}$ se lo denomina operador de transformada inversa de Laplace.

Propiedades de la Transformada Inversa

Para resolver las transformadas inversas de Laplace, nos complace deleitarlos con la siguiente simplicidad: como propiedades usaremos las mismas que detallamos para la Transformada de Laplace. Con ellas, buscaremos reconocer patrones para lograr armar la función causal que posea a $F(s)$ como su transformada. Mejor dicho, a encontrar $f(t)$, sea causal o no, ya que a la solución final la expresaremos siempre como $f(t)H(t)$.

Resolución de EDOL a coeficientes constantes

Se puede emplear la Transformada de Laplace y la Transformada Inversa de Laplace para encontrar las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales a Coeficientes Constantes, dadas las condiciones iniciales necesarias, para hallar la correspondiente *solución particular*. Por este medio, no hallaremos ninguna solución general, sino que para aplicar este método, necesitamos necesariamente las condiciones iniciales.