Derivación Compleja

Breggia, Bruno M.

Se conocen ya algunas funciones de variable compleja, o varias, mejor dicho. ¿Cómo convertir esto en la mejor arma matemática para modelar al Universo? Pues, si somos capaces de calcular tasas de cambio con ellas, tenemos al Universo en nuestras manos. Pues en él, la única constante es el cambio (dice un proverbio chino). Es por ello que en esta lección nos introduciremos a la **diferenciación** de funciones de variable compleja. ¿Qué tan distinto puede ser...?

Índice

1. Definimos la derivada compleja

Ya sabemos lo que es la derivada, representa la tasa de cambio de una magnitud respecto a alguna variable de la que depende. Pero cuando hablamos de funciones de variable compleja, la intuición geométrica de que la derivada representa la pendiente de la curva ya no se da tan así... pues las funciones complejas no pueden representarse en un mismo plano con su conjunto dominio. Y ojo, que además cualquier noción de pendiente y velocidad que le podríamos asociar se distorsiona con asignarles como valor alguna cantidad compleja...

Sin perdernos entonces en una interpretación geométrica de la misma, le daremos a la derivada de funciones complejas una nueva definición, que será análoga a la que conocíamos para funciones de una varible real (e inclusive similar a la de funciones vectoriales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Definición 1.1. Derivada en un punto
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$. Considérese el límite:

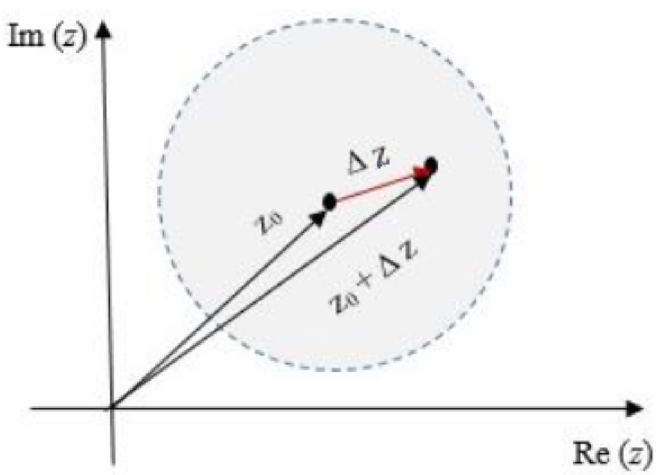
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

En caso de que dicho límite exista, se denomina la **derivada** de f en z_0 y se denota por $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Una expresión equivalente a la anterior se obtiene a partir de considerar $\Delta z = z - z_0$, con lo que $z = z_0 + \Delta z$. Tenemos entonces:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$



Definición 1.2. Diferenciabilidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que f es **diferenciable** en $z_0 \in S$ si f es derivable en z_0. Es decir, si se cumple que

$$\exists f'(z_0)$$

Ahora traemos a colación un importante Teorema que nos será inmensamente útil:

Teorema 1.1. *Si f es derivable en el punto $z_0 \in S$, entonces f es continua en dicho punto*

Demostrar

Ahora estudiaremos algunas propiedades destacadas de la derivada compleja. Teniendo que $f, g : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con f y g derivables en z_0 se cumple entonces que:

1. $f + g$ es derivable en z_0, y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $f \cdot g$ es derivable en z_0, y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$
3. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en z_0, y $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}$
4. $f \circ g$ es derivable en z_0, y $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$. Es decir, aplica la **regla de la cadena**.

2. Condiciones necesarias: las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

¿Cómo poder identificar cuándo una función dada es o no diferenciable? Queda claro que si no existe el límite o no es continua en un punto z_0, no es derivable allí. Pero no vamos a calcular siempre los límites para dar cuenta de ello. Es muy trabajoso y consume tiempo y esfuerzo mental. Algo que no vale la pena si contamos con métodos más sofisticados para hacerlo...

Teorema 2.1. *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$.
Si existe $f'(z_0)$, *entonces:*

a. *Existen las derivadas parciales de* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *en* (x_0, y_0)

b. *Las derivadas parciales de* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto* (x_0, y_0)*:*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

c. *Además, se cumple que:*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - i\ u_y(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0) - i\ u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Demostrar

Sin embargo, no hay que dejarse engañar, porque lo contrario no es necesariamente cierto. Si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto no quiere decir que la función es derivable. Pero sí podemos afirmar lo siguiente:

Corolario 2.1. *El Recíproco*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Si las derivadas parciales de primer orden de $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en* (x_0, y_0), *entonces* f *no es diferenciable en* z_0.

$$P \Rightarrow Q$$

$$\sim Q \Rightarrow \sim P$$

3. Condiciones suficientes: Las Condiciones de Cauchy-Riemann

Ya se vio una condición necesaria de diferenciabilidad, pero no suficiente. Completaremos este análisis solicitando a la función que cumpla con un par de requisitos más y con ello le daremos el alta. Les presentamos: **las Condiciones de Cauchy-Riemann**, que engloban las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 3.1. *Condiciones Suficientes*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$*.*

Si se cumple que:

1. *Existen las derivadas parciales de primer orden de* $u(x, y)$ *y de* $v(x, y)$ *en el entorno* $\eta((x_0, y_0), \rho)$
2. *Las derivadas parciales de primer orden de* $u(x, y)$ *y de* $v(x, y)$ *son continuas en* (x_0, y_0)
3. *Dichas derivadas parciales cumplen con las Ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

entonces $f(z)$ *es diferenciable en* (x_0, y_0)

Demostrar

En síntesis, le sumamos a las ecuaciones de Cauchy-Riemann la **existencia** y **continuidad** de las derivadas parciales de u y de v y con ello tenemos condiciones suficientes de diferenciabilidad.

3.1. La versión Polar

Hay circunstancias en las que una función $f(z)$ determinada es más fácil expresarla como $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$, es decir, con funciones componentes que dependan de su módulo y argumento, en vez de la parte real e imaginaria de z. Esto sucederá cuando la descomposición de la función sea más sencilla al representar a z en su forma polar $z = r\ e^{i\theta}$.

En caso de que tengamos una función expresada como $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$, no debemos entrar en pánico a la hora de tener que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que las mismas presentan un equivalente para la coordenadas polares.

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$\frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

Basándonos en la validez de la **forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann**, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Condiciones de Cauchy-Riemann para coordenadas polares*
Sea $f(z) = u(r,\theta) + i\ v(r,\theta)$ una función definida en todos los puntos de un ε entorno alrededro de un punto $z_0 = r_0\ e^{i\theta_0}$

Si se da que:

1. *las derivadas parciales de primer orden de $u(r,\theta)$ y $v(r,\theta)$ existen en todos los puntos del entorno*

2. *tales derivadas son continuas en (r_0, θ_0)*

3. *tales derivadas cumplen con la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$\frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

...entonces la derivada $f'(z_0)$ existe.

Demostrar

En el caso del teorema anterior, la derivada de una función expresada de la forma $f(z) = u(r,\theta) + i\ v(r,\theta)$, viene dada por:

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i\ v_r)$$

4. Analiticidad, aumentamos la exigencia

Pareciese por capricho, pero llegados a esta altura, para seguir trabajando con cálculo complejo, no nos es suficiente que la función sea diferenciable en un punto. De ahora en adelante, nos vamos a sentir lo suficientemente cómodos para trabajar con funciones si éstas son diferenciables no solamente en un punto z_0, sino que también en sus alrededores, es decir, que lo sea también en todo punto de algún entorno η centrado en z_0. Formalmente hablando... vamos a solicitar que $f(z)$ sea **analítica** en z_0

Definición 4.1. Analiticidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que f es **analítica** u **holomorfa** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe la derivada de f en z_0 y en algún entorno centrado en z_0.

En base a la definición anterior, diremos que $f(z)$ es **analítica en un dominio** $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ si es analítica en todo punto de $\mathcal{S}$.

Tenemos entonces que la analiticidad es una condición que no es *puntual*, sino que es *global*. Si una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0, entonces también lo es en sus alrededores, pues que sea analítica implica que sea derivable en un entorno η centrado en z_0. Si es derivable en un entorno tal, todo punto en ese entorno estará también rodeado por puntos que sean derivables, siendo todos ellos puntos donde la función es analítica.

Razonando de igual manera, tenemos que una función no puede ser analítica en un punto z_0 aislado. En otras palabras, no puede ser analítica en z_0 si no lo es en ningún otro punto de su cercanía, o concretamente, en todo punto de algún entorno de z_0.

Definición 4.2. Función entera
Si $f(z)$ es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z)$ se denomina una **función entera**.

Habiendo definido lo que es una función entera, cabe acotar que una función entera será para nosotros equivalente a lo que las funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ son para el cálculo de varias variables. Ahora algunos teoremas.

Teorema 4.1. *Analiticidad implica continuidad*
Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un dominio complejo.
Si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{D}$, entonces $f(z)$ es continua en $\mathcal{D}$.

Algo interesante de la analiticidad es que, si una función es analítica, lo será por siempre... o sea, no importa cuántas veces lo derives, su n-ésima derivada será también analítica.

Teorema 4.2. *Analiticidad de las derivadas*
Si una función $f(z)$ es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$, sus derivadas de todos los órdenes son también funciones analíticas en z_0.

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de la analiticidad. Sean f, g

dos funciones complejas de variable compleja, ambas analíticas en el dominio complejo $\mathcal{D}$. Entonces:

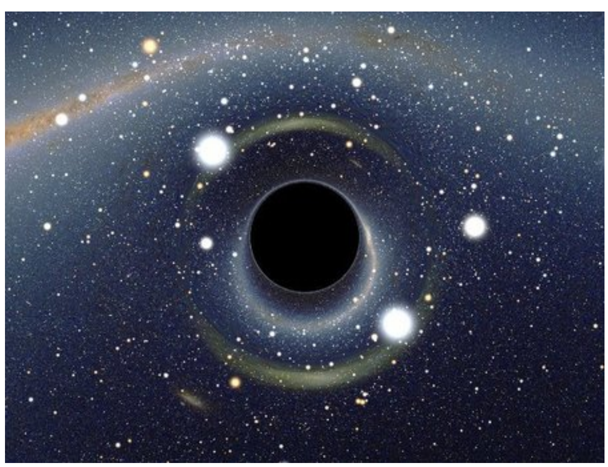
1. $f + g$ es analítica en $\mathcal{D}$
2. $f \cdot g$ es analítica en $\mathcal{D}$
3. $\dfrac{f}{g}$ es analítica en $\mathcal{D} - \{z \,/\, g(z) = 0\}$
4. $f \circ g$ es analítica en $\mathcal{D}$

5. Puntos Singulares

Como anhelamos la analiticidad, y la analiticidad es una propiedad global, nos será de particular interés discriminar aquellos puntos z_0 para los cuales, en medio de tanta analiticidad, la función *no es analítica*. Dichos puntos los conoceremos como **puntos singulares** o simplemente **singularidades**.

Definición 5.1. Puntos singulares
z_0 es un **punto singular** o una **singularidad** de $f(z)$ si f no es analítica en z_0 pero sí en algún punto de todo entorno de z_0.

Definición 5.2. Punto singular aislado
z_0 es un **punto singular aislado** o una **singularidad aislada** de $f(z)$ si f no es analítica en z_0 pero sí en todo punto de algún entorno reducido de z_0.



6. Funciones Armónicas de $\mathbb{R}^2$

Ahora frenamos un poquito y miramos para atrás... con atrás me refiero a las ya conocidas y visitadas funciones de varias variables reales. Existe cierta clase de funciones, real de dos variables reales, que se caracterizan simplemente por cumplir con la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 f = 0$$

Por ser así de simple el requisito que se les solicita, las llamaremos **Funciones Armónicas**.

Definición 6.1. Funciones Armónicas

Sea $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diremos que $\phi(x, y)$ es una **función armónica** en $\mathcal{D}$ si:

- Las derivadas parciales primeras y segundas de ϕ **existen** y son **continuas** en $\mathcal{D}$.
- La función $\phi(x, y)$ satisface la **Ecuación de Laplace:**

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0$$

`ATENCIÓN`:

A no confundirse, que la catalogación de función armónica se define para *funciones de variable real*, concretamente para funciones que mapean valores de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. NO para funciones de variable compleja. Este concepto nos sirve, sin embargo, para catalogar a las funciones componentes de una función compleja, que son en sí mismas funciones reales de dos variables reales.

Teorema 6.1. *Analiticidad y armonicidad*

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Si $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ *es analítica en* $\mathcal{D}$*, entonces sus funciones componentes* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *son armónicas en* $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$

Dado el caso previo para la función $f(z) = u(x, y)+i\ v(x, y)$, se dice que la función $v(x, y)$ es **armónica conjugada** de $u(x, y)$. De esta definición, y del teorema anterior, encontramos ¡oh sorpresa! que el que v sea armónica conjugada de u es criterio suficiente para que la función $f(z)$ sea analítica... wow, lo que es el poder de la armonía.

Teorema 6.2.

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
La función $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ *es analítica en un dominio* $\mathcal{D}$*, si y sólo si* $v(x, y)$ *es armónica conjugada de* $u(x, y)$.