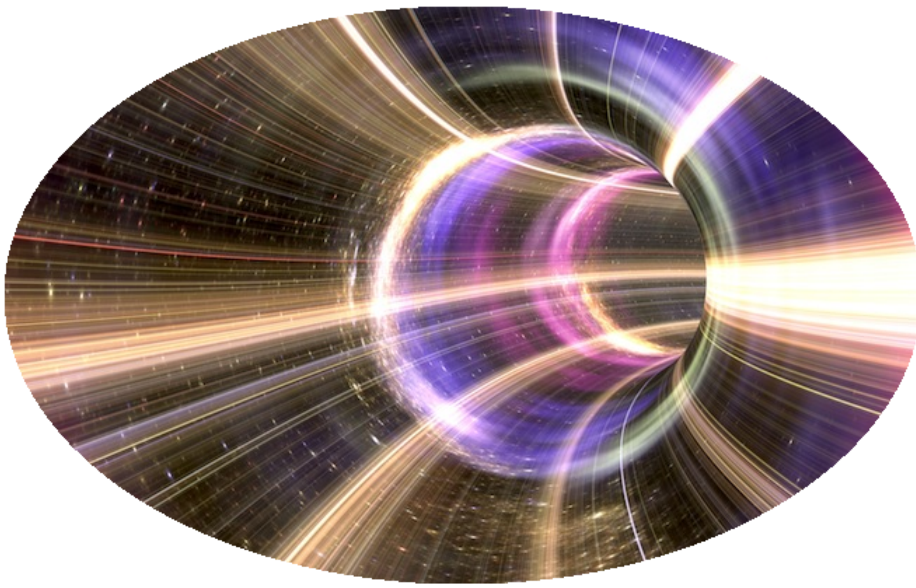
# Funciones de Variable Compleja

Breggia, Bruno M.



*"Comienza al principio, -dijo el rey, con voz grave-*
*y continúa hasta que llegues al final, allí para"*

Lewis Carroll, de **Alicia en el País de las Maravillas**

Hemos llegado a un punto decisivo, la introducción y definición de las funciones de variable compleja, donde nos será revelado cómo, todo lo que conocíamos hasta ahora de los números reales no es más que una ínfima porción de lo que es el mundo detrás de escena del conjunto de los Números Complejos. Todas las funciones algebraicas elementales se generalizan de tal manera que cuando se les pasen valores reales, se comportan indistintamente a como lo hicieron siempre hasta el momento, pero con la diferencia de que ahora serán capaces de recibir números complejos, y el resultado de eso es algo jamás antes visto...

Prepárate para descononcer lo que sabías hasta el momento, y conocer de cero lo que se viene. Bienvenido a **Variable Compleja.**

# Índice

# 1. Nos ponemos filosóficos: ¿Qué es una función?

Antes de entrar en detalle en lo que es una función de variable compleja, debemos recordar qué es en sí mismo una función. Pareciese aburrido tener que retroceder a revisar un concepto tan elemental como lo es una *función*, pero debemos tener en claro su definición antes de generalizar el concepto.

Pero... ¿será tan fácil como parece? Defíneme *función*... como si fuese obvio, he aquí la definición formal:

**Definición 1.1.** Función
Una *función* constituye una terna $(f, A, B)$, en donde:

- $f$: es la **ley, regla o relación** que asigna a cada elemento del conjunto $A$ un único elemento del conjunto $B$
- $A$: es el conjunto de partida, o **dominio**
- $B$: es el conjunto de llegada, o **codominio**

La notación simbólica de una función está dada por

$$f : A \to B$$

$$f : x \in A \to y \ / \ y = f(x) \in B$$

Esto nos habilita a poder representar a la función $f$ evaluada para un valor $x \in A$ simplemente como $f(x)$, donde $f(x) \in B$, claro está. Sin embargo, nunca deberíamos hablar de funciones sin antes especificar sus conjuntos de dominio y codominio (a menos que el contexto lo vuelva obvio). Tratemos que se vuelva costumbre.

## 1.1. Caso especial: la Función Compleja

Habiendo definido de manera genérica lo que es una función, sabremos por intuición que si nuestros conjuntos de dominio $A$ y codominio $B$ son ambos subconjuntos del conjunto de los números reales, es decir: $A, B \in \mathbb{R}$, entonces tenemos definidas las funciones de una variable real. Cabe esperar entonces que para definir funciones de variable compleja debamos simplemente cambiar los conjuntos de partida y de llegada...

**Definición 1.2.** Función de Variable Compleja
Una función compleja de variable compleja constituye una terna $(f, S, \mathbb{C}_w)$, en donde:

- $f$: **ley, regla o relación** que asigna a cada elemento de $S$ un único elemento en $\mathbb{C}_w$
- $S$: es el conjunto **dominio** de $f$, con $f \subset \mathbb{C}_z$
- $\mathbb{C}_w$: es el conjunto **codominio** de $f$

Para terminar con el precalentamiento, vale diferenciar entre los distintos tipos de funciones complejas, ya que de tanto en tanto, utilizaremos funciones que mapeen variables complejas a números complejos, como funciones que mapeen variables *reales* a números complejos.

- **Funciones de Variable Compleja a valores complejos**: son las funciones dadas por $f : S \subset \mathbb{C}_z \to D \in \mathbb{C}_w$, que reciben un número complejo $z \in S$, con $z = x + iy$, y retornan otro complejo $w = f(z) \in D$, donde diremos que $w = u + iv$. Este tipo de funciones pueden escribirse de la forma:

  $$w = f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

  ...ya que tanto la parte real como imaginaria de la función dependen de la parte real e imaginaria de la variable que recibe (¿de qué más puede depender?). Si prestan particular atención, tanto $u(x, y)$ como $v(x, y)$ son ambas funciones de *dos* variables reales, que retornan un valor real, es decir, $u, v : \tilde{S} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

  Los conjuntos de partida $\tilde{S} \in \mathbb{R}^2$ y $S \in \mathbb{C}$ tienen una correspondencia biunívoca (y los de llegada también).

- **Funciones de Variable Real a valores complejos**: son las funciones dadas por $f : I = (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. En éstos, se recibe una variable real $t \in I$, y se obtiene un número complejo $z = f(t) = x + iy$. Si recordamos la relación biunívoca entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, y la representación gráfica de números complejos, concluimos entonces que este tipo de funciones son como parametrizaciones, en donde tendremos un complejo diferente a medida que recorramos el intervalo real $[a, b]$.

  Para que quede más claro, representemos a la función de la siguiente manera:

  $$z(t) = f(t) = u(t) + i\ v(t)$$

  ...en donde $u, v : I = (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, $u, v$ son dos funciones de una variable real a valores reales.

Al fin y al cabo, toda función compleja puede desglosarse en términos de funciones de una o más variables *reales*, con las cuales ya somos hábiles manipulando.

## 2. A través del espejo

Procederemos a analizar ahora la extensión de la definición de todas la funciones algebraicas elementales de tal manera que acepten números complejos como parámetros... ¡y a sorprenderse con lo que obtengamos de ellas!

**Definición 2.1.** Función exponencial Compleja
La función exponencial compleja $\exp(z) = e^z$ se define, a través de la fórmula de Euler, como:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} \triangleq e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades de la exponencial compleja:

1. $e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$ (puede tomar valores negativos)
2. $e^z = e^x$ si $z$ es un real puro (con parte imaginaria 0)
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
4. $|e^z| = e^x$
5. $(e^z)^n = e^{nz},\ \forall n \in \mathbb{Z}$
6. $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$
7. $e^z = e^{z+2\pi i}$, por lo que es una función periódica con periodo $2\pi i$

Si quisiésemos representar a la función exponencial compleja en la forma $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, tendríamos lo siguiente:

$$e^z = \exp z = (e^x \cos y) + i\ (e^x \operatorname{sen} y)$$

**Definición 2.2.** Funciones Trigonométricas Complejas
Las funciones trigonométricas complejas del seno y coseno se definen como sigue, en términos de la exponencial compleja:

$$\cos z \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del coseno y seno complejos:

1. $\cos z = \cos x\ \wedge\ \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$, si $z$ es un real puro (con parte imaginaria 0)

2. $\cos(-z) = \cos z \ \wedge \ \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

3. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

4. $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$

5. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$

A partir de las definiciones del coseno y seno de números complejos, definimos de manera más sencilla las demás funciones trigonométricas:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

Si quisiésemos representar a la función coseno y seno complejos en la forma $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, luego de cierto trabajo algebraico, llegaríamos a lo siguiente:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

**Definición 2.3.** Funciones Hiperbólicas Complejas
Se definen las funciones hiperbólicas complejas coseno hiperbólico y seno hiperbólico a partir de la función exponencial compleja:

$$\cosh z \triangleq \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh} z \triangleq \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del coseno y seno hiperbólicos complejos:

1. $\cosh z = \cosh x \ \wedge \ \operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x$, si $z$ es un real puro (con parte imaginaria 0)

2. $\cosh(-z) = \cosh z \ \wedge \ \operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

3. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

4. $\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

5. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$

A partir de las definiciones del coseno y seno hiperbólicos de números complejos, definimos de manera más sencilla las demás funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \quad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z} \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

Si quisiésemos representar a las funciones coseno y seno hiperbólicas complejas en la forma $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, luego de cierto trabajo algebraico, llegaríamos a lo siguiente:

$$\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$$

Como podemos apreciar, las funciones trigonométricas y las hiperbólicas no sólo poseen abismales similitudes entre sí, sino que también guardan una relación mutua que puede ser descubierta una vez adentrados en variable compleja. Miremos unas propiedades más que las involucran:

- $\operatorname{sen}(iz) = i \cdot \operatorname{senh} z \ \wedge \ \cos(iz) = \cosh z$
- $\operatorname{senh}(iz) = i \cdot \operatorname{sen} z \ \wedge \ \cosh(iz) = \cos z$
- $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \ \wedge \ |\cos z|^2 = \cos^2 x + \cosh^2 y$
- $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \ \wedge \ |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y$

**Definición 2.4.** Función Logaritmo Complejo
Se define el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ como:

$$\begin{aligned} \log z &\triangleq \ln|z| + i \cdot \arg z \\ &= \ln|z| + i \cdot (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para distintos $k$ tendremos un valor distinto de logaritmo. Esto contradice en cierto sentido a la definición de función, ya que tenemos aquí una relación **multivaluada**: para cada valor del dominio, resulta ser que tenemos más de un elemeto en el codominio que cumple con la ley aplicada. Es por ello que tratamos de enmendar este imprevisto definiendo alternativamente el **Logaritmo univaluado**:

$$\operatorname{Log} z \triangleq \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg} z$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del logaritmo complejo:

1. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
2. $\log \dfrac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$
3. $\log z^n = n \cdot \log z, \ n \in \mathbb{Z}$

Ya dada la definición del logaritmo complejo, podemos apreciar cómo ésta es la inversa de la función exponencial. Sea $w = \log z$, con $z \neq 0$, entonces $z = e^w$, y a partir de ello...

$$
\begin{aligned}
z &= |z|\ e^{i \arg z} \\
z &= |z|\ e^{i\ (\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} \\
z &= e^u \cdot e^{iv} = e^{u+iv}
\end{aligned}
$$

... con $u = \ln |z|$ y con $v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ (esto es, con el logaritmo natural ln definido únicamente para los reales positivos y con $k \in \mathbb{Z}$). Pero como $z = e^w$:

$$
\begin{aligned}
e^w &= e^{u+iv} \\
w &= u + iv \\
w &= \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)
\end{aligned}
$$

# 3. Nos vamos al Límite

¿Pensaban que con ver un par de funciones complejas acababa todo? Pues si nos tomamos el trabajo de estudiarlas, que no sea en vano. Ya que se vieron algunas funciones complejas, pasemos de largo y continuemos redefiniendo conceptos del cálculo en variable real de tal manera que engloben a las variables complejas. Si nos detuviésemos aquí, nos perderíamos de lo mejor.

**Definición 3.1.** Límites de funciones complejas
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que el límite de una función $f$ cuando $z$ tiende a un valor $z_0$ es igual a $w_0$ y se indica:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si el valor de $f(z)$ se hace cada vez más cercano a $w_0$ conforme $z$ se va acercando indefinidamente a $z_0$, pero sin igualarlo.
En lenguaje simbólico (con $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$), se tiene que el límite de $f(z)$ conforme $z \to z_0$ es $w_0$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall z \in \eta^*(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in \eta(w_0, \varepsilon)$$

O también si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

**Teorema 3.1.** *Unicidad del límite*
*Sea* $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. *Para* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y* $z$ *una variable compleja, si el límite*

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

*existe, entonces es único.*

Demostrar

**Teorema 3.2.** *Sea* $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. *Teniendo que* $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ *y* $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ *con* $z_0 = x_0 + iy_0$ *y* $w = u_0 + iv_0$, *entonces:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \ \wedge \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

Demostrar

Propiedades de los límites: dado que los límites $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$ existan, se cumple que...

1. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_1 \cdot w_2$
3. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_1}{w_2}$, siempre que $w_2 \neq 0$

# 4. El Infinito en un punto

Hay situaciones que surgen en donde se nos es necesario poder representar, de alguna manera, el infinito. Hablo de representarlo como un número en concreto, al que tienden los límites en el más allá, o como un punto, el punto donde se cortan dos rectas paralelas... Cuando tratamos con el conjunto de los números complejos, suele surgir esta necesidad. Por esto mismo es que definimos el **Punto Infinito**.

**Definición 4.1.** El Punto Infinito
El número complejo infinito, o **punto infinito**, denotado por $\infty$, es un único número complejo, para el cual el plano complejo no admite representación gráfica.
Podemos considerar a $\infty$ como un número complejo cuyo módulo es mayor que cualquier número real positivo dado, pero sin argumento.

Es en base a todo esto, definiremos como consecuencia al **conjunto complejo extendido** $\mathbb{C}^\infty$ como:

$$\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

## 5. Cotinuemos con Continuidad

Hemos definido límites de funciones de variables complejas, ahora, de qué tanta utilidad nos sería el límite si no fuese para definir, entre otras cosas, algo tan elemental como ser la continuidad del trazo de una función. Eso es, me refiero a la definición de continuidad, ¡aplicado a funciones de variable compleja!

**Definición 5.1.** Continuidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$. Se dice que $f(z)$ es **continua** en $z_0$ si satisface:

- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
- $\exists f(z_0)$
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

**Definición 5.2.** Continuidad sobre un conjunto $S$
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Diremos que $f$ es **continua en** $S$ si es continua en todo $z \in S$.

**Definición 5.3.** Función acotada
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Diremos que $f$ es una **función acotada** si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in S$.

En base a estas definiciones, se desprende el siguiente, e intuitivo, teorema.

**Teorema 5.1.** *Continuidad y acotación*
*Sea* $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
*Si* $S$ *es un conjunto compacto y* $f(z)$ *es una función continua en* $S$*, entonces* $f$ *es una función acotada.*