Sucesiones y series de números complejos

Breggia, Bruno M.

Quién alguna vez no se durmió contando ovejas... Claro quedó desde que se introdujeron los números complejos que los números no son todos para contar. El conjunto $\mathbb{C}$ no es un conjunto ordenado, pero no por ello nos vemos incapacitados de crear nuestras propias sucesiones de complejos. Y cuando hablo de sucesiones, hablo de sucesiones infinitas, como debe ser. Pero en vez de corresponderse con puntos en la recta numérica, aquí las sucesiones serán... puntos desparramados en el plano. Una cosa les anticiparé: trabajar con sucesiones y series implica domar el infinito, y para ello volveremos a nuestro olvidado amigo el plano complejo extendido $\mathbb{C}^\infty$, es decir, encarnaremos al infinito mismo en un punto... en un simple punto como cualquier otro... un mortal como los demás. ¡Iníciese este capítulo o no se acabará jamás!

Índice

1. Sucesiones de números complejos

Todos conocemos las sucesiones... de números reales. Pero a ser verdad, una sucesión de números complejos es una sucesión que, sorpresa, posee números complejos. Abstraer la idea de sucesión no es en absoluto complicado. Sin embargo, la definición formal nunca debe faltar:

Definición 1.1. Sucesiones de números complejos
Una **sucesión** de números complejos es una relación que a cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna un $z_n \in \mathbb{C}$, es decir:

$$n \in \mathbb{N} \to z_n \in \mathbb{C}$$

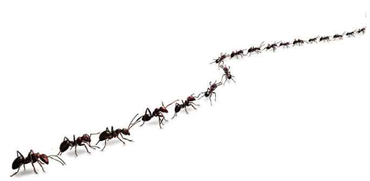
Hay dos maneras de anotar una sucesión:

- **Por comprensión**: consiste en denotar el término general z_n entre llaves

$$\{z_n\}$$

- **Por extensión**: consiste en nombrar uno por uno los elementos (preferiblemente los primeros) de la sucesión

$$z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$$



Vamos a repasar y pasar en limpio algunos conceptos aplicados a las sucesiones de números reales, pero aplicados a las de complejos. Primero y principal: **convergencia**.

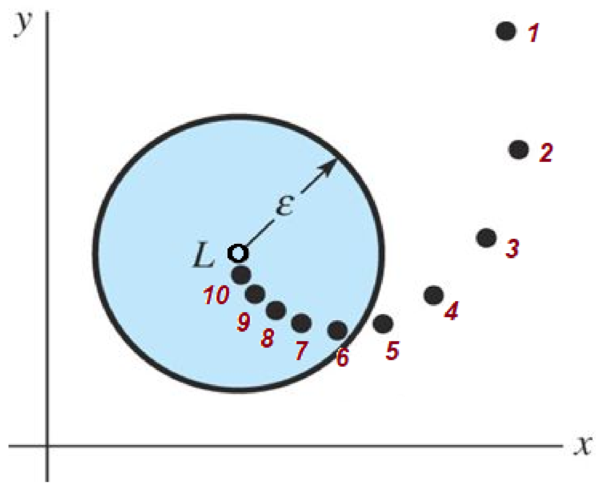
Definición 1.2. Convergencia
Una sucesión $\{z_n\}$ se dice ser **convergente** a un valor $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si dado un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un $\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

para todo $n > \delta$.
Si esto se cumple, diremos entonces que la sucesión posee límite, y lo denotaremos como:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Si una sucesión no es convergente, se dirá que es **divergente**.



De manera análoga a la de límites de funciones de variable compleja, es demostrable (y también bastante intuitivo) que el límite de una sucesión, si existe, es único.

Teorema 1.1. *Unicidad del límite*
Si una sucesión posee límite, entonces su límite es único.

El próximo teorema nos vincula el límite de sucesiones de números complejos con límites de números reales. Difícil no entenderlo.

Teorema 1.2. *Límite de una sucesión de complejos*
Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos y sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $z_n = x_n + i\ y_n$ land $z = x + i\ y$.
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

De esta manera, el estudio de sucesiones de números complejos se reduce al estudio de dos sucesiones de números reales. Y ya sabemos cómo operar con ellas.

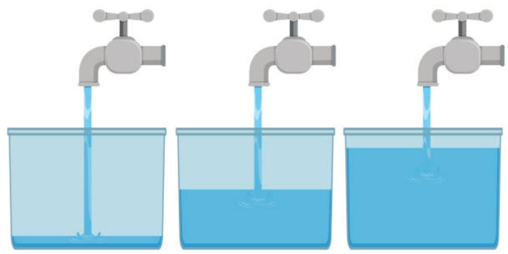
2. Series de números complejos

Procederemos de igual manera a dar definiciones rigurosas de lo que son las series de números complejos.

Definición 2.1. Serie de números complejos
Se denomina **serie** de números complejos $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ a la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ siendo

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} z_k$$

con $n, k \in \mathbb{N}$ y $z_k \in \mathbb{C}$.



La serie se definió como una **sucesión**, por lo que la misma puede ser o no convergente.

Definición 2.2. Serie convergente
Una serie de números complejos $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ se dice **convergente** si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ es convergente a algún valor $S \in \mathbb{C}$.
En caso contrario la serie será **divergente**.

Pero como el n-ésimo término de una serie representa la suma parcial de los n primeros términos de alguna otra sucesión $\{z_n\}$, entonces si la serie converge, esto quiere decir que encontramos el límite para la suma de todos los términos de la sucesión $\{z_n\}$. Por esto mismo es que viene a colación la siguiente definición:

Definición 2.3. Suma de la serie convergente
En caso de que la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ sea convergente a $S \in \mathbb{C}$, se dice que S es la **suma de la serie**, y se indica, por comprensión:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ó por extensión:

$$z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$$

Ahora, el teorema que nos vincula las series de número complejos con series de números reales:

Teorema 2.1. *Convergencia de series de números complejos*
Una serie de números complejos se dice convegrnete si y sólo si la serie de la parte real y la serie de la parte imaginaria son ambas convergentes en $\mathbb{R}$.
Simbólicamente, sean $z_n, S \in \mathbb{C}$ / $z_n = x_n + i\ y_n \wedge S = X + iY$. *Entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \wedge \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

Esto nos trae como consecuencia el siguiente corolario, que presentará la manera que utilizaremos de ahora en adelante para determinar la convergencia de series de números complejos.

Corolario 2.1. *Condición de convergencia de series*
Una serie de números complejos converge a S *si y sólo si la sucesión de los restos* $\{\rho_N\}$, *definida con* $\rho_N = S - S_N$, *converge a cero.*
Es decir, si

$$\lim_{N\to\infty} \rho_N = \lim_{N\to\infty} (S - S_N) = 0$$

3. Series de funciones complejas

Ahora llegó el momento de estudiar *series de funciones complejas*. Es decir, una serie formada por las sumas parciales de una sucesión que involucra una función de variable compleja en su término general. En fin, el resultado es una función con varios términos, y mientras más términos se consideren, mayor la precisión del resultado.

Estudiaremos primero la serie más común, y útil, que se nos presentará de ahora en adelante...

Definición 3.1. Series de Potencias
Las **series de potencias** son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ y z es cualquier punto de una región predeterminada en el plano complejo que contenga z_0.

Con esta presentación oficial de lo que es una serie de potencias de números complejos, podemos expresar su desarrollo como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^n + ...$$

Para el caso particular de que $a_n = 1$ y $z_0 = 0$, tenemos lo que denominamos **serie geométrica**, la cual denotamos como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ...$$

La **suma parcial** de la serie geométrica hasta sus N primeros términos (siempre que $z \neq 1$) viene dada por:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z_n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

Por otro lado, tenemos que si $|z| < 1$, entonces la serie geométrica es convergente, y la **suma de la serie** tiene curiosamente la forma:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} z_n = \frac{1}{1 - z}$$

La serie goemétrica es efectivamente convergente porque el límite de la **sucesión de los restos** $\rho_N(z)$ tiende a cero conforme N tiende a infinito. La expresión para tal sucesión (para el N-ésimo término) viene dada por:

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{1 - z}$$

Ahora, ustedes dirán: la expresión para $\rho_N(z)$ claramente no se vuelve nada pequeña conforme N tienda a infinito. Si esto es lo que están pensando, resuelvan el límite. Háganlo e impongan condiciones para que tal límite sea cero. Pues pequeño detalle el que complejos z / $|z| < 1$, al elevarlos a potencias positivas, su módulo decrece, y con ello dicho límite será cero.

Ahora, se vienen dos de las obras maestras del cálculo complejo basado en series...

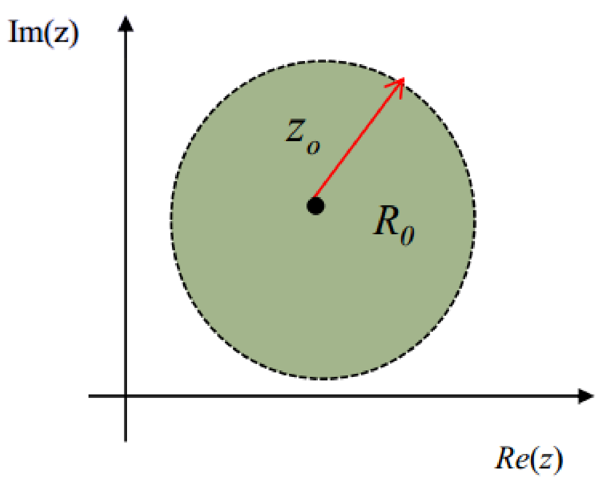
Teorema 3.1. *Teorema de Taylor*
*Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : |z - z_0| < R_0$. Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, $f(z)$ admite representación en **serie de Taylor**.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad |z - z_0| < R_0$$

en donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esta obra maestra nos permite representar una función $f(z)$ mediante una serie de potencias centrada en z_0 siempre que lo hagamos dentro de una región en la cual $f(z)$ sea analítica.



Sin embargo, ¿qué sucede si queremos centrarla en puntos en donde $f(z)$ no es analítica, o de manera genérica, si la región que consideramos contiene puntos en los cuales $f(z)$ no es analítica? Para ello viene Laurent a salvarnos...

Teorema 3.2. *Teorema de Laurent*
Sea $f(z)$ una función analítica en un anillo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente centrado en z_0, con $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.
*Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, $f(z)$ admite representación en **serie de Laurent**.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

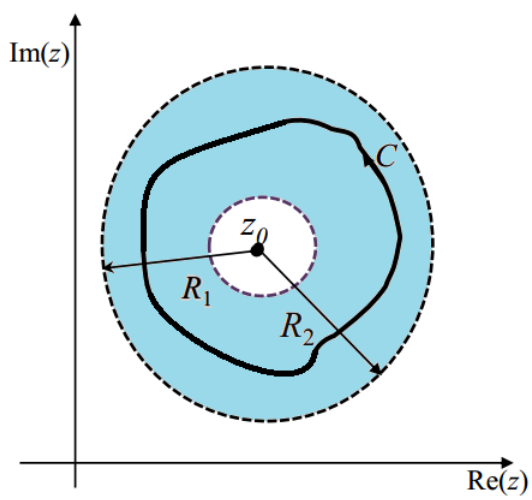
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \qquad n \in \mathbb{N}$$

Una expresión alternativa para la **serie de Laurent** viene dada por:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

...con los coeficientes c_n determinados de la siguiente manera:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \ dz \qquad n \in \mathbb{Z}$$



Claramente con Laurent podemos representar funciones $f(z)$ como series de potencias (positivas *y* negativas) en donde la de Taylor no podía. A esto lo logramos esquivando, o evitando mejor dicho, a los puntos en donde la función no es analítica. Pareciese ser que para aproximarse mejor al resultado en casos en que tengamos estos tipos de puntos la solución es concebir *también* infinitos términos de potencias decrecientes tanto como de potencias crecientes.

Por esto mismo la serie de Laurent pareciese ser más potente. Barre rincones donde la de Taylor no llega. Notaremos la practicidad de la serie de Laurent a partir de estos casos particulares:

- Cuando $R_1 = 0$, y el anillo se convierte en un entorno reducido dado por $\mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R_2$
- Cuando $z_0 = 0 \ \wedge \ R_2 = \infty$, en donde tendríamos lo que denominamos un entorno centrado en infinito dado por $\mathcal{D} : R_1 < |z| < \infty$

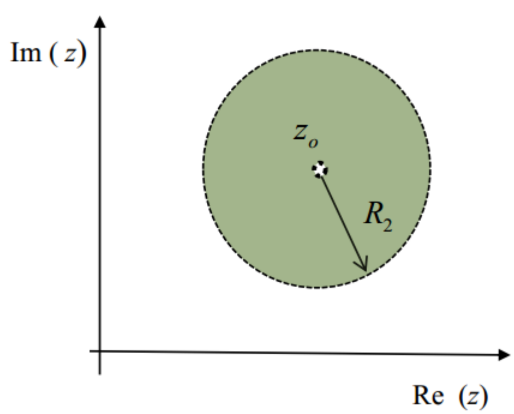
3.1. Serie de Laurent: $R_1 = 0$

Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R$ donde z_0 es una **singularidad aislada** de $f(z)$. Entonces $f(z)$ puede representarse por una serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

en donde la sumatoria de términos con exponente negativo se denomina **parte principal** de f en z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + ...$$



Cuando este caso particular se dé, podremos clasificar a la singularidad aislada en cuestión en tres tipos: como **removible**, **polo de orden** m, o **esencial**.

Definición 3.2. Singularidad removible o evitable
En z_0 existe una **singularidad removible** o **evitable** de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal nula. Es decir, los coeficientes b_n son todos cero

$$b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_n = ... = 0$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es una singularidad removible, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

Tal expresión es similar a una serie de Taylor, pero válida en un entorno reducido (que no incluye z_0), y en donde se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

Definición 3.3. Polo de orden m
En z_0 existe un **polo de orden** m de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal con un número finito de términos no nulos. El mayor exponente negativo determinará el orden m del polo

$$b_m \neq 0, \qquad b_{m+1} = b_{m+2} = ... = 0$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es un polo de orden m, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

En donde, si desarrollamos la expresión:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \\
f(z) &= \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}\right] \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m(z-z_0)^{m-m}\right] \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m\right]}_{\Phi(z)} \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\Phi(z)
\end{aligned}$$

Recuérdese que hemos hecho para este análisis la definición:

$$\Phi(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m$$

En donde $\Phi(z)$ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Se debe cumplir por lo tanto el siguiente límite:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = b_m$$

Definición 3.4. Singularidad esencial
En z_0 existe una **singularidad esencial** de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal con infinitos términos no nulos.

$$b_n \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es una singularidad esencial, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

Tal expresión equivale a la forma más general de la Serie de Laurent, en donde poseemos infinitos términos con exponentes negativos.

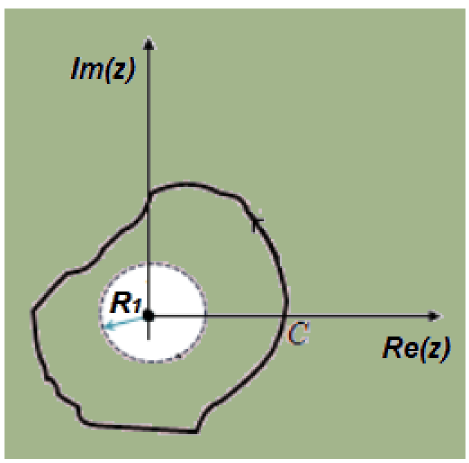
3.2. Serie de Laurent: $z_0 = 0$ y $R_2 = \infty$

Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, con $\mathcal{D} : R < |z| < \infty$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente alrededor de $z = 0$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, se tiene que $f(z)$ se puede representar en una serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad R < |z| < \infty$$

con los coeficientes dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{z^{n+1}} \, dz \ , \qquad n \in \mathbb{Z}$$



Una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ definida como $\mathcal{D} : R < |z| < \infty$ o simplemente $\mathcal{D} : R < |z|$ se denomina también un **entorno centrado en infinito**. Esto es así si consideramos el plano complejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$, lo que nos trae una nueva forma de ver las cosas. Por ejemplo, como todo punto en el plano complejo, una función cualquiera $f(z)$ puede poseer o no una singularidad en ∞. Pero ahora, ¿cómo sabemos eso?

Definición 3.5. Singularidad en ∞
Diremos que $f(z)$ posee una singularidad en ∞ si $g(w)$ posee una singularidad en $w = 0$, siendo $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ con $z = \frac{1}{w}$.

Claro está, no podría haber sido de otra forma más ingeniosa: usamos la transfomación $w = \frac{1}{z}$ para llevar el punto $z = 0$ al infinito y traer el punto $z = \infty$ hasta el origen de coordenadas. Todo esto, obviamente, en el plano comlpejo extendido $\mathbb{C}^\infty$. Sin el poder de la inversión, no tendríamos cómo más acercarnos tanto a infinito: lo traemos al frente de nuestros ojos para poder realizar sobre él el más minucioso de los análisis. Ahora podemos clasificar a este punto $w = 0$ como una singularidad común de $g(w)$ y trasladar las conclusiones al punto $z = \infty$ para $f(z)$.

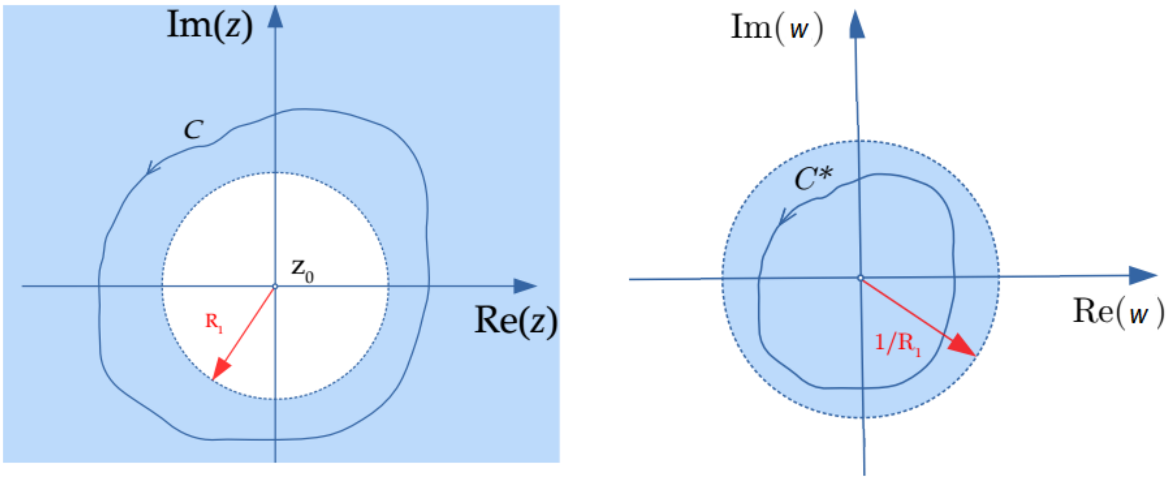
Dado que el desarrollo de la serie de Laurent para $f(z)$ puede reprsentarse como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \ , \qquad R_1 < |z| < \infty$$

...la transformación $g(w)$ resultará en:

$$\begin{aligned} g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{1}{w}\right)^n} \qquad \frac{1}{R_1} > |w| > 0 \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{w^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{w^n}}_{\textbf{parte principal}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \ , \qquad b_0 \triangleq a_0 \end{aligned}$$

Vemos que los coeficientes a_n y b_n del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ han cambiado de roles al realizar el cambio de variable, y resultan ahora en una función con singularidad aislada en $w = 0$, y con ello, los términos con coeficientes a_n, que ahora acompañan a las potencias negativas, constituyen la **parte principal** de la Serie de Laurent (esto corresponde ahora a un **caso 1**, de la cual ya se habló previamente).



Entonces, podemos expresar a $g(w)$ de la siguiente manera (con a_n y b_n redefinidos de manera que se adecúe a la formulación general):

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, w^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, w^{-n} \,, \qquad 0 < |w| < \frac{1}{R_1}$$

...donde los coeficientes están dados respecto a la curva transformada $\mathcal{C}^*$ como está dado a continuación:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}^*} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \;, n \in \mathbb{N}^0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}^*} \frac{g(w)}{w^{-n+1}} \;, n \in \mathbb{N}$$

La clasificación de singularidades en ∞ es, como sospecharán, la misma que para singularidades comunes y corrientes. Como vimos que una singularidad en $z = \infty$ es equivalente a una singularidad en $w = 0$ si consideramos $w = \frac{1}{z}$, entonces diremos que para $f(z)$, $z = \infty$ es una singularidad de tipo:

- **Evitable** o **removible**, si $w = 0$ lo es para $g(w)$.
- **Polo de orden** m, si $w = 0$ es un polo de orden m para $g(w)$.
- **Esencial**, si $w = 0$ lo es para $g(w)$.

4. Ceros de $f(z)$

Añadiremos otra catalogación para puntos en el plano complejo respecto de una función: llamaremos **ceros** de una función $f(z)$ a todo complejo z_0 para el cual $f(z_0) = 0$. No es un concepto nada nuevo. En cálculo de una variable ya llamábamos ceros a todo valor real para el cual una función valía cero. Pero ahora lo generalizamos, como todo lo visto hasta ahora, y le agregamos mayor *complejidad* al tema.

Definición 4.1. Ceros de una función
Se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tiene un **cero** en $z_0 \in \mathcal{D}$ si $f(z_0) = 0$.

Si recuerdan, los ceros también podían tener orden...

Definición 4.2. Ceros de orden m
Se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tiene un **cero de orden** m en $z_0 \in \mathcal{D}$ si

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \ , \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

En otras palabras, z_0 es un cero de $f(z)$ de orden m si la m-ésima derivada de $f(z_0)$ es la primera en ser distinto de cero. Las $m-1$ derivadas previas (más la misma función sin derivar) valen todos cero en z_0.

Si z_0 es un cero de orden m de $f(z)$, entonces podemos expresar a f con una serie de Taylor (en un disco abierto $\mathcal{D}$ de radio R) de la forma

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
f(z) &= a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + ... \\
f(z) &= (z-z_0)^m \underbrace{[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + ...]}_{\Phi(z)} \\
f(z) &= (z-z_0)^m \ \Phi(z)
\end{aligned}$$

...para todo z en $\mathcal{D}$, nuestro dominio de interés. En resumen,

$$f(z) = (z-z_0)^m \ \Phi(z) \ , \qquad |z-z_0| < R$$

donde $\Phi(z)$ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$.

Si vamos a considerar el plano complejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$, entonces deberemos dar las siguientes definiciones...

Definición 4.3. Analiticidad en ∞
$f(z)$ es analítica en $z = \infty$ si $g(w)$ es analítica en $w = 0$, siendo

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) \quad , \qquad z = \frac{1}{w}$$

Definición 4.4. Ceros de orden m en ∞
$f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = \infty$ si $g(w)$ posee un cero de orden m en $w = 0$, siendo

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) \quad , \qquad z = \frac{1}{w}$$

Puesto de otra forma, se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, con $\mathcal{D} : |z| > R_1$, tiene un cero de orden m en $z = \infty$ si el desarrollo en serie de $f(z)$ en un entorno de ∞ tiene a m como el mayor exponente negativo acompañado por un coeficiente no nulo. Es decir, si:

$$b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{m-1} = 0 \ , \qquad b_m \neq 0$$

Esta última forma de determinar el orden de los ceros en infinito surge de considerar la expansión en serie (de Laurent, caso 2) de una función $f(z)$ que sea analítica en infinito:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad R < |z|$$

Obsérvese que tal desarrollo en serie carece de las potencias con exponente positivo, de tal manera que $g(w)$ posea un desarrollo en Serie Taylor tal como sigue:

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \qquad \frac{1}{R} > |w|$$

Tal desarrollo en Serie de Taylor para $g(w)$ centrado en $w = 0$ es consecuencia inmediata de la analiticidad de la función en $w = 0$, dado que $f(z)$ lo es para $z = \infty$.

Si se cumple que $w = 0$ es un cero de orden m para $g(w)$, entonces:

$$g(w) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n w^n \qquad \frac{1}{R} > |w|$$

Con ello, $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = \infty$, y $b_1 = b_2 = ... = b_{m-1} = 0$ (corroborando el método de análisis propuesto en la Definición anterior). Tenemos entonces una expansión en serie de f dada por:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad R < |z| \\
f(z) &= \frac{b_m}{z^m} + \frac{b_{m+1}}{z^{m+1}} + \frac{b_{m+2}}{z^{m+2}} + ... \\
f(z) &= \frac{1}{z^m} \underbrace{\left[b_m + \frac{b_{m+1}}{z} + \frac{b_{m+2}}{z^2} + ... \right]}_{\Phi} \\
f(z) &= \frac{1}{z^m} \Phi(z)
\end{aligned}
$$

Donde $\Phi(z)$ es analítica en $z = \infty$ y $\Phi(\infty) \neq 0$. Es decir, $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z) \neq 0$.

5. Residuos

Ahora presentamos lo que es el residuo. Ojo que no es nada trivial, y aunque la definición pareciese no tener un fundamento, en base a él se construirán grandes teoremas. En una serie infinita todo término sirve.

Definición 5.1. Residuo
Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$, entonces existe $R_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(z)$ es analítica $\forall z \in \mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R_2$. Podemos expresar $f(z)$ en serie de Laurent como:

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2
$$

Se define **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$ y se indica $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ al coeficiente b_1 que corresponde al término $\dfrac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en z_0. Simbólicamente:

$$
\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1
$$

Recordando el Teorema de la Serie de Laurent, tenemos que el coeficiente b_n está dado por

$$
b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} \, dz \ , \qquad n \in \mathbb{N}
$$

...con $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente alrededor de z_0. Tenemos entonces, a partir de la definición de residuo, que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= b_1 \\
\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\; dz \\
2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\; dz
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos... ¡una nueva expresión para la integral de contorno de una función de variable compleja! Admírenla:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\; dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Como está a la moda el incluir a ∞ en la fiesta, extendemos la definición de residuo para el plano complejo extendido, definiendo el **residuo en infinito**.

Definición 5.2. Residuo en ∞
Sea $f(z)$ analítica para $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, siendo $\mathcal{D} : |z| > R_1$.
El **residuo** de $f(z)$ en ∞ se define como el negativo del coeficiente b_1, el coeficiente que acompaña a la potencia z^{-1} en el desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno de ∞. Simbólicamente:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -b_1$$

5.1. Reglas para calcular el residuo

¿Cómo haremos entonces para calcular el residuo? Seguramente dirán que obvio: buscamos el desarrollo en serie de Laurent de la función y discriminamos b_1. Pero créanme que no siempre es el caso más eficiente. Pues vean que si existen formas más fáciles de encontrarlo, nos ahorramos de desarrollar toda la serie de Laurent para hallar sólo *un* término.

Regla 1. *Cálculo del residuo de $f(z)$ en $z = z_0$, siendo $z = z_0$ un polo simple.*

Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)}\Phi(z)$$

con $\Phi(z)$ analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \Phi(z_0) \\ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\ f(z)\end{aligned}$$

Regla 2. *Cálculo del residuo de $f(z)$ en $z = z_0$, siendo $z = z_0$ un polo de orden m.*

Se tendrá que

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m}\Phi(z)$$

con $\Phi(z)$ analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\Phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Regla 3. *Cálculo del residuo para $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ para $z = z_0$, con $z = z_0$ un polo simple*

Sea

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$, entonces se puede calcular el residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ siendo $z = z_0$ un polo simple o polo de orden 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Todo muy lindo, sí... ¿y si quiero calcularlo para ∞? Pide, y lo tendrás, a continuación se listarán:

1. Si $f(z)$ tiene un cero de primer orden en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\ f(z)$$

2. Si $f(z)$ tiene un cero de segundo orden o superior en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

3. Regla general para el residuo de $f(z)$ en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

Dominando estos métodos te convertirás en domador del infinito.

6. Los residuos como herramienta de integración

Se estarán preguntando seguro: ¿para qué cuernos sirve el residuo? Pues se lo definió como el coeficiente del término con exponente -1, pudiendo haber sido cuaquier otra cosa, y encima pareciese que nos hacemos lío para encontrarlo sin tener que desarrollar la serie. Pues la cuestión es ésta: se acordarán que a partir de la definición de residuo y la aplicación del Teorema de Laurent (página 19), habíamos hallado una nueva expresión para la integral de contorno de $f(z)$. Esto resume lo que viene: *los residuos sirven para facilitarnos la integración*. Y había sido una cosa tan simple... ¿quién diría?

Teorema 6.1. *Teorema de los Residuos de Cauchy*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene.
Sea $f(z)$ analítica sobre $\mathcal{C}$ y en su interior, a excepción de un número finito de puntos singulares z_k (con $k = 1, 2, ..., n$) interiores a $\mathcal{C}$.
Entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Demostrar

Este teorema en cierto sentido abarca algo que ya conocíamos... pues con el Teorema Integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos nos anticipamos que, conociendo las singularidades de $f(z)$ que encierra nuestro contorno $\mathcal{C}$ de integración, podíamos calcular la integral de dicha fucnión por sobre $\mathcal{C}$. Pero la diferencia era que sumábamos las integrales de camino en torno a cada una de las singularidades. Ahora, Cauchy nos dice (un indeciso total, a cada rato nos propone una forma diferente de integrar) que se lo puede hacer sumando los *residuos* de $f(z)$ evaluado en las singularidades que encierra $\mathcal{C}$, y luego multiplicarlo por $2\pi i$ para darle el toque final. Si somos capaces de encontrar tales residuos sin mucho problema, entonces preferirías aplicar este teorema antes del Teorema Integral para Dominios Múltiplemente Conexos (ambos del mismo hombre, así que ni nos molestemos en aclarar nombres).

A continuación, un teorema que nos va a invertir la forma de cálculo de la integral...

Teorema 6.2. *Reducción a un único residuo*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene.
*Sea $f(z)$ es analítica sobre $\mathcal{C}$ y en todo punto del plano finito **exterior** a $\mathcal{C}$.*
Entonces:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

Demostrar

O sea... si la función se comporta de manera tranquila (me refiero a que es analítica) en los exteriores de la curva $\mathcal{C}$ orientada positivamente, conoceremos su integral con calcular un único residuo... ¡en infinito! Mira, clarito está:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right) \right] \\
\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)
\end{aligned}$$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right)$

¿recuerdas?

Y podemos cambiar el sentido de integración para obtener...

$$\begin{aligned}
\ointclockwise\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= -\ointctrclockwise\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz \\
\ointclockwise\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)
\end{aligned}$$

Esta última expresión es la integral de $f(z)$ por sobre $\mathcal{C}$ recorrida **negativamente**, o en sentido horario. Sería equivalente en cuanto a notación a lo siguiente:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \oint_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

La cuestión es que podemos integrar por sobre $\mathcal{C}$ a partir del residuo que $f(z)$ posee en ∞, en el más allá... ¿no es eso increíble?

Pero en teoría todo se ve muy lindo, todo color de rosas. Pero no se dará siempre que entre la curva $\mathcal{C}$ y el infinito la función sea perfectamente analítica. Si hay alguna singularidad, por fuera de la curva, que no sea infinito (pues éste siempre lo será), el teorema no aplica. ¿Se puede hacer algo al respecto? Sí señor: generalizar el teorema.

Teorema 6.3. *Teorema de los Residuos de Cauchy en el Infinito*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ que incluya una vecindad perforada de ∞.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene, fuera del cual la función $f(z)$ es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares aislados z_k (con $k = 1, 2, ..., n$) exteriores a $\mathcal{C}$.
Entonces:

$$\oint_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \right)$$

Demostrar

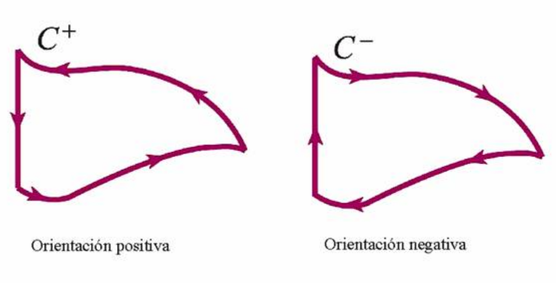
Este teorema es equivalente a

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = -2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \right)$$

Donde $z = \infty$ es claramente *siempre* una singularidad de $f(z)$, pero como se calcula de manera diferente, se lo discrimina por aparte y no se lo incluye entre las n singularidades en la sumatoria. Pero la esencia es: la integral $f(z)$ por sobre $\mathcal{C}$ es igual a $-2\pi i$ por la sumatoria de **todos** los residuos de $f(z)$ en los puntos singulares que posee por fuera de $\mathcal{C}$. Así de simple.

Si son capaces de admirar el asombroso poder de cálculo del que somos capaces a partir de este teorema, serán concientes de que a partir de ahora, seremos capaces no sólo de conocer la integral de contorno de una función a partir de las singularidades interiores a $\mathcal{C}$, sino también a partir de las singularidades que *no* encierra, las que están fuera de él... esto es maravilloso. Conociendo la parafernalia, sabremos el valor de la integral. *Dime las* *singularidades que encierras (o las que no), y yo te diré quién eres....*

Recuerden que con $\mathcal{C}$ se representa una curva en sentido antihorario (o positivamente), y con $-\mathcal{C}$ representamos la misma curva recorrida en sentido horario (o negativamente).



La orientación es clave, ya que eso nos indica cuál es el interior de la región que "encierra" la curva. Si caminásemos por el borde de la curva en el sentido indicado, se define la región que queda a tu *izquierda* como el "interior"de la curva. El resto es el exterior. Así que... dependiendo de cómo recorres una curva cerrada $\mathcal{C}$, podrías encerrar un espacio finito, o encerrar una región inmensa que incluye a infinito. Ten cuidado con eso.

En conclusión, con estos últimos teoremas, si es que llegaron a notarlo, resumimos básicamente *todos* los métodos de integración anteriores, en un par de fórmulas que tienen en cuenta las singularidades de una función de variable compleja $f(z)$ por dentro y por fuera de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$. Para aplicar estos teoremas vistos, es que serán herramientas imprescindibles las reglas del cálculo de residuos.

Que no haya integral que escape a nuestro alcance. ¡Amén!

Fin