Regiones en el Plano Complejo

Breggia, Bruno M.

El Plano de Argand, o Plano Complejo, es un plano de extensión infinita, pero no tenemos por qué asustarnos, conocemos ya planos de ese estilo, como $\mathbb{R}^2$. Éste, sin embargo, nos esconde muchas sorpresas nuevas. Para adentrarnos a este laberinto de sorpresas que encierra $\mathbb{C}$, debemos estudiarlo meticulosamente, parte por parte. Es zambullirnos a una pileta de definiciones nuevas y abstracciones. Así que pónganse las antiparras y aguanten la respiración.

Índice

1. Conjuntos y elementos, un repaso

Definición 1.1. Conjuntos
Un conjunto es una agrupación bien definida de objetos. Esos objetos pueden ser números, letras, personas, otros conjuntos, etc.

Los conjuntos se denotan con letra mayúscula, y los objetos que lo componen se denominan **elementos**.

Definición 1.2. Pertenencia
Si un elemento x forma parte de un cojunto A, diremos que el elemento x **pertenece** a A, y se denota mediante:

$$x \in A$$

En caso contrario, diremos que x *no pertenece* a A, y se escribe:

$$x \notin A$$

Hay dos maneras de anotar conjuntos:

- Por **comprensión**: cuando se describe una propiedad que caracteriza a todos sus elementos.
$$A = \{x \,:\, x \text{ cumple cierta condición}\}$$
- Por **extensión**: se listan cada uno de sus elementos explícitamente.
$$A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

1.1. Igualdad de Conjuntos

Diremos que dos conjuntos son **iguales** si y sólo si ambos están formados por los mismos elementos.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B \wedge \forall x \in B \rightarrow x \in A$$

La igualdad de conjuntos presenta las siguientes propiedades:

- **Reflexiva**: todo conjunto es igual a sí mismo.
- **Simetría**: $A = B \Leftrightarrow B = A$
- **Transitiva**: Si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

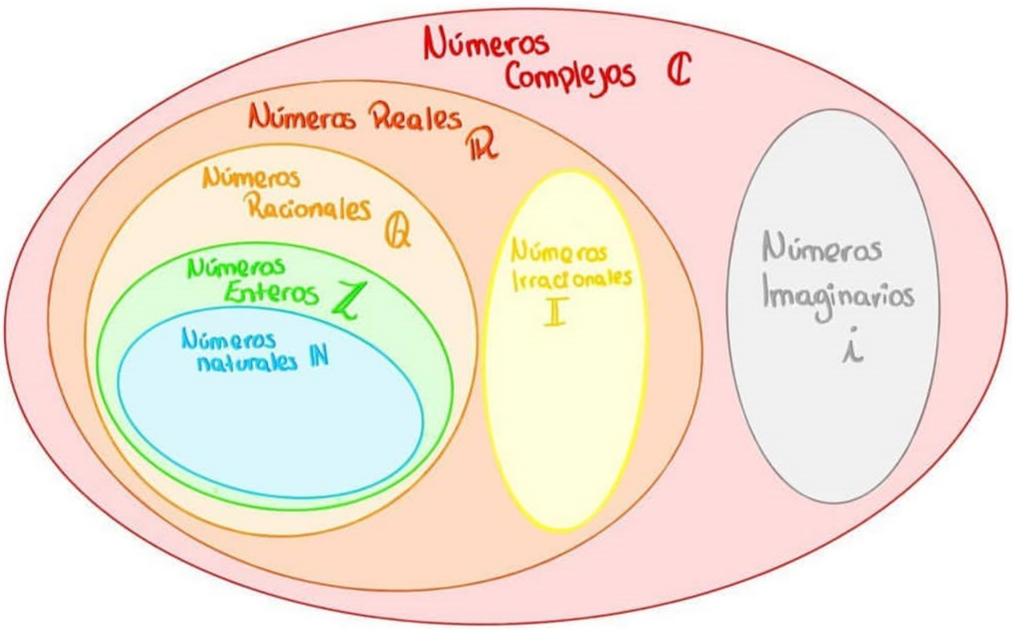
1.2. Subconjuntos

Se dice que A es un **subconjunto** de B si todos los elementos de A también son elementos de B. Si A es un subconjunto de B, lo denotaremos como:

$$A \subset B$$

El conjunto que no contiene ningún elemento se llama **Conjunto Vacío**, y se denota por $\emptyset$. El conjunto vacío es único, y éste es subconjunto de todo conjunto.

De manera similar, diremos que el **Conjunto Universal** U es el conjunto de *todos* los elementos en el contexto en el cual estamos trabajando.



1.3. Operaciones entre conjuntos

Entre conjuntos vamos a definir las siguientes operaciones:

- **Unión**: la unión entre dos conjuntos A y B se denota $A \cup B$ y es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

- **Intersección**: la intersección entre dos conjuntos A y B se denota $A \cap B$ y es el conjunto de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B.

- **Complemento**: el complemento de un conjunto A, que se denota por A^C, es el conjunto de todos los elementos que *no* están en A. De tal manera que la unión de cualquier conjunto con su complemento es igual al conjunto universal, y la intersección es el conjunto vacío.

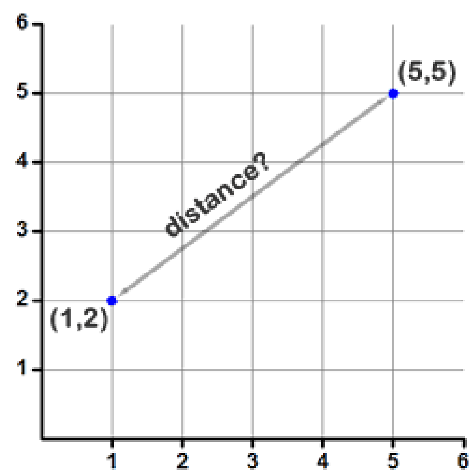
2. Definiciones en el Plano de Argand

Ahora volvemos a tierra y nos adentraremos específicamente en el conjunto $\mathbb{C}$, el conjunto de todos los números complejos. Mucho nos espera por delante.

Definición 2.1. Distancia entre Números Complejos
La distancia entre dos números complejos z_1, z_2 se define como:

$$d(z_1, z_2) \triangleq |z_1 - z_2|$$

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |z_1 - z_2| \\ &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| \\ &= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\ &= \sqrt[2]{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

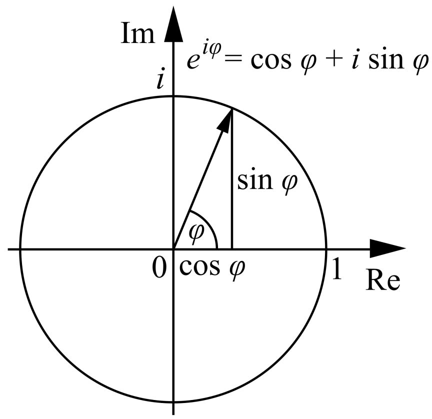


Definición 2.2. Circunferencia
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, se define **circunferencia** de centro z_0 y radio δ al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 sea δ, es decir, que $d(z, z_0) = \delta$.
Expresaremos a la circunferencia S simbólicamente de la siguiente manera:

$$S(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = \delta\}$$

$$\begin{aligned} d(z, z_0) &= \delta \\ \sqrt[2]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \delta \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \delta^2 \end{aligned}$$

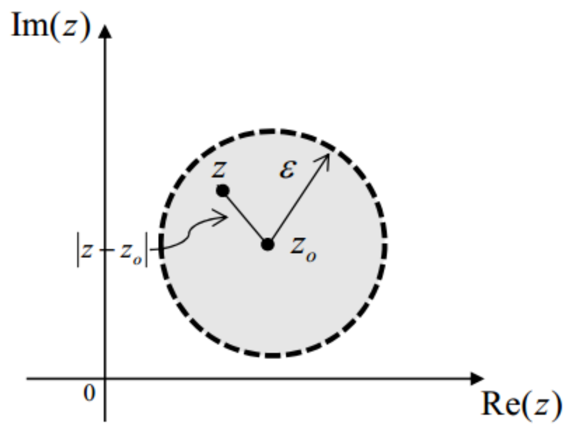
Vemos que, trabajando con las partes real e imaginaria de los números complejos, llegamos a la expresión para una circunferencia en el plano $\mathbb{R}^2$, centrada en (x_0, y_0) y de radio δ.



Definición 2.3. Entorno
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se define **entorno** de centro z_0 y radio ε al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 sea menor a ε, es decir, que $d(z, z_0) < \varepsilon$.
Expresaremos al entorno η simbólicamente de la siguiente manera:

$$\eta(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$\begin{array}{rcl} d(z, z_0) & < & \varepsilon \\ \sqrt[2]{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} & < & \varepsilon \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 & < & \varepsilon^2 \end{array}$$



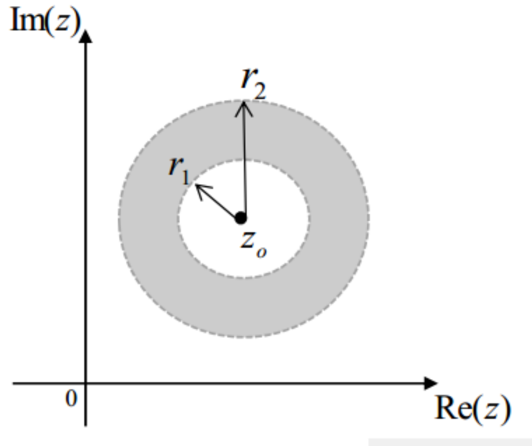
Definición 2.4. Anillo o Corona
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ con $r_1 < r_2$, se define **corona** o **anillo** de centro z_0 al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 se encuentre entre r_1 y r_2.
Expresaremos al anillo A simbólicamente de la siguiente manera:

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

... o también:

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$$

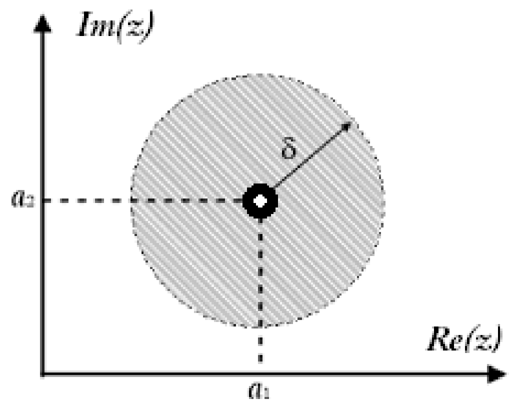
$$
\begin{array}{ccc}
r_1 < & d(z, z_0) & < r_2 \\
r_1 < & \sqrt[2]{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} & < r_2 \\
r_1^2 < & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 & < r_2^2 \\
 & & \\
r_1^2 \leq & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 & \leq r_2^2
\end{array}
$$



Definición 2.5. Entorno reducido
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se define **entorno reducido** de centro z_0 y radio ε al conjunto de $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq z_0$ tales que su distancia a z_0 sea menor que ε. También se denomina entorno **perforado** o **punteado**, ya que su única diferencia con un entorno propiamente dicho es que no incluye el complejo z_0 (el centro del entorno).
Expresaremos al entorno reducido η^* simbólicamente de la siguiente manera:

$$\eta^*(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$
\begin{array}{ccc}
0 < & d(z, z_0) & < \varepsilon \\
0 < & \sqrt[2]{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} & < \varepsilon \\
0 < & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 & < \varepsilon^2
\end{array}
$$



3. Clasificando Puntos

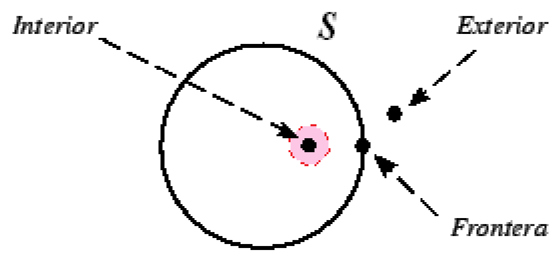
Para avanzar más en las nociones de conjuntos complejos y pertenencia, debemos tener en claro las distintas definiciones de puntos que a continuación se presentarán.

Definición 3.1. Punto Interior
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto interior** de S si existe un entorno de z_0 cuyos puntos sean todos de S.
Simbólicamente, z_0 es un punto interior de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \subset S$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \eta(z_0, \varepsilon), z \in S$$

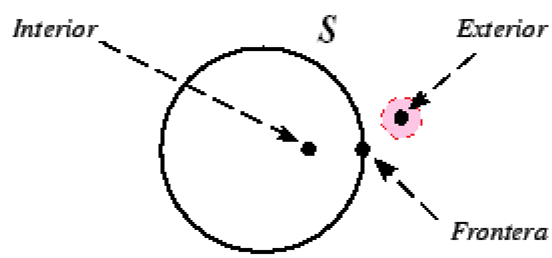


Definición 3.2. Punto Exterior
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto exterior** de S si existe un entorno de z_0 que no contenga ningún punto de S.
Simbólicamente, z_0 es un punto exterior de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \cap S = \emptyset$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \eta(z_0, \varepsilon), z \notin S$$

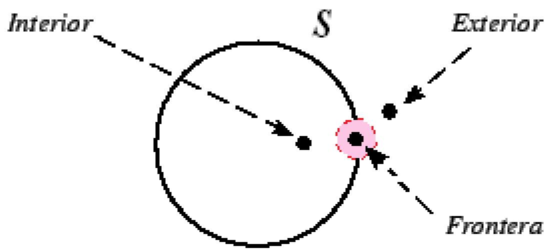


Definición 3.3. Punto Frontera
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto frontera** de S si no es un punto interior ni punto exterior de S. Es decir, todo entorno con centro en z_0 tiene tanto puntos que pertenecen a S como puntos que no.
Simbólicamente, z_0 es un punto frontera de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists z_1 \in \eta(z_0, \varepsilon)/z_1 \in S) \wedge (\exists z_2 \in \eta(z_0, \varepsilon)/z_2 \notin S)$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \wedge \eta(z_0, \varepsilon) \cap S^C \neq \emptyset$$



`OBSERVACIÓN:` un punto frontera de un conjunto S puede o no pertenecer al conjunto S. El que sea frontera no indica nada respecto a si está incluido en el conjunto, sino sólo a su condición física de delimitador del conjunto. Su inclusión en el mismo estará determinada por la forma en que se defina S.

En una representación gráfica, si el contorno de un conjunto es una línea sólida, incluye sus puntos frontera, si es una línea punteada, no los incluye.

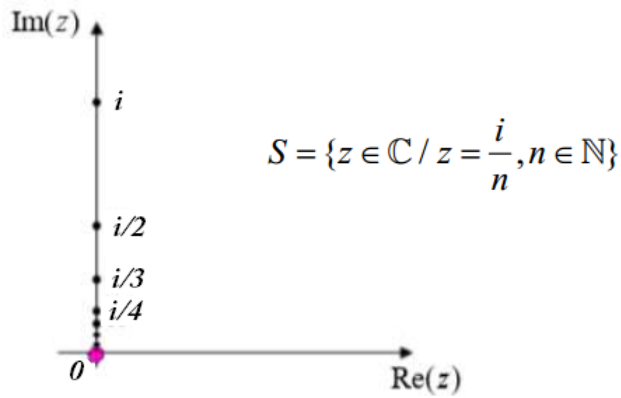
`OBSERVACIÓN:` al conjunto de los puntos frontera de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se lo denomina **frontera** de S, y se lo denota como δS.

Definición 3.4. Punto de Acumulación o Punto Límite
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto de acumulación** o **punto límite** de S si todo entorno centrado en z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0.
Simbólicamente, z_0 es un punto límite de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta^*(z_0, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists z \in \eta(z_0, \varepsilon) / z \in S \wedge z \neq z_0)$$



En el conjunto descripto en la imagen anterior, el punto $z = 0$ es el único punto de acumulación.

4. Conjuntos en el Plano Complejo

Ahora vamos a clasificar los conjuntos. Todo conjunto que se defina en el plano complejo de ahora en adelante deberemos catalogarlo según las clasificaciones que veremos a continuación:

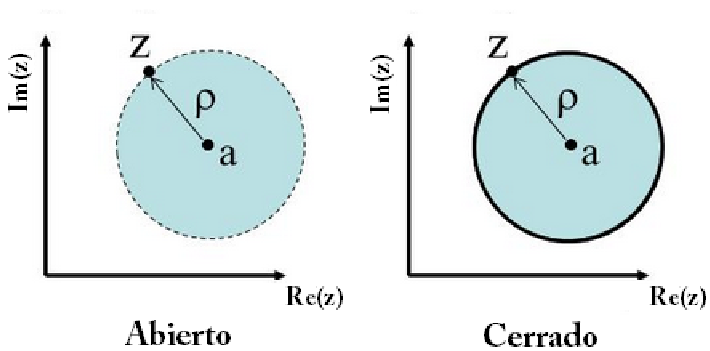
Definición 4.1. Conjunto Abierto
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto abierto** si no contiene ninguno de sus puntos frontera. Con ello, tenemos que todos sus puntos son interiores, o que S es el conjunto vacío ($S = \emptyset$).

Definición 4.2. Conjunto Cerrado
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto cerrado** si contiene a *todos* sus puntos frontera. También podemos definirlo como sigue:

- S es cerrado si S^C es un conjunto abierto.
- S es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 4.3. Clausura
Sea $S \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Se denomina **clausura** de S al conjunto unión de S con su frontera. Se denota con $\overline{S}$.

$$\overline{S} = S \cup \delta S$$

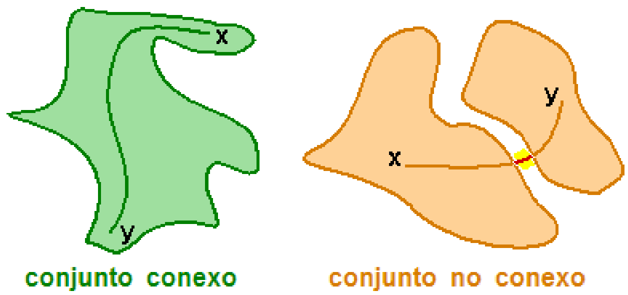


OBERVACIÓN: hay conjuntos en el plano complejo que no son abiertos ni cerrados (por ejemplo, si incluyen algunos de sus puntos frontera pero no a todos). Y también pueden haber conjuntos que sean abiertos **y** cerrados, como todo el conjunto $\mathbb{C}$ en sí mismo.

Definición 4.4. Conjunto Conexo
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto conexo** si y sólo si todo par de puntos de S se pueden unir mediante una poligonal C compuesto por la unión de un número finito de segmentos rectos sucesivos, tal que C está íntegramente contenida en S.

Definición 4.5. Dominio Complejo
Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo se denomina **dominio complejo.**

Definición 4.6. Región en el Plano Complejo
Se denomina **región en el plano complejo** a la unión de un dominio $S \subset \mathbb{C}$ con cualquier subconjunto de δS.
Es decir, es la unión de S con algunos, ninguno o todos sus puntos frontera.



OBERVACIÓN: tenemos que todo entorno es un dominio, al no incluir su frontera, y ser conexo. A su vez, todo anillo es conexo, aunque no necesariamente es un dominio, ya que puede, o no, contener sus puntos frontera (puede no ser abierto).

De ambos casos mencionados, tenemos entonces que todo entorno es un dominio, mientras que sólo los anillos que sean abiertos lo serán.

Definición 4.7. Conjunto Acotado
Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es **acotado** si existe un círculo centrado en un $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $R \in \mathbb{R}^+$ finito que lo contiene.
En caso de no cumplir con lo anterior, diremos que es **no acotado** (es de extensión infinita).

Definición 4.8. Conjunto Compacto
Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ cerrado y acotado se dice que es un conjunto **compacto.**

5. Recapitulando

Llegados aquí al final de la lección, se han visto muchos conjuntos y una inmensa cantidad de definiciones nuevas. Todo esto no es para agobiarnos, sino para adentrarnos de a poco, y de manera formal, en el concepto estrella de la disciplina: las *funciones de variables complejas.* Así que tienen mi palabra, esto se pondrá **mejor**.

¿El barbero... se afeita a sí mismo?