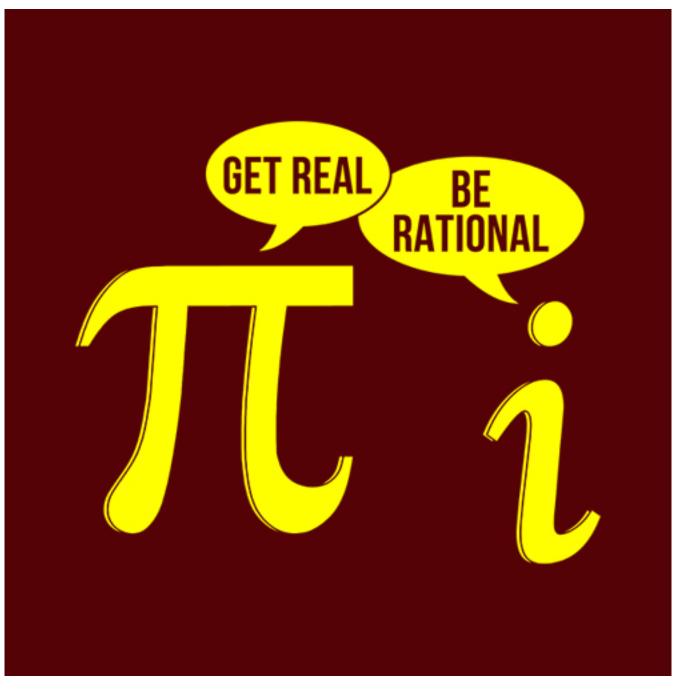
Propiedades de Números Complejos

Breggia, Bruno M.

Los Números Complejos... aquellos números cuyo nombre les hace mala fama, pero son clara evidencia de cómo la necesidad es la madre de todo invento, o mejor dicho... propulsora de todo *descubrimiento*, como lo son los hallazgos matemáticos. ¿Es la unidad imaginaria un número inventado? Y... sí, como todos los demás. Como el 1, el 2, el 3.14, el $\frac{1}{3}$, pero se los creó para modelar algo que va más allá del alcance de la manipulación del hombre. Allí, entre todos esos números, agregaremos a la unidad imaginaria i, que como verán, o mejor dicho, no verán, no representa una *cantidad*, sino una entidad meramente imaginaria, una abstracción *pura*. Por ello, sólo nos resta hecharnos para atrás y contemplar cómo este enriedo se arma solo... tratando de **entender.**

Les damos la oficial bienvenida al mundo de *las Variables Complejas.*



Índice

1. El número Complejo

Definición 1.1. Número Complejo
Un Número Complejo se define como un par ordenado de números reales:

$$z = (x, y)$$

Con $x, y \in \mathbb{R}$. La primer componente del par ordenado se denomina la **parte real** del número complejo, y se expresa como:

$$\mathfrak{Re}(z) = x$$

El segundo componente del par se denomina la **parte imaginaria** del número complejo, y la denotamos:

$$\mathfrak{Im}(z) = y$$

El conjunto de **todos** los número complejos se designa con $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

2. Igualdad entre complejos: aclarando lo obvio

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales entre sí. Dicho simbólicamente, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z_1) = \mathfrak{Re}(z_2) \wedge \mathfrak{Im}(z_1) = \mathfrak{Im}(z_2)$$

3. Operaciones Definidas en $\mathbb{C}$

Para poder hacer cálculos con estos nuevos números, deberemos primero definir qué operaciones serán válidas entre ellos, y cómo proceder en cada caso. Sabemos sumar números reales, pero los complejos son tuplas, o pares ordenados. Así que damos lugar a nuestra imaginación para que abstraiga los conceptos de suma y multiplicación para poderlos aplicar con los elementos del conjunto $\mathbb{C}$.

Definición 3.1. Suma de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \triangleq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Con esto, la suma de números complejos se define en términos de sumas de números reales, y sí que sabemos sumar reales. Problema resuelto.

Definición 3.2. Producto de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) \triangleq (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Aquí pareciese que la cuestión se pone menos intuitiva, pero créanme que esto es por un bien mayor, que quedará bien en claro cuando avancemos más adelante y nos adentremos más en el tema. En fin, el producto entre complejos se define en términos de productos y sumas entre reales, operaciones que ya sabemos realizar. Problema resuelto.

3.1. Propiedades algebraicas

Se tiene que para $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se cumple que:

1. **Propiedad de Cierre**:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

$$z_1 z_2 \in \mathbb{C}$$

2. **Propiedad Conmutativa**:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

3. **Propiedad Asociativa**:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

4. **Propiedad Distributiva**: del producto respecto a la suma

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

5. Existencia del **Elemento Neutro aditivo**:

$$\exists ! z \in \mathbb{C} \ / \ z_1 + z = z + z_1 = z_1$$

El elemento neutro aditivo z resulta ser único, y es el complejo $(0,0)$. De ahora en más,su notación será equivalente a $z = (0,0) = 0$.

6. Existencia de la **Identidad Multiplicativa**:

$$\exists ! z \in \mathbb{C} \ / \ z_1 z = z z_1 = z_1$$

El elemento neutro multiplicativo z resulta ser único, y es el complejo $(1,0)$. De ahora en más, su notación será equivalente a $z = (1,0) = 1$.

7. Existencia del Inverso Aditivo (**opuesto**):

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \ \exists ! (-z) \in \mathbb{C} \ / \ z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Se dice entonces que $-z$ es el opuesto de z. Como la relación es recíproca, podemos decir también que z es el opuesto de $-z$.

8. Existencia del Inverso Multiplicativo (**recíproco**):

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \ \exists ! z^{-1} \in \mathbb{C} \ / \ z z^{-1} = z^{-1} z = 1$$

Se dice entonces que z^{-1} es el recíproco de z. Como la relación es recíproca, podemos decir también que z es el recíproco de z^{-1}.

De esta manera vamos construyendo, desde los cimientos hasta la cima, las bases y principios del cálculo con variables complejas, sobre los cuales nos respaldaremos a la hora de partir a realizar análisis matemáticos más avanzados. ¡Bienvenidos a $\mathbb{C}$!

3.2. Unas operaciones más

Habiendo definido los opuestos y recíprocos, nos vemos habilitados ahora a definir un par de operaciones más, que son, por supuesto, análogas a su contrapartida en el conjunto de los números reales.

Definición 3.3. Diferencia de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1 - z_2 \triangleq z_1 + (-z_2)$$

Donde $-z_2$ es el opuesto de z_2.

Con esto, ¡la diferencia de números complejos se define en términos de su suma!. Bien simple.

Definición 3.4. Cociente de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

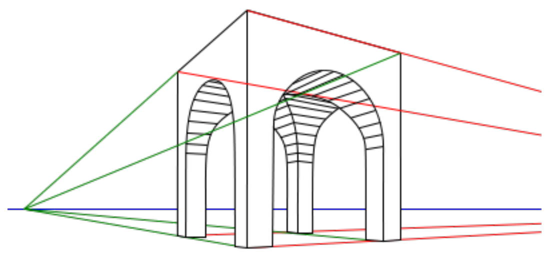
$$\frac{z_1}{z_2} \triangleq z_1(z_2^{-1})$$

Donde z_2^{-1} es el recíproco de z_2, con $z_2 \neq 0$.

Con esto, el cociente de números complejos se define puramente en términos de su producto. Más simplificado, imposible.

4. Formas de representación

Llegó la hora de finalmente simplificarnos la cuestión. Anotar números complejos como pares ordenados puede resultar tedioso. No debemos confundirnos además con los puntos en $\mathbb{R}^2$, porque NO son lo mismo. Y encima multiplicar dos complejos entre sí ya es agarrarse la cabeza... o se sabe de memoria la definición o se la debe tener por allí cerca. Por ello es que se han desarrollado múltiples formas de representar ese par ordenado de tal forma que nos sea más ameno operar con ellas, de diferenciarlos de puntos en $\mathbb{R}^2$ y de inclusive operar con ellos como si inconscientemente los tratáramos como números reales. Es impresionante la importancia que tiene una buena forma de representación.



4.1. La Unidad Imaginaria y la Representación Binomial

Al número complejo $(0, 1)$ lo denominaremos la *unidad imaginaria*, pues sólo posee la unidad como su parte imaginaria, y lo denotaremos con i (la i de imaginario). Es decir,

$$i = (0, 1)$$

Con esta definición de i, todo número complejo se ve habilitado a escribirse como combinación lineal de los elementos $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, los cuales constituyen una base para el conjunto $\mathbb{C}$. Por si no me creen...

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (1, 0)(x, 0) + (0, 1)(y, 0) \\ &= 1 \cdot (x, 0) + i \cdot (y, 0) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

Llegamos a demostrar que con la definición de la unidad imaginaria, todo número complejo puede representarse de forma binomial de la siguiente manera:

$$z = (x, y) = x + iy$$

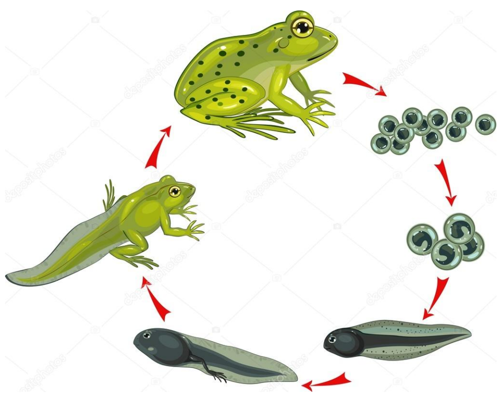
Antes de continuar, vale la pena estudiar un poco más detenidamente a la unidad imaginaria por sí misma, ya que fascinantes descubrimientos nos esperan.

Tomemos por ejemplo las potencias de la unidad imaginaria. Por convención respetaremos la regla de que todo número elevado al exponente 0 da como resultado 1. Con ello, $i^0 = 1$. Tenemos también que $i^1 = i$. Pero algo fuera de lo que estamos acostumbrados surge al calcular i^2:

$$\begin{aligned} i^2 = (0,1)(0,1) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \\ &= (-1, 0) \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

Usando la definición del producto (sí, esa fórmula complicada de la sección anterior), demostramos que i^2 resulta en un número real, y no sólo eso, sino que da -1. Es como la pieza del rompecabezas que faltaba, al fin, un número que al elevarlo al cuadrado nos da algo... negativo. Señoras y señores, ajústensen los cinturones que esto recién empieza.

Para avanzar algo más rápido, les presento ya calculada una tabla de potencias de la unidad imaginaria:



Potencia	Valor
i^0	1
i^1	i
i^2	-1
i^3	$-i$
i^4	1
i^5	i
i^6	-1
i^7	$-i$
...	...

Obviamente, de los cuatro posibles valores podemos calcular cualquier potencia de i simplificando el exponente: lo reemplazamos por el resto de su división entera en 4, y calculamos la nueva potencia resultante. Esto es debido al carácter cíclico de las potencias de la unidad imaginaria.

La forma de representación binomial nos simplifica las operaciones algebraicas, pues operamos sobre los complejos como si fuesen números reales, aplicando la propiedad distributiva, asociativa y conmutativa cuando corresponda. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces...

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2)}{x^2 + y^2} + i\frac{(x_1y_2 + x_2y_1)}{x^2 + y^2}$$

Si te preguntas cómo hicimos para calcular esto último, hemos partido de multiplicar numerador y denominador por el *conjugado* de z_2...

Definición 4.1. El Conjugado de un Número Complejo
Con $z \in \mathbb{C}$, tenemos que el **conjugado** de z, denotado como $\bar{z}$, se define como:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

La conjugación no implica más que cambiarle el signo a la parte imaginaria de un número complejo. Si no posee parte imaginaria (es real puro), entonces permanecerá igual.

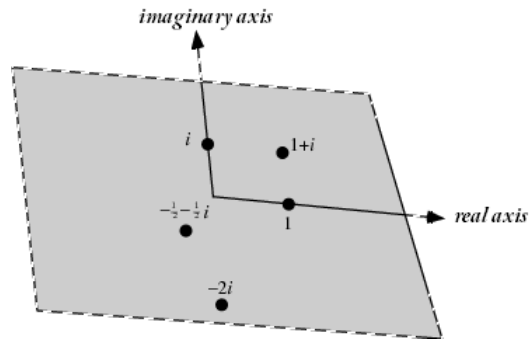
Iremos creando más definiciones a medida que nos sea necesario. Pero no nos olvidaremos de ninguna de las ya creadas a medida que vayamos avanzando.

4.2. El Plano de Argand y la Representación Gráfica

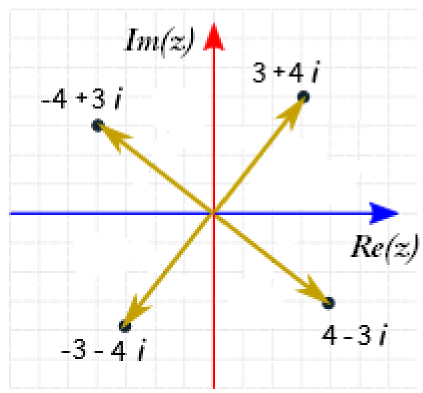
Lo hemos dicho una vez, y no está demás decirlo otra... un número complejo si bien es un par ordenado de dos números pertenecientes a $\mathbb{R}$, no es un punto en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, hay una relación íntima entre los números complejos y los puntos en el plano $\mathbb{R}^2$, o mejor dicho, con los vectores en $\mathbb{R}^2$.

Entre las similitudes, ambos poseen dos componentes (reales), su suma se realiza componente a componente, el orden de sus componentes importa, son multiplicables por un número $\alpha \in \mathbb{R}$ y tienen opuestos definidos y un elemento neutro aditivo. Sin embargo, basta mencionar una y sólo una diferencia como para que caigamos en la realidad de que son elementos distintos (aunque realmente hayan más diferencias): sus productos. Productos entre complejos nos da otro complejo que ninguna relación guarda con un vector producto, ya sea producto cruz o producto punto. Además, un complejo, como veremos más adelante, tiene definido también potenciación, raíces, entre otras operaciones que a un vector no se les puede aplicar.

Pero gracias a lo poco que guardan en común, nos es un incentivo para visualizar a los número complejos como puntos en un plano bidimensional, con su parte real e imaginaria como sus coordenadas. Es así cómo organizamos a TODOS los puntos del conjunto $\mathbb{C}$ en un *plano complejo*. Un plano cuyos ejes coordenados, análogos a los ejes x y y de $\mathbb{R}^2$, son los ejes *Real* e *Imaginario*. Esto constituye el denominado **Plano de Argand**.



El **Plano de Argand** o **Plano Complejo**



De esta manera, observamos cómo el eje real contiene a los números puramente reales (con parte imaginaria 0), y el eje imaginario a los números puramente imaginarios (con parte real 0). Lo contemplaremos al plano de Argand como una extensión intuitiva de lo que conocíamos como *recta numérica*, contenida enteramente en el eje real de nuestro plano, lo cual tiene lógica, ya que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Esta representación nos hace notar el siguiente hecho fundamental:

El conjunto $\mathbb{C}$ no es un conjunto ordenado

Es decir, no se define relación de precedencia alguna entre los elementos del conjunto de los números complejos. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, podemos corroborar su igualdad o desigualdad, pero no si uno es mayor o menor que el otro. Al tratar con números reales, todos podían ser ubicados en una recta infinita en la cual guardaban una relación de precedencia que nos permitía compararlos entre sí según el orden en el cual los ubicábamos en la recta. Esto sin emabargo no es posible si hablamos de un plano con extensión infinita.

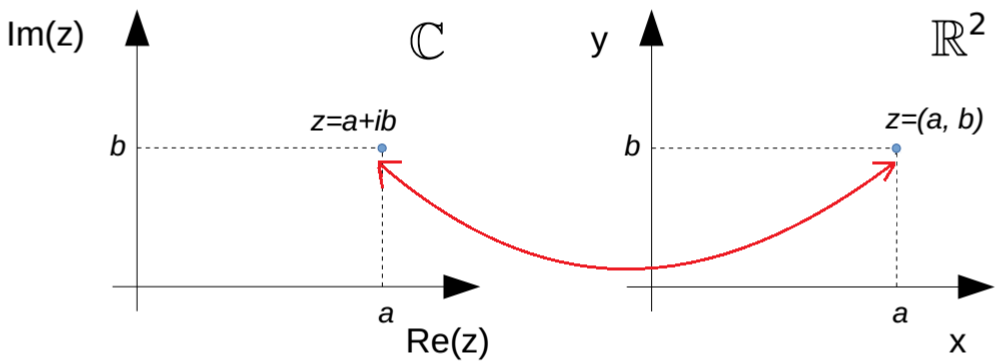
Bueno, ni que lo anterior hayan sido malas noticias, la representación gráfica nos incentiva además a definir una nueva propiedad para los números complejos, análoga al módulo de los vectores en $\mathbb{R}^2$, que representa la distancia de un número complejo z al punto $z = 0$ en el plano de Argand.

Definición 4.2. El Módulo de un Número Complejo
Con $z \in \mathbb{C}$, tenemos que el **módulo** de z, denotado como $|z|$, se define como:

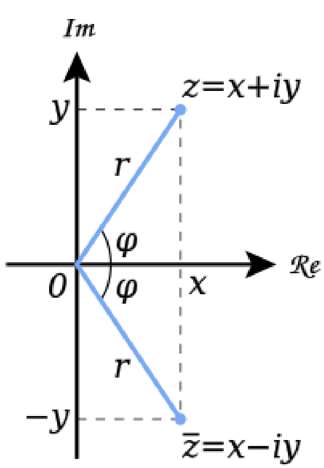
$$|z| = |x + iy| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

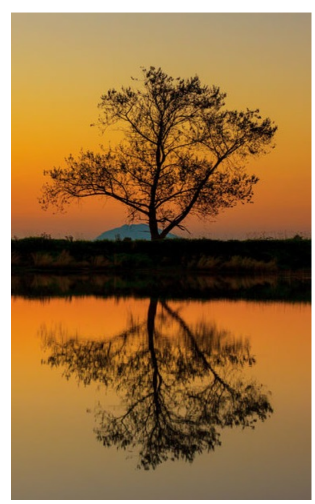
Tal definición se basa en el teorema de pitágoras, tomando la parte real e imaginaria como si fuesen los componentes de un vector en $\mathbb{R}^2$ y calculando su módulo. Sin embargo, cabe destacar que la distancia es una medida que será siempre un valor *real* no negativo. Por lo tanto, el módulo de todo número complejo z tendrá que necesariamente tener su parte imaginaria igual a 0. ¡Es una operación que, aplicada a cualquier complejo, nos garantiza obtener un número puramente real!

Se puede establecer entonces una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano complejo $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dado un sistema de referencia cartesiano.



Recordando la definición del conjugado... podemos observar en el plano de Argand qué interesante relación guardan entre sí los complejos conjugados. Calcular el conjugado de un complejo implica reflejar su representación gráfica respecto al eje real.





4.2.1. Propiedades del Conjugado y el Módulo

Llegado a este punto, no avanzaremos sin antes introducir importantes propiedades a tener en cuenta a la hora de trabajar con módulos y conjugados de números complejos. Siendo que $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que:

a) $z = \overline{\overline{z}}$

b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ y $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ con $z_2 \neq 0$

d) $|\bar{z}| = |z|$

e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

g) $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

h) $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

i) $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ y $\mathfrak{Im}(z) \leq |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$

j) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

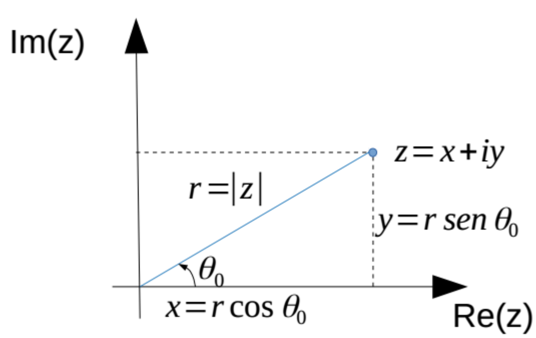
k) Desigualdad Triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

l) Segunda desigualdad triangular: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

4.3. La Representación Polar

Dado el complejo $z = (x, y) \neq (0, 0)$, podemos definirle **coordenadas polares** r y θ tales que:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos\theta \\
y &= r \cdot \sin\theta
\end{aligned}
$$



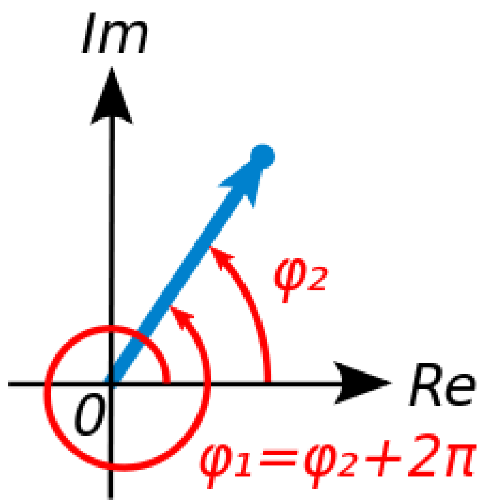
De esta manera, podemos definir la forma polar de un número complejo como:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

En esta forma de representación, r no es más que el **módulo** del complejo z, y el ángulo θ se denomina **argumento** del complejo z, o $\arg(z)$, calculable a partir de x y de y por medio de relaciones trigonométricas. Se tiene entonces que para obtener r y θ aplicamos:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Sin embargo, un complejo tiene infinitos argumentos, ya que medido en radianes, obtenemos un valor congruente al sumarle indefinidas veces 2π. Para quitar ambigüedades, nos referiremos como el **Argumento principal** de un complejo z, o **Arg**(z), al argumento de z cuyo valor se encuentra encasillado en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Éste será el valor con el que trabajaremos más a menudo en representaciones que involucren argumentos de complejos.



Aquí, φ_2 es el argumento principal

4.4. Representación Exponencial

Al llegar hasta la forma polar hemos dado un gran salto para adelante, uno que se completa agregando a todo lo visto hasta ahora una fórmula más... una que nos dio nuestro querido amigo Leonard Euler: la **Fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$$

Tomando esto en consideración, y trabajando la forma polar anterior, llegamos a la cúspide de las distintas formas de representar números complejos. He aquí la *forma exponencial*:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Con esta forma de escribir complejos, se nos simplifica aún más las operaciones de multiplicación y división. Observa...

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \ r_2 \ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

E inclusive nos habilita algo que hasta ahora no nos atrevimos hacer con los números complejos (sino sólo con i): definir la potenciación en $\mathbb{C}$. Tenemos que la potenciación de complejos es así de simple si se los representa en su forma exponencial:

$$z_1^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n \ e^{i(n\theta_1)}$$

Con esto, llegamos al mismo resultado que otro de nuestros amigos matemáticos, De Moivre, con su **Fórmula de De Moivre**:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Recordando que el argumento de un complejo puede tener infinitos valores que difieran en 2π, la forma genérica de representación en forma exponencial sería:

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

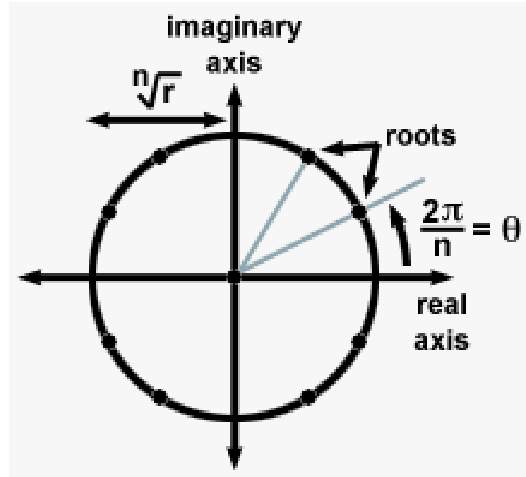
Este pequeño hecho que puede pasar fácilmente por desapercibido no ha de ser pasado por alto. Ya que nos es de gran importancia para casos como el que sigue: si elevásemos un complejo a un exponente racional de la forma $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}$, y aplicásemos la fórmula de De Moivre, probablemente nos contentaríamos con haber encontrado la n-ésima raíz de nuestro complejo, pero la historia no acaba allí en absoluto. Pues observen cómo, para distintos k considerados, al dividirlos por n, otro entero, no necesariamente darán otro número entero. Si el cociente $\frac{k}{n}$ no es entero, entonces el término $2k\pi$ que antes se le sumaba indiferentemente al argumento principal, ahora *no* arrojará valores congruentes. Con ello quiero decir que para distintos k, en el cálculo de la n-ésima raíz, tendríamos resultados diferentes. La cantidad de raíces diferentes que obtendríamos sería igual al índice de la raíz considerada (n).

Lo verifiquemos:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \left[r \ e^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r} \ e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} \end{aligned}$$

Donde $\dfrac{2k\pi}{n}$ con $k, n \in \mathbb{Z}$ adoptará n valores distintos con k variando desde 0 hasta $n-1$. Para valores enteros de k fuera de ese rango se volverán a obtener cíclicamente las primeras n raíces calculadas.

Analizando los resultados, vemos que todas las raíces de un complejo tienen entre sí el mismo módulo, pero difieren en su argumento. Esto nos quiere decir que... están distribuidos todos en torno a una circunferenci de radio $\sqrt[n]{r}$ en torno a $z = 0$, y se localizan equitativamente espaciados de tal manera que el ángulo subtendido entre dos raíces consecutivas es de $\dfrac{2\pi}{n}$.



5. Reflexión sobre lo aprendido

En fin, ¿los números son para contar?

Regiones en el Plano Complejo

Breggia, Bruno M.

El Plano de Argand, o Plano Complejo, es un plano de extensión infinita, pero no tenemos por qué asustarnos, conocemos ya planos de ese estilo, como $\mathbb{R}^2$. Éste, sin embargo, nos esconde muchas sorpresas nuevas. Para adentrarnos a este laberinto de sorpresas que encierra $\mathbb{C}$, debemos estudiarlo meticulosamente, parte por parte. Es zambullirnos a una pileta de definiciones nuevas y abstracciones. Así que pónganse las antiparras y aguanten la respiración.

Índice

1. Conjuntos y elementos, un repaso

Definición 1.1. Conjuntos
Un conjunto es una agrupación bien definida de objetos. Esos objetos pueden ser números, letras, personas, otros conjuntos, etc.

Los conjuntos se denotan con letra mayúscula, y los objetos que lo componen se denominan **elementos**.

Definición 1.2. Pertenencia
Si un elemento x forma parte de un cojunto A, diremos que el elemento x **pertenece** a A, y se denota mediante:

$$x \in A$$

En caso contrario, diremos que x *no pertenece* a A, y se escribe:

$$x \notin A$$

Hay dos maneras de anotar conjuntos:

- Por **comprensión**: cuando se describe una propiedad que caracteriza a todos sus elementos.
$$A = \{x \ : \ x \text{ cumple cierta condición}\}$$
- Por **extensión**: se listan cada uno de sus elementos explícitamente.
$$A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

1.1. Igualdad de Conjuntos

Diremos que dos conjuntos son **iguales** si y sólo si ambos están formados por los mismos elementos.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B \wedge \forall x \in B \rightarrow x \in A$$

La igualdad de conjuntos presenta las siguientes propiedades:

- **Reflexiva**: todo conjunto es igual a sí mismo.
- **Simetría**: $A = B \Leftrightarrow B = A$
- **Transitiva**: Si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

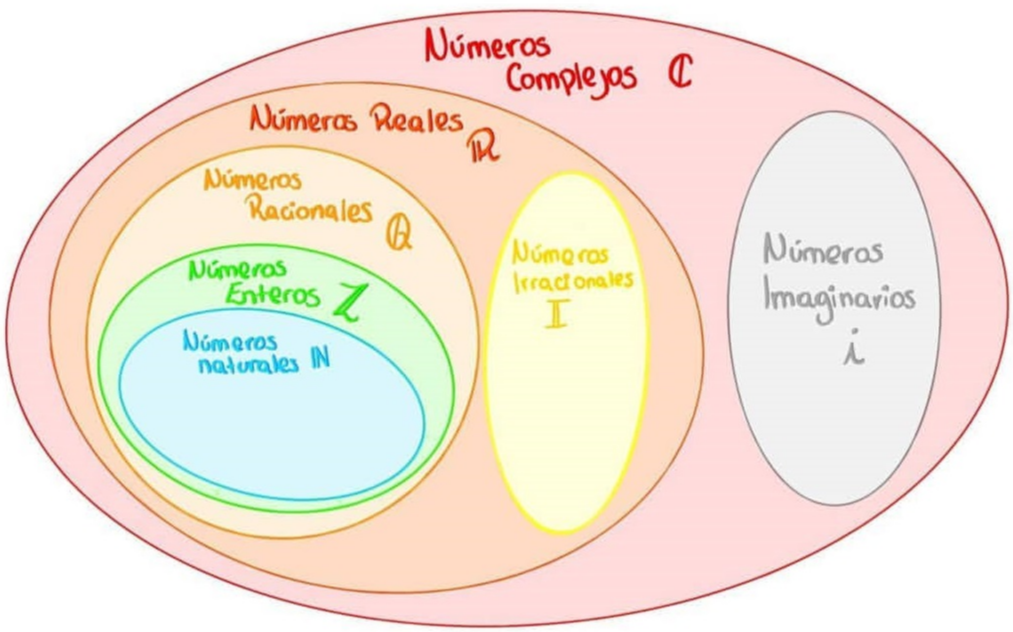
1.2. Subconjuntos

Se dice que A es un **subconjunto** de B si todos los elementos de A también son elementos de B. Si A es un subconjunto de B, lo denotaremos como:

$$A \subset B$$

El conjunto que no contiene ningún elemento se llama **Conjunto Vacío**, y se denota por $\emptyset$. El conjunto vacío es único, y éste es subconjunto de todo conjunto.

De manera similar, diremos que el **Conjunto Universal** U es el conjunto de *todos* los elementos en el contexto en el cual estamos trabajando.



1.3. Operaciones entre conjuntos

Entre conjuntos vamos a definir las siguientes operaciones:

- **Unión**: la unión entre dos conjuntos A y B se denota $A \cup B$ y es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

- **Intersección**: la intersección entre dos conjuntos A y B se denota $A \cap B$ y es el conjunto de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B.

- **Complemento**: el complemento de un conjunto A, que se denota por A^C, es el conjunto de todos los elementos que *no* están en A. De tal manera que la unión de cualquier conjunto con su complemento es igual al conjunto universal, y la intersección es el conjunto vacío.

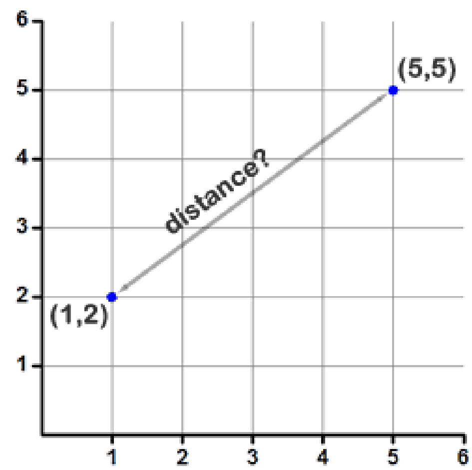
2. Definiciones en el Plano de Argand

Ahora volvemos a tierra y nos adentraremos específicamente en el conjunto $\mathbb{C}$, el conjunto de todos los números complejos. Mucho nos espera por delante.

Definición 2.1. Distancia entre Números Complejos
La distancia entre dos números complejos z_1, z_2 se define como:

$$d(z_1, z_2) \triangleq |z_1 - z_2|$$

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |z_1 - z_2| \\ &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| \\ &= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\ &= \sqrt[2]{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

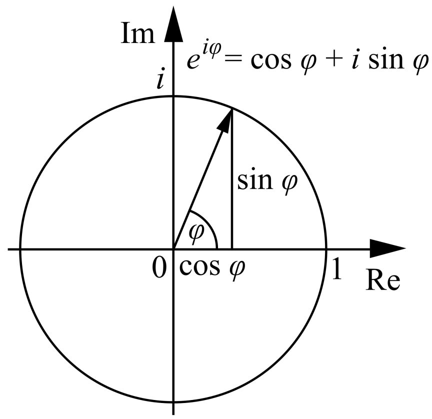


Definición 2.2. Circunferencia
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, se define **circunferencia** de centro z_0 y radio δ al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 sea δ, es decir, que $d(z, z_0) = \delta$.
Expresaremos a la circunferencia S simbólicamente de la siguiente manera:

$$S(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = \delta\}$$

$$\begin{aligned} d(z, z_0) &= \delta \\ \sqrt[2]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \delta \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \delta^2 \end{aligned}$$

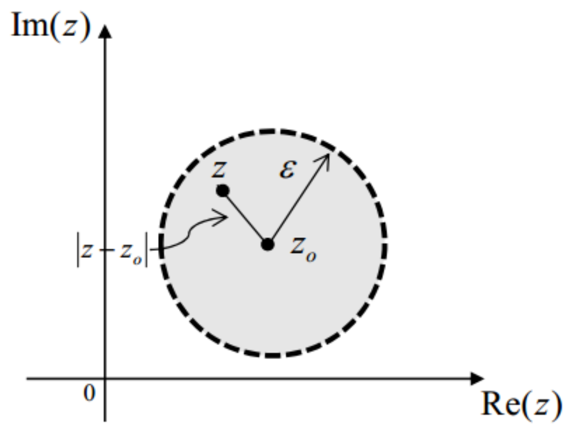
Vemos que, trabajando con las partes real e imaginaria de los números complejos, llegamos a la expresión para una circunferencia en el plano $\mathbb{R}^2$, centrada en (x_0, y_0) y de radio δ.



Definición 2.3. Entorno
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se define **entorno** de centro z_0 y radio ε al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 sea menor a ε, es decir, que $d(z, z_0) < \varepsilon$.
Expresaremos al entorno η simbólicamente de la siguiente manera:

$$\eta(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} d(z, z_0) &< \varepsilon \\ \sqrt[2]{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &< \varepsilon \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &< \varepsilon^2 \end{aligned}$$



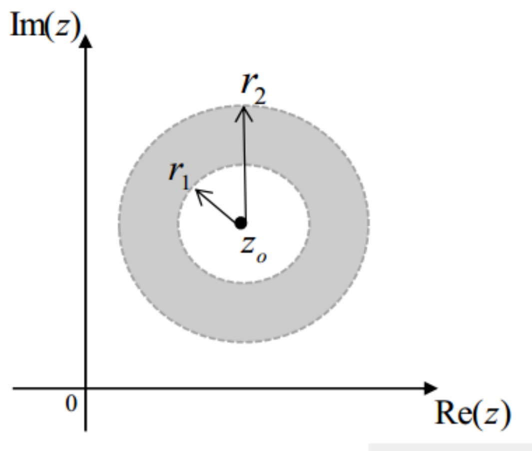
Definición 2.4. Anillo o Corona
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ con $r_1 < r_2$, se define **corona** o **anillo** de centro z_0 al conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que su distancia a z_0 se encuentre entre r_1 y r_2.
Expresaremos al anillo A simbólicamente de la siguiente manera:

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

... o también:

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$$

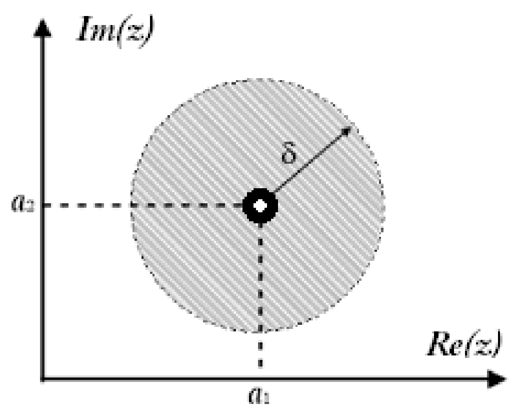
$$\begin{array}{lcl} r_1 < & d(z,z_0) & < r_2 \\ r_1 < & \sqrt[2]{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} & < r_2 \\ r_1^2 < & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 & < r_2^2 \\ & & \\ r_1^2 \leq & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 & \leq r_2^2 \end{array}$$



Definición 2.5. Entorno reducido
Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se define **entorno reducido** de centro z_0 y radio ε al conjunto de $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq z_0$ tales que su distancia a z_0 sea menor que ε. También se denomina entorno **perforado** o **punteado**, ya que su única diferencia con un entorno propiamente dicho es que no incluye el complejo z_0 (el centro del entorno).
Expresaremos al entorno reducido η^* simbólicamente de la siguiente manera:

$$\eta^*(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$\begin{array}{lcl} 0 < & d(z,z_0) & < \varepsilon \\ 0 < & \sqrt[2]{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} & < \varepsilon \\ 0 < & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 & < \varepsilon^2 \end{array}$$



3. Clasificando Puntos

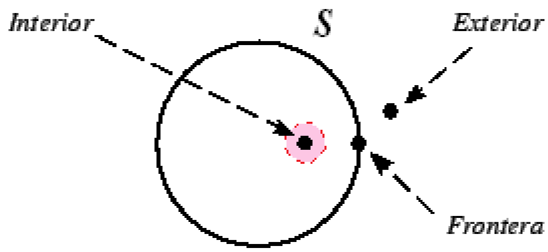
Para avanzar más en las nociones de conjuntos complejos y pertenencia, debemos tener en claro las distintas definiciones de puntos que a continuación se presentarán.

Definición 3.1. Punto Interior
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto interior** de S si existe un entorno de z_0 cuyos puntos sean todos de S.
Simbólicamente, z_0 es un punto interior de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \subset S$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \eta(z_0, \varepsilon), z \in S$$

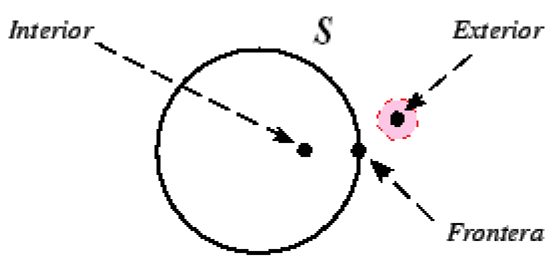


Definición 3.2. Punto Exterior
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto exterior** de S si existe un entorno de z_0 que no contenga ningún punto de S.
Simbólicamente, z_0 es un punto exterior de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \cap S = \emptyset$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \eta(z_0, \varepsilon), z \notin S$$

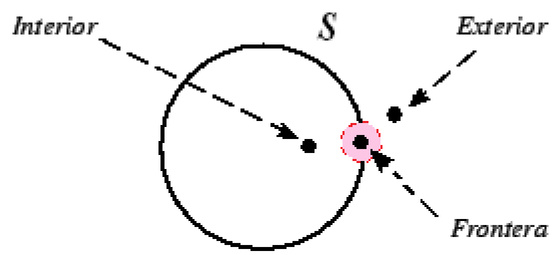


Definición 3.3. Punto Frontera
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto frontera** de S si no es un punto interior ni punto exterior de S. Es decir, todo entorno con centro en z_0 tiene tanto puntos que pertenecen a S como puntos que no.
Simbólicamente, z_0 es un punto frontera de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists z_1 \in \eta(z_0, \varepsilon) / z_1 \in S) \wedge (\exists z_2 \in \eta(z_0, \varepsilon) / z_2 \notin S)$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta(z_0, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \wedge \eta(z_0, \varepsilon) \cap S^C \neq \emptyset$$



`OBSERVACIÓN:` un punto frontera de un conjunto S puede o no pertenecer al conjunto S. El que sea frontera no indica nada respecto a si está incluido en el conjunto, sino sólo a su condición física de delimitador del conjunto. Su inclusión en el mismo estará determinada por la forma en que se defina S.

En una representación gráfica, si el contorno de un conjunto es una línea sólida, incluye sus puntos frontera, si es una línea punteada, no los incluye.

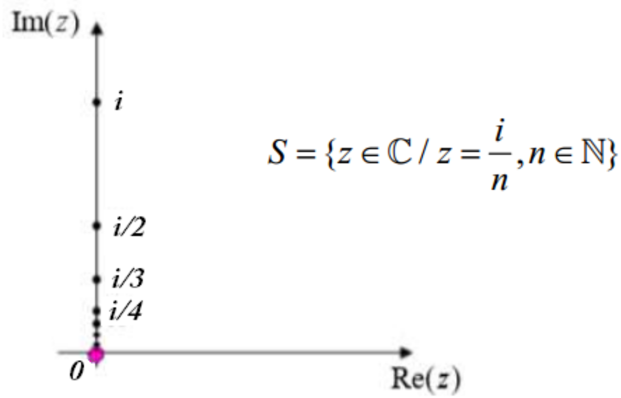
`OBSERVACIÓN:` al conjunto de los puntos frontera de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se lo denomina **frontera** de S, y se lo denota como δS.

Definición 3.4. Punto de Acumulación o Punto Límite
Sea S un conjunto del plano complejo, $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que z_0 es un **punto de acumulación** o **punto límite** de S si todo entorno centrado en z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0.
Simbólicamente, z_0 es un punto límite de $S \subset \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \eta^*(z_0, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$$

...o también se lo puede expresar como:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists z \in \eta(z_0, \varepsilon) / z \in S \wedge z \neq z_0)$$



En el conjunto descripto en la imagen anterior, el punto $z = 0$ es el único punto de acumulación.

4. Conjuntos en el Plano Complejo

Ahora vamos a clasificar los conjuntos. Todo conjunto que se defina en el plano complejo de ahora en adelante deberemos catalogarlo según las clasificaciones que veremos a continuación:

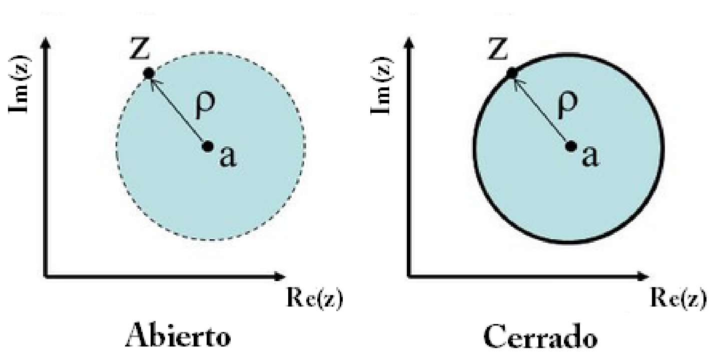
Definición 4.1. Conjunto Abierto
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto abierto** si no contiene ninguno de sus puntos frontera. Con ello, tenemos que todos sus puntos son interiores, o que S es el conjunto vacío ($S = \emptyset$).

Definición 4.2. Conjunto Cerrado
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto cerrado** si contiene a *todos* sus puntos frontera. También podemos definirlo como sigue:

- S es cerrado si S^C es un conjunto abierto.
- S es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 4.3. Clausura
Sea $S \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Se denomina **clausura** de S al conjunto unión de S con su frontera. Se denota con $\overline{S}$.

$$\overline{S} = S \cup \delta S$$

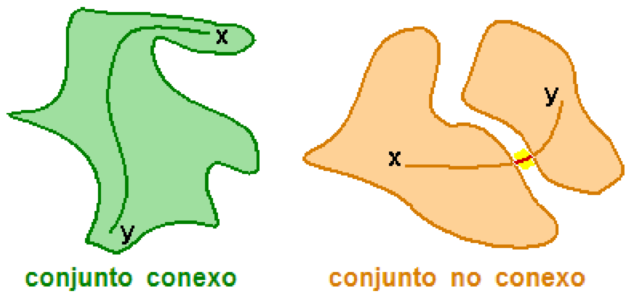


OBERVACIÓN: hay conjuntos en el plano complejo que no son abiertos ni cerrados (por ejemplo, si incluyen algunos de sus puntos frontera pero no a todos). Y también pueden haber conjuntos que sean abiertos **y** cerrados, como todo el conjunto $\mathbb{C}$ en sí mismo.

Definición 4.4. Conjunto Conexo
Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que S es un **conjunto conexo** si y sólo si todo par de puntos de S se pueden unir mediante una poligonal C compuesto por la unión de un número finito de segmentos rectos sucesivos, tal que C está íntegramente contenida en S.

Definición 4.5. Dominio Complejo
Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo se denomina **dominio complejo.**

Definición 4.6. Región en el Plano Complejo
Se denomina **región en el plano complejo** a la unión de un dominio $S \subset \mathbb{C}$ con cualquier subconjunto de δS.
Es decir, es la unión de S con algunos, ninguno o todos sus puntos frontera.



`OBERVACIÓN:` tenemos que todo entorno es un dominio, al no incluir su frontera, y ser conexo. A su vez, todo anillo es conexo, aunque no necesariamente es un dominio, ya que puede, o no, contener sus puntos frontera (puede no ser abierto).

De ambos casos mencionados, tenemos entonces que todo entorno es un dominio, mientras que sólo los anillos que sean abiertos lo serán.

Definición 4.7. Conjunto Acotado
Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es **acotado** si existe un círculo centrado en un $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $R \in \mathbb{R}^+$ finito que lo contiene.
En caso de no cumplir con lo anterior, diremos que es **no acotado** (es de extensión infinita).

Definición 4.8. Conjunto Compacto
Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ cerrado y acotado se dice que es un conjunto **compacto.**

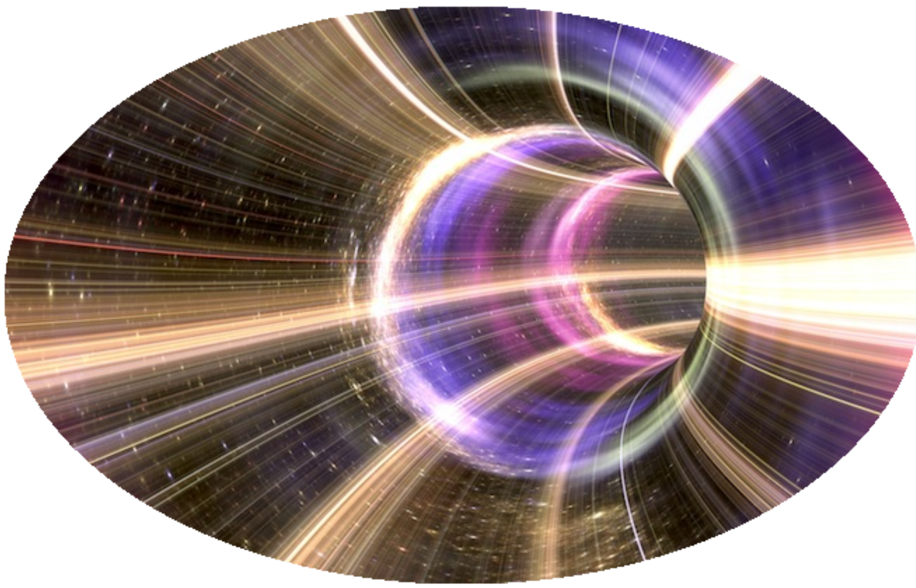
5. Recapitulando

Llegados aquí al final de la lección, se han visto muchos conjuntos y una inmensa cantidad de definiciones nuevas. Todo esto no es para agobiarnos, sino para adentrarnos de a poco, y de manera formal, en el concepto estrella de la disciplina: las *funciones de variables complejas.* Así que tienen mi palabra, esto se pondrá **mejor**.

¿El barbero… se afeita a sí mismo?

Funciones de Variable Compleja

Breggia, Bruno M.



"Comienza al principio, -dijo el rey, con voz grave-
y continúa hasta que llegues al final, allí para"

Lewis Carroll, de **Alicia en el País de las Maravillas**

Hemos llegado a un punto decisivo, la introducción y definición de las funciones de variable compleja, donde nos será revelado cómo, todo lo que conocíamos hasta ahora de los números reales no es más que una ínfima porción de lo que es el mundo detrás de escena del conjunto de los Números Complejos. Todas las funciones algebraicas elementales se generalizan de tal manera que cuando se les pasen valores reales, se comportan indistintamente a como lo hicieron siempre hasta el momento, pero con la diferencia de que ahora serán capaces de recibir números complejos, y el resultado de eso es algo jamás antes visto...

Prepárate para descononcer lo que sabías hasta el momento, y conocer de cero lo que se viene. Bienvenido a **Variable Compleja.**

Índice

1. Nos ponemos filosóficos: ¿Qué es una función?

Antes de entrar en detalle en lo que es una función de variable compleja, debemos recordar qué es en sí mismo una función. Pareciese aburrido tener que retroceder a revisar un concepto tan elemental como lo es una *función*, pero debemos tener en claro su definición antes de generalizar el concepto.

Pero... ¿será tan fácil como parece? Defíneme *función*... como si fuese obvio, he aquí la definición formal:

Definición 1.1. Función
Una *función* constituye una terna (f, A, B), en donde:

- f: es la **ley, regla o relación** que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B
- A: es el conjunto de partida, o **dominio**
- B: es el conjunto de llegada, o **codominio**

La notación simbólica de una función está dada por

$$f : A \to B$$

$$f : x \in A \to y \ / \ y = f(x) \in B$$

Esto nos habilita a poder representar a la función f evaluada para un valor $x \in A$ simplemente como $f(x)$, donde $f(x) \in B$, claro está. Sin embargo, nunca deberíamos hablar de funciones sin antes especificar sus conjuntos de dominio y codominio (a menos que el contexto lo vuelva obvio). Tratemos que se vuelva costumbre.

1.1. Caso especial: la Función Compleja

Habiendo definido de manera genérica lo que es una función, sabremos por intuición que si nuestros conjuntos de dominio A y codominio B son ambos subconjuntos del conjunto de los números reales, es decir: $A, B \in \mathbb{R}$, entonces tenemos definidas las funciones de una variable real. Cabe esperar entonces que para definir funciones de variable compleja debamos simplemente cambiar los conjuntos de partida y de llegada...

Definición 1.2. Función de Variable Compleja
Una función compleja de variable compleja constituye una terna $(f, S, \mathbb{C}_w)$, en donde:

- f: **ley, regla o relación** que asigna a cada elemento de S un único elemento en $\mathbb{C}_w$
- S: es el conjunto **dominio** de f, con $f \subset \mathbb{C}_z$
- $\mathbb{C}_w$: es el conjunto **codominio** de f

Para terminar con el precalentamiento, vale diferenciar entre los distintos tipos de funciones complejas, ya que de tanto en tanto, utilizaremos funciones que mapeen variables complejas a números complejos, como funciones que mapeen variables *reales* a números complejos.

- **Funciones de Variable Compleja a valores complejos**: son las funciones dadas por $f : S \subset \mathbb{C}_z \to D \in \mathbb{C}_w$, que reciben un número complejo $z \in S$, con $z = x + iy$, y retornan otro complejo $w = f(z) \in D$, donde diremos que $w = u + iv$. Este tipo de funciones pueden escribirse de la forma:

$$w = f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

  ...ya que tanto la parte real como imaginaria de la función dependen de la parte real e imaginaria de la variable que recibe (¿de qué más puede depender?). Si prestan particular atención, tanto $u(x, y)$ como $v(x, y)$ son ambas funciones de *dos* variables reales, que retornan un valor real, es decir, $u, v : \tilde{S} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

  Los conjuntos de partida $\tilde{S} \in \mathbb{R}^2$ y $S \in \mathbb{C}$ tienen una correspondencia biunívoca (y los de llegada también).

- *Funciones de Variable Real a valores complejos*: son las funciones dadas por $f : I = (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. En éstos, se recibe una variable real $t \in I$, y se obtiene un número complejo $z = f(t) = x + iy$. Si recordamos la relación biunívoca entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, y la representación gráfica de números complejos, concluimos entonces que este tipo de funciones son como parametrizaciones, en donde tendremos un complejo diferente a medida que recorramos el intervalo real $[a, b]$.

  Para que quede más claro, representemos a la función de la siguiente manera:

$$z(t) = f(t) = u(t) + i\ v(t)$$

  ...en donde $u, v : I = (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, u, v son dos funciones de una variable real a valores reales.

Al fin y al cabo, toda función compleja puede desglosarse en términos de funciones de una o más variables *reales*, con las cuales ya somos hábiles manipulando.

2. A través del espejo

Procederemos a analizar ahora la extensión de la definición de todas la funciones algebraicas elementales de tal manera que acepten números complejos como parámetros... ¡y a sorprenderse con lo que obtengamos de ellas!

Definición 2.1. Función exponencial Compleja
La función exponencial compleja $\exp(z) = e^z$ se define, a través de la fórmula de Euler, como:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} \triangleq e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades de la exponencial compleja:

1. $e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$ (puede tomar valores negativos)
2. $e^z = e^x$ si z es un real puro (con parte imaginaria 0)
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
4. $|e^z| = e^x$
5. $(e^z)^n = e^{nz},\ \forall n \in \mathbb{Z}$
6. $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$
7. $e^z = e^{z+2\pi i}$, por lo que es una función periódica con periodo $2\pi i$

Si quisiésemos representar a la función exponencial compleja en la forma $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, tendríamos lo siguiente:

$$e^z = \exp z = (e^x \cos y) + i\ (e^x \operatorname{sen} y)$$

Definición 2.2. Funciones Trigonométricas Complejas
Las funciones trigonométricas complejas del seno y coseno se definen como sigue, en términos de la exponencial compleja:

$$\cos z \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del coseno y seno complejos:

1. $\cos z = \cos x\ \wedge\ \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$, si z es un real puro (con parte imaginaria 0)

2. $\cos(-z) = \cos z \ \wedge \ \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

3. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

4. $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$

5. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$

A partir de las definiciones del coseno y seno de números complejos, definimos de manera más sencilla las demás funciones trigonométricas:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

Si quisiésemos representar a la función coseno y seno complejos en la forma $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, luego de cierto trabajo algebraico, llegaríamos a lo siguiente:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

Definición 2.3. Funciones Hiperbólicas Complejas
Se definen las funciones hiperbólicas complejas coseno hiperbólico y seno hiperbólico a partir de la función exponencial compleja:

$$\cosh z \triangleq \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh} z \triangleq \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del coseno y seno hiperbólicos complejos:

1. $\cosh z = \cosh x \ \wedge \ \operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x$, si z es un real puro (con parte imaginaria 0)

2. $\cosh(-z) = \cosh z \ \wedge \ \operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

3. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

4. $\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

5. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$

A partir de las definiciones del coseno y seno hiperbólicos de números complejos, definimos de manera más sencilla las demás funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \quad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z} \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

Si quisiésemos representar a las funciones coseno y seno hiperbólicas complejas en la forma $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, luego de cierto trabajo algebraico, llegaríamos a lo siguiente:

$$\cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$$

Como podemos apreciar, las funciones trigonométricas y las hiperbólicas no sólo poseen abismales similitudes entre sí, sino que también guardan una relación mutua que puede ser descubierta una vez adentrados en variable compleja. Miremos unas propiedades más que las involucran:

- $\operatorname{sen}(iz) = i \cdot \operatorname{senh} z \ \wedge \ \cos(iz) = \cosh z$
- $\operatorname{senh}(iz) = i \cdot \operatorname{sen} z \ \wedge \ \cosh(iz) = \cos z$
- $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \ \wedge \ |\cos z|^2 = \cos^2 x + \cosh^2 y$
- $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \ \wedge \ |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y$

Definición 2.4. Función Logaritmo Complejo
Se define el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ como:

$$\begin{aligned} \log z &\triangleq \ln|z| + i \cdot \arg z \\ &= \ln|z| + i \cdot (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para distintos k tendremos un valor distinto de logaritmo. Esto contradice en cierto sentido a la definición de función, ya que tenemos aquí una relación **multivaluada**: para cada valor del dominio, resulta ser que tenemos más de un elemeto en el codominio que cumple con la ley aplicada. Es por ello que tratamos de enmendar este imprevisto definiendo alternativamente el **Logaritmo univaluado**:

$$\operatorname{Log} z \triangleq \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg} z$$

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, reconocemos las siguientes propiedades del logaritmo complejo:

1. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
2. $\log \dfrac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$
3. $\log z^n = n \cdot \log z, \ n \in \mathbb{Z}$

Ya dada la definición del logaritmo complejo, podemos apreciar cómo ésta es la inversa de la función exponencial. Sea $w = \log z$, con $z \neq 0$, entonces $z = e^w$, y a partir de ello...

$$\begin{aligned} z &= |z| \ e^{i \arg z} \\ z &= |z| \ e^{i \ (\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} \\ z &= e^u \cdot e^{iv} = e^{u+iv} \end{aligned}$$

... con $u = \ln|z|$ y con $v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ (esto es, con el logaritmo natural ln definido únicamente para los reales positivos y con $k \in \mathbb{Z}$). Pero como $z = e^w$:

$$\begin{aligned} e^w &= e^{u+iv} \\ w &= u + iv \\ w &= \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \end{aligned}$$

3. Nos vamos al Límite

¿Pensaban que con ver un par de funciones complejas acababa todo? Pues si nos tomamos el trabajo de estudiarlas, que no sea en vano. Ya que se vieron algunas funciones complejas, pasemos de largo y continuemos redefiniendo conceptos del cálculo en variable real de tal manera que engloben a las variables complejas. Si nos detuviésemos aquí, nos perderíamos de lo mejor.

Definición 3.1. Límites de funciones complejas
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que el límite de una función f cuando z tiende a un valor z_0 es igual a w_0 y se indica:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si el valor de $f(z)$ se hace cada vez más cercano a w_0 conforme z se va acercando indefinidamente a z_0, pero sin igualarlo.
En lenguaje simbólico (con $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$), se tiene que el límite de $f(z)$ conforme $z \to z_0$ es w_0 si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall z \in \eta^*(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in \eta(w_0, \varepsilon)$$

O también si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Teorema 3.1. *Unicidad del límite*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Para $z_0 \in \mathbb{C}$ y z una variable compleja, si el límite

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

existe, entonces es único.

Demostrar

Teorema 3.2. *Sea* $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*. Teniendo que* $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ *y* $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ *con* $z_0 = x_0 + iy_0$ *y* $w = u_0 + iv_0$*, entonces:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \ \wedge \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

Demostrar

Propiedades de los límites: dado que los límites $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$ existan, se cumple que...

1. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_1 \cdot w_2$
3. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_1}{w_2}$, siempre que $w_2 \neq 0$

4. El Infinito en un punto

Hay situaciones que surgen en donde se nos es necesario poder representar, de alguna manera, el infinito. Hablo de representarlo como un número en concreto, al que tienden los límites en el más allá, o como un punto, el punto donde se cortan dos rectas paralelas... Cuando tratamos con el conjunto de los números complejos, suele surgir esta necesidad. Por esto mismo es que definimos el **Punto Infinito**.

Definición 4.1. El Punto Infinito
El número complejo infinito, o **punto infinito**, denotado por ∞, es un único número complejo, para el cual el plano complejo no admite representación gráfica.
Podemos considerar a ∞ como un número complejo cuyo módulo es mayor que cualquier número real positivo dado, pero sin argumento.

Es en base a todo esto, definiremos como consecuencia al **conjunto complejo extendido** $\mathbb{C}^\infty$ como:

$$\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

5. Cotinuemos con Continuidad

Hemos definido límites de funciones de variables complejas, ahora, de qué tanta utilidad nos sería el límite si no fuese para definir, entre otras cosas, algo tan elemental como ser la continuidad del trazo de una función. Eso es, me refiero a la definición de continuidad, ¡aplicado a funciones de variable compleja!

Definición 5.1. Continuidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$. Se dice que $f(z)$ es **continua** en z_0 si satisface:

- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
- $\exists f(z_0)$
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Definición 5.2. Continuidad sobre un conjunto S
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Diremos que f es **continua en** S si es continua en todo $z \in S$.

Definición 5.3. Función acotada
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Diremos que f es una **función acotada** si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in S$.

En base a estas definiciones, se desprende el siguiente, e intuitivo, teorema.

Teorema 5.1. *Continuidad y acotación*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Si S *es un conjunto compacto y* $f(z)$ *es una función continua en* S*, entonces* f *es una función acotada.*

Derivación Compleja

Breggia, Bruno M.

Se conocen ya algunas funciones de variable compleja, o varias, mejor dicho. ¿Cómo convertir esto en la mejor arma matemática para modelar al Universo? Pues, si somos capaces de calcular tasas de cambio con ellas, tenemos al Universo en nuestras manos. Pues en él, la única constante es el cambio (dice un proverbio chino). Es por ello que en esta lección nos introduciremos a la **diferenciación** de funciones de variable compleja. ¿Qué tan distinto puede ser...?

Índice

1. Definimos la derivada compleja

Ya sabemos lo que es la derivada, representa la tasa de cambio de una magnitud respecto a alguna variable de la que depende. Pero cuando hablamos de funciones de variable compleja, la intuición geométrica de que la derivada representa la pendiente de la curva ya no se da tan así... pues las funciones complejas no pueden representarse en un mismo plano con su conjunto dominio. Y ojo, que además cualquier noción de pendiente y velocidad que le podríamos asociar se distorsiona con asignarles como valor alguna cantidad compleja...

Sin perdernos entonces en una interpretación geométrica de la misma, le daremos a la derivada de funciones complejas una nueva definición, que será análoga a la que conocíamos para funciones de una varible real (e inclusive similar a la de funciones vectoriales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Definición 1.1. Derivada en un punto
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$. Considérese el límite:

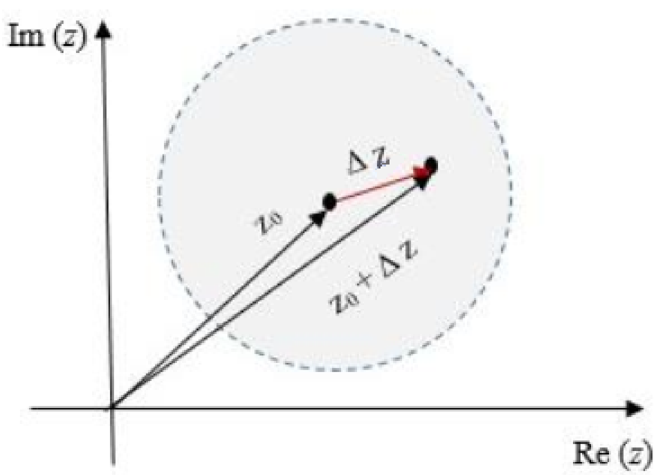
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

En caso de que dicho límite exista, se denomina la **derivada** de f en z_0 y se denota por $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Una expresión equivalente a la anterior se obtiene a partir de considerar $\Delta z = z - z_0$, con lo que $z = z_0 + \Delta z$. Tenemos entonces:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$



Definición 1.2. Diferenciabilidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que f es **diferenciable** en $z_0 \in S$ si f es derivable en z_0. Es decir, si se cumple que

$$\exists f'(z_0)$$

Ahora traemos a colación un importante Teorema que nos será inmensamente útil:

Teorema 1.1. *Si f es derivable en el punto $z_0 \in S$, entonces f es continua en dicho punto*

Demostrar

Ahora estudiaremos algunas propiedades destacadas de la derivada compleja. Teniendo que $f, g : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con f y g derivables en z_0 se cumple entonces que:

1. $f + g$ es derivable en z_0, y $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $f \cdot g$ es derivable en z_0, y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$
3. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en z_0, y $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}$
4. $f \circ g$ es derivable en z_0, y $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$. Es decir, aplica la **regla de la cadena**.

2. Condiciones necesarias: las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

¿Cómo poder identificar cuándo una función dada es o no diferenciable? Queda claro que si no existe el límite o no es continua en un punto z_0, no es derivable allí. Pero no vamos a calcular siempre los límites para dar cuenta de ello. Es muy trabajoso y consume tiempo y esfuerzo mental. Algo que no vale la pena si contamos con métodos más sofisticados para hacerlo...

Teorema 2.1. *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$.
Si existe $f'(z_0)$*, entonces:*

a. Existen las derivadas parciales de $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *en* (x_0, y_0)

b. Las derivadas parciales de $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto* (x_0, y_0)*:*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

c. Además, se cumple que:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - i\ u_y(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0) - i\ u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Demostrar

Sin embargo, no hay que dejarse engañar, porque lo contrario no es necesariamente cierto. Si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto no quiere decir que la función es derivable. Pero sí podemos afirmar lo siguiente:

Corolario 2.1. *El Recíproco*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Si las derivadas parciales de primer orden de $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en* (x_0, y_0)*, entonces* f *no es diferenciable en* z_0.

$$P \Rightarrow Q$$

$$\sim Q \Rightarrow \sim P$$

3. Condiciones suficientes: Las Condiciones de Cauchy-Riemann

Ya se vio una condición necesaria de diferenciabilidad, pero no suficiente. Completaremos este análisis solicitando a la función que cumpla con un par de requisitos más y con ello le daremos el alta. Les presentamos: **las Condiciones de Cauchy-Riemann**, que engloban las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 3.1. *Condiciones Suficientes*
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, con* $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0)$ *en donde* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Si se cumple que:

1. *Existen las derivadas parciales de primer orden de* $u(x, y)$ *y de* $v(x, y)$ *en el entorno* $\eta((x_0, y_0), \rho)$
2. *Las derivadas parciales de primer orden de* $u(x, y)$ *y de* $v(x, y)$ *son continuas en* (x_0, y_0)
3. *Dichas derivadas parciales cumplen con las Ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

entonces $f(z)$ *es diferenciable en* (x_0, y_0)

Demostrar

En síntesis, le sumamos a las ecuaciones de Cauchy-Riemann la **existencia** y **continuidad** de las derivadas parciales de u y de v y con ello tenemos condiciones suficientes de diferenciabilidad.

3.1. La versión Polar

Hay circunstancias en las que una función $f(z)$ determinada es más fácil expresarla como $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$, es decir, con funciones componentes que dependan de su módulo y argumento, en vez de la parte real e imaginaria de z. Esto sucederá cuando la descomposición de la función sea más sencilla al representar a z en su forma polar $z = r\ e^{i\theta}$.

En caso de que tengamos una función expresada como $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$, no debemos entrar en pánico a la hora de tener que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que las mismas presentan un equivalente para la coordenadas polares.

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$\frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

Basándonos en la validez de la **forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann**, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Condiciones de Cauchy-Riemann para coordenadas polares*
Sea $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$ una función definida en todos los puntos de un ε entorno alrededro de un punto $z_0 = r_0\ e^{i\theta_0}$

Si se da que:

1. *las derivadas parciales de primer orden de $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ existen en todos los puntos del entorno*
2. *tales derivadas son continuas en (r_0, θ_0)*
3. *tales derivadas cumplen con la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$\frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

...entonces la derivada $f'(z_0)$ existe.

Demostrar

En el caso del teorema anterior, la derivada de una función expresada de la forma $f(z) = u(r, \theta) + i\ v(r, \theta)$, viene dada por:

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i\ v_r)$$

4. Analiticidad, aumentamos la exigencia

Pareciese por capricho, pero llegados a esta altura, para seguir trabajando con cálculo complejo, no nos es suficiente que la función sea diferenciable en un punto. De ahora en adelante, nos vamos a sentir lo suficientemente cómodos para trabajar con funciones si éstas son diferenciables no solamente en un punto z_0, sino que también en sus alrededores, es decir, que lo sea también en todo punto de algún entorno η centrado en z_0. Formalmente hablando... vamos a solicitar que $f(z)$ sea **analítica** en z_0

Definición 4.1. Analiticidad
Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que f es **analítica** u **holomorfa** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe la derivada de f en z_0 y en algún entorno centrado en z_0.

En base a la definición anterior, diremos que $f(z)$ es **analítica en un dominio $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$** si es analítica en todo punto de $\mathcal{S}$.

Tenemos entonces que la analiticidad es una condición que no es *puntual*, sino que es *global*. Si una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0, entonces también lo es en sus alrededores, pues que sea analítica implica que sea derivable en un entorno η centrado en z_0. Si es derivable en un entorno tal, todo punto en ese entorno estará también rodeado por puntos que sean derivables, siendo todos ellos puntos donde la función es analítica.

Razonando de igual manera, tenemos que una función no puede ser analítica en un punto z_0 aislado. En otras palabras, no puede ser analítica en z_0 si no lo es en ningún otro punto de su cercanía, o concretamente, en todo punto de algún entorno de z_0.

Definición 4.2. Función entera
Si $f(z)$ es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z)$ se denomina una **función entera**.

Habiendo definido lo que es una función entera, cabe acotar que una función entera será para nosotros equivalente a lo que las funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ son para el cálculo de varias variables. Ahora algunos teoremas.

Teorema 4.1. *Analiticidad implica continuidad*
Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un dominio complejo.
Si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{D}$, entonces $f(z)$ es continua en $\mathcal{D}$.

Algo interesante de la analiticidad es que, si una función es analítica, lo será por siempre... o sea, no importa cuántas veces lo derives, su n-ésima derivada será también analítica.

Teorema 4.2. *Analiticidad de las derivadas*
Si una función $f(z)$ es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$, sus derivadas de todos los órdenes son también funciones analíticas en z_0.

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de la analiticidad. Sean f, g

dos funciones complejas de variable compleja, ambas analíticas en el dominio complejo $\mathcal{D}$. Entonces:

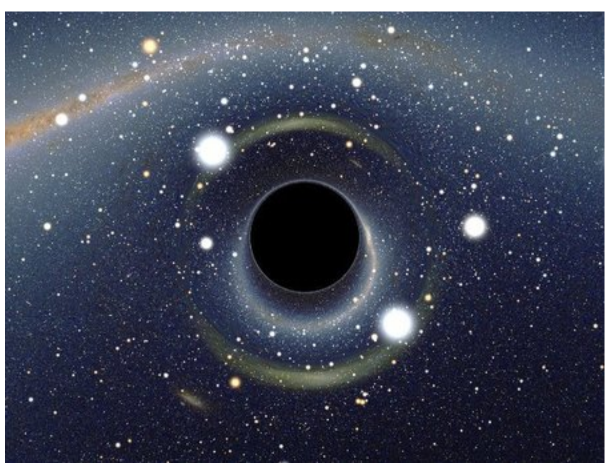
1. $f + g$ es analítica en $\mathcal{D}$
2. $f \cdot g$ es analítica en $\mathcal{D}$
3. $\dfrac{f}{g}$ es analítica en $\mathcal{D} - \{z \,/\, g(z) = 0\}$
4. $f \circ g$ es analítica en $\mathcal{D}$

5. Puntos Singulares

Como anhelamos la analiticidad, y la analiticidad es una propiedad global, nos será de particular interés discriminar aquellos puntos z_0 para los cuales, en medio de tanta analiticidad, la función *no es analítica*. Dichos puntos los conoceremos como **puntos singulares** o simplemente **singularidades**.

Definición 5.1. Puntos singulares
z_0 es un **punto singular** o una **singularidad** de $f(z)$ si f no es analítica en z_0 pero sí en algún punto de todo entorno de z_0.

Definición 5.2. Punto singular aislado
z_0 es un **punto singular aislado** o una **singularidad aislada** de $f(z)$ si f no es analítica en z_0 pero sí en todo punto de algún entorno reducido de z_0.



6. Funciones Armónicas de $\mathbb{R}^2$

Ahora frenamos un poquito y miramos para atrás... con atrás me refiero a las ya conocidas y visitadas funciones de varias variables reales. Existe cierta clase de funciones, real de dos variables reales, que se caracterizan simplemente por cumplir con la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 f = 0$$

Por ser así de simple el requisito que se les solicita, las llamaremos **Funciones Armónicas**.

Definición 6.1. Funciones Armónicas

Sea $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\phi(x, y)$ es una **función armónica** en $\mathcal{D}$ si:

- Las derivadas parciales primeras y segundas de ϕ **existen** y son **continuas** en $\mathcal{D}$.
- La función $\phi(x, y)$ satisface la **Ecuación de Laplace:**

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0$$

`ATENCIÓN`:

A no confundirse, que la catalogación de función armónica se define para *funciones de variable real*, concretamente para funciones que mapean valores de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. NO para funciones de variable compleja. Este concepto nos sirve, sin embargo, para catalogar a las funciones componentes de una función compleja, que son en sí mismas funciones reales de dos variables reales.

Teorema 6.1. *Analiticidad y armonicidad*

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Si $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ *es analítica en* $\mathcal{D}$*, entonces sus funciones componentes* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *son armónicas en* $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$

Dado el caso previo para la función $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, se dice que la función $v(x, y)$ es **armónica conjugada** de $u(x, y)$. De esta definición, y del teorema anterior, encontramos ¡oh sorpresa! que el que v sea armónica conjugada de u es criterio suficiente para que la función $f(z)$ sea analítica... wow, lo que es el poder de la armonía.

Teorema 6.2.

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
La función $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ *es analítica en un dominio* $\mathcal{D}$*, si y sólo si* $v(x, y)$ *es armónica conjugada de* $u(x, y)$.

Transformaciones

Breggia, Bruno M.

"Porque del polvo eres, y al polvo volverás"
Génesis 3:19

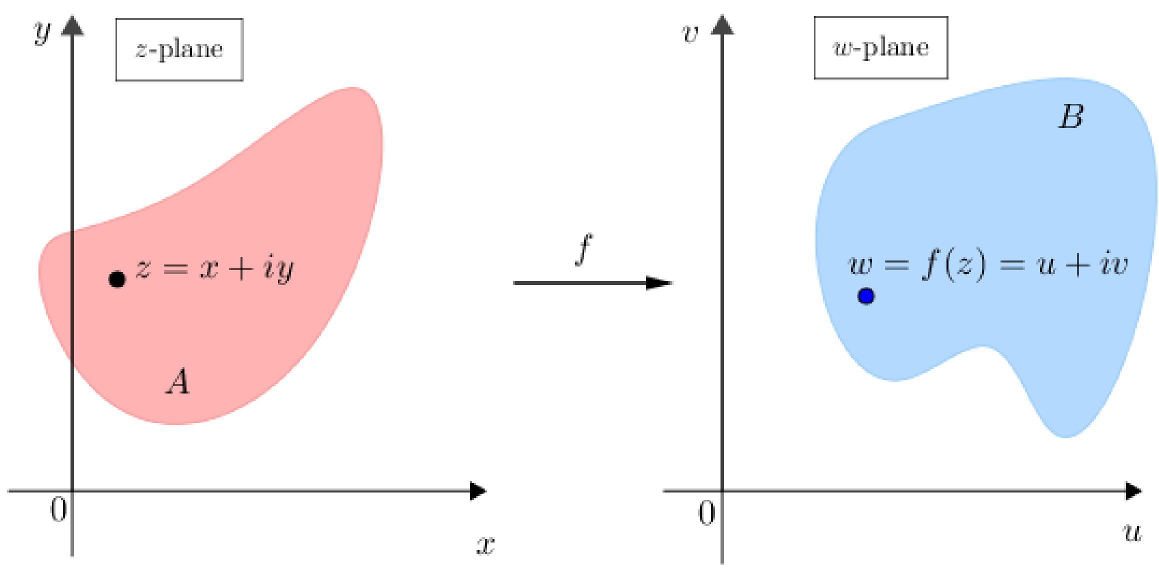
Con las herramientas del cálculo complejo contamos con la capacidad de, mediante una función cualquiera, transformar un punto en el plano complejo a otro. Esto es, si vemos a las funciones como teletransportadores que desplazan instantáneamente puntos de un lugar en el plano a otro, somos capaces de revolver el plano complejo a gusto. Gran cosa... dirán sarcásticamente. Pero punto por punto, curva por curva, región por región, somos capaces de transformar de esta manera áreas enteras en el plano, revelando patrones increíbles que ni en sueños se nos presentarían. Gráficamente serán conjuntos en el plano $\mathbb{C}$, pero en la vida real, esto constituye una herramienta con la cual resolver problemas de física, química, biología, otros problemas matemáticos, en fin, por cada transformación, hay un universo que se desdobla ante nuestros ojos.

Índice

1. A qué llamamos transformaciones

Las funciones complejas de variable compleja, así por más que reciban un sólo número complejo como parámetro, si queremos representar gráficamente a la función: el conjunto de partida junto con el de llegada, no podremos hacerlo en un espacio tridimensional. Nos quedamos corto con la máxima cantidad de dimensiones que podemos visualizar intuitivamente. Ya que el conjunto de partida de un complejo es un subconjunto de todo un plano, cuya representación estándar requiere de dos dimensiones físicas para su visualización, y el conjunto de llegada de tal función sería a su vez un subconjunto de otro plano. Esto indica que a menos que seamos capaces de visualizar 2x2 = 4 dimensiones gráficamente a la vez, no podremos representar en un mismo gráfico a una función...

Por esto mismo, las concebiremos a partir de dos gráficas: en uno el conjunto complejo de partida, o $\mathbb{C}_z$, y en el otro el conjunto complejo de llegada, o $\mathbb{C}_w$. En $\mathbb{C}_z$ podremos tomar regiones particulares (siempre dentro del dominio de la función) y ver a qué puntos en el plano $\mathbb{C}_w$ se mapean por acción de una función $f(z)$. Viéndolo así, es como si concebimos a la función como una operación que nos *transforma* una región a otra, que puede ser similar o completamente distinta a la anterior en forma, ubicación y tamaño dentro del plano complejo. Este análisis símilmente abstracto de lo que son las funciones de variable compleja son de inmensa utilidad en el ámbito científico (sobre todo la física) e ingenieril. Con ello, inauguramos una nueva etapa en el estudio de las variables complejas. ¡Bienvenido!



2. Tipos de Transformaciones

Transformaciones hay infinitas, cada función compleja existente es una transformación. Y las hay de todo tipo. Pero las más elementales son fáciles de reconocer, y con reconocer me refiero a saber cómo mapean ciertas regiones o curvas del plano $\mathbb{C}_z$ a $\mathbb{C}_w$. Analizaremos sobre todo las transformaciones debido a las funciones elementales ya vistas anteriormente, y algunas más.

2.1. Escalado y Rotación

Una transformación que es capaz de escalar (es decir, tanto dilatar como contraer) y rotar regiones en el plano complejo respecto al origen está dado por

$$w = Az, \qquad A \in \mathbb{C}$$

Si consideramos que $A = ae^{i\alpha}$ y $z = re^{i\theta}$, entonces demostramos los efectos de dicha transformación:

$$\begin{aligned} w &= Az \\ w &= ae^{i\alpha}\, re^{i\theta} \\ w &= ar\ e^{i(\alpha+\theta)} \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que:

$$|w| = ar \qquad\qquad \arg w = \alpha + \theta$$

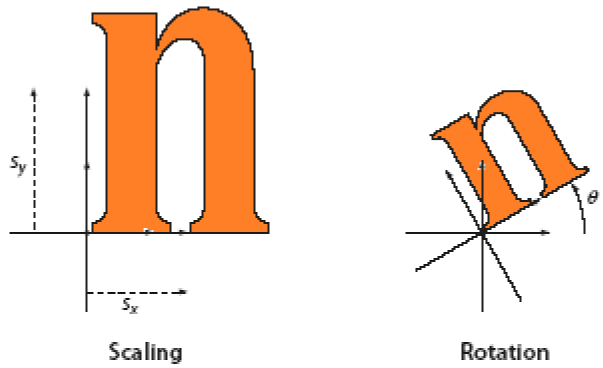
Esto quiere decir que al complejo original z el módulo se escaló por un factor $a = |A|$ y se lo rotó gráficamente una cantidad $\alpha = \arg A$. Tenemos además que:

- Si $|A| > 1$ se produce una dilatación, mientras que si $|A| < 1$ se produce una contracción.
- Si $|A| = 1$, es decir, A pertenece a la circunferencia unitaria, no se produce escalado alguno, el módulo de z permanece intacto.
- Si $\arg A > 0$ se rota al complejo en sentido antihorario, y si $\arg A < 0$ será en sentido horario.
- Si $\arg A = 0$, es decir, A es un real positivo, z no se rota en absoluto.

Definición 2.1. Transformación de escalado y rotación
Llamaremos **transformación de escalado y rotación** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = Az$$

Donde $A \in \mathbb{C}$ es una constante compleja cualquiera, cuyo módulo define en cuánto se escala la imagen, y cuyo argumento determina en cuánto se rota respecto al origen (siempre alrededor de $z = 0$).



2.2. Traslación

Una transformación que traslada de manera intacta regiones en el plano viene dada de la forma más simple de todas:

$$w = z + B \qquad B \in \mathbb{C}$$

Si consideramos $B = a + ib$ y $z = x + iy$, entonces demostramos los efectos de dicha transformación:

$$\begin{aligned} w &= z + B \\ w &= (x + iy) + (a + ib) \\ w &= (x + a) + i(y + b) \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que

$$\mathfrak{Re}(w) = x + a \qquad \qquad \mathfrak{Im}(w) = y + b$$

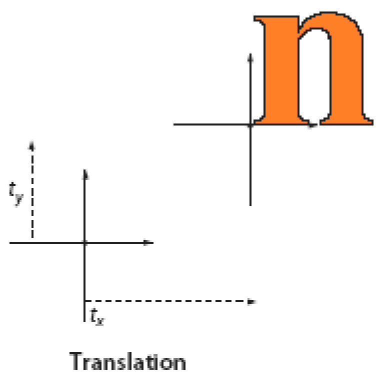
Esto quiere decir que al complejo original z se lo desplazó gráficamente a unidades en sentido positivo del eje real, y b unidades en sentido positivo del eje imaginario. Tenemos además que:

- Si $\mathfrak{Re}(B) > 0$ se produce un desplazamiento de z hacia la derecha, y si $\mathfrak{Re}(B) < 0$, será hacia la izquierda.
- Si $\mathfrak{Re}(B) = 0$ no hay desplazamiento horizontal.
- Si $\mathfrak{Im}(B) > 0$ se produce un desplazamiento de z hacia arriba, y si $\mathfrak{Im}(B) < 0$, será hacia abajo.
- Si $\mathfrak{Im}(B) = 0$ no hay desplazamiento vertical.

Definición 2.2. Transformación de traslación
Llamaremos **transformación de traslación** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = z + B$$

Donde $B \in \mathbb{C}$ es una constante compleja cualquiera, cuya parte real define en cuánto se desplaza horizontalmente el resultado, y cuya parte imaginaria determina el desplazamiento vertical.



2.3. Transformación lineal

Englobaremos a ambas transformaciones anteriores para definir lo que denominamos **Transformación lineal** o también **Transformación afín**:

$$w = Az + B \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

Ésta es una transformación capaz de escalar a z, rotarlo en torno al origen, y trasladarlo, acorde a la naturaleza de las constantes A y B como se detalló previamente.

Definición 2.3. Transformación lineal
Llamaremos **transformación lineal** o **transformación afín** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z)$ sea la composición de las aplicaciones de traslación ($T = z + B$) con la de escalado-rotación ($E = Az$):

$$f(z) = T \circ E\ (z) = Az + B$$

Donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes complejas, con $A \neq 0$. El complejo A determina la naturaleza de la rotación y escalado, y B la de traslación.

2.4. Inversión

Ahora analizaremos a una de las más fascinantes transformaciones elementales, la **transformación recíproca** o **inversa**:

$$w = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

Se preguntarán ¿qué es lo que hace? Bueno, la respuesta viene dada por un pequeño análisis de la misma:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z} \\ w &= \frac{1}{re^{i\theta}} \\ w &= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que:

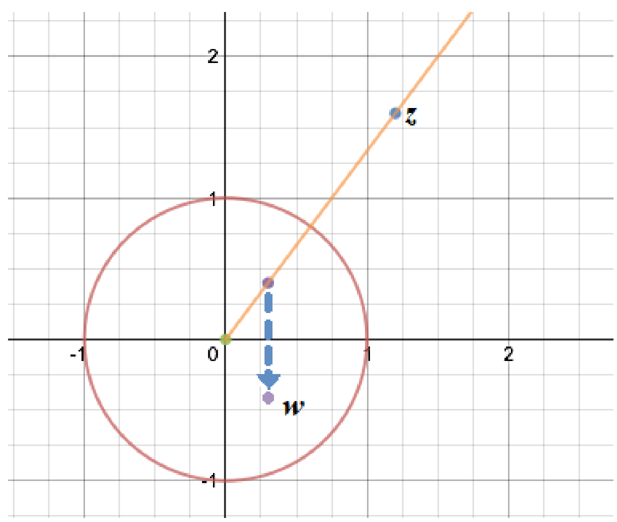
$$|w| = \frac{1}{r} \qquad\qquad \arg w = -\theta$$

Esto quiere decir que se invirtió el módulo del complejo z y luego se lo reflejó respecto del origen. Tenemos las siguientes características:

- Considérese la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Si $|z| > 1$, es decir z está fuera de la circunferencia unitaria, la función la mapea dentro de ella. En caso de que $|z| < 1$, es decir z dentro de la circunferencia unitaria, la función la mapea afuera.

- Si $|z| = 1$, es decir z sobre la circunferencia unitaria, no hay efecto de escalado alguno.

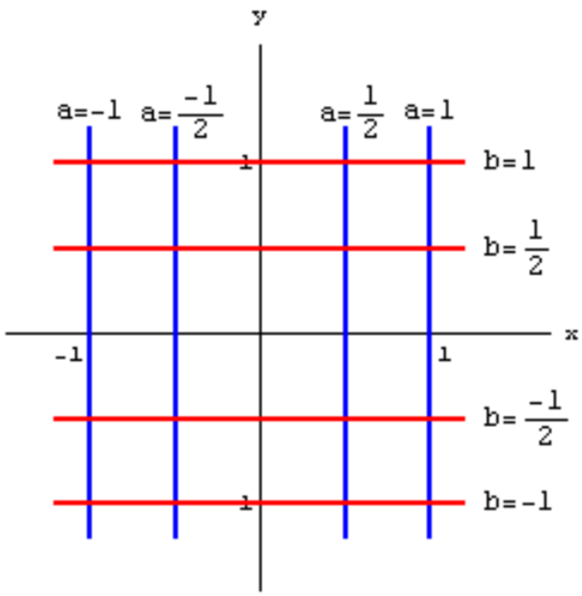
- Como $\arg w = -\arg z$, el complejo se reflejará respecto al eje real.

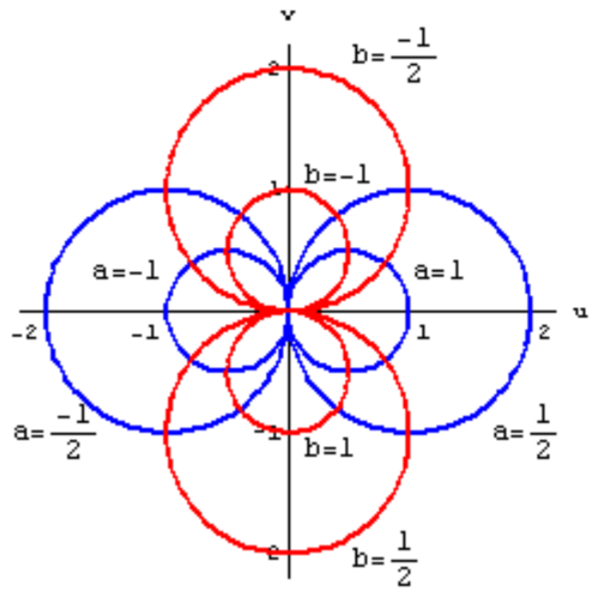


Definición 2.4. Transformación inversa
Llamaremos **transformación inversa** o **recíproco** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

Bajo esta transformación, las rectas se convierten en círculos, y los círculos en rectas. Ni las rectas más derechas ni las curvas más cerradas se pueden resistir a la transformación inversa...





2.5. Transformación de Möbius

Combinando la transformación lineal y la transformación inversa, tenemos la denominada **transformación racional lineal** o **Transformación de Möbius**:

$$w = \frac{Az+B}{Cz+D} \qquad A, B, C, D \in \mathbb{C} \ \wedge \ AD - CB \neq 0$$

Tal transformación puede, según los valores que se les asigne a las constantes, inducir una rotación, un escalado, traslación e inclusive inversión de z. Es ésta la más abarcativa de las transformaciones. Puede curvar a las más rígidas de las rectas y enderezar a las más duras de las circunferencias.

Si $C = 0$, la transformación anterior se reduce a una simple transformación lineal. Pero si $C \neq 0$, la transformación de Möbius puede definirse en términos de la composición de todas las transformaciones antes vistas:

$$w = \frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C} \cdot \frac{1}{Cz+D}$$

Donde se sigue exigiendo, claro está, que $AD - CB \neq 0$.

Por el hecho de que la Transformada de Möbius se puede expresar de la forma

$$azw + bz + cw + d = 0$$

se la llama también **transformación bilineal**, al demostrarse que es lineal con respecto a z y con respecto a w (los coeficientes son complejos distintos a los presentados en la función anterior). Dicho esto, se puede tranquilamente despejar z y obtener la transformada inversa, la cual es una transformación de la misma naturaleza:

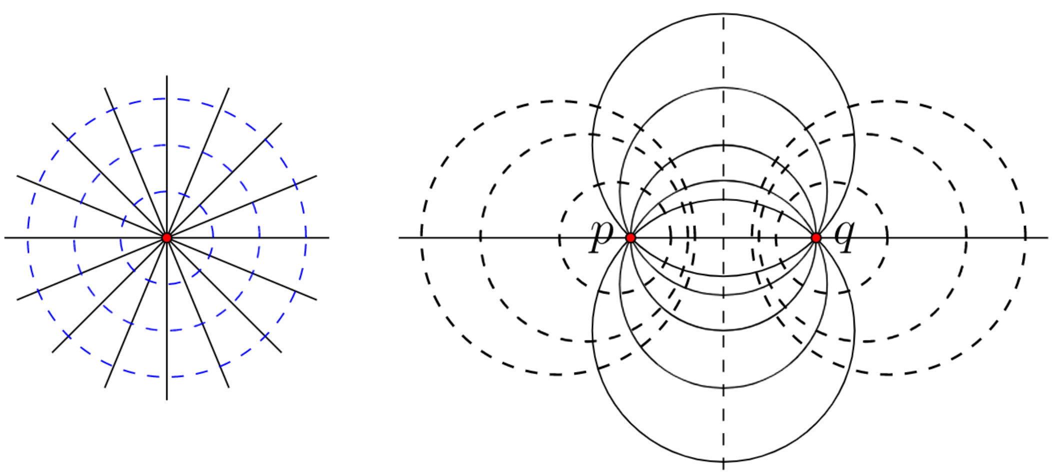
$$z = \frac{-Dw + B}{Cw - A} \qquad AD - BC \neq 0$$

Definición 2.5. Transformación de Möbius
Llamaremos **transformación de Möbius** o **racional lineal** o **bilineal** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \qquad z \neq -\frac{D}{C}$$

En donde $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ y debe darse que $AD - BC \neq 0$

Bajo una transformación de Möbius, las curvas en el plano (a) se transforman en las curvas correspondientes en el plano (b) en la siguiente figura:



(a) (b)

3. Parametrizando curvas en $\mathbb{C}$

En cálculo de varias variables se parametrizan curvas haciendo que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tome como variables $x(t), y(t)$, ambos dependientes a su vez de un parámetro adicional en común. Se lo llamaba t por asociarlo comúnmente con el tiempo, en aplicaciones físicas.

Se ha hecho notar ya la asombrosa similitud entre funciones de dos variables reales y funciones complejas. El hecho de que un número complejo z represente un punto en el plano $\mathbb{C}$ es lo que nos demuestra que hay una correlación unívoca con $\mathbb{R}^2$. Las componentes real e imaginaria de un complejo se correlacionan inconfundiblemente con las coordenadas del mismísimo $\mathbb{R}^2$. Entonces, si hablamos de parametrizar curvas en el plano de Argand, o plano complejo, tendríamos que definir un número complejo z cuyos componentes real e imaginario sean funciones respecto a una variable real cualquiera t.

$$\mathcal{C}: \; z = z(t) \qquad a \leq t \leq b$$
$$z(t) = x(t) + i \; y(t)$$

Definición 3.1. Arco suave
Dada la curva $\mathcal{C}: \; z = z(t)$ en donde $a \leq t \leq b$ y $z(t) = x(t) + i \; y(t)$, se dice que $\mathcal{C}$ es un **arco suave** si:

- $x(t), y(t)$ son funciones inyectivas en el intervalo $I = [a, b]$
- $x'(t), y'(t)$ son funciones continuas en I
- $z'(t) \neq 0$ en I

Básicamente hablando, una curva no será suave si:

1. Se corta a sí misma
2. Presenta crestas o picos
3. Permanece en un mismo punto al ser evaluada en un intervalo de su dominio.

Definición 3.2. Ángulo entre curvas en el Plano Complejo
Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos arcos suaves simples en una región $\mathcal{D}$ del plano complejo que se interceptan en un punto z_0. Se denomina ángulo entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en z_0 al ángulo formado por las respectivas rectas tangentes en dicho punto.

4. La Transformación Conforme

De todas las transformaciones existentes, les cuento el secreto... las estrellas del espectáculo son aquellas que al transformar varias curvas, logran conservar el más simple de los detalles:

el ángulo entre ellos.

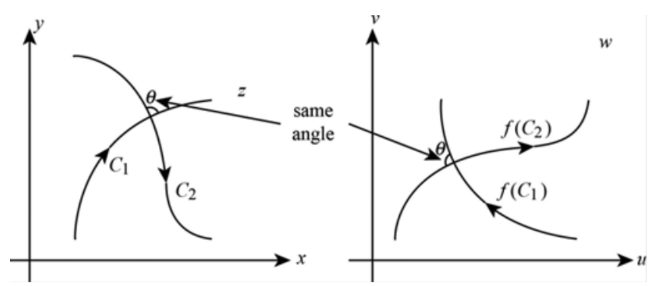
Definición 4.1. Transformación que preserva la orientación
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. Diremos que f conserva la orientación si una rotación en sentido antihorario en $\mathcal{D}$ se transforma por f en una rotación en sentido antihorario en $\mathcal{S}$.

Definición 4.2. Transformación que preserva los ángulos
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. Diremos que f conserva los ángulos si para cualquier $z_0 \in \mathcal{D}$, dados dos arcos cualesquiera que se intersectan en z_0 formando un ángulo α, las imágenes de estas curvas se cortan en $f(z_0) \in \mathcal{S}$ formando entre sí el mismo ángulo α.

Dadas estas dos definiciones, ahora les presentamos, señoras y señores, a la estrella del capítulo: las **Transformaciones Conforme**

Definición 4.3. Transformación Conforme
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. La transformación $w = f(z)$ se dice que es **una transformación conforme** en un punto $z_0 \in \mathcal{D}$ si preserva el ángulo entre curvas que se interceptan en z_0 tanto en magnitud como orientación.

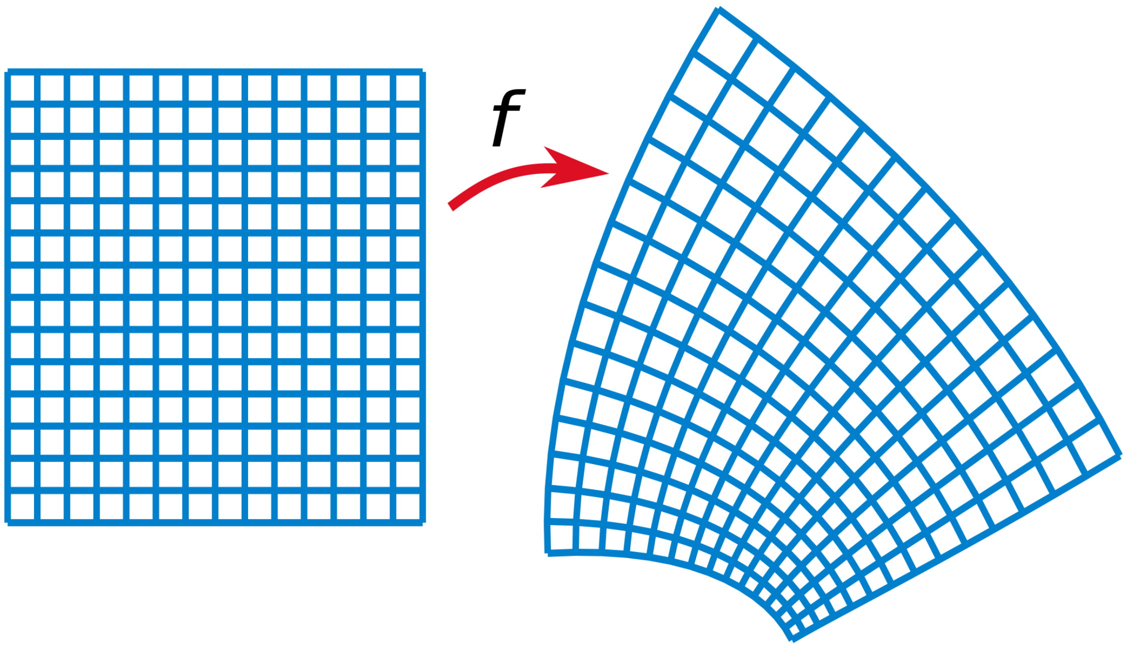
La importancia de las llamadas transformaciones conforme radica en su utilidad para resolver problemas en el campo de la física, química, ingeniería y matemáticas en general, entre tantos otros, que pueden ser expresados en términos de variable compleja pero que presentan severas dificultades en su geometría. Las trasformaciones se utilizan con el objetivo de simplificar tales problemas.



Asociado a un gran concepto siempre viene un gran teorema...

Teorema 4.1. *Condición Suficiente para la Conformidad*
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$.
Si f es analítica en $\mathcal{D}$ y $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathcal{D}$, entonces f es conforme en $\mathcal{D}$.

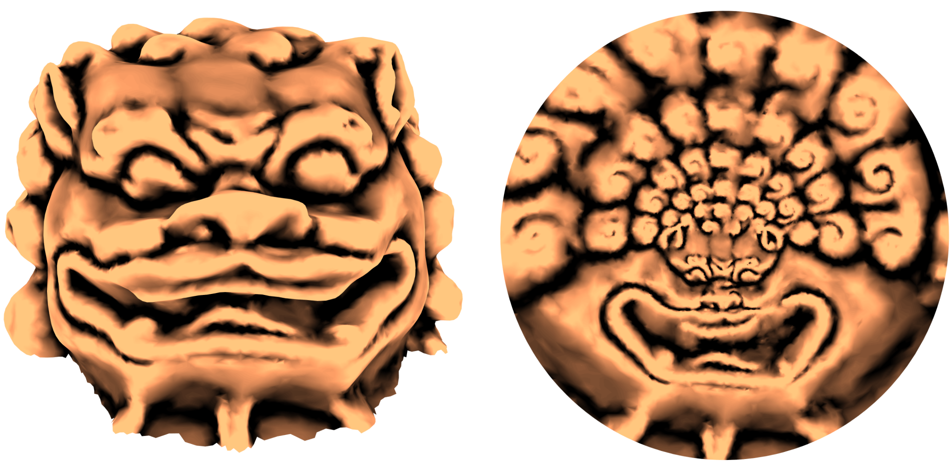
Demostrar



Punto por punto, curva por curva, región por región, transformaremos áreas enteras del plano complejo, revelando patrones increíbles que ni en sueños se nos presentarían.

4.1. Aplicación

Para los que crean que las transfomaciones conformes son aburridas, diviértanse encontrándole sentido al procesamiento de imágenes con el mapeo conformacional...



Integración Compleja

Breggia, Bruno M.

"Sigue el camino amarillo"
- El Mago de Oz -

Sabemos derivar funciones complejas, gran hazaña. ¿Qué toca ahora? Saber integrarlas. Y para ello contamos con varias herramientas que nos simplificarán esta tarea, herramientas que aprenderemos en este capítulo, y provistas la mayoría por un simpático matemático llamado *Augustin Louis Cauchy*, hombre que dejó su nombre escrito por todos los libros de cálculo complejo (ya hemos visto su nombre antes, ¿recuerdan?). Integrar funciones de variable compleja no se compara tanto con integrar funciones de una variable real, sino con funciones multivariables. Sigue el camino y encontrarás la verdad.

Índice

1. Integral de Función Compleja con Variable Real

Avanzaremos por pasos, pues el aprendizaje es procedural y todo tiene un orden que ser seguido para entender conceptos de complejidad creciente. Veremos primero cómo integrar funciones que mapean números reales con números complejos, es decir, funciones complejas **de variable real**. No se confundan que a diferencia de las funciones que se venían viendo hasta ahora, éstas reciben sólo un real $t \in \mathbb{R}$ y retornan un complejo, no reciben un complejo, como las típicas **funciones de variable compleja**.

Las funciones complejas de variable real mapean puntos en la recta numérica $\mathbb{R}$ a puntos en el plano $\mathbb{C}$. Bajo este punto de vista, conviene confesar que describen trayectorias en el plano, son *parametrizaciones*.

Ahora estamos listos para definir la integral de este tipo de funciones:

Definición 1.1. Integral definida de funciones complejas de variable real
Téngase

$$w: \ I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

donde $w(t) = u(t) + i\ v(t), t \in I$ en el cual $u, v: \ t \in [a, b] \to \mathbb{R}$

La **integral definida** de $w(t)$ sobre $[a, b]$ se simboliza como $\int\limits_a^b w(t)\ dt$ y se define como:

$$\int\limits_a^b w(t)\ dt \triangleq \int\limits_a^b u(t)\ dt + i \int\limits_a^b v(t)\ dt$$

sólo en caso de que $\int_a^b u(t)\ dt$ y $\int_a^b v(t)\ dt$ existan.

Con esta definicón, volvemos a la tendencia de definir operaciones sobre complejos en términos de la misma operación aplicada a los números reales, que ya sabemos cómo operan. Esto nos ayuda a simplificar un montón el operar con complejos. Si sabes integrar funciones reales de variable real, sabes integrar funciones complejas de variable real, pues en fin, estarás integrando las funciones componentes de la función compleja, y éstas no son más que funciones reales.

De igual manera, se pueden definir las integrales impropias de $w(t)$ sobre intervalos no acotados.

Definición 1.2. Integrabilidad
Una función compleja de variable real diremos que es **integrable** si sus funciones componentes son continuas ó presentan una cantidad finita de discontinuidades de salto finito.

Como notamos, las condiciones de integrabilidad son las mismas que para funciones reales. Por ahora, absolutamente nada distinto...

Ahora, un detalle no menor, la integral definida de funciones complejas de variables real es en sí mismo un número complejo. Simbólicamente,

$$\int_a^b w(t)\ dt \in \mathbb{C}$$

a partir de cuya definición tenemos que:

$$\mathfrak{Re}\left[\int_a^b w(t)\ dt\right] = \int_a^b \mathfrak{Re}[w(t)]\ dt$$
$$\mathfrak{Im}\left[\int_a^b w(t)\ dt\right] = \int_a^b \mathfrak{Im}[w(t)]\ dt$$

Ahora estudiaremos algunas propiedades importantes de la integral definida de funciones complejas de variable real. Sean $w, w_1, w_2 :\ I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, y si existen las integrales $\int_a^b w(t)\ dt$, $\int_a^b w_1(t)\ dt$ y $\int_a^b w_2(t)\ dt$, entonces se cumplen:

1. Linealidad

$$\int\limits_a^b z_0 w(t)\ dt = z_0 \int\limits_a^b w(t)\ dt, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\int\limits_a^b [w_1(t) \pm w_2(t)]\ dt = \int\limits_a^b w_1(t)\ dt \pm \int\limits_a^b w_2(t)\ dt$$

2. Inversión de los extremos de integración

$$\int\limits_a^b w(t)\ dt = -\int\limits_b^a w(t)\ dt$$

3. Igualdad de los extremos de integración

$$\int\limits_a^a w(t)\ dt = 0$$

4. Aditividad del intervalo

$$\int\limits_a^c w(t)\ dt = \int\limits_a^b w(t)\ dt + \int\limits_b^c w(t)\ dt, \qquad a < b < c$$

5. Acotación del módulo

$$\left| \int_a^b w(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|\ dt, \qquad a \leq b$$

//Demostrar todas

1.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Muy linda la definición de integral definida, pero... para resolverla numéricamente necesitamos valernos sin lugar a dudas del famoso **Teorema Fundamental del Cálculo**. Lo aplicamos porque la integral de funciones complejas de variable real se reduce a integrales de funciones reales, pero la definición misma nos permite extender el teorema para que tenga validez de igual manera por sobre el conjunto de las funciones complejas.

Teorema 1.1. *TFC para funciones complejas*
Sea $w : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *con* $w(t) = u(t) + i\ v(t)$ *continua sobre* I *y* $W'(t) = w(t)\ \forall t \in (a, b)$. *Entonces:*

$$\int_a^b w(t)\ dt = W(b) - W(a)$$

Considerando $U(t)$ y $V(t)$ primitivas de $u(t)$ y $v(t)$ respectivamente, para $a \leq t \leq b$, entonces $U'(t) = u(t), V'(t) = v(t)$ y podemos expresar la integral definida como:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t)\ dt &= W(b) - W(a) \\ \int_a^b w(t)\ dt &= [U(b) - U(a)] + i\ [V(b) - V(a)] \end{aligned}$$

Siendo que $W(t) = U(t) + i\ V(t)$

2. Curvas en el plano de Argand

Volvemos a concebir al plano complejo como ente geométrico para introducir unas nuevas definiciones, que en su momento no se dieron ya que irían a ser temas dejados de lado hasta este preciso momento. Nos referiremos primero a *parametrizaciones* en el plano complejo, es decir, a aquellas curvas en el plano $\mathbb{C}$ dadas por funciones complejas de variable real. O sea, dependiente de un *parámetro* $t \in \mathbb{R}$.

Con esto tenemos como propósito dar a conocer las posibles trayectorias a partir de las cuales pretendemos integrar.

Antes de empezar a tirar definiciones, aclaramos que las mismas se harán respecto a una curva $\mathcal{C} : z = z(t)$, con $z : \ I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, donde $z(t) = x(t) + i \ y(t)$ y:

$$x : \ I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y : \ I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Definición 2.1. Arco
Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ funciones reales continuas de parámetro real $t \in I = [a,b]$. Entonces el conjunto de puntos $\mathcal{C} = \{z(t) \ / \ z(t) = x(t) + i \ y(t)\}$ es un **arco**.

Definición 2.2. Arco Simple o Arco de Jordan
Un arco $\mathcal{C} : z(t)$ con $t \in I = [a,b]$ es un **arco simple** o **arco de Jordan** si no tiene intersección consigo mismo, esto es, si se cumple que $z(t_1) \neq z(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$.

En otras palabras, $\mathcal{C}$ es un arco simple si $z(t)$ es inyectiva en el intervalo I.

Definición 2.3. Arco Diferenciable
Un arco $\mathcal{C} : z(t)$ con $t \in I = [a,b]$ es un **arco diferenciable** si $z(t)$ tiene derivada primera continua sobre I. En este caso, la función

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

es integrable en el intervalo $[a,b]$ y la longitud de $\mathcal{C}$ está dada por $L = \int_a^b |z'(t)| \ dt$.

Definición 2.4. Arco Suave
Un arco se dice ser un **arco suave** si es un arco simple, diferenciable y con $z'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$.

Se define para este caso el **vector tangente unitario**:

$$T = \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \qquad \forall t \in (a,b)$$

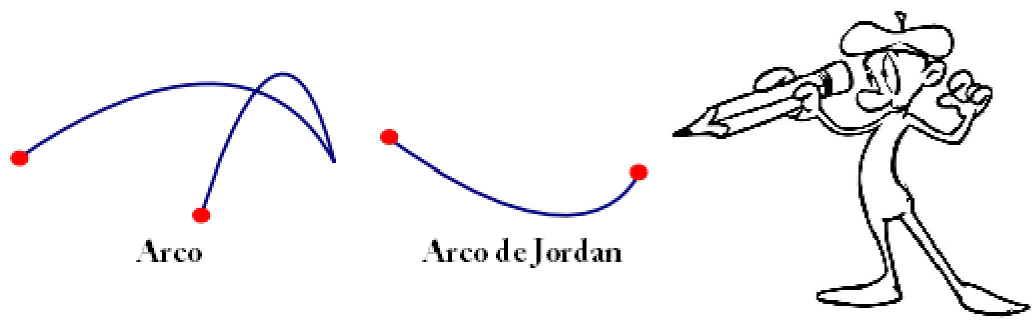
cuyo ángulo de inclinación es $\phi = \arg z'(t)$.

Definición 2.5. Contorno o Camino
Llamaremos a $\mathcal{C}$ un **contorno**, **camino** o inclusive **arco suave por tramos** si:

1. $\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k \; / \; \mathcal{C}_k : z = z_k(t)$, en donde $z_k(t)$ es un arco suave en $t \in I_k = [t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, 2, ..., K$ y $\bigcup_{k=1}^{K} I_k = [a, b]$

2. $z(t)$ es continua en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$

3. $z'(t)$ puede tener un punto de discontinuidad de salto finito en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$



Definición 2.6. Curva Cerrada Simple
Llamaremos **curva cerrada simple** a un arco tal que $z = z(t)$ es inyectiva en $(a, b\,]$ y que $z(a) = z(b) \; \wedge \; z'(a) = z'(b)$.

Definición 2.7. Curva Cerrada Suave
Llamaremos **curva cerrada suave** a la curva $\mathcal{C} : z = z(t)$ en $t \in I = [a, b]$ que satisface:

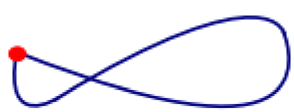
1. $z(t)$ es diferenciable

2. $z(t)$ es inyectiva sobre $(a, b\,]$, es decir no se corta a sí misma

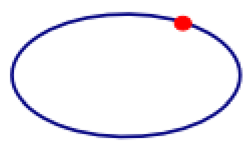
3. $z'(t) \neq 0$ además de que $z(a) = z(b) \; \wedge \; z'(a) = z'(b)$

Definición 2.8. Contorno o Camino cerrado simple
Llamaremos **contorno cerrado simple** o **camino cerrado simple** a la curva $\mathcal{C} : z = z(t)$ en $t \in I = [a, b]$ que satisface:

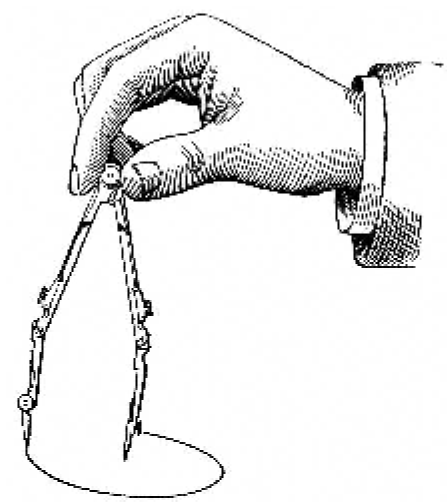
1. $\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k \;/\; \mathcal{C}_k : z = z_k(t)$, en donde $z_k(t)$ es un arco suave en $t \in I_k = [t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, 2, ..., K$ y $\bigcup_{k=1}^{K} I_k = [a, b]$
2. $z(t)$ es continua en t_k con $k = 1, 2, ..., K-1$
3. $z'(t)$ puede tener un punto de discontinuidad de salto finito en t_k con $k = 1, 2, ..., K-1$
4. $z = z(t)$ es inyectiva sobre $(a, b\,]$ y satisface que $z(a) = z(b)$ y que $z'(a) = z'(b)$.



Curva cerrada

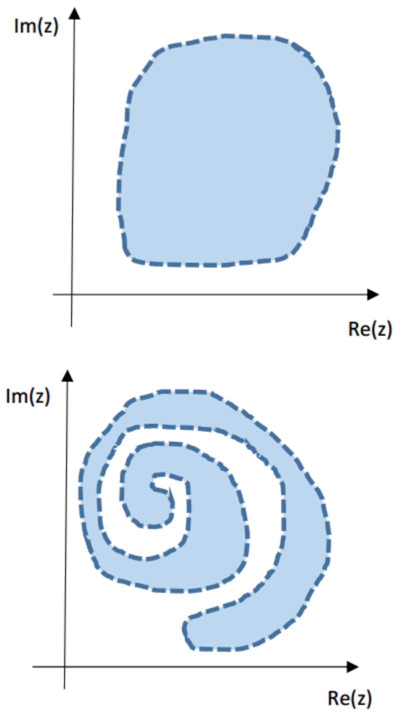


Curva cerrada suave

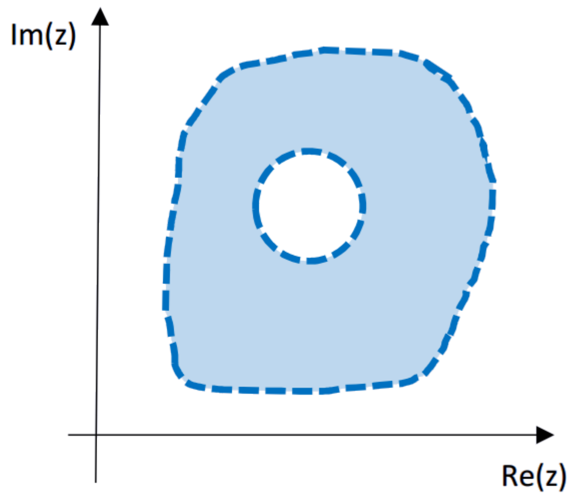


Ahora veremos una clasificación más para dominios en el plano complejo. Se ha visto antes que un dominio es **conexo** si cualquier par de puntos en él se pueden unir mediante una poligonal tal que ningún segmento de la misma pase por puntos por fuera del dominio. Con esto en mente, daremos cuenta de una subclasificación de la *conexidad*.

Definición 2.9. Dominio Simplemente y Múltiplemente Conexo
Se dice que $\mathcal{D}$ es un dominio **simplemente conexo** si todo contorno cerrado simple contenido en él encierra sólo puntos de $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{D}$ no es simplemente conexo, se dice ser **múltiplemente conexo**.



Dominios Simplemente Conexos



Dominio Multiplemente Conexo

3. Integrales de Camino

Llegó el momento... de integrar funciones complejas de variable compleja. No tengan pánico, que es similar a algo que ya conocemos: integrar funciones de varias variables. Si asociamos el plano complejo $\mathbb{C}$ una vez más con $\mathbb{R}^2$, entonces vamos a poder integrar siguiendo trayectorias, curvas, por sobre el plano complejo. Esto quiere decir que siempre que integremos una función compleja de variable compleja, lo haremos a lo largo de una trayectoria. Como que no tiene sentido si no... e integrar por sobre una trayectoria implica parametrizar el camino que se quiere seguir, o por lo menos, si es que quieres llegar a resolver numéricamente la integral (¡cómo no resolverla!).

Por ello mismo, a las integrales definidas de funciones complejas de variable compleja las denominaremos *integrales de camino*.

Definición 3.1. Integral de Camino o de Contorno

Sea un camino $\mathcal{C} : z = z(t)$, donde $z : t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to z(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z$ con $z(t) = x(t) + i\ y(t)$ y $z'(t) = x'(t) + i\ y'(t)$ siendo $z'(t)$ continua a trozos sobre I.

Sea $f : z \in \mathcal{C} \to f(z) \in \mathbb{C}_w$, con $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ definida y continua a trozos sobre $\mathcal{C}$, es decir $f(z(t))$ definida y seccionalmente continua sobre $I = [a, b]$.

Se define la **integral de camino**, o **integral de contorno**, de f a lo largo de $\mathcal{C}$, que se denota $\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$, como:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz \triangleq \int\limits_{a}^{b} f(z(t))\ z'(t)\ dt$$

Claramente notarán que a la integral de contorno la definimos tras el telón en términos de la integral anteriormente presentada, es decir, de la integral de funciones complejas de variable *real*.

Daremos cuenta ahora, como corresponde a la rutina, de las propiedades con las que cumple este tipo de integral. Si existen $\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$, $\int_{\mathcal{C}} f_1(z)\ dz$ y $\int_{\mathcal{C}} f_2(z)\ dz$, entonces se cumple:

1. Linealidad

$$\int\limits_{\mathcal{C}} z_0 f(z)\ dz = z_0 \int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\int\limits_{\mathcal{C}} [f_1(z) \pm f_2(z)]\ dz = \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(z)\ dz \pm \int\limits_{\mathcal{C}} f_2(z)\ dz$$

2. Inversión de la Orientación

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = - \int\limits_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz$$

3. Concatenación de $\mathcal{C}_k$

   Sea $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup\ \dots \mathcal{C}_K$, con $\mathcal{C}_k$ un contorno en $\mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathcal{C}_k} f(z)\ dz \right)$$

4. Desigualdad ML
   Sea $f(z)$ continua a trozos sobre $\mathcal{C}$ y $|f(z)| \leq M \; \forall z \in \mathbb{C}$.
   Sea L la longitud del contorno $\mathcal{C}$.

$$\boxed{\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz \right| \leq ML}$$

   Demostrar todos

3.1. Relación con la Integral de Línea de funciones reales

La integral de camino se relaciona sin lugar a dudas con la conocida integral de línea para funciones reales. Pero a no confundirse: **integral de camino** (para funciones de variable compleja) con **integrales de línea** (para funciones de variable real). Sin embargo podemos expresar la de contorno en términos directamente de la de línea, partiendo de su definición:

Sea un contorno $\mathcal{C} : z = z(t)$ con $z : t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z$ donde $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ y $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$. Sea también $f : z \in \mathcal{C} \to f(z) \in \mathbb{C}_w$ con $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz &= \int_a^b f(z(t))\; z'(t)\; dt \\
&= \int_a^b (u + iv)(x' + iy')\; dt \\
&= \int_a^b (ux' + iuy' + ivx' - vy')\; dt \\
&= \int_a^b [(ux' - vy') + i\; (vx' + uy')]\; dt \\
&= \int_a^b (ux' - vy')\; dt + i \int_a^b (vx' + uy')\; dt \\
\int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz &= \int_a^b (u\; dx - v\; dy) + i \int_a^b (v\; dx + u\; dy)
\end{aligned}$$

3.2. Consideraciones sobre integrales de contorno

Al integrar curvas cerradas estamos denotando regiones en el plano complejo, en los cuales, a medida que el vector tangente a la curva se desplaza en dirección de la integración, el vector normal a ella señala hacia el interior de $\mathcal{C}$ (por la regla de la mano derecha).

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada en el plano complejo $\mathbb{C}$. Llámese $\mathcal{R}$ a la región que encierra $\mathcal{C}$. Entonces se dice que $\mathcal{C}$ es la **frontera** de $\mathcal{R}$, también denotada como $\delta\mathcal{R}$.

Por convención se denomina **orientación positiva** del contorno al sentido antihorario del recorrido. La notación pertinente de la integral de contorno siguiendo la orientación positiva de $\mathcal{C}$ es:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \circlearrowleft\!\!\!\!\!\!\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$$

En caso de seguir una orientación en sentido horario, se dice que posee una **orientación negativa**, y la curva debe denotarse como $-\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}^{-}$.

4. Los Teoremas Integrales de Cauchy

Se dio la definición, se vieron propiedades, y ahora toca ver teoremas relacionados con el tema. Pero todos, obvio está, son herramientas con el objetivo de facilitarnos el proceso de evaluación de una integral. Por el ejemplo, el que sigue afirma que si se cumplen ciertas condiciones... ¡la integral es cero!

Teorema 4.1. *Teorema Integral de Cauchy*
Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado y simple. Sea además $f(z)$ derivable sobre $\mathcal{C}$ y en su interior, y sea $f'(z)$ continua. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

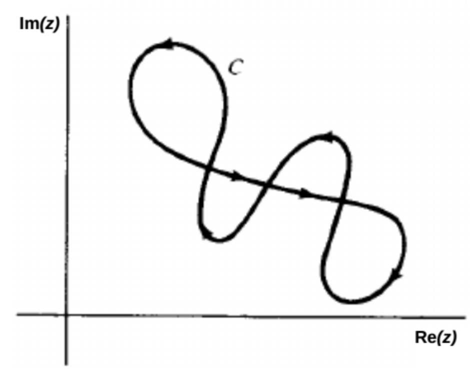
Demostrar

Resulta que en tiempos de nuestro querido amigo Cauchy no existía el concepto de analiticidad todavía, y por ello es que este matemático le solicita a la función derivabilidad y continuidad de su derivada por aparte. Sin embargo, llegado el momento, Goursat tomó la tesis de este teorema y se dedicó a demostrar su validez para casos en los que se tenga que la función $f(z)$ sea analítica en la región encerrada por $\mathcal{C}$. Con ello, se mereció añadir su nombre al teorema.

Teorema 4.2. *Teorema Integral de Cauchy-Goursat*
Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado y simple. Sea $f(z)$ analítica en $\mathcal{C}$ y en su interior. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

Cabe notar que las trayectorias de las que hablan la hipótesis de estos teoremas son curvas cerradas y simples. Es decir, curvas que no se cortan consigo misma. Sin embargo, esto se puede extender con el siguiente teorema a curvas cerradas de cualquier tipo:



Teorema 4.3. *Teorema Integral de Cauchy-Goursat generalizado*
Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$ simplemente conexo, entonces para todo camino cerrado $\mathcal{C}$ contenido en $\mathcal{D}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

Ahora la cuestión es... cuando tienes una curva $\mathcal{C}$, definida como una curva cerrada suave pero en cuyo interior la función $f(z)$ no es analítica para todo punto, ¿qué hago? La solución a todos tus problemas viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 4.4. *Teorema Integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos*

Supongamos que:

- *Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada y simple, positivamente orientada.*
- *Sean $\mathcal{C}_k$ con $k = 1, 2, 3.., n$ contornos cerrados simples, orientados positivamente, disjuntos y cuyos dominios interiores no tienen puntos en común.*

Si $f(z)$ es una función analítica en todos estos contornos y en el dominio múltiplemente conexo formado por todos los puntos interiores a $\mathcal{C}$ y exteriores a todos los $\mathcal{C}_k$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} \left(\oint_{\mathcal{C}_k} f(z)\ dz \right)$$

Demostrar

Consideramos a los primeros teoremas enunciados en esta sección como *teoremas integrales para dominios simplemente conexos*. Y si tratamos con dominios múltiplemente conexos, aplicamos el teorema recién visto.

Una consecuencia importante del teorema anterior es el **Principio de la Deformación**.

Corolario 4.1. *Principio de Deformación*
Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ contornos cerrados simples orientados positivamente, donde $\mathcal{C}_2$ es interior a $\mathcal{C}_1$. Si una función $f(z)$ es analítica en ambos caminos y en los puntos comprendidos entre ellos, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\ dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\ dz$$

Recapitulando, podemos resumir un poco lo visto hasta aquí respecto de integrales de contorno, y exponer estas *condiciones equivalentes* a la hora de analizar funciones de variable compleja.

Teorema 4.5. *Condiciones equivalentes*
Sea $f(z)$ una función continua en un dominio $\mathcal{D}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes entre sí:

1. *$f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$ en $\mathcal{D}$*
2. *Las integrales de $f(z)$ sobre caminos contenidos en $\mathcal{D}$, con punto inicial z_1 y punto final z_0 fijos, tienen todas el mismo valor (independencia del camino)*
3. *Las integrales de $f(z)$ sobre caminos cerrados contenidos en $\mathcal{D}$ tienen todas el mismo valor (cero).*

Augustin Louis Cauchy

4.1. Fórmula Integral de Cauchy

Como si no fuese suficente con tantos teoremas de Cauchy, veremos unas formulaciones más, que son de suma importancia en el estudio de funciones de variable compleja.

Teorema 4.6. *Fórmula Integral de Cauchy*
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$. Si z_0 es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Demostrar

Basándose en la fórmula del teorema anterior, llegamos a nuevas formas de calcular la derivada de tales funciones...

Corolario 4.2. *Fórmula Integral: extensión a derivadas de orden superior*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$. Si z es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds \qquad f''(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s - z)^3}\, ds$$

Tenemos de forma genérica que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s - z)^{n+1}}\, ds$$

A esta altura, contamos con las herramientas necesarias para poder demostrar un teorema que se expuso hace un tiempo en Derivación Compleja. Es el de analiticidad de las derivadas, que a continuación lo exponemos por mayor comodidad, y redactado en nuevos términos.

Teorema 4.7. *Analiticidad de las derivadas*
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$.
Si z es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes en ese punto y son analíticas en él.

Demostrar

Sucesiones y series de números complejos

Breggia, Bruno M.

Quién alguna vez no se durmió contando ovejas... Claro quedó desde que se introdujeron los números complejos que los números no son todos para contar. El conjunto $\mathbb{C}$ no es un conjunto ordenado, pero no por ello nos vemos incapacitados de crear nuestras propias sucesiones de complejos. Y cuando hablo de sucesiones, hablo de sucesiones infinitas, como debe ser. Pero en vez de corresponderse con puntos en la recta numérica, aquí las sucesiones serán... puntos desparramados en el plano. Una cosa les anticiparé: trabajar con sucesiones y series implica domar el infinito, y para ello volveremos a nuestro olvidado amigo el plano complejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$, es decir, encarnaremos al infinito mismo en un punto... en un simple punto como cualquier otro... un mortal como los demás. ¡Iníciese este capítulo o no se acabará jamás!

Índice

1. Sucesiones de números complejos

Todos conocemos las sucesiones... de números reales. Pero a ser verdad, una sucesión de números complejos es una sucesión que, sorpresa, posee números complejos. Abstraer la idea de sucesión no es en absoluto complicado. Sin embargo, la definición formal nunca debe faltar:

Definición 1.1. Sucesiones de números complejos
Una **sucesión** de números complejos es una relación que a cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna un $z_n \in \mathbb{C}$, es decir:

$$n \in \mathbb{N} \to z_n \in \mathbb{C}$$

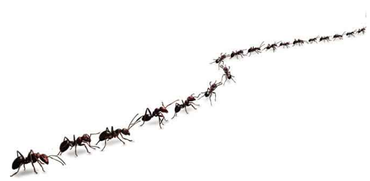
Hay dos maneras de anotar una sucesión:

- **Por comprensión**: consiste en denotar el término general z_n entre llaves

$$\{z_n\}$$

- **Por extensión**: consiste en nombrar uno por uno los elementos (preferiblemente los primeros) de la sucesión

$$z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$$



Vamos a repasar y pasar en limpio algunos conceptos aplicados a las sucesiones de números reales, pero aplicados a las de complejos. Primero y principal: **convergencia**.

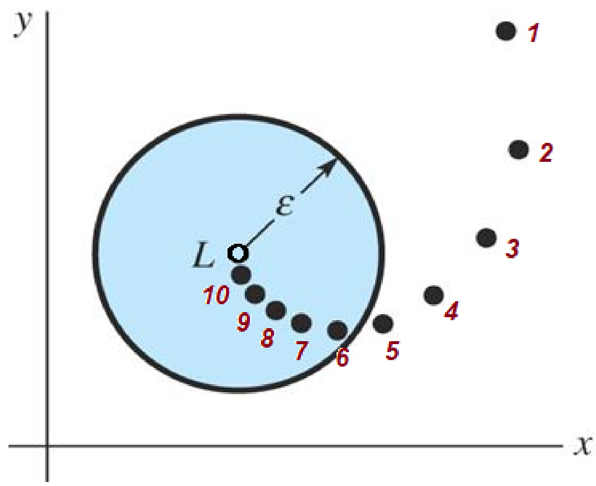
Definición 1.2. Convergencia
Una sucesión $\{z_n\}$ se dice ser **convergente** a un valor $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si dado un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un $\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

para todo $n > \delta$.
Si esto se cumple, diremos entonces que la sucesión posee límite, y lo denotaremos como:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

Si una sucesión no es convergente, se dirá que es **divergente**.



De manera análoga a la de límites de funciones de variable compleja, es demostrable (y también bastante intuitivo) que el límite de una sucesión, si existe, es único.

Teorema 1.1. *Unicidad del límite*
Si una sucesión posee límite, entonces su límite es único.

El próximo teorema nos vincula el límite de sucesiones de números complejos con límites de números reales. Difícil no entenderlo.

Teorema 1.2. *Límite de una sucesión de complejos*
Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos y sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $z_n = x_n + i\ y_n$ land $z = x + i\ y$.
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

De esta manera, el estudio de sucesiones de números complejos se reduce al estudio de dos sucesiones de números reales. Y ya sabemos cómo operar con ellas.

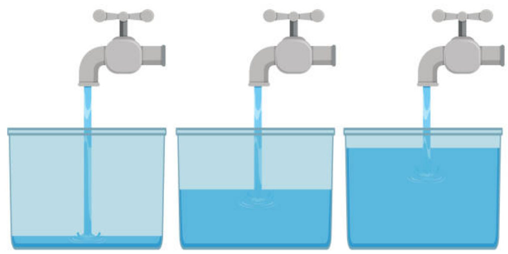
2. Series de números complejos

Procederemos de igual manera a dar definiciones rigurosas de lo que son las series de números complejos.

Definición 2.1. Serie de números complejos
Se denomina **serie** de números complejos $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ a la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ siendo

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} z_k$$

con $n, k \in \mathbb{N}$ y $z_k \in \mathbb{C}$.



La serie se definió como una **sucesión**, por lo que la misma puede ser o no convergente.

Definición 2.2. Serie convergente
Una serie de números complejos $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ se dice **convergente** si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ es convergente a algún valor $S \in \mathbb{C}$.
En caso contrario la serie será **divergente**.

Pero como el n-ésimo término de una serie representa la suma parcial de los n primeros términos de alguna otra sucesión $\{z_n\}$, entonces si la serie converge, esto quiere decir que encontramos el límite para la suma de todos los términos de la sucesión $\{z_n\}$. Por esto mismo es que viene a colación la siguiente definición:

Definición 2.3. Suma de la serie convergente
En caso de que la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ sea convergente a $S \in \mathbb{C}$, se dice que S es la **suma de la serie**, y se indica, por comprensión:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ó por extensión:

$$z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$$

Ahora, el teorema que nos vincula las series de número complejos con series de números reales:

Teorema 2.1. *Convergencia de series de números complejos*
Una serie de números complejos se dice convegrnete si y sólo si la serie de la parte real y la serie de la parte imaginaria son ambas convergentes en $\mathbb{R}$.
Simbólicamente, sean $z_n, S \in \mathbb{C}$ / $z_n = x_n + i\ y_n \ \wedge\ S = X + iY$. *Entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \ \Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

Esto nos trae como consecuencia el siguiente corolario, que presentará la manera que utilizaremos de ahora en adelante para determinar la convergencia de series de números complejos.

Corolario 2.1. *Condición de convergencia de series*
Una serie de números complejos converge a S *si y sólo si la sucesión de los restos* $\{\rho_N\}$, *definida con* $\rho_N = S - S_N$, *converge a cero.*
Es decir, si

$$\lim_{N\to\infty} \rho_N = \lim_{N\to\infty} (S - S_N) = 0$$

3. Series de funciones complejas

Ahora llegó el momento de estudiar *series de funciones complejas*. Es decir, una serie formada por las sumas parciales de una sucesión que involucra una función de variable compleja en su término general. En fin, el resultado es una función con varios términos, y mientras más términos se consideren, mayor la precisión del resultado.

Estudiaremos primero la serie más común, y útil, que se nos presentará de ahora en adelante...

Definición 3.1. Series de Potencias
Las **series de potencias** son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

donde $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ y z es cualquier punto de una región predeterminada en el plano complejo que contenga z_0.

Con esta presentación oficial de lo que es una serie de potencias de números complejos, podemos expresar su desarrollo como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ... + a_n(z-z_0)^n + ...$$

Para el caso particular de que $a_n = 1$ y $z_0 = 0$, tenemos lo que denominamos **serie geométrica**, la cual denotamos como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ...$$

La **suma parcial** de la serie geométrica hasta sus N primeros términos (siempre que $z \neq 1$) viene dada por:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z_n = \frac{1-z^N}{1-z}$$

Por otro lado, tenemos que si $|z| < 1$, entonces la serie geométrica es convergente, y la **suma de la serie** tiene curiosamente la forma:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} z_n = \frac{1}{1-z}$$

La serie goemétrica es efectivamente convergente porque el límite de la **sucesión de los restos** $\rho_N(z)$ tiende a cero conforme N tiende a infinito. La expresión para tal sucesión (para el N-ésimo término) viene dada por:

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{1-z}$$

Ahora, ustedes dirán: la expresión para $\rho_N(z)$ claramente no se vuelve nada pequeña conforme N tienda a infinito. Si esto es lo que están pensando, resuelvan el límite. Háganlo e impongan condiciones para que tal límite sea cero. Pues pequeño detalle el que complejos z / $|z| < 1$, al elevarlos a potencias positivas, su módulo decrece, y con ello dicho límite será cero.

Ahora, se vienen dos de las obras maestras del cálculo complejo basado en series...

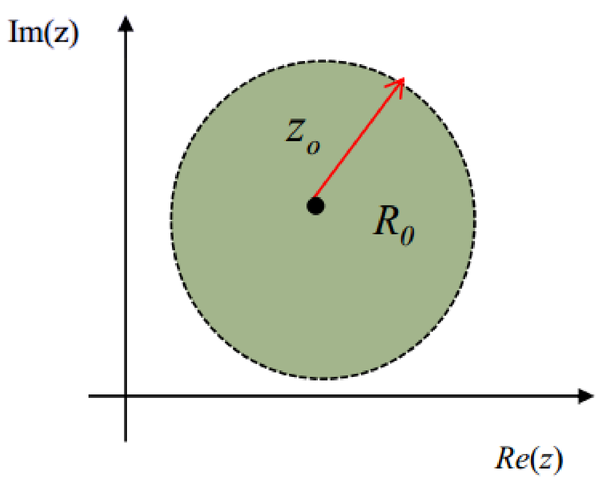
Teorema 3.1. *Teorema de Taylor*
*Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : |z - z_0| < R_0$. Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, $f(z)$ admite representación en **serie de Taylor**.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad |z - z_0| < R_0$$

en donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esta obra maestra nos permite representar una función $f(z)$ mediante una serie de potencias centrada en z_0 siempre que lo hagamos dentro de una región en la cual $f(z)$ sea analítica.



Sin embargo, ¿qué sucede si queremos centrarla en puntos en donde $f(z)$ no es analítica, o de manera genérica, si la región que consideramos contiene puntos en los cuales $f(z)$ no es analítica? Para ello viene Laurent a salvarnos...

Teorema 3.2. *Teorema de Laurent*
Sea $f(z)$ una función analítica en un anillo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente centrado en z_0, con $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.
*Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, $f(z)$ admite representación en **serie de Laurent**.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

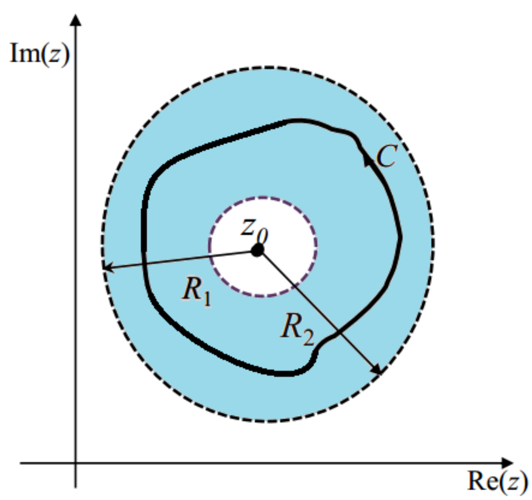
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \qquad n \in \mathbb{N}$$

Una expresión alternativa para la **serie de Laurent** viene dada por:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

...con los coeficientes c_n determinados de la siguiente manera:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \ dz \qquad n \in \mathbb{Z}$$



Claramente con Laurent podemos representar funciones $f(z)$ como series de potencias (positivas *y* negativas) en donde la de Taylor no podía. A esto lo logramos esquivando, o evitando mejor dicho, a los puntos en donde la función no es analítica. Pareciese ser que para aproximarse mejor al resultado en casos en que tengamos estos tipos de puntos la solución es concebir *también* infinitos términos de potencias decrecientes tanto como de potencias crecientes.

Por esto mismo la serie de Laurent pareciese ser más potente. Barre rincones donde la de Taylor no llega. Notaremos la practicidad de la serie de Laurent a partir de estos casos particulares:

- Cuando $R_1 = 0$, y el anillo se convierte en un entorno reducido dado por $\mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R_2$
- Cuando $z_0 = 0 \ \wedge \ R_2 = \infty$, en donde tendríamos lo que denominamos un entorno centrado en infinito dado por $\mathcal{D} : R_1 < |z| < \infty$

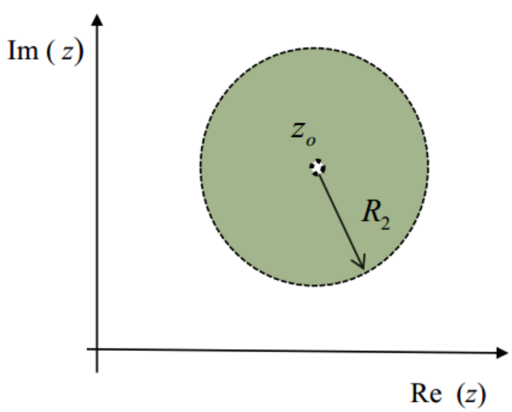
3.1. Serie de Laurent: $R_1 = 0$

Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R$ donde z_0 es una **singularidad aislada** de $f(z)$. Entonces $f(z)$ puede representarse por una serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

en donde la sumatoria de términos con exponente negativo se denomina **parte principal** de f en z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + ...$$



Cuando este caso particular se dé, podremos clasificar a la singularidad aislada en cuestión en tres tipos: como **removible**, **polo de orden** m, o **esencial**.

Definición 3.2. Singularidad removible o evitable
En z_0 existe una **singularidad removible** o **evitable** de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal nula. Es decir, los coeficientes b_n son todos cero

$$b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_n = ... = 0$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es una singularidad removible, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

Tal expresión es similar a una serie de Taylor, pero válida en un entorno reducido (que no incluye z_0), y en donde se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

Definición 3.3. Polo de orden m
En z_0 existe un **polo de orden** m de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal con un número finito de términos no nulos. El mayor exponente negativo determinará el orden m del polo

$$b_m \neq 0, \qquad b_{m+1} = b_{m+2} = ... = 0$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es un polo de orden m, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

En donde, si desarrollamos la expresión:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \\
f(z) &= \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}\right] \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m(z-z_0)^{m-m}\right] \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m\right]}_{\Phi(z)} \\
f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\Phi(z)
\end{aligned}
$$

Recuérdese que hemos hecho para este análisis la definición:

$$\Phi(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_m$$

En donde $\Phi(z)$ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Se debe cumplir por lo tanto el siguiente límite:

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = b_m$$

Definición 3.4. Singularidad esencial
En z_0 existe una **singularidad esencial** de $f(z)$ si se cumple:

- z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$
- El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0 con $R_1 = 0$ tiene parte principal con infinitos términos no nulos.

$$b_n \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como consecuencia, se tiene que si z_0 es una singularidad esencial, y se centra en él un desarrollo en serie de Laurent con $R_1 = 0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

Tal expresión equivale a la forma más general de la Serie de Laurent, en donde poseemos infinitos términos con exponentes negativos.

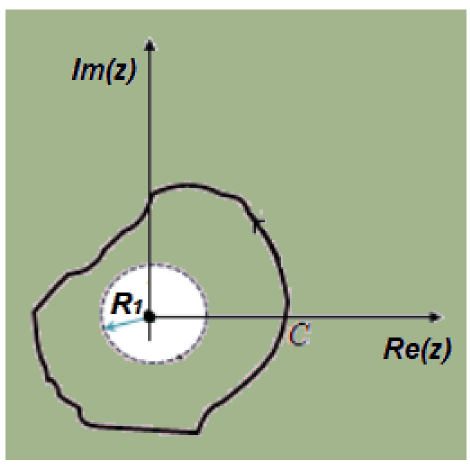
3.2. Serie de Laurent: $z_0 = 0$ y $R_2 = \infty$

Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, con $\mathcal{D} : R < |z| < \infty$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente alrededor de $z = 0$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Entonces $\forall z \in \mathcal{D}$, se tiene que $f(z)$ se puede representar en una serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad R < |z| < \infty$$

con los coeficientes dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{z^{n+1}} \, dz \ , \qquad n \in \mathbb{Z}$$



Una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ definida como $\mathcal{D} : R < |z| < \infty$ o simplemente $\mathcal{D} : R < |z|$ se denomina también un **entorno centrado en infinito**. Esto es así si consideramos el plano complejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$, lo que nos trae una nueva forma de ver las cosas. Por ejemplo, como todo punto en el plano complejo, una función cualquiera $f(z)$ puede poseer o no una singularidad en ∞. Pero ahora, ¿cómo sabemos eso?

Definición 3.5. Singularidad en ∞
Diremos que $f(z)$ posee una singularidad en ∞ si $g(w)$ posee una singularidad en $w=0$, siendo $g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ con $z=\frac{1}{w}$.

Claro está, no podría haber sido de otra forma más ingeniosa: usamos la transfomación $w=\frac{1}{z}$ para llevar el punto $z=0$ al infinito y traer el punto $z=\infty$ hasta el origen de coordenadas. Todo esto, obviamente, en el plano comlpejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$. Sin el poder de la inversión, no tendríamos cómo más acercarnos tanto a infinito: lo traemos al frente de nuestros ojos para poder realizar sobre él el más minucioso de los análisis. Ahora podemos clasificar a este punto $w=0$ como una singularidad común de $g(w)$ y trasladar las conclusiones al punto $z=\infty$ para $f(z)$.

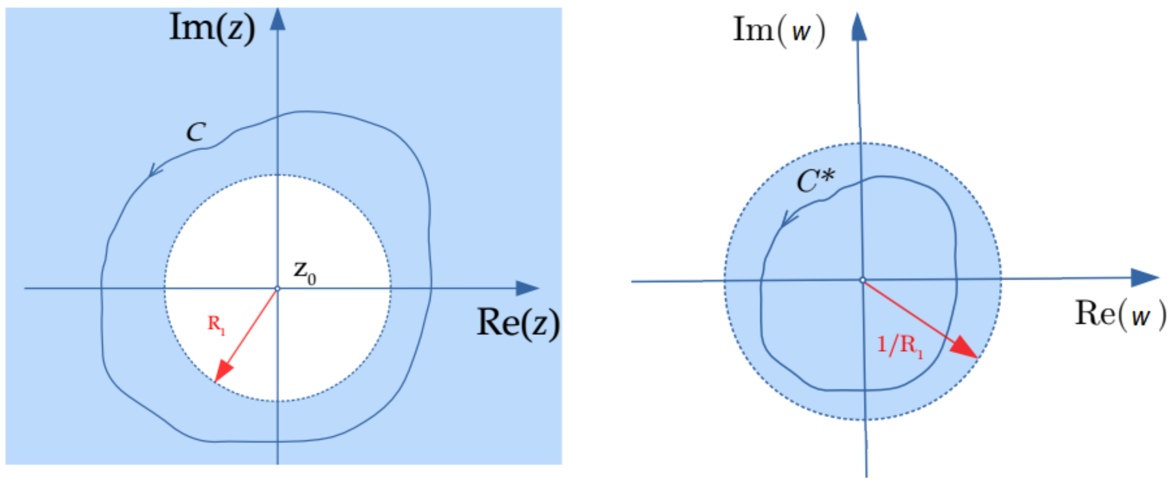
Dado que el desarrollo de la serie de Laurent para $f(z)$ puede reprsentarse como

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}\ , \qquad R_1<|z|<\infty$$

...la transformación $g(w)$ resultará en:

$$\begin{aligned} g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{w}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(\frac{1}{w}\right)^n} \qquad \frac{1}{R_1}>|w|>0 \\ &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{w^n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_nw^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{w^n}}_{\textbf{parte principal}}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nw^n\ , \qquad b_0\triangleq a_0 \end{aligned}$$

Vemos que los coeficientes a_n y b_n del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ han cambiado de roles al realizar el cambio de variable, y resultan ahora en una función con singularidad aislada en $w=0$, y con ello, los términos con coeficientes a_n, que ahora acompañan a las potencias negativas, constituyen la **parte principal** de la Serie de Laurent (esto corresponde ahora a un **caso 1**, de la cual ya se habló previamente).



Entonces, podemos expresar a $g(w)$ de la siguiente manera (con a_n y b_n redefinidos de manera que se adecúe a la formulación general):

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ w^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ w^{-n}\ , \qquad 0 < |w| < \frac{1}{R_1}$$

...donde los coeficientes están dados respecto a la curva transformada $\mathcal{C}^*$ como está dado a continuación:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}^*} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\ , n \in \mathbb{N}^0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}^*} \frac{g(w)}{w^{-n+1}}\ , n \in \mathbb{N}$$

La clasificación de singularidades en ∞ es, como sospecharán, la misma que para singularidades comunes y corrientes. Como vimos que una singularidad en $z = \infty$ es equivalente a una singularidad en $w = 0$ si consideramos $w = \frac{1}{z}$, entonces diremos que para $f(z)$, $z = \infty$ es una singularidad de tipo:

- **Evitable** o **removible**, si $w = 0$ lo es para $g(w)$.
- **Polo de orden** m, si $w = 0$ es un polo de orden m para $g(w)$.
- **Esencial**, si $w = 0$ lo es para $g(w)$.

4. Ceros de $f(z)$

Añadiremos otra catalogación para puntos en el plano complejo respecto de una función: llamaremos **ceros** de una función $f(z)$ a todo complejo z_0 para el cual $f(z_0) = 0$. No es un concepto nada nuevo. En cálculo de una variable ya llamábamos ceros a todo valor real para el cual una función valía cero. Pero ahora lo generalizamos, como todo lo visto hasta ahora, y le agregamos mayor *complejidad* al tema.

Definición 4.1. Ceros de una función
Se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tiene un **cero** en $z_0 \in \mathcal{D}$ si $f(z_0) = 0$.

Si recuerdan, los ceros también podían tener orden...

Definición 4.2. Ceros de orden m
Se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tiene un **cero de orden** m en $z_0 \in \mathcal{D}$ si

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \ , \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

En otras palabras, z_0 es un cero de $f(z)$ de orden m si la m-ésima derivada de $f(z_0)$ es la primera en ser distinto de cero. Las $m-1$ derivadas previas (más la misma función sin derivar) valen todos cero en z_0.

Si z_0 es un cero de orden m de $f(z)$, entonces podemos expresar a f con una serie de Taylor (en un disco abierto $\mathcal{D}$ de radio R) de la forma

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
f(z) &= a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + ... \\
f(z) &= (z-z_0)^m \underbrace{[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + ...]}_{\Phi(z)} \\
f(z) &= (z-z_0)^m \ \Phi(z)
\end{aligned}$$

...para todo z en $\mathcal{D}$, nuestro dominio de interés. En resumen,

$$f(z) = (z-z_0)^m \ \Phi(z) \ , \qquad |z-z_0| < R$$

donde $\Phi(z)$ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$.

Si vamos a considerar el plano complejo extendido $\mathbb{C}^{\infty}$, entonces deberemos dar las siguientes definiciones...

Definición 4.3. Analiticidad en ∞
$f(z)$ es analítica en $z = \infty$ si $g(w)$ es analítica en $w = 0$, siendo

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) \ , \qquad z = \frac{1}{w}$$

Definición 4.4. Ceros de orden m en ∞
$f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = \infty$ si $g(w)$ posee un cero de orden m en $w = 0$, siendo

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) \ , \qquad z = \frac{1}{w}$$

Puesto de otra forma, se dice que una función $f(z)$ analítica en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, con $\mathcal{D} : |z| > R_1$, tiene un cero de orden m en $z = \infty$ si el desarrollo en serie de $f(z)$ en un entorno de ∞ tiene a m como el mayor exponente negativo acompañado por un coeficiente no nulo. Es decir, si:

$$b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{m-1} = 0 \ , \qquad b_m \neq 0$$

Esta última forma de determinar el orden de los ceros en infinito surge de considerar la expansión en serie (de Laurent, caso 2) de una función $f(z)$ que sea analítica en infinito:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad R < |z|$$

Obsérvese que tal desarrollo en serie carece de las potencias con exponente positivo, de tal manera que $g(w)$ posea un desarrollo en Serie Taylor tal como sigue:

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \qquad \frac{1}{R} > |w|$$

Tal desarrollo en Serie de Taylor para $g(w)$ centrado en $w = 0$ es consecuencia inmediata de la analiticidad de la función en $w = 0$, dado que $f(z)$ lo es para $z = \infty$.

Si se cumple que $w = 0$ es un cero de orden m para $g(w)$, entonces:

$$g(w) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n w^n \qquad \frac{1}{R} > |w|$$

Con ello, $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = \infty$, y $b_1 = b_2 = ... = b_{m-1} = 0$ (corroborando el método de análisis propuesto en la Definición anterior). Tenemos entonces una expansión en serie de f dada por:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad R < |z| \\
f(z) &= \frac{b_m}{z^m} + \frac{b_{m+1}}{z^{m+1}} + \frac{b_{m+2}}{z^{m+2}} + ... \\
f(z) &= \frac{1}{z^m} \underbrace{\left[b_m + \frac{b_{m+1}}{z} + \frac{b_{m+2}}{z^2} + ... \right]}_{\Phi} \\
f(z) &= \frac{1}{z^m} \Phi(z)
\end{aligned}$$

Donde $\Phi(z)$ es analítica en $z = \infty$ y $\Phi(\infty) \neq 0$. Es decir, $\lim_{z \to \infty} \Phi(z) \neq 0$.

5. Residuos

Ahora presentamos lo que es el residuo. Ojo que no es nada trivial, y aunque la definición pareciese no tener un fundamento, en base a él se construirán grandes teoremas. En una serie infinita todo término sirve.

Definición 5.1. Residuo
Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$, entonces existe $R_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(z)$ es analítica $\forall z \in \mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R_2$. Podemos expresar $f(z)$ en serie de Laurent como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ , \qquad 0 < |z - z_0| < R_2$$

Se define **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$ y se indica $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ al coeficiente b_1 que corresponde al término $\dfrac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en z_0. Simbólicamente:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$$

Recordando el Teorema de la Serie de Laurent, tenemos que el coeficiente b_n está dado por

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} \, dz \ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

...con $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente alrededor de z_0. Tenemos entonces, a partir de la definición de residuo, que

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= b_1 \\ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \\ 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos... ¡una nueva expresión para la integral de contorno de una función de variable compleja! Admírenla:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Como está a la moda el incluir a ∞ en la fiesta, extendemos la definición de residuo para el plano complejo extendido, definiendo el **residuo en infinito**.

Definición 5.2. Residuo en ∞
Sea $f(z)$ analítica para $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, siendo $\mathcal{D} : |z| > R_1$.
El **residuo** de $f(z)$ en ∞ se define como el negativo del coeficiente b_1, el coeficiente que acompaña a la potencia z^{-1} en el desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno de ∞. Simbólicamente:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -b_1$$

5.1. Reglas para calcular el residuo

¿Cómo haremos entonces para calcular el residuo? Seguramente dirán que obvio: buscamos el desarrollo en serie de Laurent de la función y discriminamos b_1. Pero créanme que no siempre es el caso más eficiente. Pues vean que si existen formas más fáciles de encontrarlo, nos ahorramos de desarrollar toda la serie de Laurent para hallar sólo *un* término.

Regla 1. *Cálculo del residuo de $f(z)$ en $z = z_0$, siendo $z = z_0$ un polo simple.*

Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)}\Phi(z)$$

con $\Phi(z)$ analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \Phi(z_0) \\ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\ f(z) \end{aligned}$$

Regla 2. *Cálculo del residuo de $f(z)$ en $z = z_0$, siendo $z = z_0$ un polo de orden m.*

Se tendrá que

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m}\Phi(z)$$

con $\Phi(z)$ analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\Phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Regla 3. *Cálculo del residuo para $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ para $z = z_0$, con $z = z_0$ un polo simple*

Sea

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$, entonces se puede calcular el residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ siendo $z = z_0$ un polo simple o polo de orden 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Todo muy lindo, sí... ¿y si quiero calcularlo para ∞? Pide, y lo tendrás, a continuación se listarán:

1. Si $f(z)$ tiene un cero de primer orden en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\ f(z)$$

2. Si $f(z)$ tiene un cero de segundo orden o superior en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

3. Regla general para el residuo de $f(z)$ en infinito:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

Dominando estos métodos te convertirás en domador del infinito.

6. Los residuos como herramienta de integración

Se estarán preguntando seguro: ¿para qué cuernos sirve el residuo? Pues se lo definió como el coeficiente del término con exponente -1, pudiendo haber sido cuaquier otra cosa, y encima pareciese que nos hacemos lío para encontrarlo sin tener que desarrollar la serie. Pues la cuestión es ésta: se acordarán que a partir de la definición de residuo y la aplicación del Teorema de Laurent (página 19), habíamos hallado una nueva expresión para la integral de contorno de $f(z)$. Esto resume lo que viene: *los residuos sirven para facilitarnos la integración*. Y había sido una cosa tan simple... ¿quién diría?

Teorema 6.1. *Teorema de los Residuos de Cauchy*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene.
Sea $f(z)$ analítica sobre $\mathcal{C}$ y en su interior, a excepción de un número finito de puntos singulares z_k (con $k = 1, 2, ..., n$) interiores a $\mathcal{C}$.
Entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Demostrar

Este teorema en cierto sentido abarca algo que ya conocíamos... pues con el Teorema Integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos nos anticipamos que, conociendo las singularidades de $f(z)$ que encierra nuestro contorno $\mathcal{C}$ de integración, podíamos calcular la integral de dicha fucnión por sobre $\mathcal{C}$. Pero la diferencia era que sumábamos las integrales de camino en torno a cada una de las singularidades. Ahora, Cauchy nos dice (un indeciso total, a cada rato nos propone una forma diferente de integrar) que se lo puede hacer sumando los *residuos* de $f(z)$ evaluado en las singularidades que encierra $\mathcal{C}$, y luego multiplicarlo por $2\pi i$ para darle el toque final. Si somos capaces de encontrar tales residuos sin mucho problema, entonces preferirías aplicar este teorema antes del Teorema Integral para Dominios Múltiplemente Conexos (ambos del mismo hombre, así que ni nos molestemos en aclarar nombres).

A continuación, un teorema que nos va a invertir la forma de cálculo de la integral...

Teorema 6.2. *Reducción a un único residuo*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene.
Sea $f(z)$ es analítica sobre $\mathcal{C}$ y en todo punto del plano finito ***exterior*** *a $\mathcal{C}$.*
Entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

Demostrar

O sea... si la función se comporta de manera tranquila (me refiero a que es analítica) en los exteriores de la curva $\mathcal{C}$ orientada positivamente, conoceremos su integral con calcular un único residuo... ¡en infinito! Mira, clarito está:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right) \right] \\ \oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \end{aligned}$$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right)$

¿recuerdas?

Y podemos cambiar el sentido de integración para obtener...

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= -\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz \\ \oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \end{aligned}$$

Esta última expresión es la integral de $f(z)$ por sobre $\mathcal{C}$ recorrida **negativamente**, o en sentido horario. Sería equivalente en cuanto a notación a lo siguiente:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \oint\limits_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

La cuestión es que podemos integrar por sobre $\mathcal{C}$ a partir del residuo que $f(z)$ posee en ∞, en el más allá... ¿no es eso increíble?

Pero en teoría todo se ve muy lindo, todo color de rosas. Pero no se dará siempre que entre la curva $\mathcal{C}$ y el infinito la función sea perfectamente analítica. Si hay alguna singularidad, por fuera de la curva, que no sea infinito (pues éste siempre lo será), el teorema no aplica. ¿Se puede hacer algo al respecto? Sí señor: generalizar el teorema.

Teorema 6.3. *Teorema de los Residuos de Cauchy en el Infinito*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio múltiplemente conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ que incluya una vecindad perforada de ∞.
Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ un contorno cerrado simple orientado positivamene, fuera del cual la función $f(z)$ es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares aislados z_k (con $k = 1, 2, ..., n$) exteriores a $\mathcal{C}$.
Entonces:

$$\oint\limits_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \right)$$

Demostrar

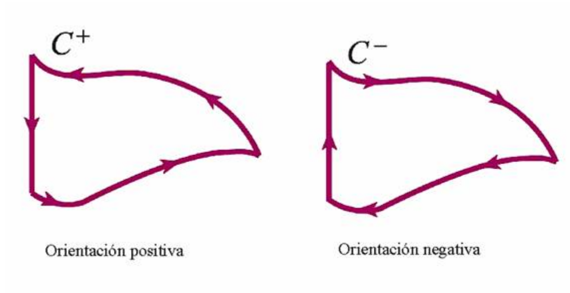
Este teorema es equivalente a

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = -2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \right)$$

Donde $z = \infty$ es claramente *siempre* una singularidad de $f(z)$, pero como se calcula de manera diferente, se lo discrimina por aparte y no se lo incluye entre las n singularidades en la sumatoria. Pero la esencia es: la integral $f(z)$ por sobre $\mathcal{C}$ es igual a $-2\pi i$ por la sumatoria de **todos** los residuos de $f(z)$ en los puntos singulares que posee por fuera de $\mathcal{C}$. Así de simple.

Si son capaces de admirar el asombroso poder de cálculo del que somos capaces a partir de este teorema, serán concientes de que a partir de ahora, seremos capaces no sólo de conocer la integral de contorno de una función a partir de las singularidades interiores a $\mathcal{C}$, sino también a partir de las singularidades que *no* encierra, las que están fuera de él... esto es maravilloso. Conociendo la parafernalia, sabremos el valor de la integral. *Dime las* *singularidades que encierras (o las que no), y yo te diré quién eres....*

Recuerden que con $\mathcal{C}$ se representa una curva en sentido antihorario (o positivamente), y con $-\mathcal{C}$ representamos la misma curva recorrida en sentido horario (o negativamente).



La orientación es clave, ya que eso nos indica cuál es el interior de la región que "encierra" la curva. Si caminásemos por el borde de la curva en el sentido indicado, se define la región que queda a tu *izquierda* como el "interior"de la curva. El resto es el exterior. Así que... dependiendo de cómo recorres una curva cerrada $\mathcal{C}$, podrías encerrar un espacio finito, o encerrar una región inmensa que incluye a infinito. Ten cuidado con eso.

En conclusión, con estos últimos teoremas, si es que llegaron a notarlo, resumimos básicamente *todos* los métodos de integración anteriores, en un par de fórmulas que tienen en cuenta las singularidades de una función de variable compleja $f(z)$ por dentro y por fuera de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$. Para aplicar estos teoremas vistos, es que serán herramientas imprescindibles las reglas del cálculo de residuos.

Que no haya integral que escape a nuestro alcance. ¡Amén!

Fin