Integración Compleja

Breggia, Bruno M.

"Sigue el camino amarillo"
- El Mago de Oz -

Sabemos derivar funciones complejas, gran hazaña. ¿Qué toca ahora? Saber integrarlas. Y para ello contamos con varias herramientas que nos simplificarán esta tarea, herramientas que aprenderemos en este capítulo, y provistas la mayoría por un simpático matemático llamado *Augustin Louis Cauchy*, hombre que dejó su nombre escrito por todos los libros de cálculo complejo (ya hemos visto su nombre antes, ¿recuerdan?). Integrar funciones de variable compleja no se compara tanto con integrar funciones de una variable real, sino con funciones multivariables. Sigue el camino y encontrarás la verdad.

Índice

1. Integral de Función Compleja con Variable Real

Avanzaremos por pasos, pues el aprendizaje es procedural y todo tiene un orden que ser seguido para entender conceptos de complejidad creciente. Veremos primero cómo integrar funciones que mapean números reales con números complejos, es decir, funciones complejas **de variable real**. No se confundan que a diferencia de las funciones que se venían viendo hasta ahora, éstas reciben sólo un real $t \in \mathbb{R}$ y retornan un complejo, no reciben un complejo, como las típicas **funciones de variable compleja**.

Las funciones complejas de variable real mapean puntos en la recta numérica $\mathbb{R}$ a puntos en el plano $\mathbb{C}$. Bajo este punto de vista, conviene confesar que describen trayectorias en el plano, son *parametrizaciones*.

Ahora estamos listos para definir la integral de este tipo de funciones:

Definición 1.1. Integral definida de funciones complejas de variable real
Téngase

$$w: \ I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

donde $w(t) = u(t) + i\ v(t), t \in I$ en el cual $u, v: \ t \in [a, b] \to \mathbb{R}$

La **integral definida** de $w(t)$ sobre $[a, b]$ se simboliza como $\int\limits_a^b w(t)\ dt$ y se define como:

$$\int\limits_a^b w(t)\ dt \triangleq \int\limits_a^b u(t)\ dt + i \int\limits_a^b v(t)\ dt$$

sólo en caso de que $\int_a^b u(t)\ dt$ y $\int_a^b v(t)\ dt$ existan.

Con esta definicón, volvemos a la tendencia de definir operaciones sobre complejos en términos de la misma operación aplicada a los números reales, que ya sabemos cómo operan. Esto nos ayuda a simplificar un montón el operar con complejos. Si sabes integrar funciones reales de variable real, sabes integrar funciones complejas de variable real, pues en fin, estarás integrando las funciones componentes de la función compleja, y éstas no son más que funciones reales.

De igual manera, se pueden definir las integrales impropias de $w(t)$ sobre intervalos no acotados.

Definición 1.2. Integrabilidad
Una función compleja de variable real diremos que es **integrable** si sus funciones componentes son continuas ó presentan una cantidad finita de discontinuidades de salto finito.

Como notamos, las condiciones de integrabilidad son las mismas que para funciones reales. Por ahora, absolutamente nada distinto...

Ahora, un detalle no menor, la integral definida de funciones complejas de variables real es en sí mismo un número complejo. Simbólicamente,

$$\int_a^b w(t)\ dt \in \mathbb{C}$$

a partir de cuya definición tenemos que:

$$\mathfrak{Re}\left[\int_a^b w(t)\ dt\right] = \int_a^b \mathfrak{Re}[w(t)]\ dt$$
$$\mathfrak{Im}\left[\int_a^b w(t)\ dt\right] = \int_a^b \mathfrak{Im}[w(t)]\ dt$$

Ahora estudiaremos algunas propiedades importantes de la integral definida de funciones complejas de variable real. Sean $w, w_1, w_2 : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, y si existen las integrales $\int_a^b w(t)\ dt$, $\int_a^b w_1(t)\ dt$ y $\int_a^b w_2(t)\ dt$, entonces se cumplen:

1. Linealidad

$$\boxed{\int_a^b z_0 w(t)\ dt = z_0 \int_a^b w(t)\ dt, \qquad z_0 \in \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\int_a^b [w_1(t) \pm w_2(t)]\ dt = \int_a^b w_1(t)\ dt \pm \int_a^b w_2(t)\ dt}$$

2. Inversión de los extremos de integración

$$\boxed{\int_a^b w(t)\ dt = -\int_b^a w(t)\ dt}$$

3. Igualdad de los extremos de integración

$$\boxed{\int_a^a w(t)\ dt = 0}$$

4. Aditividad del intervalo

$$\boxed{\int_a^c w(t)\ dt = \int_a^b w(t)\ dt + \int_b^c w(t)\ dt, \qquad a < b < c}$$

5. Acotación del módulo

$$\left| \int\limits_a^b w(t)\ dt \right| \leq \int\limits_a^b |w(t)|\ dt, \qquad a \leq b$$

//Demostrar todas

1.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Muy linda la definición de integral definida, pero... para resolverla numéricamente necesitamos valernos sin lugar a dudas del famoso **Teorema Fundamental del Cálculo**. Lo aplicamos porque la integral de funciones complejas de variable real se reduce a integrales de funciones reales, pero la definición misma nos permite extender el teorema para que tenga validez de igual manera por sobre el conjunto de las funciones complejas.

Teorema 1.1. *TFC para funciones complejas*
Sea $w : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, con* $w(t) = u(t) + i\ v(t)$ *continua sobre* I *y* $W'(t) = w(t)\ \forall t \in (a, b)$*. Entonces:*

$$\int_a^b w(t)\ dt = W(b) - W(a)$$

Considerando $U(t)$ y $V(t)$ primitivas de $u(t)$ y $v(t)$ respectivamente, para $a \leq t \leq b$, entonces $U'(t) = u(t), V'(t) = v(t)$ y podemos expresar la integral definida como:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t)\ dt &= W(b) - W(a) \\ \int_a^b w(t)\ dt &= [U(b) - U(a)] + i\ [V(b) - V(a)] \end{aligned}$$

Siendo que $W(t) = U(t) + i\ V(t)$

2. Curvas en el plano de Argand

Volvemos a concebir al plano complejo como ente geométrico para introducir unas nuevas definiciones, que en su momento no se dieron ya que irían a ser temas dejados de lado hasta este preciso momento. Nos referiremos primero a *parametrizaciones* en el plano complejo, es decir, a aquellas curvas en el plano $\mathbb{C}$ dadas por funciones complejas de variable real. O sea, dependiente de un *parámetro* $t \in \mathbb{R}$.

Con esto tenemos como propósito dar a conocer las posibles trayectorias a partir de las cuales pretendemos integrar.

Antes de empezar a tirar definiciones, aclaramos que las mismas se harán respecto a una curva $\mathcal{C} : z = z(t)$, con $z : \; I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, donde $z(t) = x(t) + i \; y(t)$ y:

$$x : \; I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y : \; I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Definición 2.1. Arco
Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ funciones reales continuas de parámetro real $t \in I = [a, b]$. Entonces el conjunto de puntos $\mathcal{C} = \{z(t) \; / \; z(t) = x(t) + i \; y(t)\}$ es un **arco**.

Definición 2.2. Arco Simple o Arco de Jordan
Un arco $\mathcal{C} : z(t)$ con $t \in I = [a, b]$ es un **arco simple** o **arco de Jordan** si no tiene intersección consigo mismo, esto es, si se cumple que $z(t_1) \neq z(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$.

En otras palabras, $\mathcal{C}$ es un arco simple si $z(t)$ es inyectiva en el intervalo I.

Definición 2.3. Arco Diferenciable
Un arco $\mathcal{C} : z(t)$ con $t \in I = [a, b]$ es un **arco diferenciable** si $z(t)$ tiene derivada primera continua sobre I. En este caso, la función

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

es integrable en el intervalo $[a, b]$ y la longitud de $\mathcal{C}$ está dada por $L = \int_a^b |z'(t)| \; dt$.

Definición 2.4. Arco Suave
Un arco se dice ser un **arco suave** si es un arco simple, diferenciable y con $z'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a, b)$.

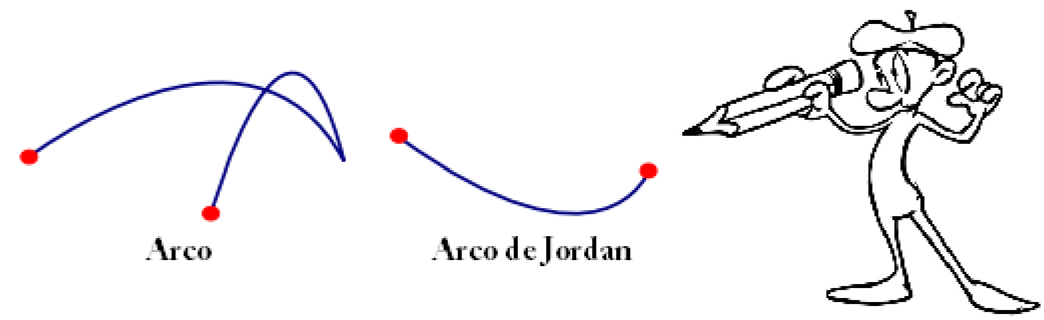
Se define para este caso el **vector tangente unitario**:

$$T = \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \qquad \forall t \in (a, b)$$

cuyo ángulo de inclinación es $\phi = \arg z'(t)$.

Definición 2.5. Contorno o Camino (o Arco suave por tramos)
Llamaremos a $\mathcal{C}$ un **contorno**, **camino** o inclusive **arco suave por tramos** si:

1. $\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k \ / \ \mathcal{C}_k : z = z_k(t)$, en donde $z_k(t)$ es un arco suave en $t \in I_k = [t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, 2, ..., K$ y $\bigcup_{k=1}^{K} I_k = [a, b]$
2. $z(t)$ es continua en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$
3. $z'(t)$ puede tener un punto de discontinuidad de salto finito en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$



Definición 2.6. Curva Cerrada Simple
Llamaremos **curva cerrada simple** a un arco tal que $z = z(t)$ es inyectiva en $(a, b\ ]$ y que $z(a) = z(b) \ \wedge \ z'(a) = z'(b)$.

Definición 2.7. Curva Cerrada Suave
Llamaremos **curva cerrada suave** a la curva $\mathcal{C} : z = z(t)$ en $t \in I = [a, b]$ que satisface:

1. $z(t)$ es diferenciable
2. $z(t)$ es inyectiva sobre $(a, b\ ]$, es decir no se corta a sí misma
3. $z'(t) \neq 0$ además de que $z(a) = z(b) \ \wedge \ z'(a) = z'(b)$

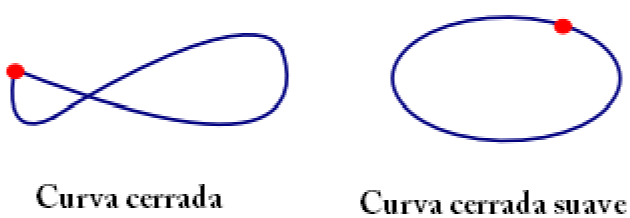
Definición 2.8. Contorno o Camino cerrado simple
Llamaremos **contorno cerrado simple** o **camino cerrado simple** a la curva $\mathcal{C} : z = z(t)$ en $t \in I = [a, b]$ que satisface:

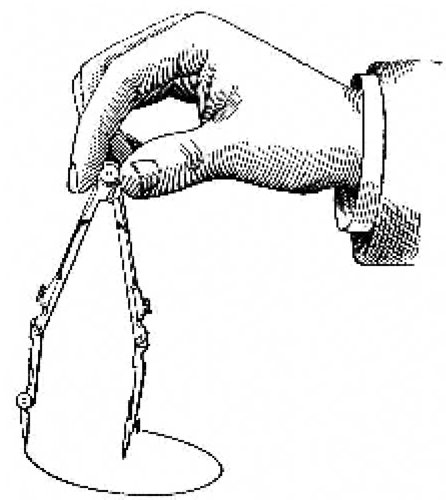
1. $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k \;/\; \mathcal{C}_k : z = z_k(t)$, en donde $z_k(t)$ es un arco suave en $t \in I_k = [t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, 2, ..., K$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{K} I_k = [a, b]$

2. $z(t)$ es continua en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$

3. $z'(t)$ puede tener un punto de discontinuidad de salto finito en t_k con $k = 1, 2, ..., K - 1$

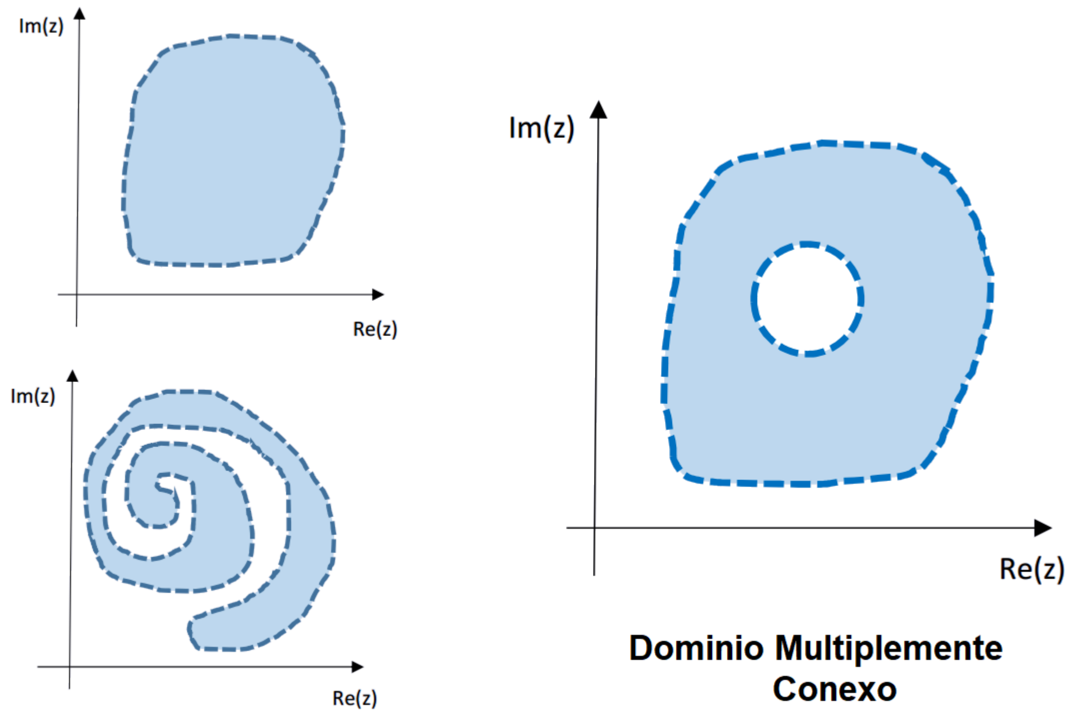
4. $z = z(t)$ es inyectiva sobre $(a, b\,]$ y satisface que $z(a) = z(b)$ y que $z'(a) = z'(b)$.





Ahora veremos una clasificación más para dominios en el plano complejo. Se ha visto antes que un dominio es **conexo** si cualquier par de puntos en él se pueden unir mediante una poligonal tal que ningún segmento de la misma pase por puntos por fuera del dominio. Con esto en mente, daremos cuenta de una subclasificación de la *conexidad*.

Definición 2.9. Dominio Simplemente y Múltiplemente Conexo
Se dice que $\mathcal{D}$ es un dominio **simplemente conexo** si todo contorno cerrado simple contenido en él encierra sólo puntos de $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{D}$ no es simplemente conexo, se dice ser **múltiplemente conexo**.



Dominios Simplemente Conexos

Dominio Multiplemente Conexo

3. Integrales de Camino

Llegó el momento... de integrar funciones complejas de variable compleja. No tengan pánico, que es similar a algo que ya conocemos: integrar funciones de varias variables. Si asociamos el plano complejo $\mathbb{C}$ una vez más con $\mathbb{R}^2$, entonces vamos a poder integrar siguiendo trayectorias, curvas, por sobre el plano complejo. Esto quiere decir que siempre que integremos una función compleja de variable compleja, lo haremos a lo largo de una trayectoria. Como que no tiene sentido si no... e integrar por sobre una trayectoria implica parametrizar el camino que se quiere seguir, o por lo menos, si es que quieres llegar a resolver numéricamente la integral (¡cómo no resolverla!).

Por ello mismo, a las integrales definidas de funciones complejas de variable compleja las denominaremos *integrales de camino*.

Definición 3.1. Integral de Camino o de Contorno

Sea un camino $\mathcal{C} : z = z(t)$, donde $z : t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to z(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z$ con $z(t) = x(t) + i\ y(t)$ y $z'(t) = x'(t) + i\ y'(t)$ siendo $z'(t)$ continua a trozos sobre I.

Sea $f : z \in \mathcal{C} \to f(z) \in \mathbb{C}_w$, con $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ definida y continua a trozos sobre $\mathcal{C}$, es decir $f(z(t))$ definida y seccionalmente continua sobre $I = [a,b]$.

Se define la **integral de camino**, o **integral de contorno**, de f a lo largo de $\mathcal{C}$, que se denota $\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$, como:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz \triangleq \int\limits_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt$$

Claramente notarán que a la integral de contorno la definimos tras el telón en términos de la integral anteriormente presentada, es decir, de la integral de funciones complejas de variable *real*.

Daremos cuenta ahora, como corresponde a la rutina, de las propiedades con las que cumple este tipo de integral. Si existen $\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$, $\int_{\mathcal{C}} f_1(z)\ dz$ y $\int_{\mathcal{C}} f_2(z)\ dz$, entonces se cumple:

1. Linealidad

$$\int\limits_{\mathcal{C}} z_0 f(z)\ dz = z_0 \int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\int\limits_{\mathcal{C}} [f_1(z) \pm f_2(z)]\ dz = \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(z)\ dz \pm \int\limits_{\mathcal{C}} f_2(z)\ dz$$

2. Inversión de la Orientación

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = -\int\limits_{-\mathcal{C}} f(z)\ dz$$

3. Concatenación de $\mathcal{C}_k$

   Sea $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup\ ...\ \mathcal{C}_K$, con $\mathcal{C}_k$ un contorno en $\mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathcal{C}_k} f(z)\ dz \right)$$

4. Desigualdad ML
   Sea $f(z)$ continua a trozos sobre $\mathcal{C}$ y $|f(z)| \leq M \; \forall z \in \mathbb{C}$.
   Sea L la longitud del contorno $\mathcal{C}$.

$$\boxed{\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz \right| \leq ML}$$

   Demostrar todos

3.1. Relación con la Integral de Línea de funciones reales

La integral de camino se relaciona sin lugar a dudas con la conocida integral de línea para funciones reales. Pero a no confundirse: **integral de camino** (para funciones de variable compleja) con **integrales de línea** (para funciones de variable real). Sin embargo podemos expresar la de contorno en términos directamente de la de línea, partiendo de su definición:

Sea un contorno $\mathcal{C} : z = z(t)$ con $z : t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z$ donde $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ y $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$. Sea también $f : z \in \mathcal{C} \to f(z) \in \mathbb{C}_w$ con $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz &= \int_a^b f(z(t))\; z'(t)\; dt \\
&= \int_a^b (u + iv)(x' + iy')\; dt \\
&= \int_a^b (ux' + iuy' + ivx' - vy')\; dt \\
&= \int_a^b [(ux' - vy') + i\; (vx' + uy')]\; dt \\
&= \int_a^b (ux' - vy')\; dt + i \int_a^b (vx' + uy')\; dt \\
\int_{\mathcal{C}} f(z)\; dz &= \int_a^b (u\; dx - v\; dy) + i \int_a^b (v\; dx + u\; dy)
\end{aligned}$$

3.2. Consideraciones sobre integrales de contorno

Al integrar curvas cerradas estamos denotando regiones en el plano complejo, en los cuales, a medida que el vector tangente a la curva se desplaza en dirección de la integración, el vector normal a ella señala hacia el interior de $\mathcal{C}$ (por la regla de la mano derecha).

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada en el plano complejo $\mathbb{C}$. Llámese $\mathcal{R}$ a la región que encierra $\mathcal{C}$. Entonces se dice que $\mathcal{C}$ es la **frontera** de $\mathcal{R}$, también denotada como $\delta\mathcal{R}$.

Por convención se denomina **orientación positiva** del contorno al sentido antihorario del recorrido. La notación pertinente de la integral de contorno siguiendo la orientación positiva de $\mathcal{C}$ es:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \ointctrclockwise_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz$$

En caso de seguir una orientación en sentido horario, se dice que posee una **orientación negativa**, y la curva debe denotarse como $-\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}^{-}$.

4. Los Teoremas Integrales de Cauchy

Se dio la definición, se vieron propiedades, y ahora toca ver teoremas relacionados con el tema. Pero todos, obvio está, son herramientas con el objetivo de facilitarnos el proceso de evaluación de una integral. Por el ejemplo, el que sigue afirma que si se cumplen ciertas condiciones... ¡la integral es cero!

Teorema 4.1. *Teorema Integral de Cauchy*
Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado y simple. Sea además $f(z)$ derivable sobre $\mathcal{C}$ y en su interior, y sea $f'(z)$ continua. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

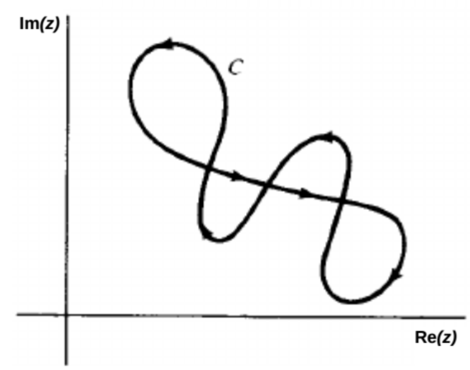
Demostrar

Resulta que en tiempos de nuestro querido amigo Cauchy no existía el concepto de analiticidad todavía, y por ello es que este matemático le solicita a la función derivabilidad y continuidad de su derivada por aparte. Sin embargo, llegado el momento, Goursat tomó la tesis de este teorema y se dedicó a demostrar su validez para casos en los que se tenga que la función $f(z)$ sea analítica en la región encerrada por $\mathcal{C}$. Con ello, se mereció añadir su nombre al teorema.

Teorema 4.2. *Teorema Integral de Cauchy-Goursat*
Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado y simple. Sea $f(z)$ analítica en $\mathcal{C}$ y en su interior. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

Cabe notar que las trayectorias de las que hablan la hipótesis de estos teoremas son curvas cerradas y simples. Es decir, curvas que no se cortan consigo misma. Sin embargo, esto se puede extender con el siguiente teorema a curvas cerradas de cualquier tipo:



Teorema 4.3. *Teorema Integral de Cauchy-Goursat generalizado*
Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$ simplemente conexo, entonces para todo camino cerrado $\mathcal{C}$ contenido en $\mathcal{D}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = 0$$

Ahora la cuestión es... cuando tienes una curva $\mathcal{C}$, definida como una curva cerrada suave pero en cuyo interior la función $f(z)$ no es analítica para todo punto, ¿qué hago? La solución a todos tus problemas viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 4.4. *Teorema Integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos*

Supongamos que:

- *Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada y simple, positivamente orientada.*
- *Sean $\mathcal{C}_k$ con $k = 1, 2, 3.., n$ contornos cerrados simples, orientados positivamente, disjuntos y cuyos dominios interiores no tienen puntos en común.*

Si $f(z)$ es una función analítica en todos estos contornos y en el dominio múltiplemente conexo formado por todos los puntos interiores a $\mathcal{C}$ y exteriores a todos los $\mathcal{C}_k$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} \left(\oint_{\mathcal{C}_k} f(z)\ dz \right)$$

Demostrar

Consideramos a los primeros teoremas enunciados en esta sección como *teoremas integrales para dominios simplemente conexos*. Y si tratamos con dominios múltiplemente conexos, aplicamos el teorema recién visto.

Una consecuencia importante del teorema anterior es el **Principio de la Deformación**.

Corolario 4.1. *Principio de Deformación*
Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ contornos cerrados simples orientados positivamente, donde $\mathcal{C}_2$ es interior a $\mathcal{C}_1$. Si una función $f(z)$ es analítica en ambos caminos y en los puntos comprendidos entre ellos, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\ dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\ dz$$

Recapitulando, podemos resumir un poco lo visto hasta aquí respecto de integrales de contorno, y exponer estas *condiciones equivalentes* a la hora de analizar funciones de variable compleja.

Teorema 4.5. *Condiciones equivalentes*
Sea $f(z)$ una función continua en un dominio $\mathcal{D}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes entre sí:

1. *$f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$ en $\mathcal{D}$*
2. *Las integrales de $f(z)$ sobre caminos contenidos en $\mathcal{D}$, con punto inicial z_1 y punto final z_0 fijos, tienen todas el mismo valor (independencia del camino)*
3. *Las integrales de $f(z)$ sobre caminos cerrados contenidos en $\mathcal{D}$ tienen todas el mismo valor (cero).*

Augustin Louis Cauchy

4.1. Fórmula Integral de Cauchy

Como si no fuese suficente con tantos teoremas de Cauchy, veremos unas formulaciones más, que son de suma importancia en el estudio de funciones de variable compleja.

Teorema 4.6. *Fórmula Integral de Cauchy*
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$. Si z_0 es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Demostrar

Basándose en la fórmula del teorema anterior, llegamos a nuevas formas de calcular la derivada de tales funciones...

Corolario 4.2. *Fórmula Integral: extensión a derivadas de orden superior*

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$. Si z es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s-z)^2} \, ds \qquad f''(z) = \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s-z)^3} \, ds$$

Tenemos de forma genérica que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} \, ds$$

A esta altura, contamos con las herramientas necesarias para poder demostrar un teorema que se expuso hace un tiempo en Derivación Compleja. Es el de analiticidad de las derivadas, que a continuación lo exponemos por mayor comodidad, y redactado en nuevos términos.

Teorema 4.7. *Analiticidad de las derivadas*
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ un contorno cerrado simple orientado positivamente en $\mathcal{D}$ que encierra únicamente puntos de $\mathcal{D}$.
Si z es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes en ese punto y son analíticas en él.

Demostrar