Transformaciones

Breggia, Bruno M.

"Porque del polvo eres, y al polvo volverás"
Génesis 3:19

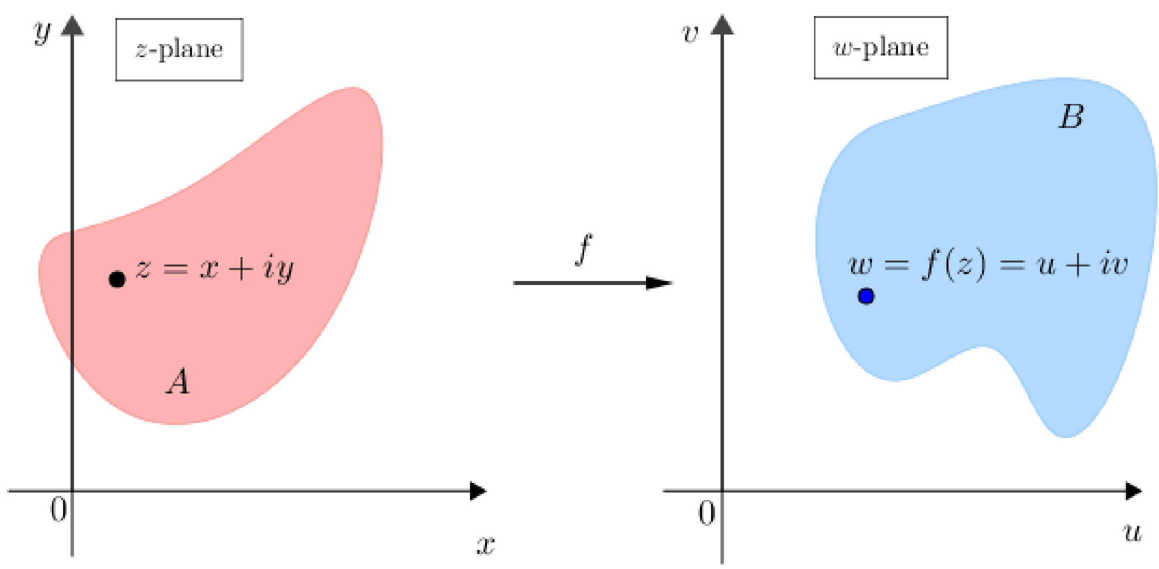
Con las herramientas del cálculo complejo contamos con la capacidad de, mediante una función cualquiera, transformar un punto en el plano complejo a otro. Esto es, si vemos a las funciones como teletransportadores que desplazan instantáneamente puntos de un lugar en el plano a otro, somos capaces de revolver el plano complejo a gusto. Gran cosa... dirán sarcásticamente. Pero punto por punto, curva por curva, región por región, somos capaces de transformar de esta manera áreas enteras en el plano, revelando patrones increíbles que ni en sueños se nos presentarían. Gráficamente serán conjuntos en el plano $\mathbb{C}$, pero en la vida real, esto constituye una herramienta con la cual resolver problemas de física, química, biología, otros problemas matemáticos, en fin, por cada transformación, hay un universo que se desdobla ante nuestros ojos.

Índice

1. A qué llamamos transformaciones

Las funciones complejas de variable compleja, así por más que reciban un sólo número complejo como parámetro, si queremos representar gráficamente a la función: el conjunto de partida junto con el de llegada, no podremos hacerlo en un espacio tridimensional. Nos quedamos corto con la máxima cantidad de dimensiones que podemos visualizar intuitivamente. Ya que el conjunto de partida de un complejo es un subconjunto de todo un plano, cuya representación estándar requiere de dos dimensiones físicas para su visualización, y el conjunto de llegada de tal función sería a su vez un subconjunto de otro plano. Esto indica que a menos que seamos capaces de visualizar 2x2 = 4 dimensiones gráficamente a la vez, no podremos representar en un mismo gráfico a una función...

Por esto mismo, las concebiremos a partir de dos gráficas: en uno el conjunto complejo de partida, o $\mathbb{C}_z$, y en el otro el conjunto complejo de llegada, o $\mathbb{C}_w$. En $\mathbb{C}_z$ podremos tomar regiones particulares (siempre dentro del dominio de la función) y ver a qué puntos en el plano $\mathbb{C}_w$ se mapean por acción de una función $f(z)$. Viéndolo así, es como si concebimos a la función como una operación que nos *transforma* una región a otra, que puede ser similar o completamente distinta a la anterior en forma, ubicación y tamaño dentro del plano complejo. Este análisis símilmente abstracto de lo que son las funciones de variable compleja son de inmensa utilidad en el ámbito científico (sobre todo la física) e ingenieril. Con ello, inauguramos una nueva etapa en el estudio de las variables complejas. ¡Bienvenido!



2. Tipos de Transformaciones

Transformaciones hay infinitas, cada función compleja existente es una transformación. Y las hay de todo tipo. Pero las más elementales son fáciles de reconocer, y con reconocer me refiero a saber cómo mapean ciertas regiones o curvas del plano $\mathbb{C}_z$ a $\mathbb{C}_w$. Analizaremos sobre todo las transformaciones debido a las funciones elementales ya vistas anteriormente, y algunas más.

2.1. Escalado y Rotación

Una transformación que es capaz de escalar (es decir, tanto dilatar como contraer) y rotar regiones en el plano complejo respecto al origen está dado por

$$w = Az, \qquad A \in \mathbb{C}$$

Si consideramos que $A = ae^{i\alpha}$ y $z = re^{i\theta}$, entonces demostramos los efectos de dicha transformación:

$$\begin{aligned} w &= Az \\ w &= ae^{i\alpha}\ re^{i\theta} \\ w &= ar\ e^{i(\alpha+\theta)} \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que:

$$|w| = ar \qquad\qquad \arg w = \alpha + \theta$$

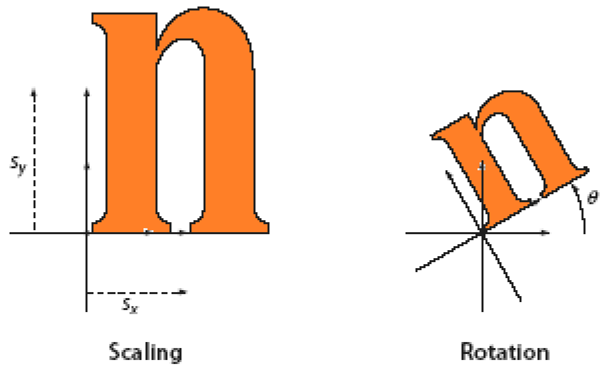
Esto quiere decir que al complejo original z el módulo se escaló por un factor $a = |A|$ y se lo rotó gráficamente una cantidad $\alpha = \arg A$. Tenemos además que:

- Si $|A| > 1$ se produce una dilatación, mientras que si $|A| < 1$ se produce una contracción.
- Si $|A| = 1$, es decir, A pertenece a la circunferencia unitaria, no se produce escalado alguno, el módulo de z permanece intacto.
- Si $\arg A > 0$ se rota al complejo en sentido antihorario, y si $\arg A < 0$ será en sentido horario.
- Si $\arg A = 0$, es decir, A es un real positivo, z no se rota en absoluto.

Definición 2.1. Transformación de escalado y rotación
Llamaremos **transformación de escalado y rotación** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = Az$$

Donde $A \in \mathbb{C}$ es una constante compleja cualquiera, cuyo módulo define en cuánto se escala la imagen, y cuyo argumento determina en cuánto se rota respecto al origen (siempre alrededor de $z = 0$).



2.2. Traslación

Una transformación que traslada de manera intacta regiones en el plano viene dada de la forma más simple de todas:

$$w = z + B \qquad B \in \mathbb{C}$$

Si consideramos $B = a + ib$ y $z = x + iy$, entonces demostramos los efectos de dicha transformación:

$$\begin{aligned} w &= z + B \\ w &= (x + iy) + (a + ib) \\ w &= (x + a) + i(y + b) \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que

$$\mathfrak{Re}(w) = x + a \qquad\qquad \mathfrak{Im}(w) = y + b$$

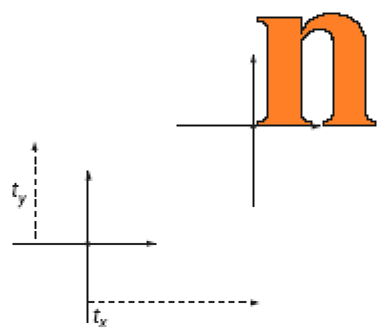
Esto quiere decir que al complejo original z se lo desplazó gráficamente a unidades en sentido positivo del eje real, y b unidades en sentido positivo del eje imaginario. Tenemos además que:

- Si $\mathfrak{Re}(B) > 0$ se produce un desplazamiento de z hacia la derecha, y si $\mathfrak{Re}(B) < 0$, será hacia la izquierda.
- Si $\mathfrak{Re}(B) = 0$ no hay desplazamiento horizontal.
- Si $\mathfrak{Im}(B) > 0$ se produce un desplazamiento de z hacia arriba, y si $\mathfrak{Im}(B) < 0$, será hacia abajo.
- Si $\mathfrak{Im}(B) = 0$ no hay desplazamiento vertical.

Definición 2.2. Transformación de traslación
Llamaremos **transformación de traslación** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = z + B$$

Donde $B \in \mathbb{C}$ es una constante compleja cualquiera, cuya parte real define en cuánto se desplaza horizontalmente el resultado, y cuya parte imaginaria determina el desplazamiento vertical.



Translation

2.3. Transformación lineal

Englobaremos a ambas transformaciones anteriores para definir lo que denominamos **Transformación lineal** o también **Transformación afín**:

$$w = Az + B \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

Ésta es una transformación capaz de escalar a z, rotarlo en torno al origen, y trasladarlo, acorde a la naturaleza de las constantes A y B como se detalló previamente.

Definición 2.3. Transformación lineal
Llamaremos **transformación lineal** o **transformación afín** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z)$ sea la composición de las aplicaciones de traslación ($T = z + B$) con la de escalado-rotación ($E = Az$):

$$f(z) = T \circ E\ (z) = Az + B$$

Donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes complejas, con $A \neq 0$. El complejo A determina la naturaleza de la rotación y escalado, y B la de traslación.

2.4. Inversión

Ahora analizaremos a una de las más fascinantes transformaciones elementales, la **transformación recíproca** o **inversa**:

$$w = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

Se preguntarán ¿qué es lo que hace? Bueno, la respuesta viene dada por un pequeño análisis de la misma:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z} \\ w &= \frac{1}{re^{i\theta}} \\ w &= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Con este desarrollo vemos que:

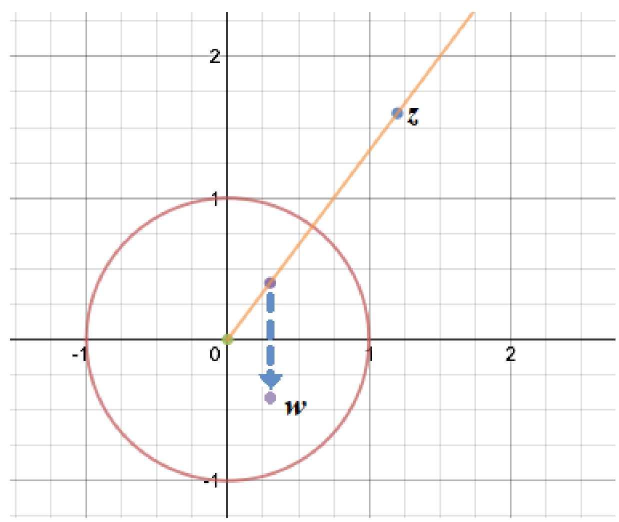
$$|w| = \frac{1}{r} \qquad\qquad \arg w = -\theta$$

Esto quiere decir que se invirtió el módulo del complejo z y luego se lo reflejó respecto del origen. Tenemos las siguientes características:

- Considérese la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Si $|z| > 1$, es decir z está fuera de la circunferencia unitaria, la función la mapea dentro de ella. En caso de que $|z| < 1$, es decir z dentro de la circunferencia unitaria, la función la mapea afuera.

- Si $|z| = 1$, es decir z sobre la circunferencia unitaria, no hay efecto de escalado alguno.

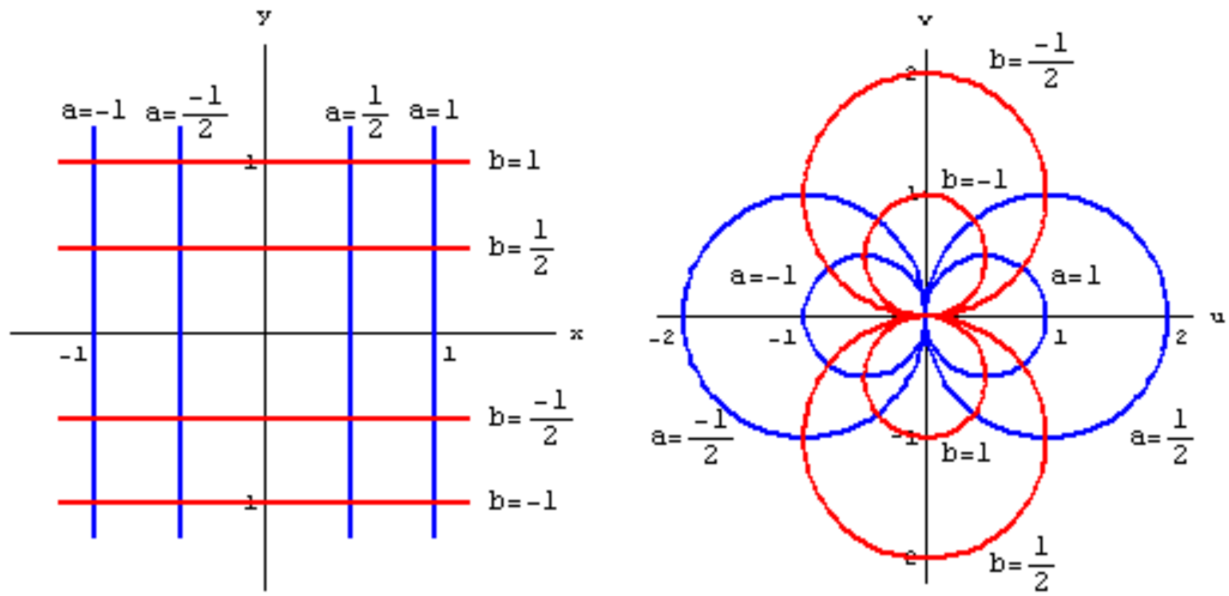
- Como $\arg w = -\arg z$, el complejo se reflejará respecto al eje real.



Definición 2.4. Transformación inversa
Llamaremos **transformación inversa** o **recíproco** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

Bajo esta transformación, las rectas se convierten en círculos, y los círculos en rectas. Ni las rectas más derechas ni las curvas más cerradas se pueden resistir a la transformación inversa...



2.5. Transformación de Möbius

Combinando la transformación lineal y la transformación inversa, tenemos la denominada **transformación racional lineal** o **Transformación de Möbius**:

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} \qquad A, B, C, D \in \mathbb{C} \ \wedge \ AD - CB \neq 0$$

Tal transformación puede, según los valores que se les asigne a las constantes, inducir una rotación, un escalado, traslación e inclusive inversión de z. Es ésta la más abarcativa de las transformaciones. Puede curvar a las más rígidas de las rectas y enderezar a las más duras de las circunferencias.

Si $C = 0$, la transformación anterior se reduce a una simple transformación lineal. Pero si $C \neq 0$, la transformación de Möbius puede definirse en términos de la composición de todas las transformaciones antes vistas:

$$w = \frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C} \cdot \frac{1}{Cz + D}$$

Donde se sigue exigiendo, claro está, que $AD - CB \neq 0$.

Por el hecho de que la Transformada de Möbius se puede expresar de la forma

$$azw + bz + cw + d = 0$$

se la llama también **transformación bilineal**, al demostrarse que es lineal con respecto a z y con respecto a w (los coeficientes son complejos distintos a los presentados en la función anterior). Dicho esto, se puede tranquilamente despejar z y obtener la transformada inversa, la cual es una transformación de la misma naturaleza:

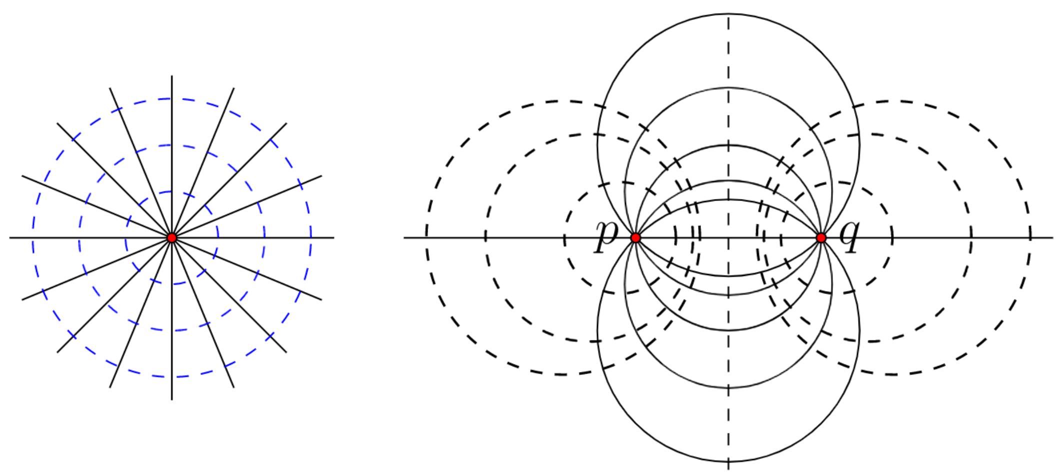
$$z = \frac{-Dw + B}{Cw - A} \qquad AD - BC \neq 0$$

Definición 2.5. Transformación de Möbius
Llamaremos **transformación de Möbius** o **racional lineal** o **bilineal** a la aplicación $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \qquad z \neq -\frac{D}{C}$$

En donde $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ y debe darse que $AD - BC \neq 0$

Bajo una transformación de Möbius, las curvas en el plano (a) se transforman en las curvas correspondientes en el plano (b) en la siguiente figura:



(a) (b)

3. Parametrizando curvas en $\mathbb{C}$

En cálculo de varias variables se parametrizan curvas haciendo que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tome como variables $x(t), y(t)$, ambos dependientes a su vez de un parámetro adicional en común. Se lo llamaba t por asociarlo comúnmente con el tiempo, en aplicaciones físicas.

Se ha hecho notar ya la asombrosa similitud entre funciones de dos variables reales y funciones complejas. El hecho de que un número complejo z represente un punto en el plano $\mathbb{C}$ es lo que nos demuestra que hay una correlación unívoca con $\mathbb{R}^2$. Las componentes real e imaginaria de un complejo se correlacionan inconfundiblemente con las coordenadas del mismísimo $\mathbb{R}^2$. Entonces, si hablamos de parametrizar curvas en el plano de Argand, o plano complejo, tendríamos que definir un número complejo z cuyos componentes real e imaginario sean funciones respecto a una variable real cualquiera t.

$$\mathcal{C} : \ z = z(t) \qquad a \leq t \leq b$$
$$z(t) = x(t) + i\ y(t)$$

Definición 3.1. Arco suave
Dada la curva $\mathcal{C} : \ z = z(t)$ en donde $a \leq t \leq b$ y $z(t) = x(t) + i\ y(t)$, se dice que $\mathcal{C}$ es un **arco suave** si:

- $x(t), y(t)$ son funciones inyectivas en el intervalo $I = [a, b]$
- $x'(t), y'(t)$ son funciones continuas en I
- $z'(t) \neq 0$ en I

Básicamente hablando, una curva no será suave si:

1. Se corta a sí misma
2. Presenta crestas o picos
3. Permanece en un mismo punto al ser evaluada en un intervalo de su dominio.

Definición 3.2. Ángulo entre curvas en el Plano Complejo
Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos arcos suaves simples en una región $\mathcal{D}$ del plano complejo que se interceptan en un punto z_0. Se denomina ángulo entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en z_0 al ángulo formado por las respectivas rectas tangentes en dicho punto.

4. La Transformación Conforme

De todas las transformaciones existentes, les cuento el secreto... las estrellas del espectáculo son aquellas que al transformar varias curvas, logran conservar el más simple de los detalles:

el ángulo entre ellos.

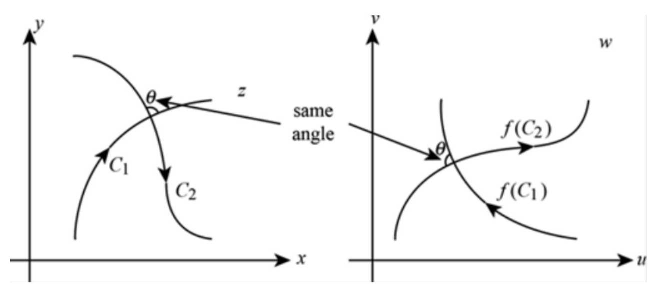
Definición 4.1. Transformación que preserva la orientación
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. Diremos que f conserva la orientación si una rotación en sentido antihorario en $\mathcal{D}$ se transforma por f en una rotación en sentido antihorario en $\mathcal{S}$.

Definición 4.2. Transformación que preserva los ángulos
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. Diremos que f conserva los ángulos si para cualquier $z_0 \in \mathcal{D}$, dados dos arcos cualesquiera que se intersectan en z_0 formando un ángulo α, las imágenes de estas curvas se cortan en $f(z_0) \in \mathcal{S}$ formando entre sí el mismo ángulo α.

Dadas estas dos definiciones, ahora les presentamos, señoras y señores, a la estrella del capítulo: las **Transformaciones Conforme**

Definición 4.3. Transformación Conforme
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$. La transformación $w = f(z)$ se dice que es **una transformación conforme** en un punto $z_0 \in \mathcal{D}$ si preserva el ángulo entre curvas que se interceptan en z_0 tanto en magnitud como orientación.

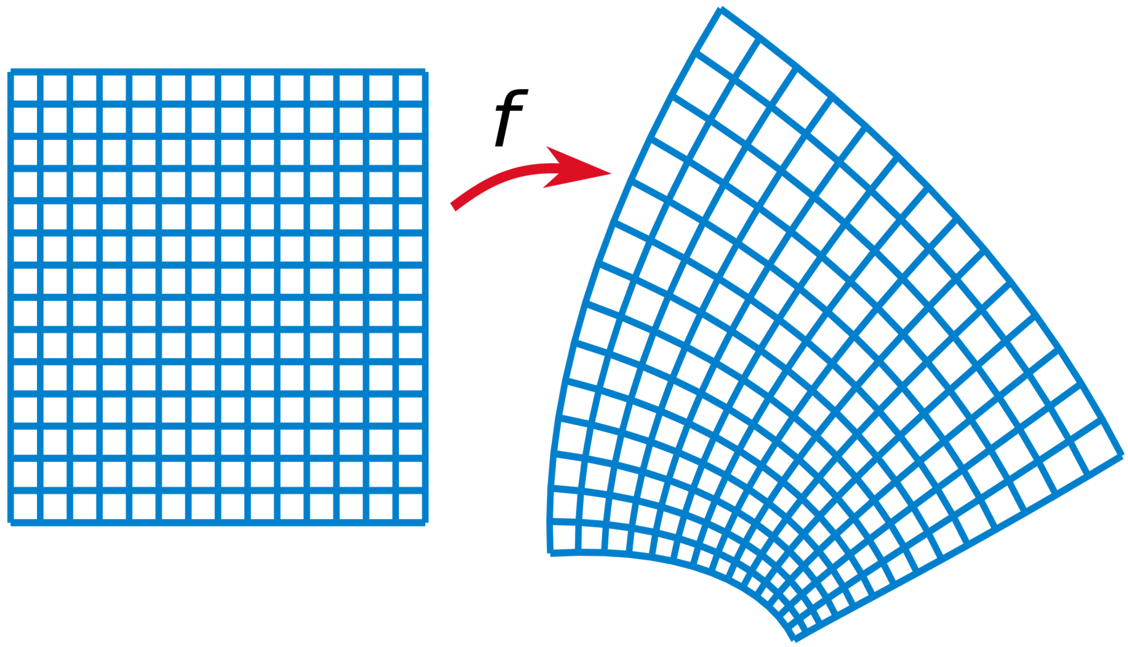
La importancia de las llamadas transformaciones conforme radica en su utilidad para resolver problemas en el campo de la física, química, ingeniería y matemáticas en general, entre tantos otros, que pueden ser expresados en términos de variable compleja pero que presentan severas dificultades en su geometría. Las trasformaciones se utilizan con el objetivo de simplificar tales problemas.



Asociado a un gran concepto siempre viene un gran teorema...

Teorema 4.1. *Condición Suficiente para la Conformidad*
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{S} \subset \mathbb{C}$.
Si f *es analítica en* $\mathcal{D}$ *y* $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathcal{D}$, *entonces* f *es conforme en* $\mathcal{D}$.

Demostrar



Punto por punto, curva por curva, región por región, transformaremos áreas enteras del plano complejo, revelando patrones increíbles que ni en sueños se nos presentarían.

4.1. Aplicación

Para los que crean que las transfomaciones conformes son aburridas, diviértanse encontrándole sentido al procesamiento de imágenes con el mapeo conformacional...