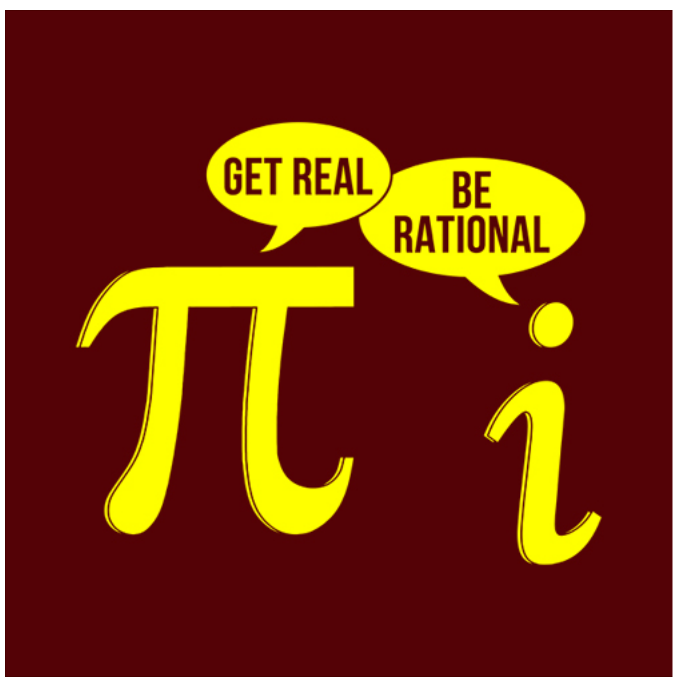
# Propiedades de Números Complejos

Breggia, Bruno M.

Los Números Complejos... aquellos números cuyo nombre les hace mala fama, pero son clara evidencia de cómo la necesidad es la madre de todo invento, o mejor dicho... propulsora de todo *descubrimiento*, como lo son los hallazgos matemáticos. ¿Es la unidad imaginaria un número inventado? Y... sí, como todos los demás. Como el 1, el 2, el 3.14, el $\frac{1}{3}$, pero se los creó para modelar algo que va más allá del alcance de la manipulación del hombre. Allí, entre todos esos números, agregaremos a la unidad imaginaria $i$, que como verán, o mejor dicho, no verán, no representa una *cantidad*, sino una entidad meramente imaginaria, una abstracción *pura*. Por ello, sólo nos resta hecharnos para atrás y contemplar cómo este enriedo se arma solo... tratando de **entender.**

Les damos la oficial bienvenida al mundo de *las Variables Complejas.*



# Índice

# 1. El número Complejo

**Definición 1.1.** Número Complejo
Un Número Complejo se define como un par ordenado de números reales:

$$z = (x, y)$$

Con $x, y \in \mathbb{R}$. La primer componente del par ordenado se denomina la **parte real** del número complejo, y se expresa como:

$$\mathfrak{Re}(z) = x$$

El segundo componente del par se denomina la **parte imaginaria** del número complejo, y la denotamos:

$$\mathfrak{Im}(z) = y$$

El conjunto de **todos** los número complejos se designa con $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

# 2. Igualdad entre complejos: aclarando lo obvio

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales entre sí. Dicho simbólicamente, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z_1) = \mathfrak{Re}(z_2) \wedge \mathfrak{Im}(z_1) = \mathfrak{Im}(z_2)$$

# 3. Operaciones Definidas en $\mathbb{C}$

Para poder hacer cálculos con estos nuevos números, deberemos primero definir qué operaciones serán válidas entre ellos, y cómo proceder en cada caso. Sabemos sumar números reales, pero los complejos son tuplas, o pares ordenados. Así que damos lugar a nuestra imaginación para que abstraiga los conceptos de suma y multiplicación para poderlos aplicar con los elementos del conjunto $\mathbb{C}$.

**Definición 3.1.** Suma de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \triangleq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Con esto, la suma de números complejos se define en términos de sumas de números reales, y sí que sabemos sumar reales. Problema resuelto.

**Definición 3.2.** Producto de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) \triangleq (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Aquí pareciese que la cuestión se pone menos intuitiva, pero créanme que esto es por un bien mayor, que quedará bien en claro cuando avancemos más adelante y nos adentremos más en el tema. En fin, el producto entre complejos se define en términos de productos y sumas entre reales, operaciones que ya sabemos realizar. Problema resuelto.

## 3.1. Propiedades algebraicas

Se tiene que para $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se cumple que:

1. **Propiedad de Cierre**:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

$$z_1z_2 \in \mathbb{C}$$

2. **Propiedad Conmutativa**:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

3. **Propiedad Asociativa**:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

4. **Propiedad Distributiva**: del producto respecto a la suma

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

5. Existencia del **Elemento Neutro aditivo**:

$$\exists ! z \in \mathbb{C} \ / \ z_1 + z = z + z_1 = z_1$$

El elemento neutro aditivo $z$ resulta ser único, y es el complejo $(0, 0)$. De ahora en más,su notación será equivalente a $z = (0, 0) = 0$.

6. Existencia de la **Identidad Multiplicativa**:

$$\exists ! z \in \mathbb{C} \ / \ z_1 z = z z_1 = z_1$$

El elemento neutro multiplicativo $z$ resulta ser único, y es el complejo $(1, 0)$. De ahora en más, su notación será equivalente a $z = (1, 0) = 1$.

7. Existencia del Inverso Aditivo (**opuesto**):

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \ \exists ! (-z) \in \mathbb{C} \ / \ z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Se dice entonces que $-z$ es el opuesto de $z$. Como la relación es recíproca, podemos decir también que $z$ es el opuesto de $-z$.

8. Existencia del Inverso Multiplicativo (**recíproco**):

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \ \exists ! z^{-1} \in \mathbb{C} \ / \ z z^{-1} = z^{-1} z = 1$$

Se dice entonces que $z^{-1}$ es el recíproco de $z$. Como la relación es recíproca, podemos decir también que $z$ es el recíproco de $z^{-1}$.

De esta manera vamos construyendo, desde los cimientos hasta la cima, las bases y principios del cálculo con variables complejas, sobre los cuales nos respaldaremos a la hora de partir a realizar análisis matemáticos más avanzados. ¡Bienvenidos a $\mathbb{C}$!

## 3.2. Unas operaciones más

Habiendo definido los opuestos y recíprocos, nos vemos habilitados ahora a definir un par de operaciones más, que son, por supuesto, análogas a su contrapartida en el conjunto de los números reales.

**Definición 3.3.** Diferencia de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$z_1 - z_2 \triangleq z_1 + (-z_2)$$

Donde $-z_2$ es el opuesto de $z_2$.

Con esto, ¡la diferencia de números complejos se define en términos de su suma!. Bien simple.

**Definición 3.4.** Cociente de números complejos
Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que:

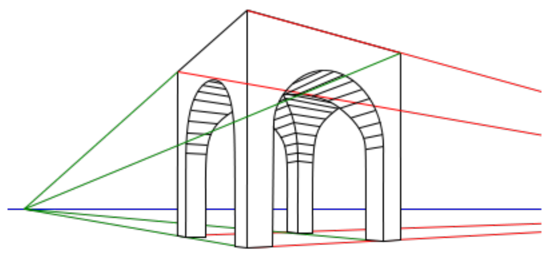
$$\frac{z_1}{z_2} \triangleq z_1(z_2^{-1})$$

Donde $z_2^{-1}$ es el recíproco de $z_2$, con $z_2 \neq 0$.

Con esto, el cociente de números complejos se define puramente en términos de su producto. Más simplificado, imposible.

# 4. Formas de representación

Llegó la hora de finalmente simplificarnos la cuestión. Anotar números complejos como pares ordenados puede resultar tedioso. No debemos confundirnos además con los puntos en $\mathbb{R}^2$, porque NO son lo mismo. Y encima multiplicar dos complejos entre sí ya es agarrarse la cabeza... o se sabe de memoria la definición o se la debe tener por allí cerca. Por ello es que se han desarrollado múltiples formas de representar ese par ordenado de tal forma que nos sea más ameno operar con ellas, de diferenciarlos de puntos en $\mathbb{R}^2$ y de inclusive operar con ellos como si inconscientemente los tratáramos como números reales. Es impresionante la importancia que tiene una buena forma de representación.



## 4.1. La Unidad Imaginaria y la Representación Binomial

Al número complejo $(0,1)$ lo denominaremos la *unidad imaginaria*, pues sólo posee la unidad como su parte imaginaria, y lo denotaremos con $i$ (la i de imaginario). Es decir,

$$i = (0,1)$$

Con esta definición de $i$, todo número complejo se ve habilitado a escribirse como combinación lineal de los elementos $1 = (1,0)$ e $i = (0,1)$, los cuales constituyen una base para el conjunto $\mathbb{C}$. Por si no me creen...

$$\begin{aligned} z = (x,y) &= (x,0) + (0,y) \\ &= (1,0)(x,0) + (0,1)(y,0) \\ &= 1 \cdot (x,0) + i \cdot (y,0) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

Llegamos a demostrar que con la definición de la unidad imaginaria, todo número complejo puede representarse de forma binomial de la siguiente manera:

$$z = (x,y) = x + iy$$

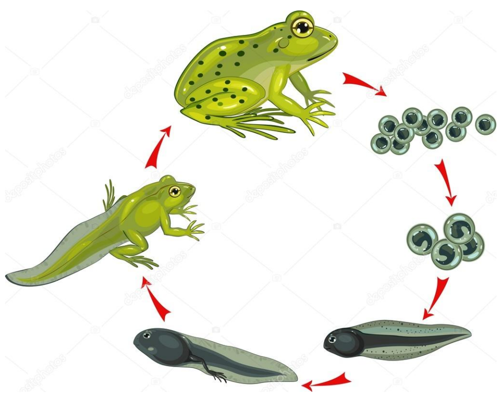
Antes de continuar, vale la pena estudiar un poco más detenidamente a la unidad imaginaria por sí misma, ya que fascinantes descubrimientos nos esperan.

Tomemos por ejemplo las potencias de la unidad imaginaria. Por convención respetaremos la regla de que todo número elevado al exponente 0 da como resultado 1. Con ello, $i^0 = 1$. Tenemos también que $i^1 = i$. Pero algo fuera de lo que estamos acostumbrados surge al calcular $i^2$:

$$\begin{aligned} i^2 = (0,1)(0,1) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \\ &= (-1, 0) \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

Usando la definición del producto (sí, esa fórmula complicada de la sección anterior), demostramos que $i^2$ resulta en un número real, y no sólo eso, sino que da -1. Es como la pieza del rompecabezas que faltaba, al fin, un número que al elevarlo al cuadrado nos da algo... negativo. Señoras y señores, ajústensen los cinturones que esto recién empieza.

Para avanzar algo más rápido, les presento ya calculada una tabla de potencias de la unidad imaginaria:



| Potencia | Valor |
|---|---|
| $i^0$ | $1$ |
| $i^1$ | $i$ |
| $i^2$ | $-1$ |
| $i^3$ | $-i$ |
| $i^4$ | $1$ |
| $i^5$ | $i$ |
| $i^6$ | $-1$ |
| $i^7$ | $-i$ |
| ... | ... |

Obviamente, de los cuatro posibles valores podemos calcular cualquier potencia de $i$ simplificando el exponente: lo reemplazamos por el resto de su división entera en 4, y calculamos la nueva potencia resultante. Esto es debido al carácter cíclico de las potencias de la unidad imaginaria.

La forma de representación binomial nos simplifica las operaciones algebraicas, pues operamos sobre los complejos como si fuesen números reales, aplicando la propiedad distributiva, asociativa y conmutativa cuando corresponda. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces...

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}{x^2 + y^2} + i\frac{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x^2 + y^2}$$

Si te preguntas cómo hicimos para calcular esto último, hemos partido de multiplicar numerador y denominador por el *conjugado* de $z_2$...

**Definición 4.1.** El Conjugado de un Número Complejo
Con $z \in \mathbb{C}$, tenemos que el **conjugado** de $z$, denotado como $\bar{z}$, se define como:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

La conjugación no implica más que cambiarle el signo a la parte imaginaria de un número complejo. Si no posee parte imaginaria (es real puro), entonces permanecerá igual.

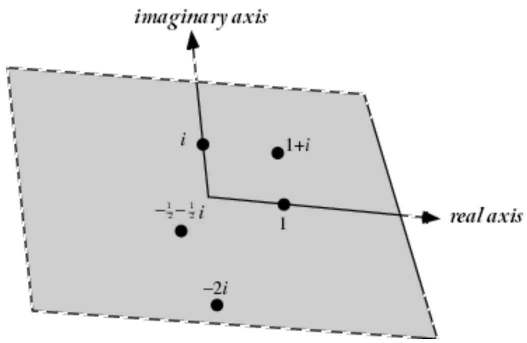
Iremos creando más definiciones a medida que nos sea necesario. Pero no nos olvidaremos de ninguna de las ya creadas a medida que vayamos avanzando.

## 4.2. El Plano de Argand y la Representación Gráfica

Lo hemos dicho una vez, y no está demás decirlo otra... un número complejo si bien es un par ordenado de dos números pertenecientes a $\mathbb{R}$, no es un punto en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, hay una relación íntima entre los números complejos y los puntos en el plano $\mathbb{R}^2$, o mejor dicho, con los vectores en $\mathbb{R}^2$.

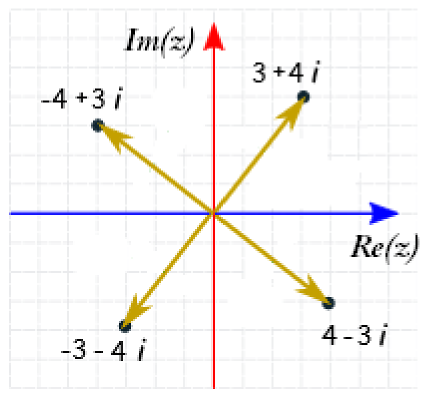
Entre las similitudes, ambos poseen dos componentes (reales), su suma se realiza componente a componente, el orden de sus componentes importa, son multiplicables por un número $\alpha \in \mathbb{R}$ y tienen opuestos definidos y un elemento neutro aditivo. Sin embargo, basta mencionar una y sólo una diferencia como para que caigamos en la realidad de que son elementos distintos (aunque realmente hayan más diferencias): sus productos. Productos entre complejos nos da otro complejo que ninguna relación guarda con un vector producto, ya sea producto cruz o producto punto. Además, un complejo, como veremos más adelante, tiene definido también potenciación, raíces, entre otras operaciones que a un vector no se les puede aplicar.

Pero gracias a lo poco que guardan en común, nos es un incentivo para visualizar a los número complejos como puntos en un plano bidimensional, con su parte real e imaginaria como sus coordenadas. Es así cómo organizamos a TODOS los puntos del conjunto $\mathbb{C}$ en un *plano complejo*. Un plano cuyos ejes coordenados, análogos a los ejes $x$ y $y$ de $\mathbb{R}^2$, son los ejes *Real* e *Imaginario*. Esto constituye el denominado **Plano de Argand**.




El **Plano de Argand** o **Plano Complejo**

De esta manera, observamos cómo el eje real contiene a los números puramente reales (con parte imaginaria 0), y el eje imaginario a los números puramente imaginarios (con parte real 0). Lo contemplaremos al plano de Argand como una extensión intuitiva de lo que conocíamos como *recta numérica*, contenida enteramente en el eje real de nuestro plano, lo cual tiene lógica, ya que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.




Esta representación nos hace notar el siguiente hecho fundamental:

El conjunto $\mathbb{C}$ no es un conjunto ordenado

Es decir, no se define relación de precedencia alguna entre los elementos del conjunto de los números complejos. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, podemos corroborar su igualdad o desigualdad, pero no si uno es mayor o menor que el otro. Al tratar con números reales, todos podían ser ubicados en una recta infinita en la cual guardaban una relación de precedencia que nos permitía compararlos entre sí según el orden en el cual los ubicábamos en la recta. Esto sin emabargo no es posible si hablamos de un plano con extensión infinita.

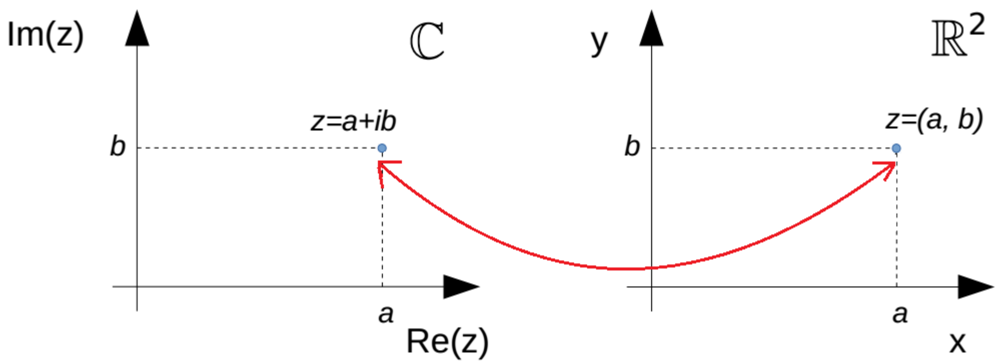
Bueno, ni que lo anterior hayan sido malas noticias, la representación gráfica nos incentiva además a definir una nueva propiedad para los números complejos, análoga al módulo de los vectores en $\mathbb{R}^2$, que representa la distancia de un número complejo $z$ al punto $z = 0$ en el plano de Argand.

**Definición 4.2.** El Módulo de un Número Complejo
Con $z \in \mathbb{C}$, tenemos que el **módulo** de $z$, denotado como $|z|$, se define como:

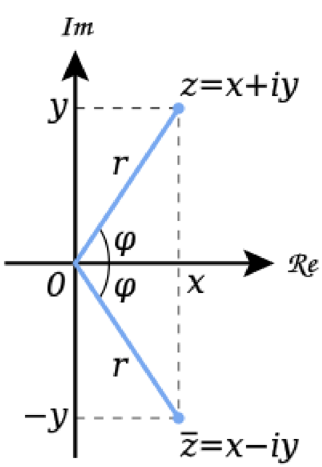
$$|z| = |x + iy| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

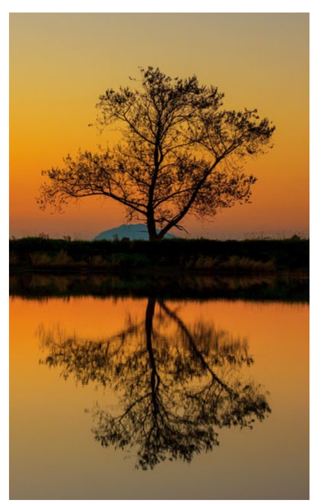
Tal definición se basa en el teorema de pitágoras, tomando la parte real e imaginaria como si fuesen los componentes de un vector en $\mathbb{R}^2$ y calculando su módulo. Sin embargo, cabe destacar que la distancia es una medida que será siempre un valor *real* no negativo. Por lo tanto, el módulo de todo número complejo $z$ tendrá que necesariamente tener su parte imaginaria igual a 0. ¡Es una operación que, aplicada a cualquier complejo, nos garantiza obtener un número puramente real!

Se puede establecer entonces una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano complejo $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dado un sistema de referencia cartesiano.




Recordando la definición del conjugado... podemos observar en el plano de Argand qué interesante relación guardan entre sí los complejos conjugados. Calcular el conjugado de un complejo implica reflejar su representación gráfica respecto al eje real.



### 4.2.1. Propiedades del Conjugado y el Módulo

Llegado a este punto, no avanzaremos sin antes introducir importantes propiedades a tener en cuenta a la hora de trabajar con módulos y conjugados de números complejos. Siendo que $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que:

a) $z = \overline{\overline{z}}$

b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ y $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ con $z_2 \neq 0$

d) $|\bar{z}| = |z|$

e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

g) $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

h) $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

i) $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ y $\mathfrak{Im}(z) \leq |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$

j) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

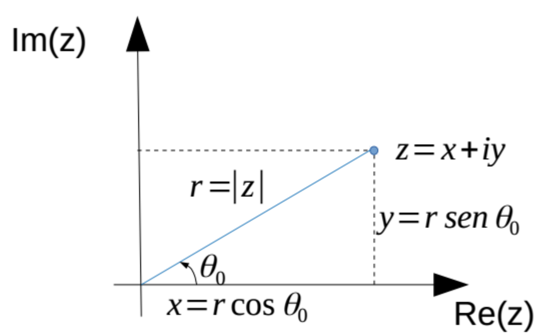
k) Desigualdad Triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

l) Segunda desigualdad triangular: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

## 4.3. La Representación Polar

Dado el complejo $z = (x, y) \neq (0, 0)$, podemos definirle **coordenadas polares** $r$ y $\theta$ tales que:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos\theta \\
y &= r \cdot \sin\theta
\end{aligned}
$$



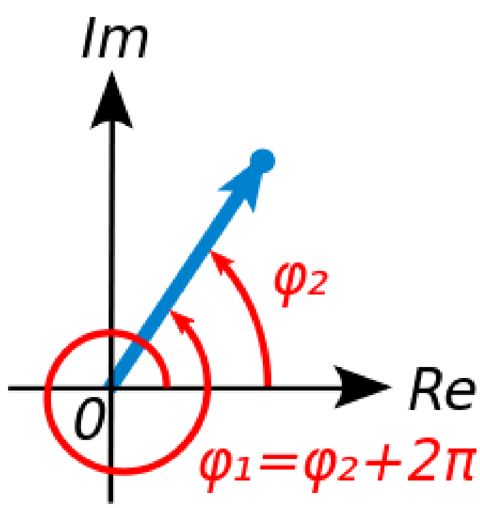
De esta manera, podemos definir la forma polar de un número complejo como:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

En esta forma de representación, $r$ no es más que el **módulo** del complejo $z$, y el ángulo $\theta$ se denomina **argumento** del complejo $z$, o $\arg(z)$, calculable a partir de $x$ y de $y$ por medio de relaciones trigonométricas. Se tiene entonces que para obtener $r$ y $\theta$ aplicamos:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Sin embargo, un complejo tiene infinitos argumentos, ya que medido en radianes, obtenemos un valor congruente al sumarle indefinidas veces $2\pi$. Para quitar ambigüedades, nos referiremos como el **Argumento principal** de un complejo $z$, o $\mathbf{Arg}(z)$, al argumento de $z$ cuyo valor se encuentra encasillado en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Éste será el valor con el que trabajaremos más a menudo en representaciones que involucren argumentos de complejos.




Aquí, $\varphi_2$ es el argumento principal

## 4.4. Representación Exponencial

Al llegar hasta la forma polar hemos dado un gran salto para adelante, uno que se completa agregando a todo lo visto hasta ahora una fórmula más... una que nos dio nuestro querido amigo Leonard Euler: la **Fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$$

Tomando esto en consideración, y trabajando la forma polar anterior, llegamos a la cúspide de las distintas formas de representar números complejos. He aquí la *forma exponencial*:

$$z = re^{i\theta}$$

Con esta forma de escribir complejos, se nos simplifica aún más las operaciones de multiplicación y división. Observa...

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\ r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

E inclusive nos habilita algo que hasta ahora no nos atrevimos hacer con los números complejos (sino sólo con $i$): definir la potenciación en $\mathbb{C}$. Tenemos que la potenciación de complejos es así de simple si se los representa en su forma exponencial:

$$z_1^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n\ e^{i(n\theta_1)}$$

Con esto, llegamos al mismo resultado que otro de nuestros amigos matemáticos, De Moivre, con su **Fórmula de De Moivre**:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Recordando que el argumento de un complejo puede tener infinitos valores que difieran en $2\pi$, la forma genérica de representación en forma exponencial sería:

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

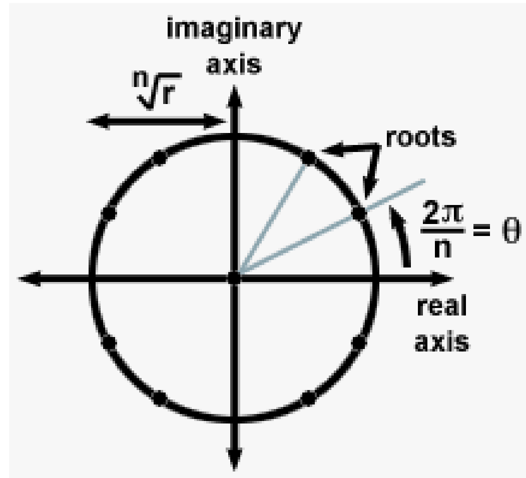
Este pequeño hecho que puede pasar fácilmente por desapercibido no ha de ser pasado por alto. Ya que nos es de gran importancia para casos como el que sigue: si elevásemos un complejo a un exponente racional de la forma $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}$, y aplicásemos la fórmula de De Moivre, probablemente nos contentaríamos con haber encontrado la $n$-ésima raíz de nuestro complejo, pero la historia no acaba allí en absoluto. Pues observen cómo, para distintos $k$ considerados, al dividirlos por $n$, otro entero, no necesariamente darán otro número entero. Si el cociente $\frac{k}{n}$ no es entero, entonces el término $2k\pi$ que antes se le sumaba indiferentemente al argumento principal, ahora *no* arrojará valores congruentes. Con ello quiero decir que para distintos $k$, en el cálculo de la $n$-ésima raíz, tendríamos resultados diferentes. La cantidad de raíces diferentes que obtendríamos sería igual al índice de la raíz considerada ($n$).

Lo verifiquemos:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \left[r\ e^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} \end{aligned}$$

Donde $\dfrac{2k\pi}{n}$ con $k, n \in \mathbb{Z}$ adoptará $n$ valores distintos con $k$ variando desde 0 hasta $n-1$. Para valores enteros de $k$ fuera de ese rango se volverán a obtener cíclicamente las primeras $n$ raíces calculadas.

Analizando los resultados, vemos que todas las raíces de un complejo tienen entre sí el mismo módulo, pero difieren en su argumento. Esto nos quiere decir que... están distribuidos todos en torno a una circunferenci de radio $\sqrt[n]{r}$ en torno a $z = 0$, y se localizan equitativamente espaciados de tal manera que el ángulo subtendido entre dos raíces consecutivas es de $\dfrac{2\pi}{n}$.




# 5. Reflexión sobre lo aprendido

En fin, ¿los números son para contar?