Relatório do Lab 5 de CCI-22

Trabalho 5 – Interpolação

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

16/04/2018

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Comparação da Interpolação na Forma de Lagrange vs. Forma de Newton

Para fins de comparar a solução para o problema da interpolação polinomial encontrada pelos métodos de Lagrange e de Newton, implementados nos arquivos `PolinomioInterpolador.m` e `InterpolacaoFormaNewton.m`, foi utilizado o exemplo da tabela 1:

Tabela 1: Valores amostrados de uma dada função $f(x)$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

A comparação foi feita calculando-se o polnômio interpolador pelos dois métodos e então plotando os gráficos obtidos no intervalo de -1 a 3, conforme constam na figura 1. Além disso, foi feita uma comparação dos coeficientes dos polinômios obtidos, e dos valores que os mesmos retornam quando avaliados no intervalo de -1 a 3. Os dados dessa comparação constam na tabela 2. Todos esses dados foram colhidos por meio do *script* `interpoldemo.m`.

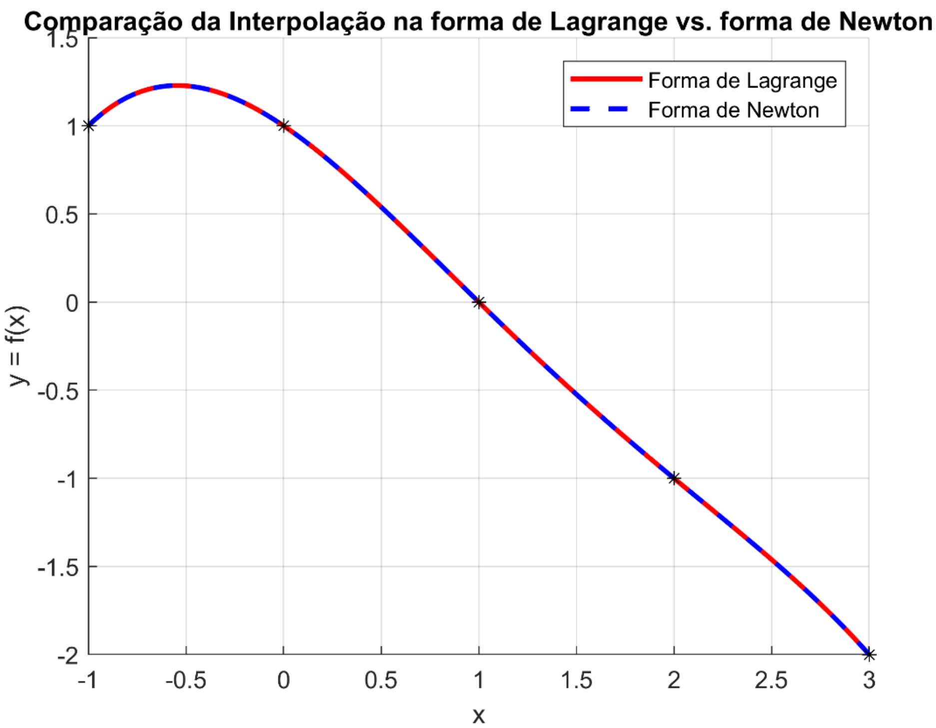

Figura 1: Comparação dos gráficos dos polinômios interpoladores gerados pelos métodos de Lagrange e de Newton.

Na figura 1 podemos observar que os dois gráficos basicamente se sobrepoem em todos os pontos. Optou-se por plotar um dos gráficos com a linha tracejada para evitar a sobreposição total das duas curvas.

No entanto, através do gráfico não é possível ter uma noção precisa do quanto os dois polinômios coincidem. Para fazer esta análise, foi calculada a maior diferença em módulo dos coeficientes dos polinômios obtidos pelos dois métodos, assim como a maior diferença em módulo dos valores dos dois polinômios quando avaliados nos pontos do intervalo -1 a 3 (com espaçamento de 0.001). Os dois valores constam na tabela 2.

Tabela 2: Máxima diferença em valor absoluto dos coeficientes dos polinômios interpoladores e de seus valores no intervalo de -1 a 3.

$\max_{0 \le k \le n} \lvert a_k - b_k \rvert$	$0.55511151231258 \cdot 10^{-16}$
$\max_{x \in [-1:0.001:3]} \lvert P_L(x) - P_N(x) \rvert$	$8.88178419700125 \cdot 10^{-16}$

Como podemos ver pela tabela 2, a discrepância entre os dois polinômios interpoladores existe, mas é consideravelmente pequena. A explicação para essa pequena diferença é de caráter numérico, isto é, ela se origina da diferença nas duas formas de calcular o polinômio interpolador. A forma de Lagrange, por exemplo, resolve um sistema linear com uma matriz de Vandermonde, enquanto a forma de Newton se baseia na tabela de diferenças divididas. As operações que são realizadas acumulam erros de representação, e sendo realizadas operações distintas em ordens distintas, temos uma diferença na forma como esses erros se acumulam.

2. Fenômeno de Runge

Nesta segunda parte do Lab5, é estudado o fenômeno de Runge, que consiste basicamente numa sequência de polinômios interpoladores para uma dada função (a função de Runge) tal que a sequência dos erros cometidos pela interpolação não tende a zero conforme se amostram mais pontos. Para ilustrar esse fenômeno, foi utilizada a forma de Newton para obter o polinômio interpolador de graus 1, 2, 4, 8 e 16. Em seguida, plotou-se os gráficos da função de Runge e dos polinômios interpoladores juntos na figura 2. Todos os gráficos foram gerados a partir do *script* `FenomenoRunge.m`.

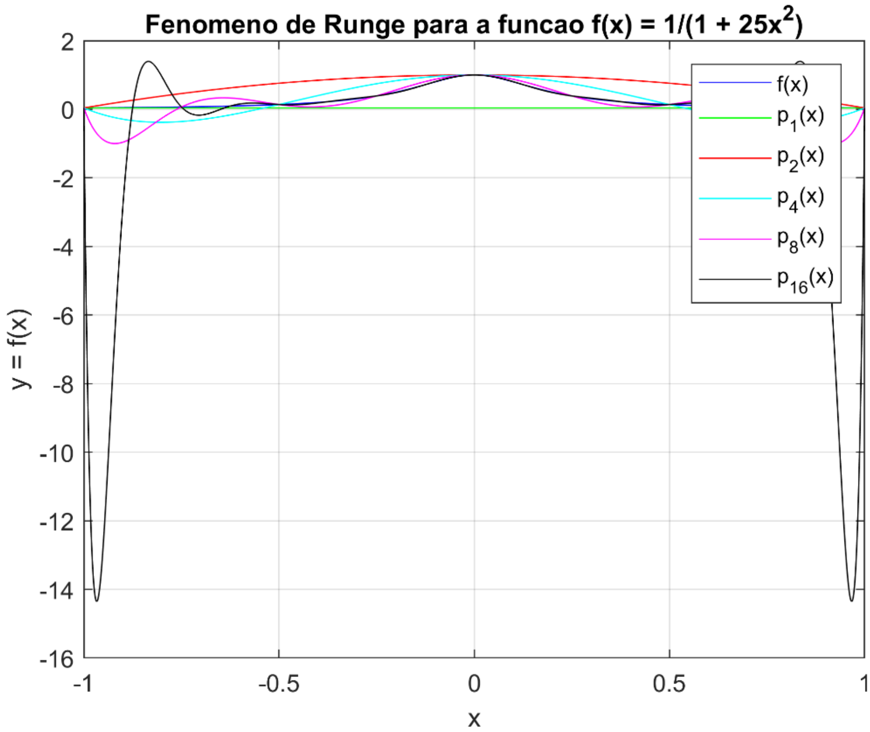

Figura 2: Demonstração do Fenômeno de Runge. O gráfico mostra a função de Runge plotada junto com os polinômios interpoladores de grau 1, 2, 4, 8 e 16, para pontos igualmente espaçados no intervalo de -1 a 1.

Podemos observar na figura 2 que conforme o grau do polinômio interpolador aumenta, a curva vai se aproximando mais da função de Runge na região central do intervalo. No entanto, próximo às extremidades do mesmo, o polinômio começa a oscilar com grande amplitude, divergindo do comportamento da função de Runge.

Esse fenômeno nos sugere que talvez não seja possível aproximar a função de Runge com erro arbitrariamente pequeno apenas aumentando o número de nós de interpolação. Uma análise qualitativa do erro cometido pela interpolação conforme o número de nós aumenta é mostrada na figura 3.

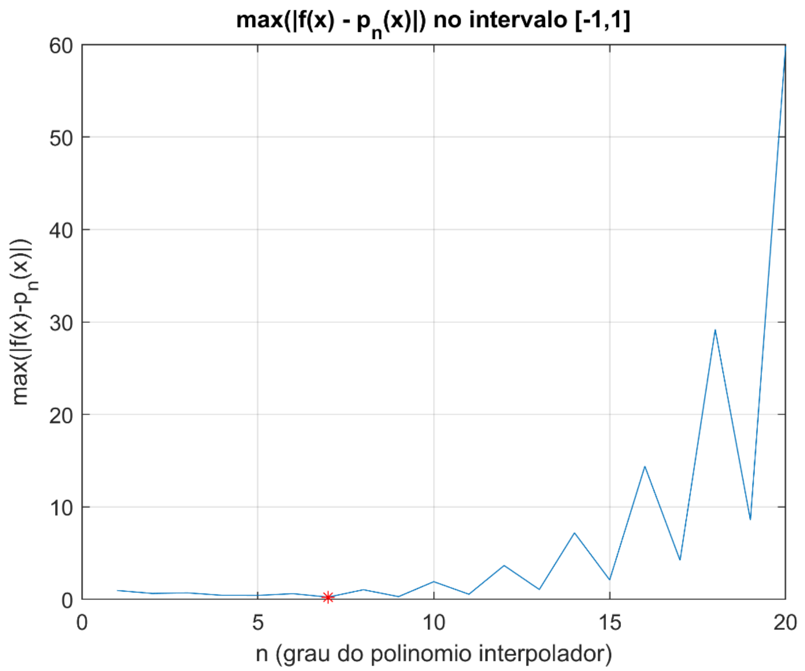

Figura 3: Estudo do erro máximo em valor absoluto cometido pela interpolação polinomial da função de Runge.

Na figura 3, podemos ver que o erro cometido pela interpolação começa relativamente pequeno, se comparado aos valores que atinge conforme o número de nós vai aumentando. O grau do polinômio que melhor interpola a função de Runge nos pontos amostrados é 7.

Esse resultado confirma nossa suspeita de que aumentar o grau da interpolação (mantendo os nós de interpolação igualmente espaçados) não faria reduzir o erro cometido. Isso ocorre devido ao caráter muito distinto de um polinômio exibido pela função de Runge (como o comportamento assintótico, a baixa variação, etc.).

Apesar disso, temos um resultado da Análise, chamado *Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass*, que nos diz que *toda função contínua num intervalo compacto pode ser arbitrariamente aproximada por uma sequência de polinômios*. Em termos mais rigorosos, o teorema afirma que para todo $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $P_n(x)$ tal que o máximo do erro em valor absoluto cometido ao aproximar uma dada função $f(x)$ por $P_n(x)$ é menor que ε. Esses polinômios podem ser obtidos por construção usando os *polinômios de Bernstein*. Os *scripts* `bernstein.m` e `bernsteinexperiment.m` fazem uma demonstração da aplicação de tais polinômios.

Contudo, é claro que o fenômeno de Runge não contradiz o teorema de Stone-Weierstrass. No fenômeno observado, estamos tentando *interpolar* a função por um polinômio. Mais ainda, estamos tentando fazer a interpolação com *nós igualmente espaçados*. Uma outra abordagem para a interpolação seria utilizar uma distribuição de nós de forma que o erro fosse distribuído de maneira mais homogênea. Uma alternativa neste sentido é utilizar os *nós de Chebyshev*.