



Relatório do Lab 9 de CCI-22

Trabalho 9 – Resolução Numérica de EDO's por métodos de passo simples e Problemas de Valor Inicial (PVI)

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

16/06/2019

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação**

1. Análise: o oscilador de Van der Pol

Os métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem foi aplicados para resolver a EDO de Van der Pol

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

numericamente, em alguns problemas de valor inicial (PVI), tendo fixado o parâmetro $\mu = 1$. A solução dos PVI's com condições iniciais $[y(0), y'(0)] = [1, 1]$, $[-1, 1]$, $[-2, -2]$, $[-2, 2]$, $[2, -2]$, e $[2, 2]$ foram calculadas usando um passo $h = 0.01$, no intervalo de $x = 0$ a $x = 100$. Para analisar o comportamento das soluções, foram traçados os retratos de fase de cada uma das soluções, cujo gráfico consta na figura 1.

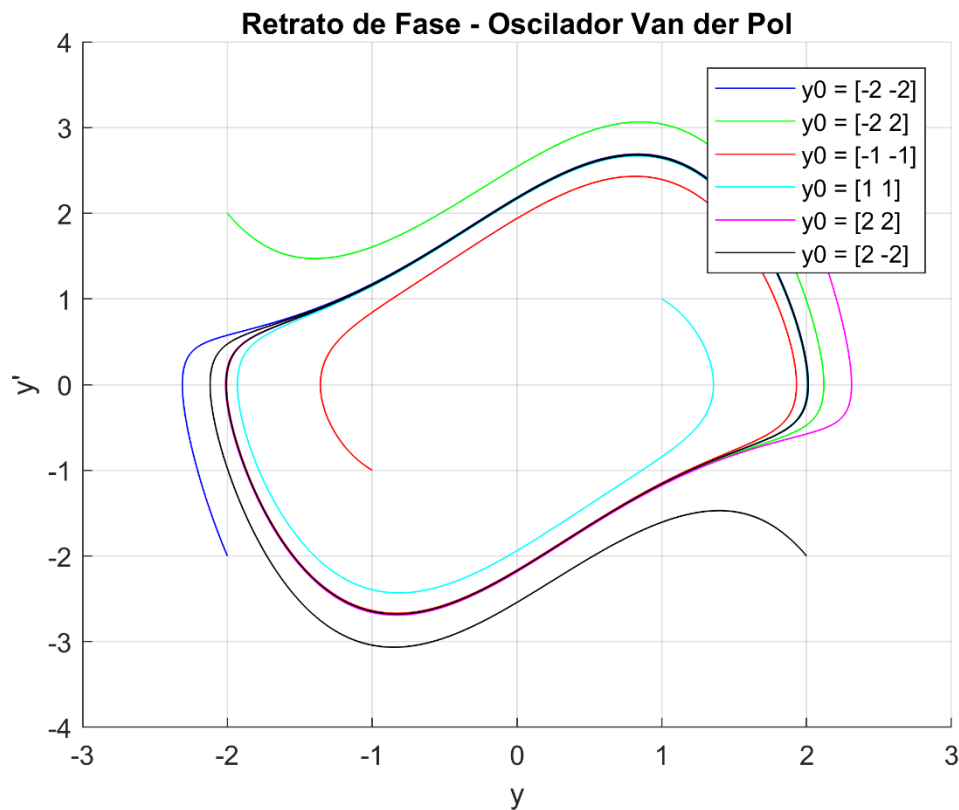


Figura 1: Retrato de fase das soluções dos PVI's do oscilador de Van der Pol com $\mu = 1$.

Ao que a figura 1 sugere, as soluções dos PVI's aparentemente convergem para uma órbita cíclica, com formato de uma fatia de pão. Para que tenhamos mais propriedade em analisar o comportamento das soluções no regime estacionário, vamos plotar o retrato de fase dos mesmos PVI's para um intervalo mais longo, de $x = 500$ até $x = 1000$. O referido gráfico consta na figura 2. Todos os gráficos e a resolução dos PVI's desta seção foram feitos por meio do *script* `VanDerPol.m`.

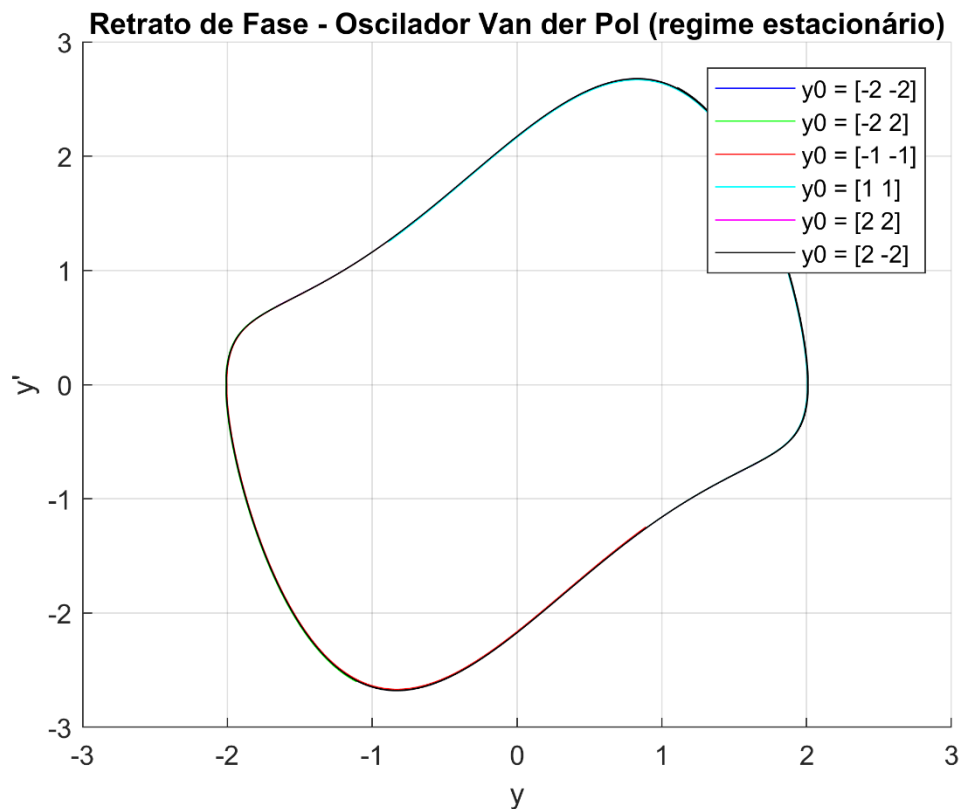


Figura 2: Retrato de fase dos PVI's do oscilador de Van der Pol no regime estacionário.

Podemos notar pela figura 2 que as trajetórias das soluções dos PVI's realmente convergiram para uma órbita cíclica, dado que pelo gráfico podemos notar apenas vagamente que a curva desenhada possui alguns contornos realçados com as cores de cada um dos PVI's. Além disso, considerando que o intervalo onde calculamos estas soluções é bastante longo, podemos assumir que esse é o comportamento em regime estacionário das soluções.

2. Análise: Comparação entre os métodos de passo simples

Foi considerado o seguinte PVI:

$$y'' + y = 0, [y(0), y'(0)] = [1, 1],$$

cujas solução analítica é dada por

$$y(x) = \cos(x) + \sin(x),$$

e resolveu-se o PVI numericamente no intervalo $[0, 100]$, com passo $h = 0.05$ através de cada um dos 3 métodos de passo simples implementados.

Em seguida, com o objetivo de comparar as soluções obtidas por cada um dos métodos, plotamos um gráfico dos erros relativos de cada um dos métodos à solução analítica, com escala logarítmica no eixo y, conforme a figura 3. O gráfico da figura 3 e as soluções numéricas do PVI foram feitos através do *script* `ComparacaoPassoSimples.m`.

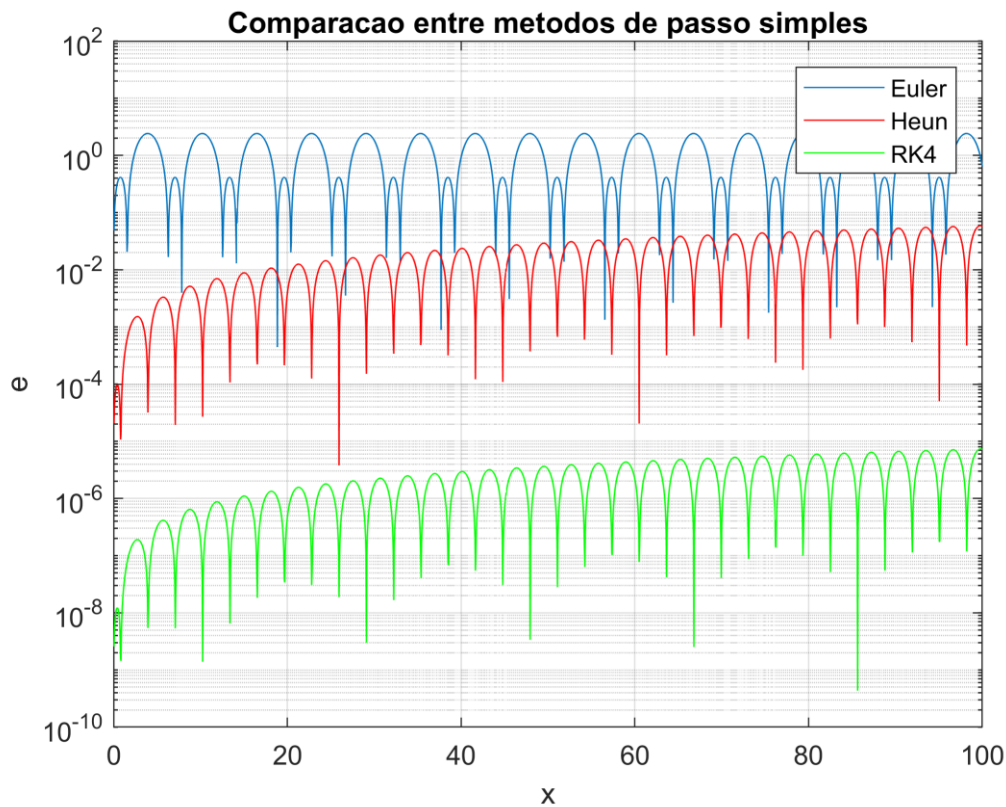


Figura 3: Gráfico dos erros relativos das soluções numéricas do PVI por cada dos métodos em relação à solução analítica.

Pela figura 3 podemos constatar que há uma hierarquia de precisão entre os métodos, sendo Euler o mais impreciso, Heun o intermediário, e Runge-Kutta de 4ª ordem o mais preciso dos três. Essa hierarquia já era esperada, uma vez que os dois primeiros métodos podem ser englobados como métodos de Runge-Kutta de ordens mais baixas (Euler sendo um Runge-Kutta de 1ª ordem, e Heun de 2ª). Dado que a ordem do método de Runge-Kutta implica numa estimativa de erro da ordem de h^n , sendo n a ordem do método, é de se esperar que ordens maiores sejam mais precisas.

No entanto, uma análise que também pode ser feita entre os três métodos é a de tempo de execução, ou custo computacional. Esse aspecto se torna relevante quando a função f que define a EDO é relativamente custosa de ser amostrada, visto que a quantidade de chamadas a essa função cresce conforme a ordem do método aumenta. Por essa razão, há problemas em que pode se tornar impeditivo utilizar métodos de ordens muito altas, conforme o fator tempo de execução seja mais importante que a precisão do método.