



Relatório do Lab 10 de CCI-22

Trabalho 10 – Resolução Numérica de EDO's por métodos de passo múltiplo e Problemas de Valor de Contorno (PVC)

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

16/06/2019

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação**

1. Análise: Comparação entre os métodos de passo múltiplo

Foi considerado o seguinte PVI:

$$y'' + y = 0, [y(0), y'(0)] = [1, 1],$$

cuja solução analítica é dada por

$$y(x) = \cos(x) + \sin(x),$$

e resolveu-se o PVI numericamente no intervalo $[0, 100]$, com passo $h = 0.05$ através dos métodos de passo múltiplo Adams-Bashforth de 4ª ordem, com *bootstrapping* via Runge-Kutta de 4ª ordem, e o método Previsor-Corretor, utilizando um passo de Adams-Bashforth de 4ª ordem como previsor, e um passo de Adams-Moulton de 4ª ordem como corretor, também utilizando Runge-Kutta de 4ª ordem como *bootstrap*.

Em seguida, com o objetivo de comparar as soluções obtidas por cada um dos métodos, plotamos um gráfico dos erros relativos de cada um dos métodos à solução analítica, com escala logarítmica no eixo y, conforme a figura 1. O gráfico dos erros relativos e a resolução numérica do PVI foram feitos através do *script* `ComparacaoPVIPassoMultiplo.m`.

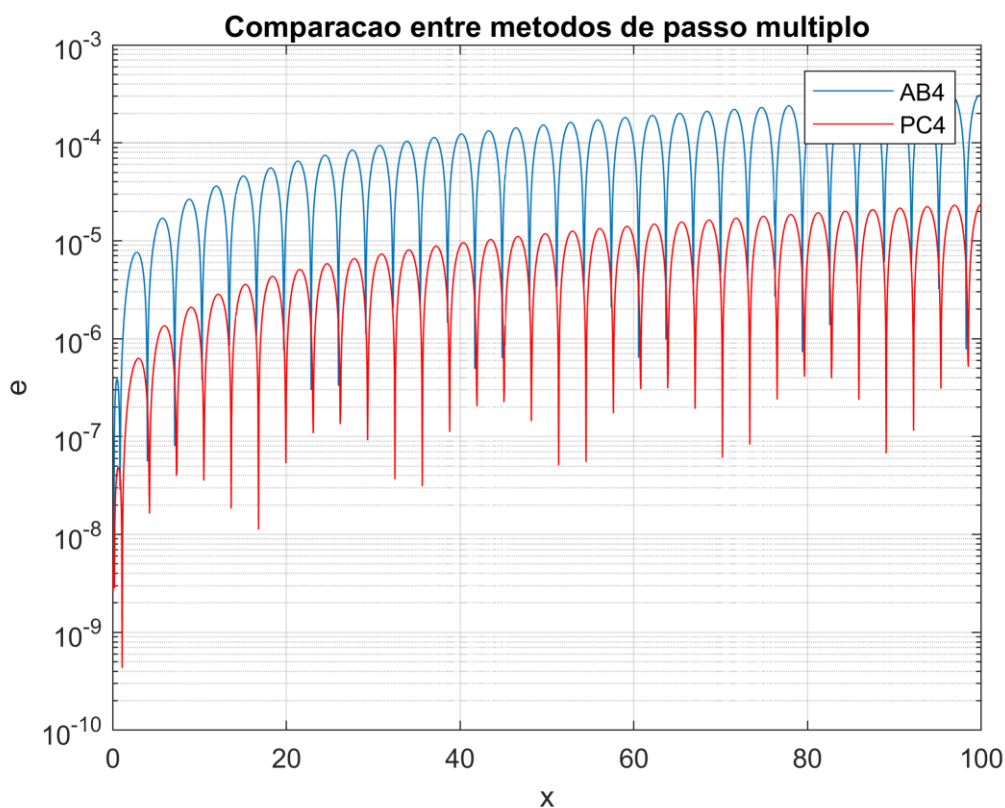


Figura 1: Gráfico dos erros relativos das soluções numéricas do PVI pelos dois métodos de passo múltiplo em relação à solução analítica.

Pela figura 1 podemos constatar que o método de Adams-Bashforth sozinho possui um erro consideravelmente maior que o método de Previsão-Correção, como é de se esperar. O passo de correção ajuda a manter a coerência das soluções com os valores anteriores já calculados, dado que são métodos de passo múltiplo. Cabe ressaltar que o método previsor-corretor aqui implementado emprega apenas um passo de correção para cada previsão, sendo possível personalizar essa estratégia para atender um erro relativo arbitrário, isto é, corrigir o valor previsto até uma certa saturação. Contudo, ainda que isso seja feito, não é possível atingir erro zero apenas corrigindo o valor previsto arbitrariamente. Ainda há uma forte dependência do tamanho do passo, h , para a precisão da solução numérica.

Novamente, assim como na comparação entre os métodos de passo simples, cabe uma análise do custo computacional dos dois métodos. É evidente que em aplicações com requisitos finos de precisão o método de previsão-correção será mais adequado, no entanto, a quantidade de passos de correção necessários para atingir uma determinada tolerância pode tornar o método lento, e isso ocorrerá também na medida que as chamadas à função f forem custosas.

2. Análise: Problema de Valor de Contorno

Os Problemas de Valor de Contorno (PVC) requerem um tratamento diferente dos PVI's, de modo que não podemos aplicar os métodos implementados anteriormente. Para a resolução do PVC

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x, y(0) = 0, y(1) = -1, x \in [0, 1],$$

cujas soluções analíticas são

$$y(x) = 2e^{-x}(1-x) + x - 2,$$

aplicamos o *método das diferenças finitas centradas*, com passo $h = 0.02$, e comparamos a solução numérica com a analítica no gráfico da figura 2.

Em seguida, decidimos comparar como se comporta o erro da solução numérica deste PVC conforme reduzimos o passo h , plotando o erro absoluto entre as soluções numéricas e a analítica, juntamente com uma linha de referência relacionada à estimativa do erro do método em função de h , no valor $h^2/12$. A constante $1/12$ foi escolhida de modo a posicionar a linha de referência mais próxima à curva do erro. Fizemos a análise os valores de $h = 0.02, 0.01$ e 0.005 .

Todos os gráficos e as resoluções numéricas do PVC foram obtidos através do *script* `ComparacaoPVC.m`.

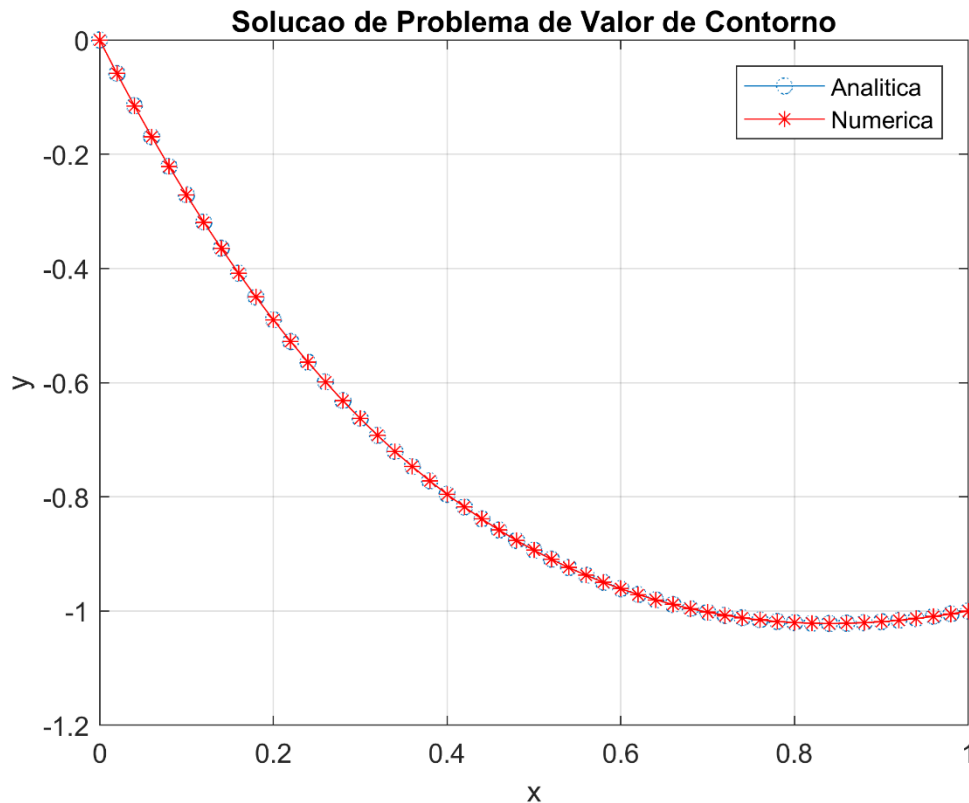


Figura 2: Gráfico da solução numérica do PVC por meio do método de diferenças finitas centradas, juntamente com a solução analítica.

Vemos pela figura 2 que a solução numérica conseguiu cravar os valores corretos com razoável precisão. No entanto, não podemos extrair muita informação acerca do erro cometido pela solução numérica. Para isso, precisaremos fazer uma análise mais profunda, para a qual teremos o auxílio da figura 3.

Para fazermos um estudo mais aprofundado da qualidade da solução numérica, vamos analisar a magnitude do erro cometido em relação à solução analítica, a sua distribuição no intervalo de solução, e a sua relação com o tamanho do passo h .

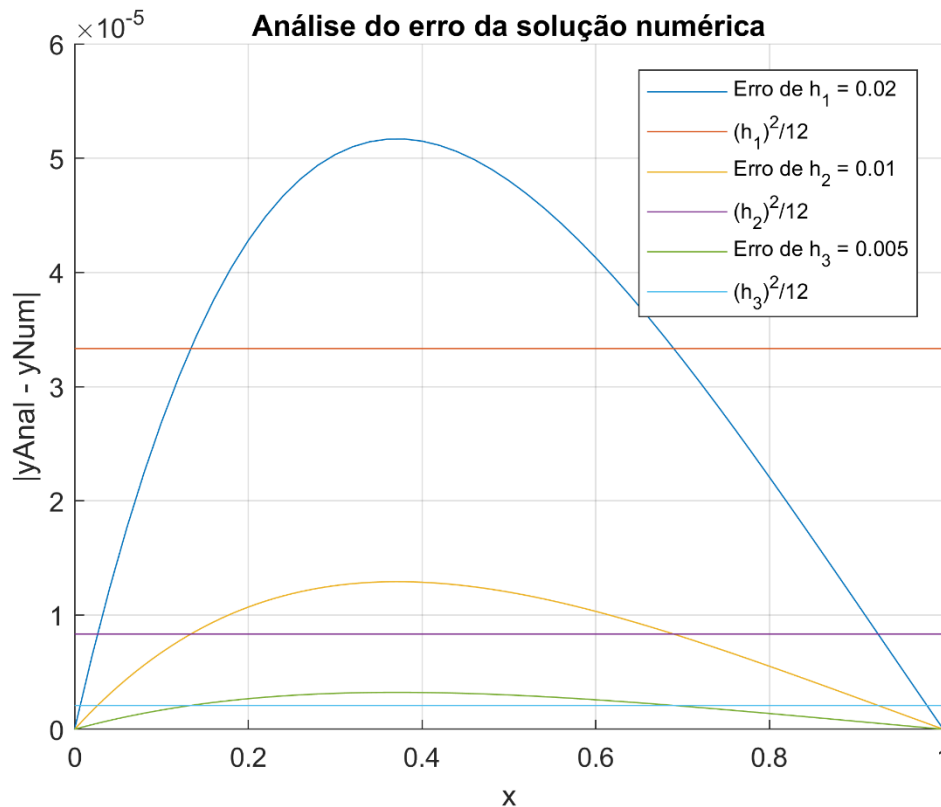


Figura 3: Gráfico do erro absoluto da solução numérica do PVC em relação à solução analítica, para três valores de h .

Na figura 3 podemos observar, primeiramente, que para $h_1 = 0.02$ (que foi a solução mostrada na figura 2), temos um erro máximo da ordem de 10^{-5} , conforme mostra a escala do gráfico.

Além disso, podemos notar pelo aspecto das curvas de erro, que o erro se concentra mais na região central do intervalo de solução. É natural que o erro tenda a zero nos *contornos* do intervalo, dado que temos os valores reais nesses pontos. No mais, além do distanciamento dos contornos, outro fator que pode explicar a distribuição do erro é o comportamento da função (intensidade da derivada, oscilações).

Por fim, para analisar a dependência do erro com h , podemos lembrar que as estimativas de erro cometido nas aproximações das derivadas (de primeira e segunda ordem) no método das diferenças finitas centradas é da ordem de h^2 , com uma dependência de um valor incógnito dado pela fórmula de Taylor. Observando a posição das linhas de referência traçadas no gráfico da figura 3, podemos comprovar que a estimativa do erro da solução numérica de fato é da ordem de h^2 , dado que as linhas de $h^2/12$ sempre acompanham as curvas de erro na mesma região destas (cortando-as praticamente no mesmo ponto do intervalo). De fato, podemos até mesmo encontrar a constante c tal que $c \cdot h^2$ seja o erro máximo cometido para a solução numérica deste PVC.