Relatório do Lab 8 de CCI-22

Trabalho 8 – Integração Numérica

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

21/05/2019

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Análise: Simpson x Trapézio

Os métodos de Simpson e do Trapézio foram aplicados para calcular a integral

$$I_1 = \int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx$$

numericamente. Sabemos que o valor exato da mesma pode ser calculado analiticamente:

$$I_1 = \int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^4 e^y dy = \frac{e^4 - e}{2}$$

Dessa forma podemos comparar o resultado da integração numérica com o valor exato. Foram plotados num mesmo gráfico os valores da integral numérica dados por ambos os métodos utilizando diferentes quantidades de subintervalos de integração, variando de 2 a 100 subintervalos de 2 em 2, bem como o valor exato da integral, na figura 1. Os procedimentos acima descritos foram implementados no *script* `trapxsimp.m`.

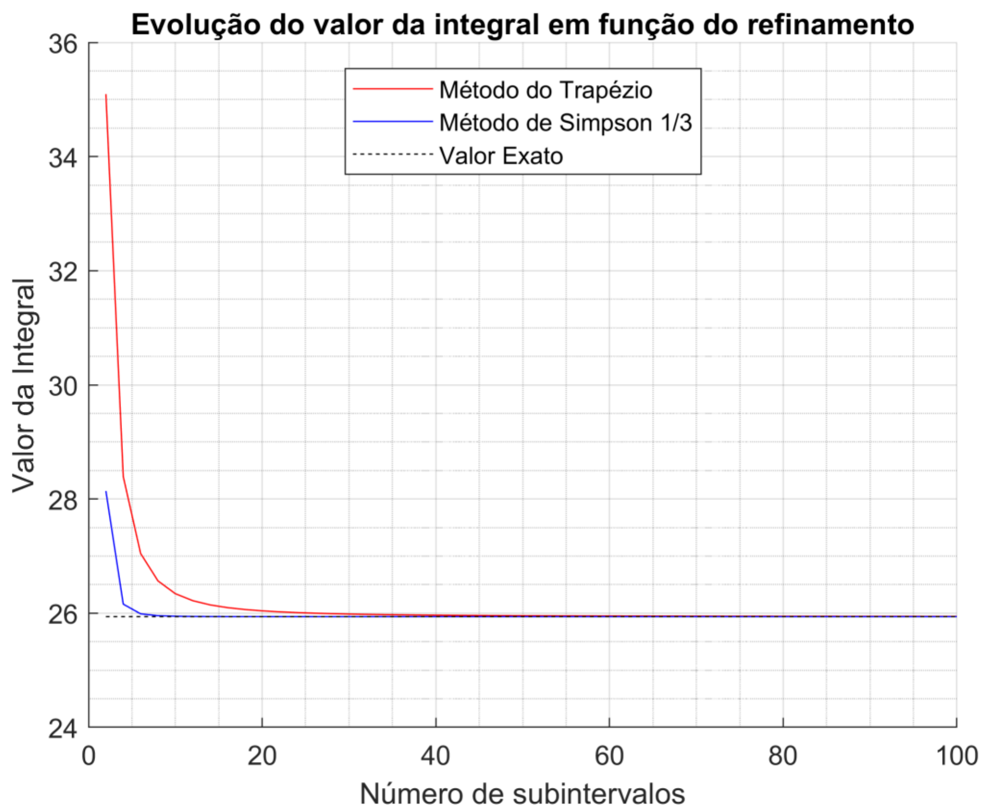

Figura 1: Gráfico do valor da integral dado pelos métodos de Simpson e do Trapézio, comparados com o valor exato da integral.

Para fins de se obter uma comparação mais significativa dos resultados dos dois métodos, vamos plotar um gráfico que nos permita ter uma noção da velocidade com que cada método converge para o valor correto.

Plotemos então o cologaritmo na base 10 da diferença absoluta entre o valor numérico e o valor exato da integral, na figura 2.

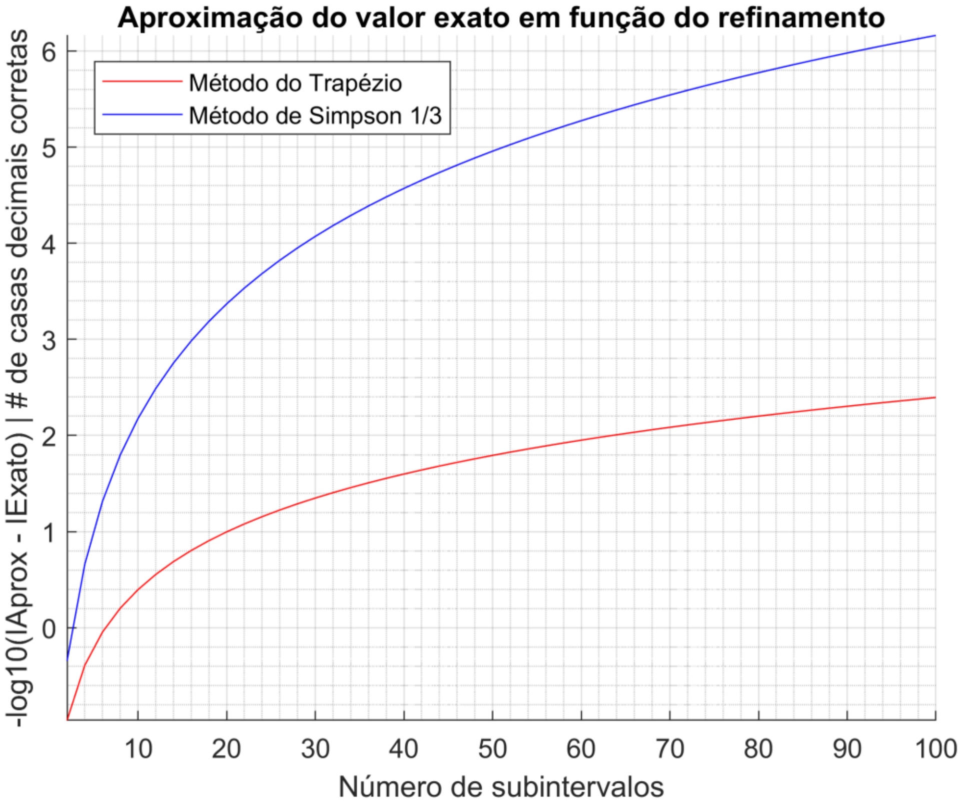

Figura 2: Gráfico comparativo da convergência dos métodos para o valor exato da integral.

Este tipo de gráfico nos permite ter uma noção de quantas casas decimais cada método consegue acertar conforme refinamos o intervalo de integração. Conforme podemos constatar, o método de Simpson produz um erro sempre menor e que decresce mais rapidamente do que o método do trapézio, como era de se esperar. Podemos até ter uma noção da ordem da convergência de cada método, observando o aspecto aproximadamente logarítmico das curvas da figura 2.

2. Análise: Pontos da quadratura adaptativa

Foi integrada a seguinte função:

$$f(x) = 0.5 \; - \; 0.02x^2 + e^{-(x-1)^2}\sin^2(\pi x),$$

No intervalo de [-5, 5], a qual não pode ser calculada analiticamente, utilizando o Método da Quadratura Adaptativa com regra de Simpson 1/3.

Colheu-se o número de pontos utilizados para obter um erro de no máximo $\varepsilon = 10^{-4}$. Após executado o método, plotamos um gráfico com a curva da função, e destacamos os pontos que foram utilizados pela quadratura adaptativa. Esse gráfico consta na figura 3.

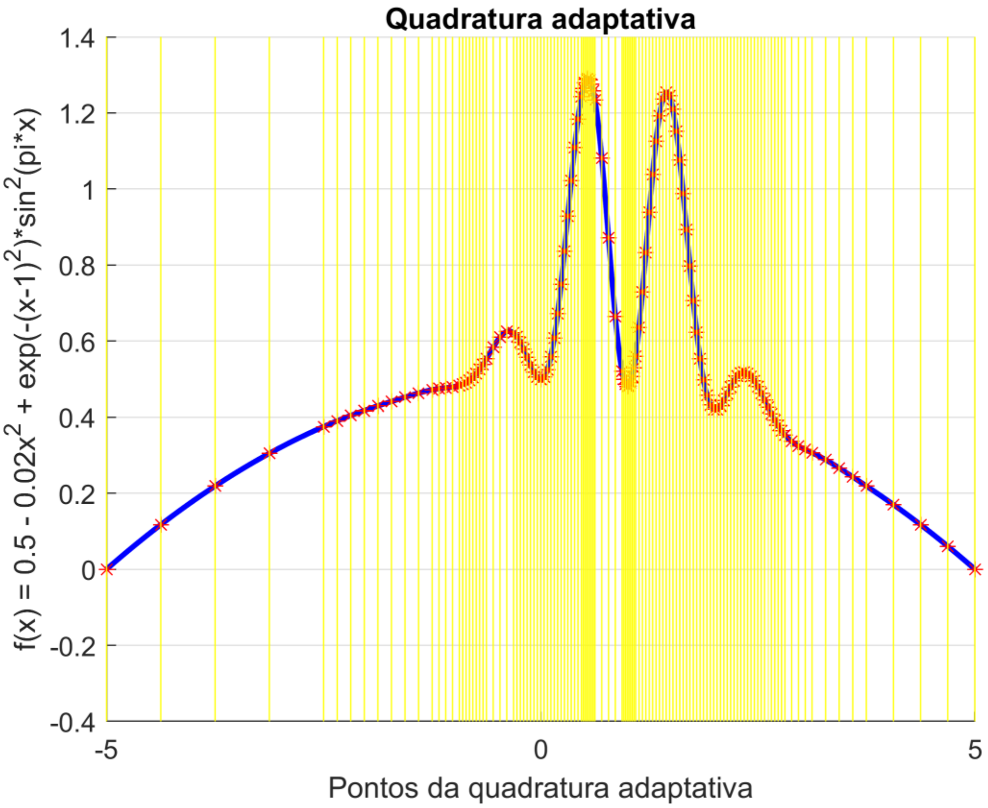

Figura 3: Gráfico de f(x) com destaque para os pontos da quadratura.

Nesse gráfico, foram adicionados asteriscos vermelhos aos pontos da quadratura, e além disso, retas verticais amarelas cruzando esses pontos para gerar um efeito visual que permita identificar as regiões com maior densidade de pontos pelo quão amarelas elas estão. Dito isso, podemos observar que há uma maior densidade de pontos nas vizinhanças dos dois extremos locais mais próximos de x = 1, além de uma notável rarefação de pontos nas regiões onde a função é mais “bem comportada”.

A intuição nos diz que a quadratura adaptativa deve tomar mais pontos nas regiões onde a função varia mais, logo, trechos com oscilação, que rompem a monotonia com frequência, figuram uma maior densidade de pontos, o que pode ser constatado na figura 3 pela concentração de linhas amarelas nessas regiões. Cabe ressaltar que a densidade visual de pontos pode ser enganosa, pois é influenciada pela distância euclidiana entre os pontos, fazendo com que trechos onde a função cresce ou decresce rapidamente pareçam mais rarefeitos, enquanto na realidade, a concentração horizontal de pontos é consideravelmente maior.