Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Matemática Computacional – CCI-22
Laboratório 3 – Métodos Iterativos para Solução de Sistemas Lineares de Equações

Professor: Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

14 de março de 2019

1 Tarefas:

1.1 Implementação

Implementar as seguintes funções em MATLAB (cada uma em um arquivo .m separado):

1. `satisfaz = CriterioLinhas(A)`: verifica se a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz o Critério das Linhas (condição suficiente para convergência do Método de Gauss-Jacobi) e retorna o resultado como a booleana `satisfaz`.

2. `[x, dr] = GaussJacobi(A, b, x0, epsilon, maxIteracoes)`: resolve o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ através do Método de Gauss-Jacobi, usando `x0` como chute inicial, `epsilon` como tolerância para critério de parada por erro relativo e `maxIteracoes` como limite máximo de iterações. A solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (`x`) é retornada, juntamente com o vetor `dr`, que contém os erros relativos de todas as iterações, de modo que `dr(k)` é o erro relativo calculado na iteração k. Considere $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

3. `[satisfaz, beta] = CriterioSassenfeld(A)`: verifica se a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz o Critério de Sassenfeld (condição suficiente para convergência do Método de Gauss-Seidel) e retorna o resultado como a booleana satisfaz. Além disso, o β (`beta`) do Critério de Sassenfeld é retornado.

4. `[x, dr] = GaussSeidel(A, b, x0, epsilon, maxIteracoes)`: resolve o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ através do Método de Gauss-Seidel, usando `x0` como chute inicial, `epsilon` como tolerância para critério de parada por erro relativo e `maxIteracoes` como limite máximo de iterações. A solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (`x`) é retornada, juntamente com o vetor `dr`, que contém os erros relativos de todas as iterações, de modo que `dr(k)` é o erro relativo calculado na iteração k. Considere $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Considere a seguinte definição de erro relativo na iteração k:

$$d_r^{(k)} = \frac{\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|}{\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}\right|}$$

1.2 Análise

Analise o comportamento dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel quando aplicados aos seguintes sistemas lineares de equações:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{6}$$

Apresente em uma tabela os resultados dos critérios de convergência quando aplicados a estes sistemas, assim como o número de iterações necessárias para a convergência para cada método iterativo de solução. Caso ocorra divergência do método, deixe isto indicado na tabela.

Para padronizar a análise, utilize $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\varepsilon = 0,001$ e limite máximo de iterações de 100 para todos os casos.

Discuta os resultados obtidos, incluindo:

- Analise como atendimento aos critérios de convergência se relaciona com convergência efetiva dos métodos nestes casos. Note que, para ambos os métodos implementados, atendimento ao respectivo critério de convergência indica condição suficiente, mas não necessária, para convergência.

- Perceba que os sistemas ?? e ?? diferem apenas por uma troca entre as linhas 1 e 2, porém os comportamentos dos métodos quando submetidos a estes sistemas é muito diferente. Explique esta diferença à luz dos critérios de convergência.

- Nos casos em que ambos os métodos convergem, comente qual converge mais rápido (i.e. requer um menor número de iterações para atender ao critério de parada) e se isto é esperado.

- Plote o vetor de erros relativos `dr` para alguns casos para ajudar a embasar suas conclusões.

2 Instruções:

- A primeira etapa do processo de correção consistirá em submeter as funções implementadas a vários casos de teste de forma automatizada. Assim, os cabeçalhos das funções devem ser seguidos **rigorosamente**. Arquivos .m com os nomes destas funções e os cabeçalhos já implementados foram fornecidos juntamente com este roteiro. Dê preferência a implementar seu laboratório a partir destes arquivos .m fornecidos para evitar erros.

- **Não** é permitido o uso de funções ou comandos prontos do MATLAB que realizem toda a funcionalidade atribuída a uma certa função. Entretanto, o uso destas funções para verificação das implementações realizadas é encorajado. Em caso de dúvida quanto à permissão de uso de alguma função ou comando, recomenda-se consultar o professor.

- Não é necessário se preocupar com verificação dos dados de entrada: assuma que as dimensões de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são compatíveis.

- Os arquivos .m implementados devem ser entregues juntamente com um relatório.

- No relatório, não é necessário demonstrar que as funções implementadas funcionam corretamente (isto será verificado separadamente). Basta incluir resultados e conclusões da parte relativa a **Análise**.

3 Dicas:

- Cuidado com o formato requerido para vetores e matrizes (incluindo dimensões) para evitar problemas na correção automática. Pode ser descontado ponto no caso de formatação inadequada.

- Para criar gráficos com alta qualidade em formato PNG para inclusão em arquivos do Microsoft Word, utilize o comando: `print -dpng -r300 grafico.png`.

- Se utilizar LaTeX, dê preferência para incluir gráficos em formato vetorizado. No Linux, utilizando `pdflatex`, você pode gerar um gráfico em formato EPS usando "`print -depsc2 grafico.eps`" e depois convertê-lo para PDF usando o comando de terminal "`epstopdf grafico.eps`". O arquivo PDF é aceito pelo `pdflatex`.

- Submeta suas funções a vários casos de teste e compare com os resultados obtidos usando funções e comandos prontos do MATLAB. Devido a imprecisões numéricas, os resultados podem diferir um pouco, porém espera-se que as diferenças sejam bem pequenas.