Relatório do Lab 6 de CCI-22

Trabalho 7 – Integração

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 21.4

Professor:

Luiz Gustavo Bizarro Mirisola

Data:

14/06/2018

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Análise: Simpson x Trapézio

Os métodos de Simpson e do Trapézio foram aplicados para calcular a integral

$$I = \int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx$$

numericamente. Sabemos que o valor exato da mesma pode ser calculado analiticamente:

$$I = \int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^4 e^y dy = \frac{e^4 - e}{2}$$

Dessa forma podemos calcular o erro absoluto cometido na integração numérica. Esse erro foi plotado para ambos os métodos utilizando diferentes quantidades de subintervalos de integração, conforme consta nos gráficos das figuras 1 e 2.

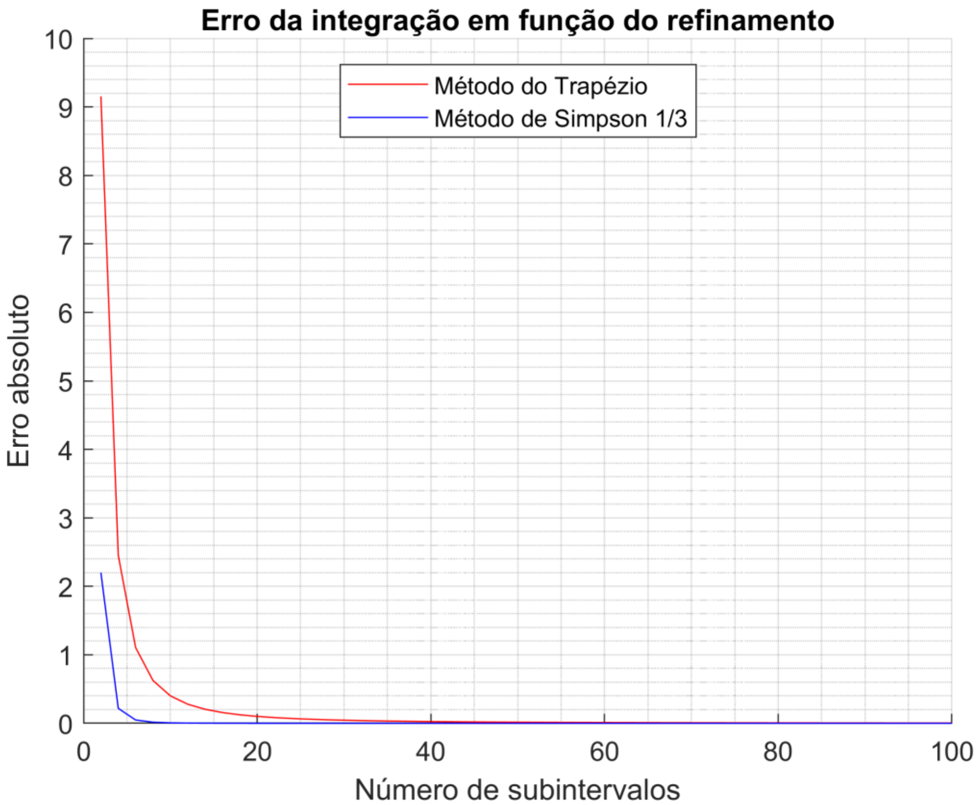

Figura 1: Gráfico do erro absoluto Simpson x Trapézio

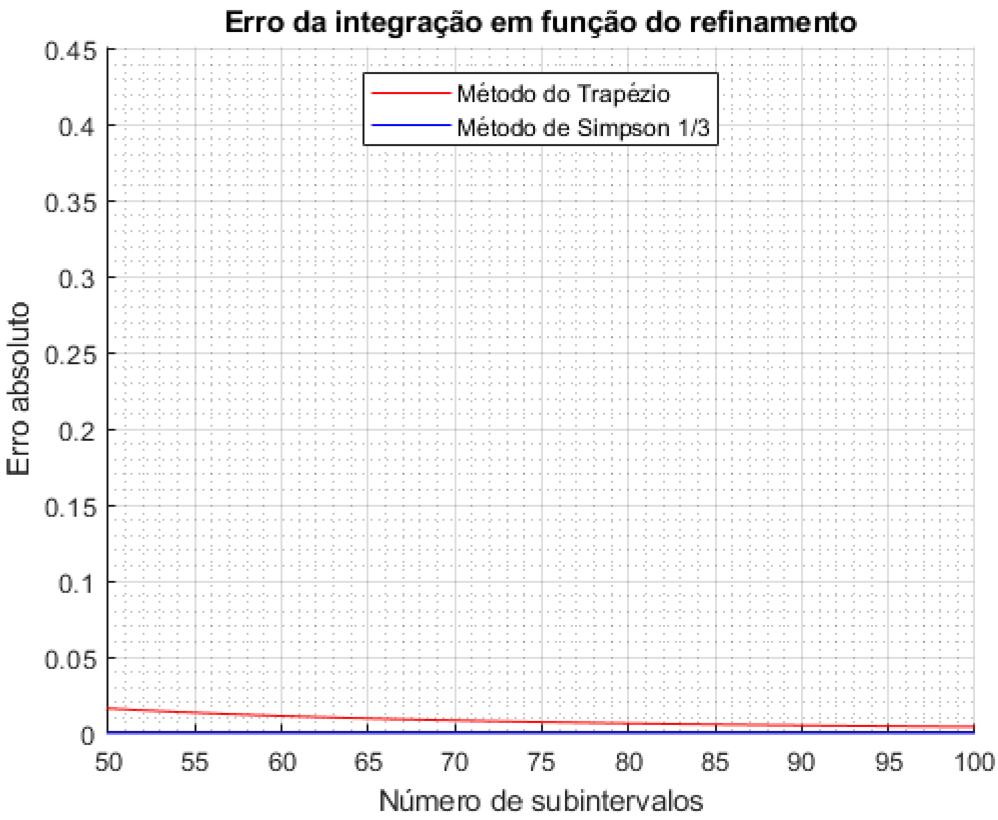

Figura 2: Zoom aplicado ao gráfico 1

Conforme podemos constatar pelos gráficos, o método de Simpson produz um erro sempre menor e mais rapidamente decrescente do que o método do trapézio, como era de se esperar.

2. Análise: Pontos da quadratura adaptativa

Foi integrada a seguinte função:

$$f(x) = 0.5 + 0.02x^2 + e^{-(x-1)^2} \sin(\pi x),$$

No intervalo de [-5, 5], a qual não pode ser calculada analiticamente, utilizando os métodos da quadratura adaptativa com regra de Simpson 1/3, além dos métodos de Simpson 1/3 e do Trapézio sozinhos.

Primeiramente foi empregada a quadratura adaptativa, e colheu-se o número de pontos utilizados para obter um erro de no máximo $\varepsilon = 10^{-4}$. Esse mesmo número *n* foi utilizado para aplicar as regras de Simpson e do Trapézio, contudo, nesses métodos os pontos são igualmente espaçados.

2.1. Pontos da Quadratura Adaptativa

Na figura 3, é exibido o gráfico da função *f(x)*, com os pontos utilizados na quadratura sendo destacados.

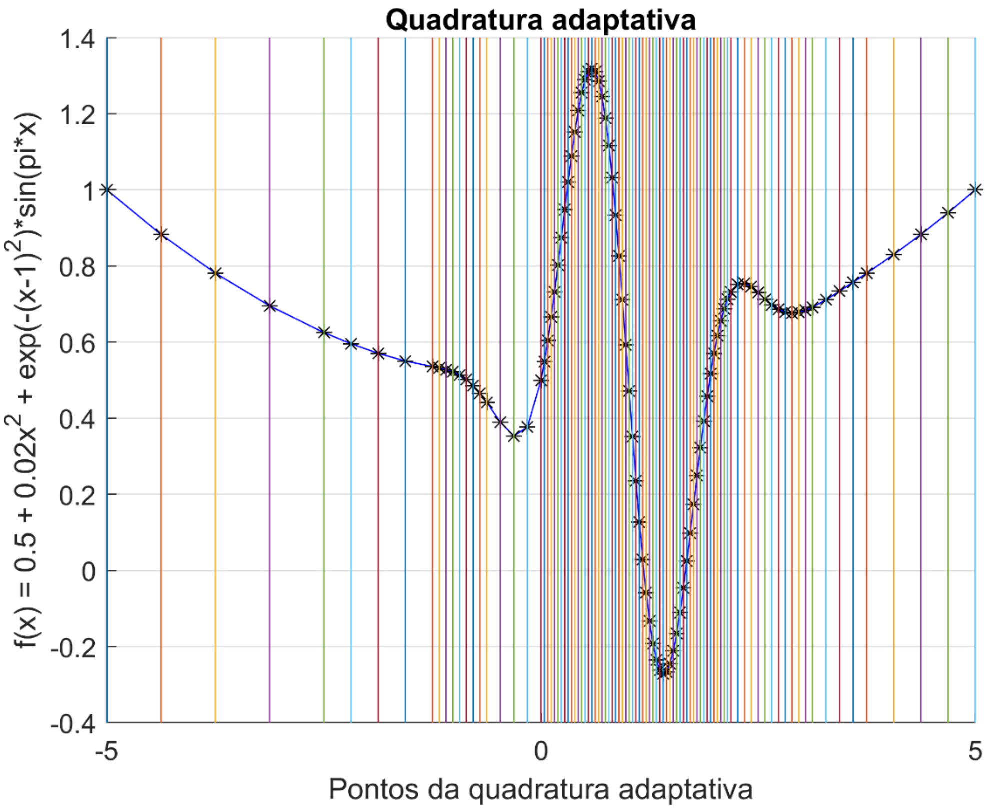

Figura 3: Gráfico de f(x) com destaque para os pontos da quadratura

Nesse gráfico podemos observar que há uma maior densidade de pontos nas vizinhanças de x = 1, devido ao “mau comportamento” da função nesse trecho.

2.2. Comparação entre os métodos

Após executar os três métodos, foi construída a tabela 1:

Tabela 1: Comparação entre Quadratura Adaptativa, Simpson e Trapézio

	Quadratura	**Simpson**	**Trapézio**
n (número de pontos)	97	97	97
Erro	$2{,}2207 \cdot 10^{-5}$	$4{,}3356 \cdot 10^{-5}$	$4{,}0505 \cdot 10^{-4}$
Número de chamadas de f	48	1	1
Número de avaliações de f	97	97	97

O erro na quadratura foi estimado utilizando o erro cometido em cada subintervalo pelo método de Simpson. O valor da integral obtido na quadratura, mais o seu erro, foi utilizado como base para calcular o erro dos outros dois métodos.

O número de chamadas de *f* no método da quadratura foi obtido utilizando a ferramenta `profiler` do MATLAB. Para os outros dois métodos, considera-se que houve apenas uma chamada, uma vez que eles não dependem de chamar a função, apenas utilizam seus valores. Sendo assim, uma vez calculador os valores de *f* para os *n* pontos igualmente espaçados, ambos os métodos já possuem os dados para operar.

Quanto ao número de avaliações, é evidente que este deve ser igual ao número de pontos para cada método, afinal, não faz sentido calcular *f* para pontos que não serão utilizados.

2.3. Comentários

Por fim, é interessante destacar que, por ser um método adaptativo, a quadratura acaba realizando muito mais *chamadas* à função do que seria necessário se os pontos já fossem previamente escolhidos (pois bastaria uma chamada de *f* aplicada ao vetor de pontos).

Vale também ressaltar que o erro estimado em cada método teve como base o resultado da quadratura adaptativa, dessa forma, é esperado que o erro deste método seja menor que os demais. Contudo, se em vez disso tivéssemos tomado como base um valor mais refinado da integração, por exemplo, por meio da aplicação da quadratura adaptativa com $\varepsilon = 10^{-15}$, veríamos o erro da quadratura com $\varepsilon = 10^{-4}$ aumentar ligeiramente, ao passo que o erro do método de Simpson diminuiria em muitas ordens de grandeza.

Uma possível justificativa para esse comportamento pode envolver erros de representação no resultado do método de Simpson, mas há uma consideração intrínseca à Quadratura Adaptativa. Ao estipular um ε como erro máximo permitido, o método automaticamente se limita a obter aquela precisão. Já o método de Simpson não estipula uma meta de precisão, podendo, em teoria, obter resultados mais precisos conforme se aumenta o número de pontos.