Relatório do Lab 4 de CCI-22

Trabalho 4 – Interpolação

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 21.4

Professor:

Luiz Gustavo Bizarro Mirisola

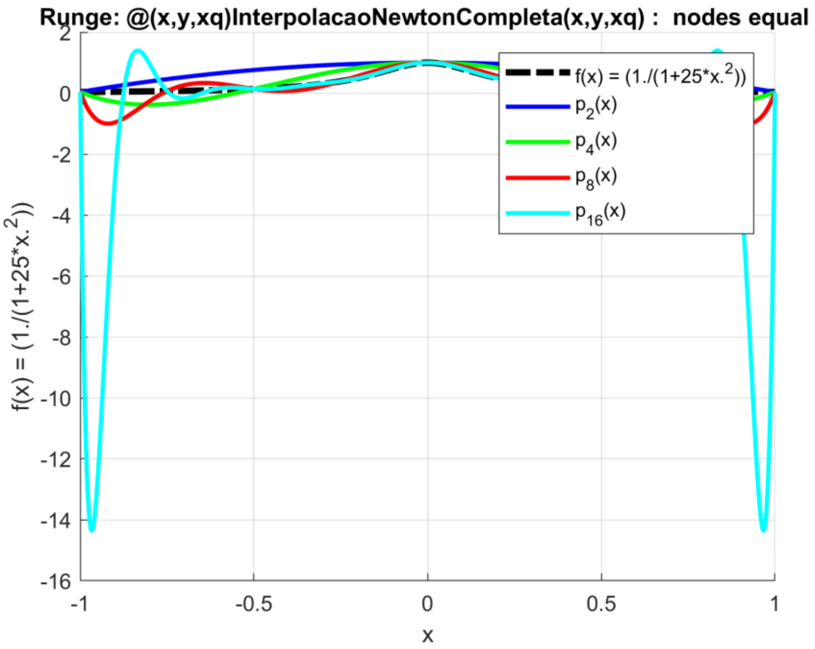
Data:

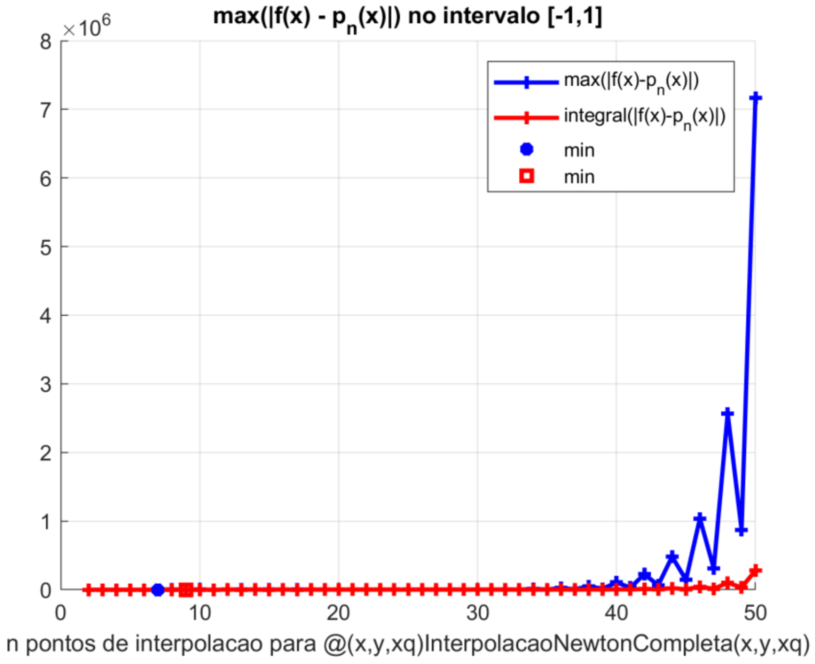
08/05/2018

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

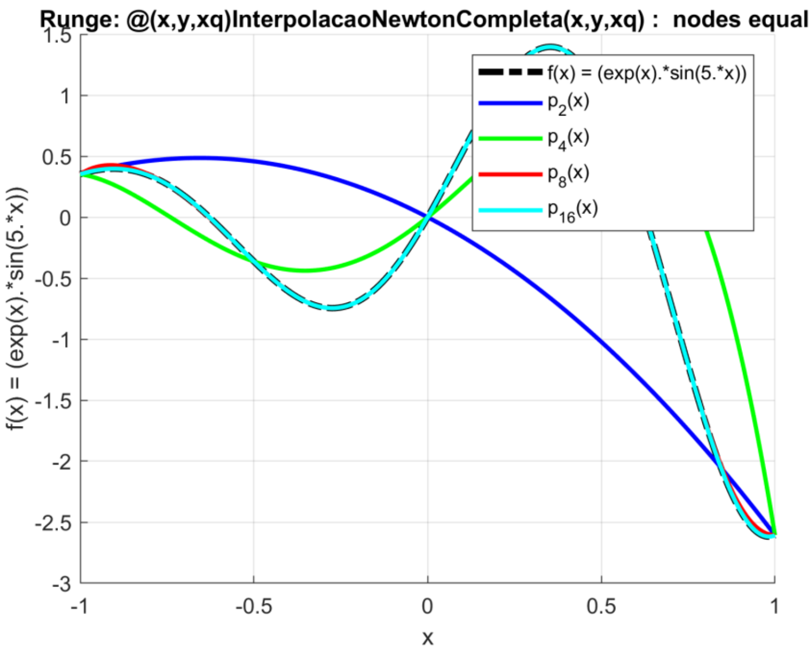
1. Comparação e Fenômeno de Runge

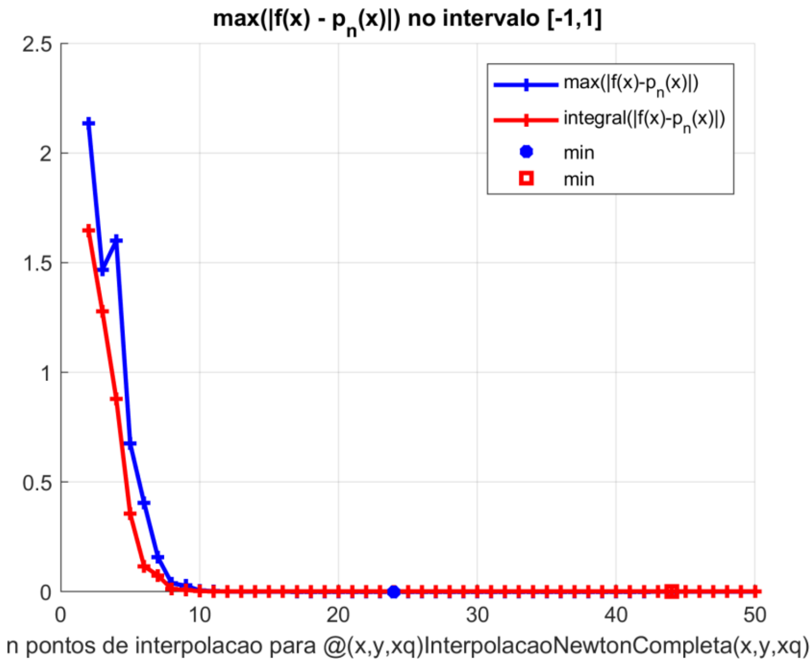
Utilizando os métodos de Newton, Spline Cúbica e Vandermonde para interpolação, com nós igualmente espaçados para as funções f(x) e g(x) descritas no roteiro do Lab4, foram gerados os seguintes gráficos:



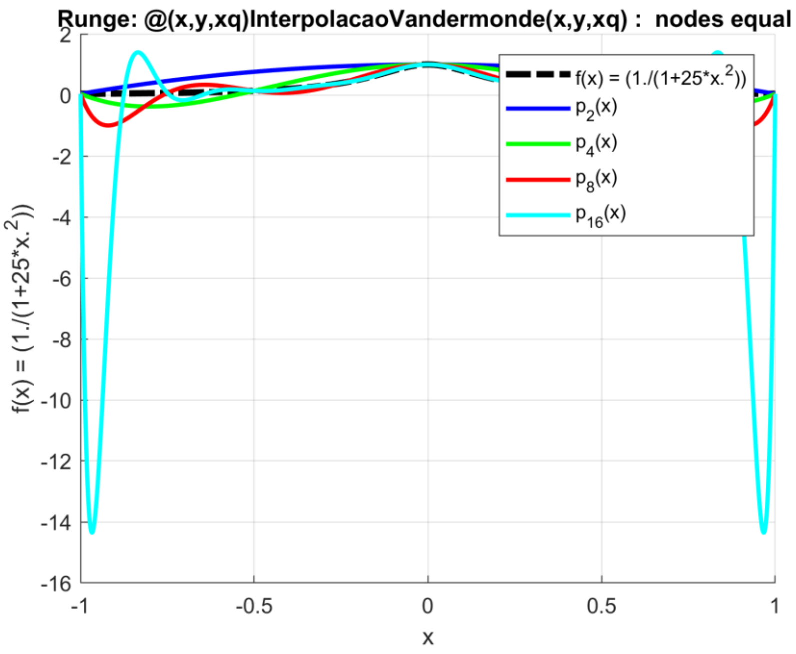


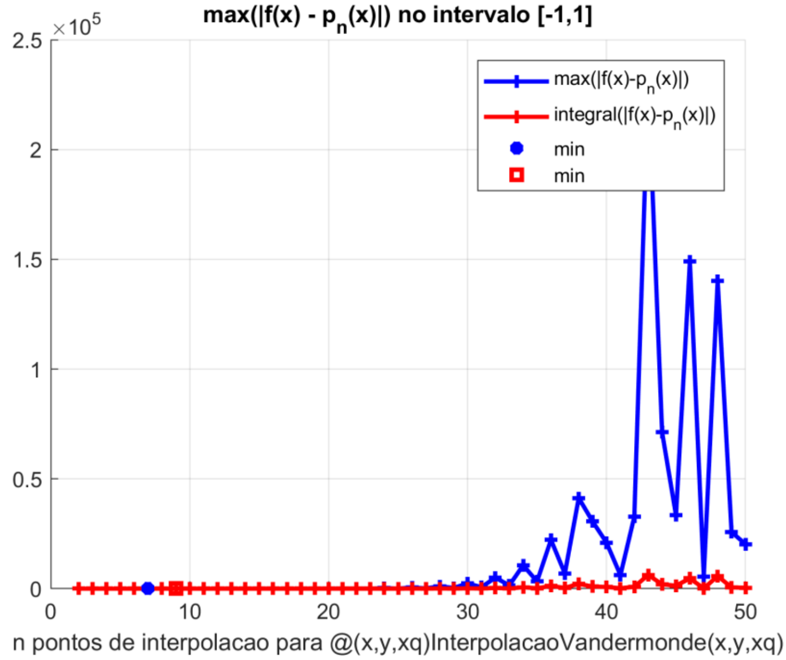
Aqui vemos que o aumento no número de nós melhora a interpolação apenas até certo ponto, e depois começa a divergir da função verdadeira.



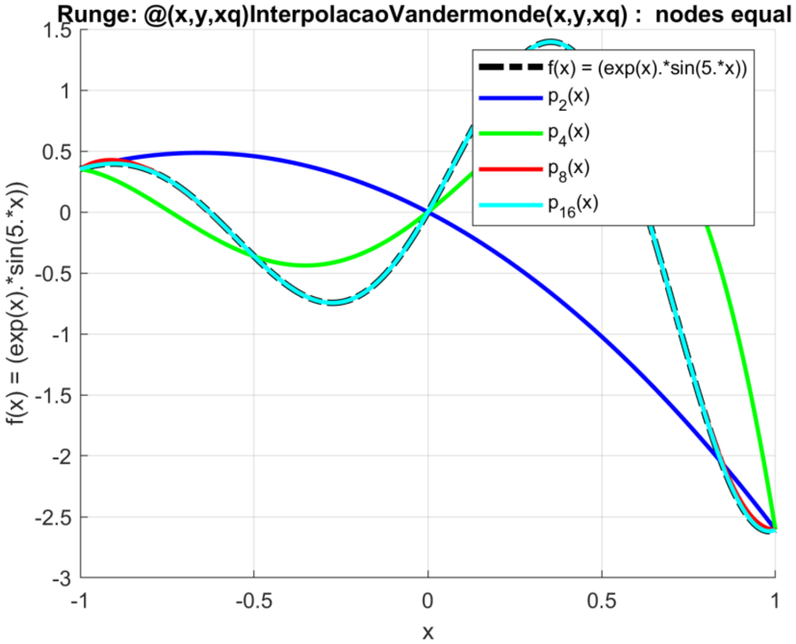


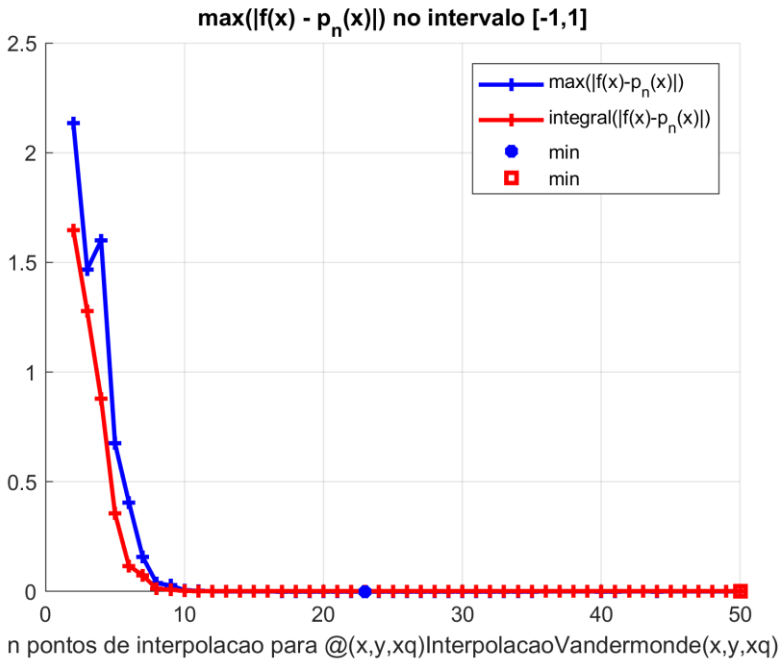
Já para a função g(x), o erro parece não crescer descontroladamente com *n*, podendo tender a zero ou para alguma constante não nula. Isso mostra que a função g(x) é “bem comportada”, ou seja, não exibe o fenômeno de Runge.



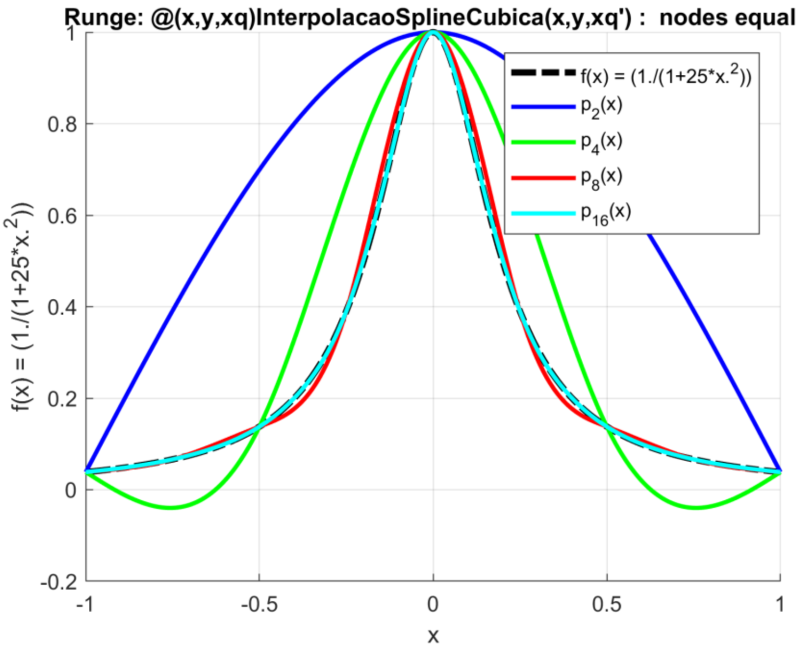


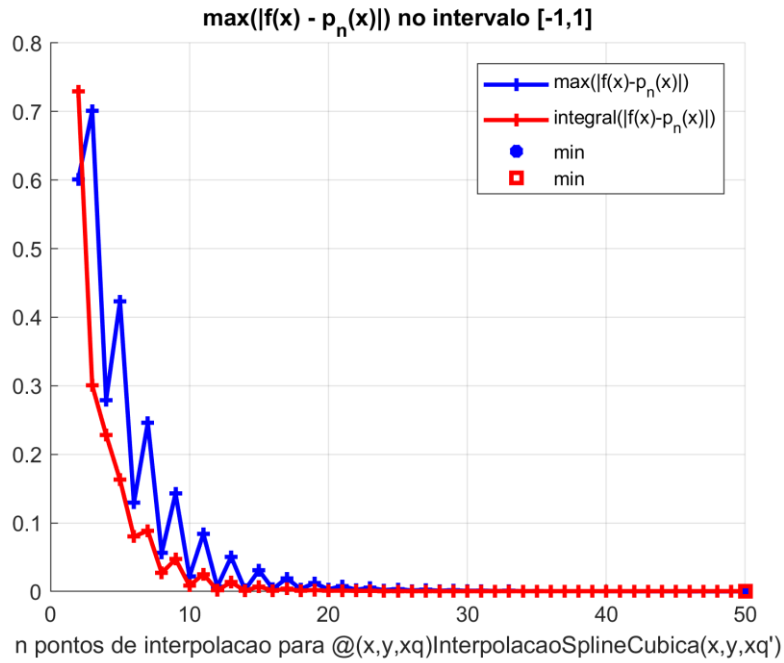
Novamente, podemos ver o efeito de Runge bem acentuado para o método de Vandermonde. O erro não diverge tão claramente quanto no método de Newton, mas evidentemente não tende a zero nem a alguma constante que possa ser identificada com o gráfico.



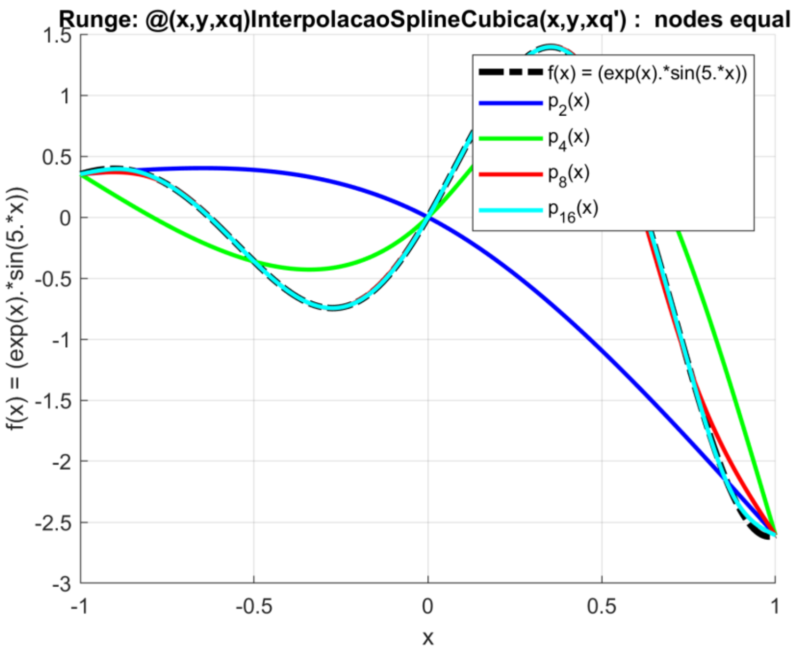


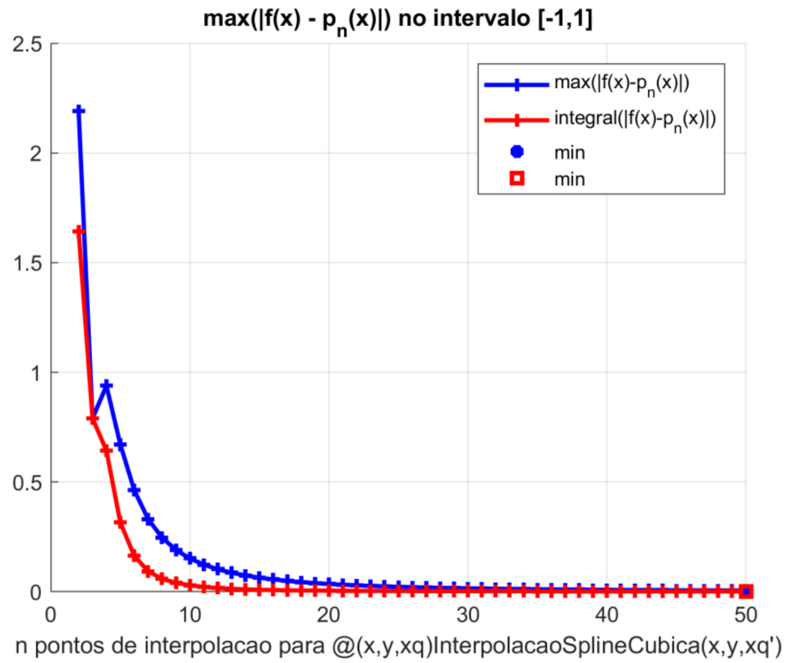
A função g(x) por sua vez não exibe o fenômeno de Runge, como esperado.





Com as splines, nota-se um ajuste muito fino à curva, com o erro diminuindo uniformemente conforme se aumenta o número de nós de interpolação. Convergência garantida, e neutralização do fenômeno de Runge!

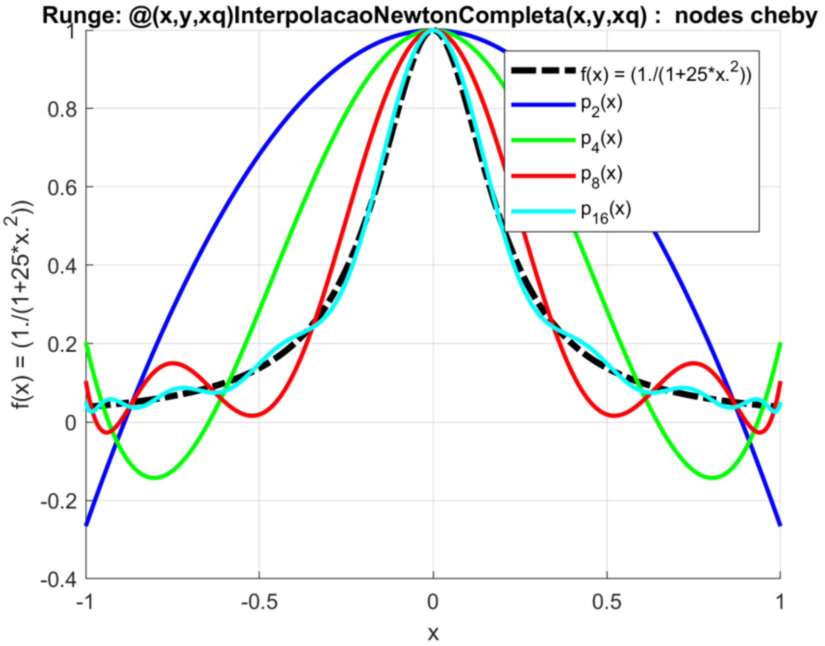


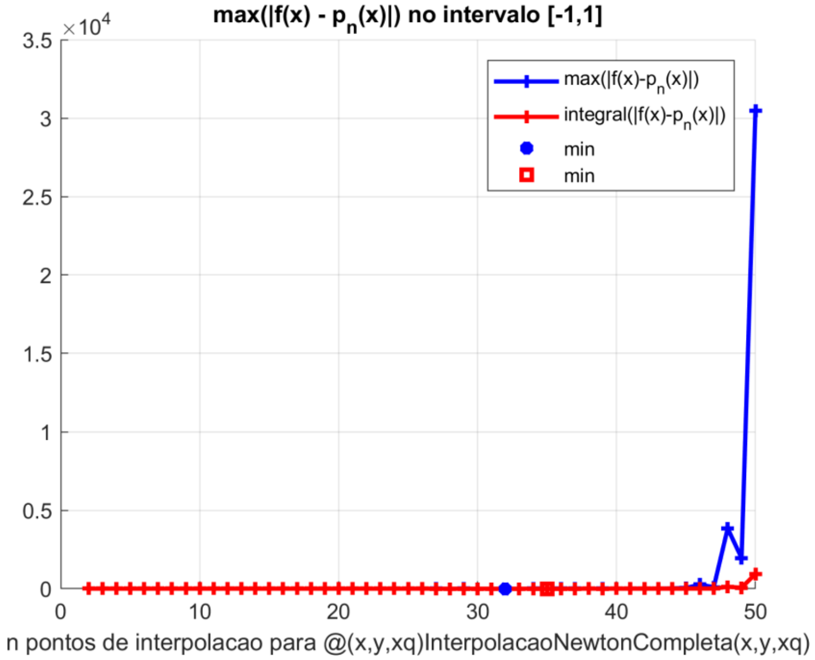


Para a função g(x), como era de se esperar, as splines também convergem com eficácia crescente conforme *n* cresce. Enfim temos um caso onde aumentar o número de nós de fato implica numa melhor interpolação.

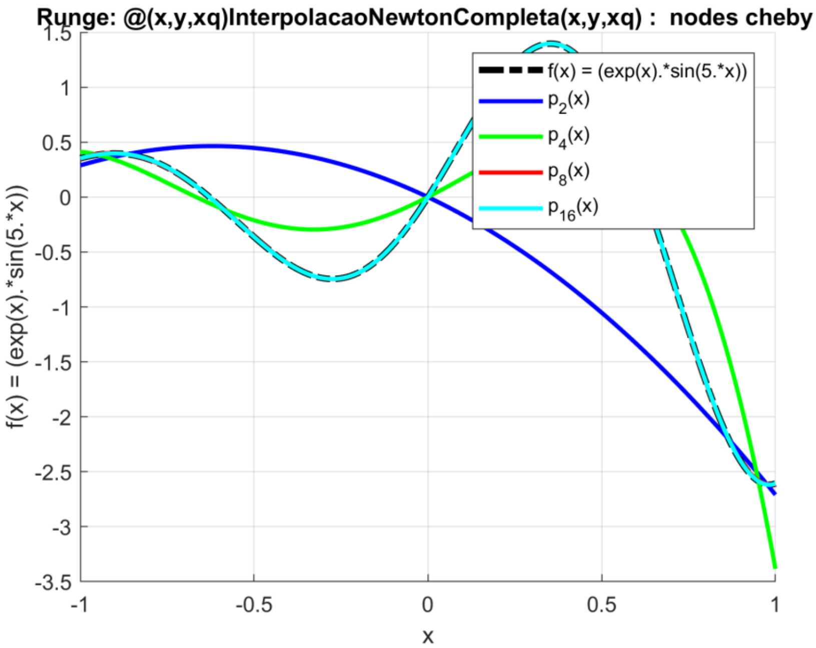
Nota-se que nem sempre aumentar o número de nós melhora a interpolação, como evidenciado para função de Runge para os métodos de Newton e Vandermonde.

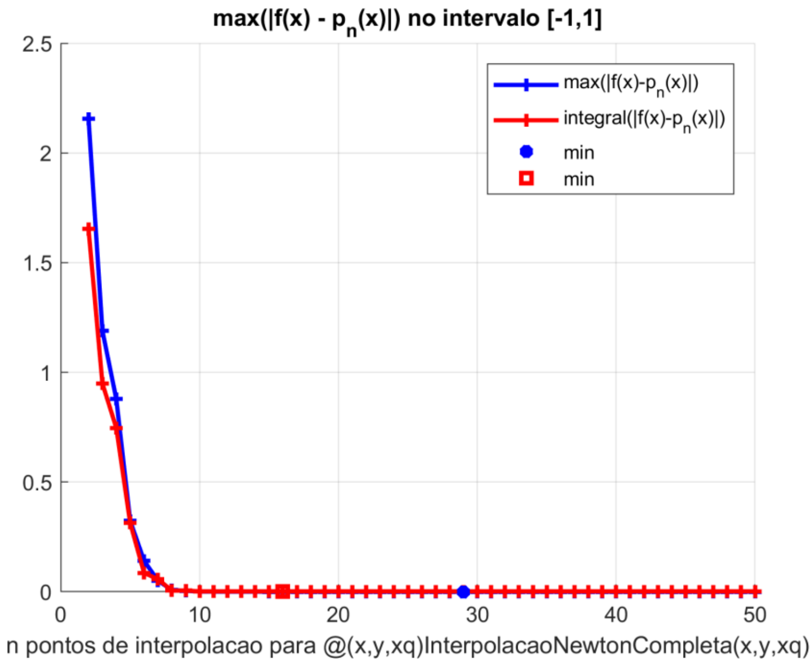
2. Nós de Chebyshev



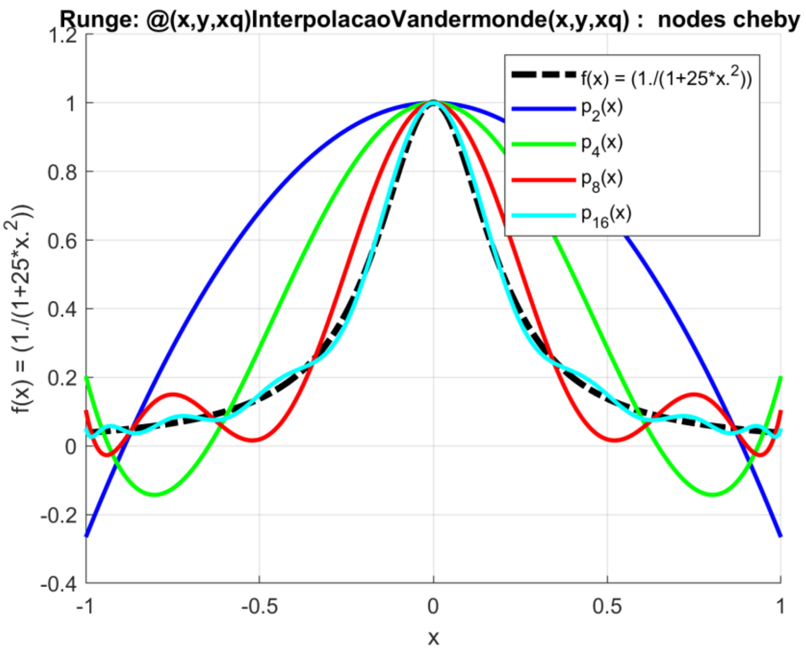


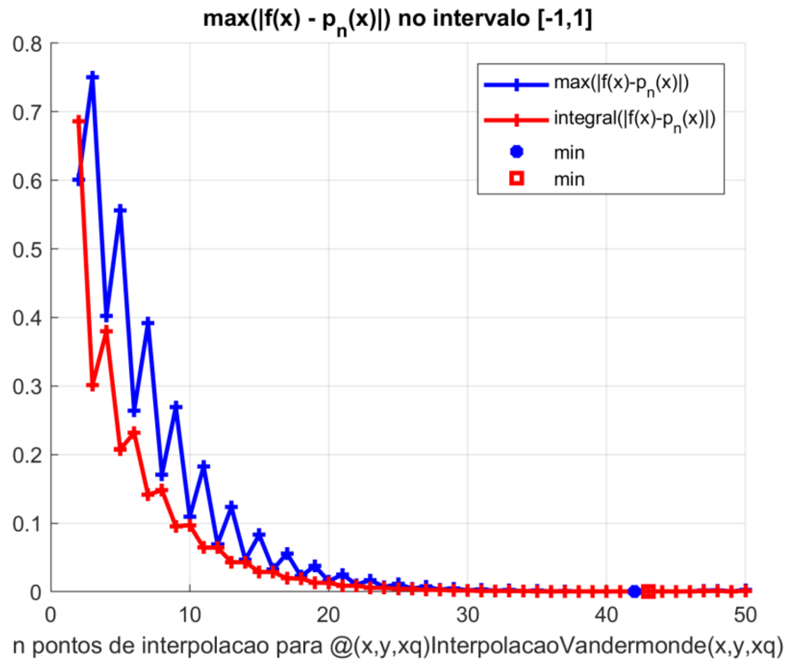
Nesse caso, vemos que o uso dos nós de Chebyshev permite, a princípio, uma melhor interpolação para pequenos valores de *n*, uma vez que o erro é distribuído de maneira mais homogênea. No entanto, isso não elimina o efeito Runge, que começa a se tornar evidente para *n* próximo de 50.



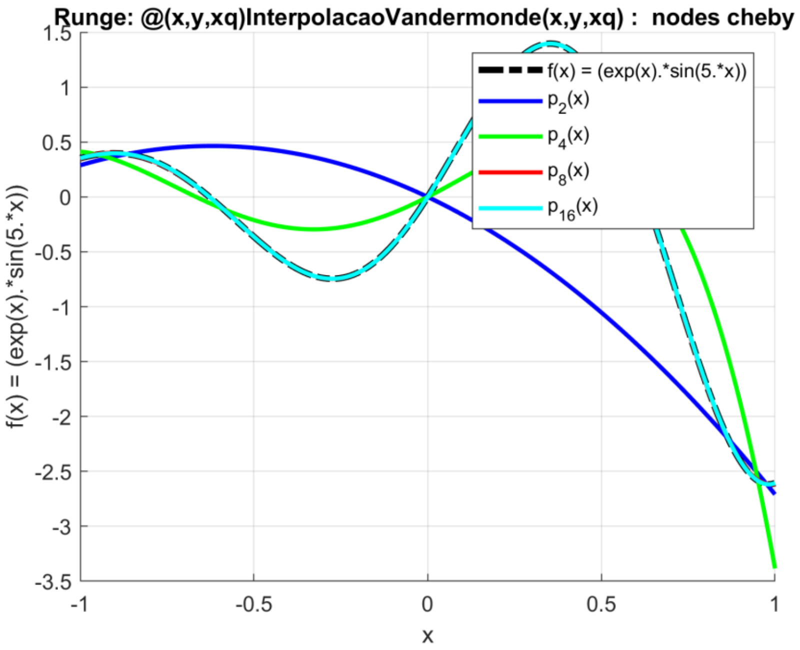


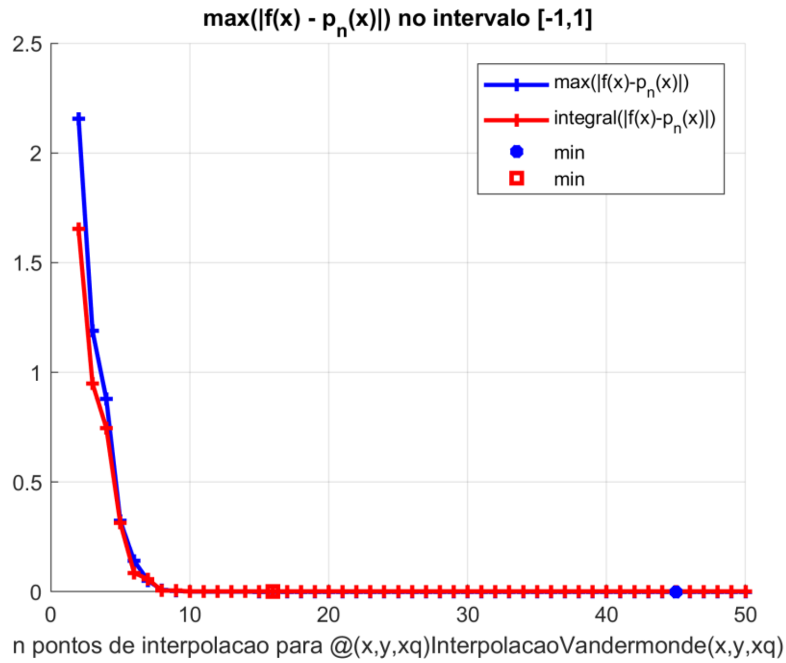
Já para a função g(x), o efeito Runge não é evidenciado, e a interpolação funciona sutilmente melhor, conforme os dados tabelados ao final do relatório podem comprovar.



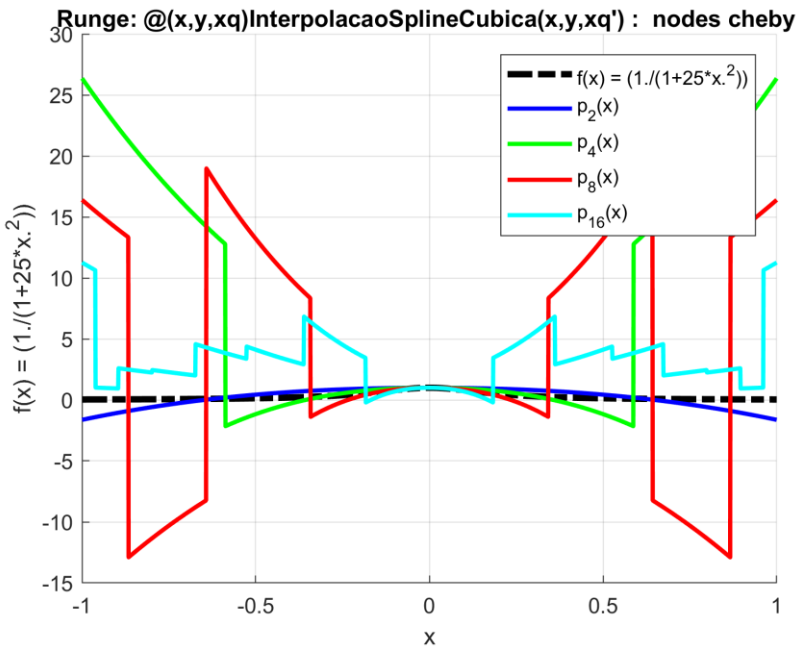


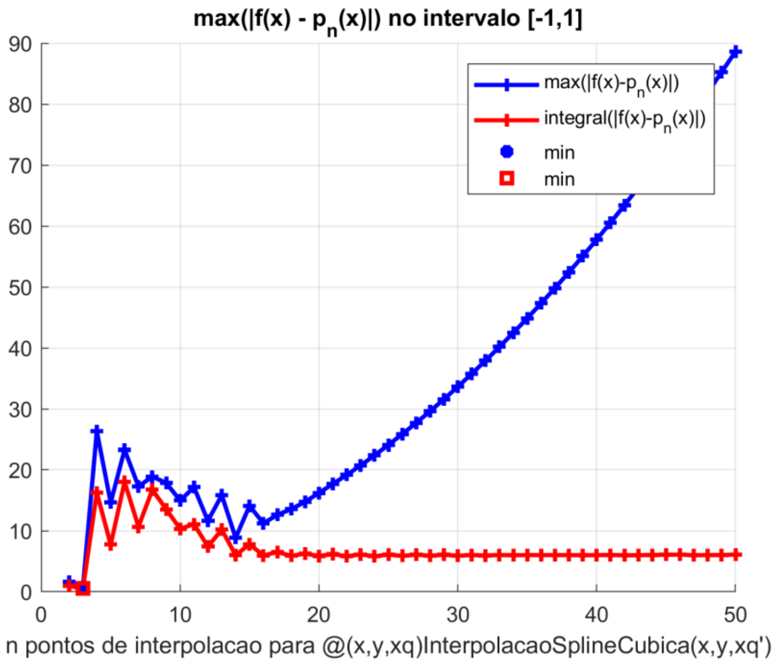
Aqui vale destacar o efeito da utilização dos nós de Chebyshev. O erro é acentuado para *n* pequeno, e decresce conforme *n* aumenta, porém não se pode dizer que converge para zero, ou que sequer converge. Contudo, é claro que o erro está distribuído muito mais homogeneamente do que no caso anterior.



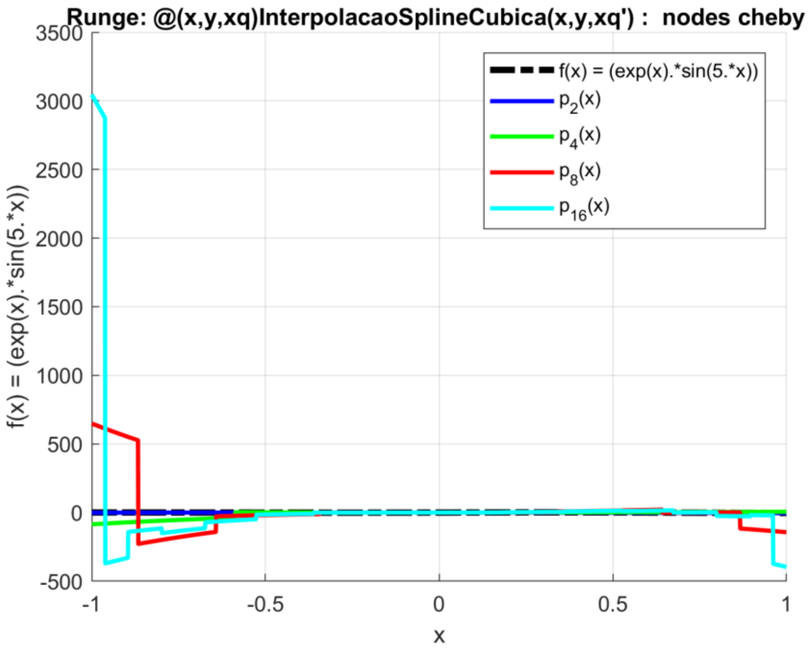


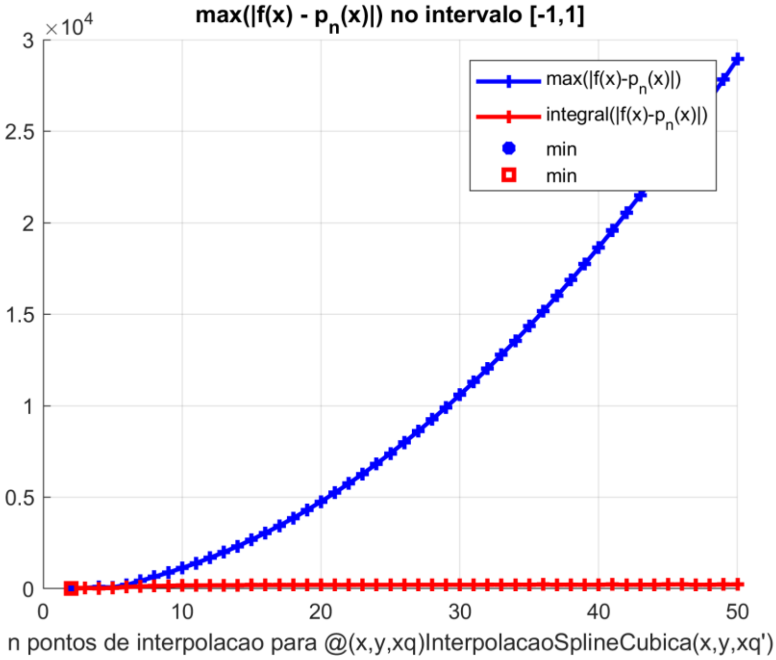
Com a função g(x) a interpolação é quase sempre bem razoável, com o erro se mantendo estável e baixo para *n* na faixa observada. Pode-se dizer que, embora não se possa garantir convergência para o erro zero, o erro converge para alguma constante de valor bem próximo de zero.





Quando utilizamos nós de Chebyshev para splines, catástrofe. A junção de duas estratégias aparentemente tão eficazes resulta numa falha completa. O erro é crescente com *n* e a interpolação não é satisfatória em nenhum caso. Não se trata do fenômeno de Runge agindo, uma vez que não é um pequeno erro persistente mas uma discrepância descontrolada.





Analisando a resultado da união entre splines e nós de Chebyshev para a função g(x), temos a certeza de sua incompatibilidade. Uma função que teoricamente não deveria apresentar o fenômeno de Runge, revela um erro de interpolação que cresce estrondosamente com *n*.

Utilizando agora nós de Chebyshev em vez de linearmente espaçados, os métodos de interpolação foram novamente testados para as duas funções. Pode-se observar que para todos os métodos, com exceção do Spline, o efeito Runge foi atenuado (para o caso da função de Runge) e o erro diminui significativamente (para o caso da função g(x)).

Para os métodos de Vandermonde e Newton, percebe-se que o uso dos nós de Chebyshev fazem com que o erro se distribua mais homogeneamente sobre a função, aproximando de maneira visivelmente melhor a função.

Por outro lado, a spline tem sua eficácia completamente destruída pelo uso dos nós de Chebyshev. O que antes convergia muito bem mesmo para a função de Runge, agora falha até mesmo para a função g(x). Isso ocorre pois as splines supõem um espaçamento uniforme entre os nós, o que não existe quando se utilizam os nós de Chebyshev.

Comparando a interpolação por polinômio único (Vandermonde e Newton) com as splines, pode-se destacar algumas vantagens das splines. As splines possuem convergência garantida mesmo para a função de Runge, e são menos custosas de serem calculadas (O(n)). No entanto, não podem ser utilizadas com nós de Chebyshev. As interpolações por polinômio único em geral estão sujeitas ao fenômeno de Runge, do qual não podem escapar totalmente mesmo com a utilização dos nós de Chebyshev.

Quanto à utilização dos nós de Chebyshev, uma possível desvantagem é que ela não é compatível com o uso de splines. Outra desvantagem pode surgir caso se tenha uma função com muita informação concentrada na região central do intervalo, isto é, uma função que varie muito no meio do intervalo. Isso é problemático pois os nós de Chebyshev são mais “rarefeitos” na região central do intervalo, portanto, capturam menos informação nessa região.

Função de Runge	Nós	Min E(n)	N para min E(n)	Converge para
PolinomioInterpolador	Regular	0,24736	7	∞
InterpolacaoNewton	Regular	0,24736	7	∞
SplineCubica	Regular	1,11883e-4	50	0
PolinomioInterpolador	Chebyshev	2,03589e-4	42	?
InterpolacaoNewton	Chebyshev	1,46565e-3	32	∞
SplineCubica	Chebyshev	0,74467	3	∞

Função g(x)	Nós	Min E(n)	N para min E(n)	Converge para
PolinomioInterpolador	Regular	4,21441e-11	23	0
InterpolacaoNewton	Regular	1,00053e-12	24	0
SplineCubica	Regular	5,54415e-3	50	0
PolinomioInterpolador	Chebyshev	9,08995e-15	45	0
InterpolacaoNewton	Chebyshev	1,04805e-13	29	0
SplineCubica	Chebyshev	2,32641	2	∞