Relatório do Lab 7 de CCI-22

Trabalho 7 – Ajuste de Curvas via Quadrados Mínimos

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

21/05/2019

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Análise: Movimento da bola quicando

Para lidar com o problema do aluno Saraiva, que consiste em determinar parâmetros do movimento de uma bolinha quicando, vamos modelar os tempos entre cada choque com o chão pela função

$$T_i = \frac{2\,v_0}{g} \cdot \varepsilon^i$$

onde g é a aceleração da gravidade, tomada como 9,8 m/s², v_0 é a velocidade inicial da bolinha, e ε é o coeficiente de restituição entre o chão e a bolinha. Visando determinar os parâmetros v_0 e ε, temos dados amostrados sobre os tempos no arquivo `bolinha.mat`, além de dados ruidosos sobre os quais vamos aplicar Regressão Linear. Para isso, consideramos a transformação

$$\ln\left(T_i \cdot \frac{g}{2}\right) = \ln(v_0) + i \cdot \ln(\varepsilon) \iff y = a + b \cdot i$$

onde vamos aplicar a regressão linear sobre os pares (i, y) para determinar a e b, a partir dos quais obtemos v_0 e ε invertendo os logaritmos.

Em seguida, plotamos um gráfico comparando os dados exatos com o ajuste feito a partir dos valores ruidosos, na figura 1. Todos os procedimentos aqui descritos foram implementados no *script* `ProblemaBola.m`.

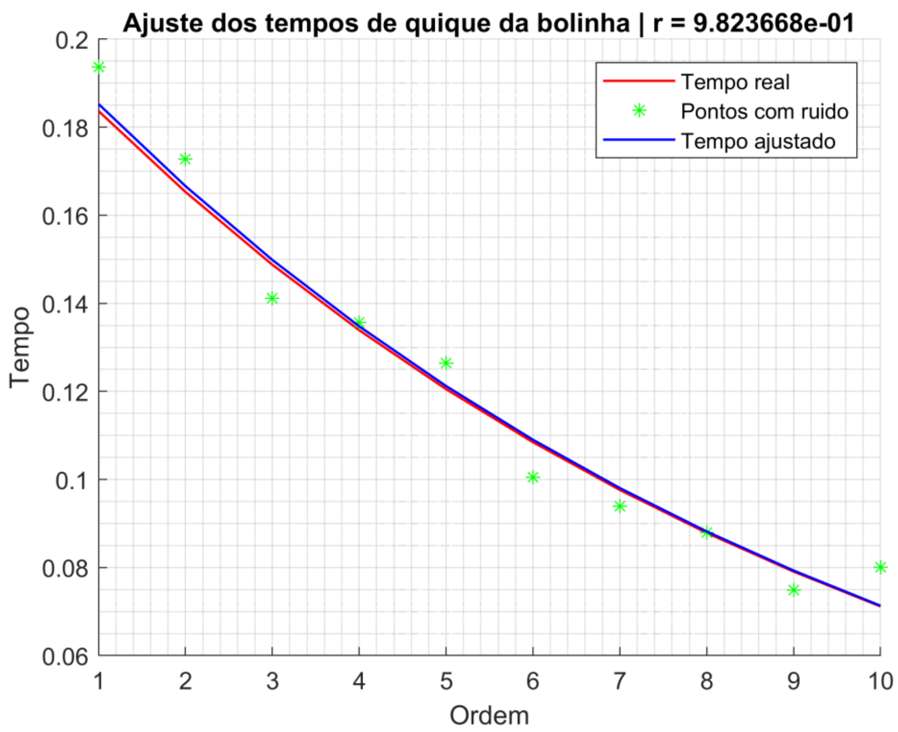

Figura 1: Comparação entre os tempos exatos e o ajuste linear a partir dos tempos ruidosos.

Podemos notar na figura 1 que a curva ajustada ficou bem próxima da original. O coeficiente de correlação do ajuste aos pontos ruidosos foi de 0.982, indicando que o modelo aplicado se adequa razoavelmente bem ao conjunto de dados, na medida do quanto é permitido pela existência do ruído.

Na tabela 1 estão compilados os valores dos parâmetros do movimento da bolinha encontrados via ajuste linear. Foram inseridos também os valores reais dos parâmetros, os quais foram obtidos através do ajuste dos dados sem ruído, com correlação de 100%.

Tabela 1: Parâmetros do movimento da bola encontrados via ajuste linear e os respectivos valores reais.

Parâmetro	Valor Ajustado	Valor Real
v_0	1.009390211248604	1.0
ε	0.899364048551552	0.9

Em seguida, objetivamos estudar como se comporta a qualidade do ajuste conforme se aumenta a intensidade do ruído presente nos dados. Para isso, simulamos o experimento da bola adicionado ruídos aleatórios sobre os dados gerados. Sendo *s* a amplitude do ruído, simulamos 1000 experimentos para cada valor de *s*, e em seguida realizando o ajuste linear dos pontos conforme feito anteriormente, mas salvando apenas o valor do coeficiente de correlação do ajuste, *r*. O objetivo de realizar 1000 medidas para cada *s* é tomar um valor médio de *r* para cada *s*, visando reduzir o ruído refletido no ajuste da reta, nos permitindo avaliar de modo mais claro a relação entre *s* e *r*. O gráfico obtido dessa relação consta na figura 2.

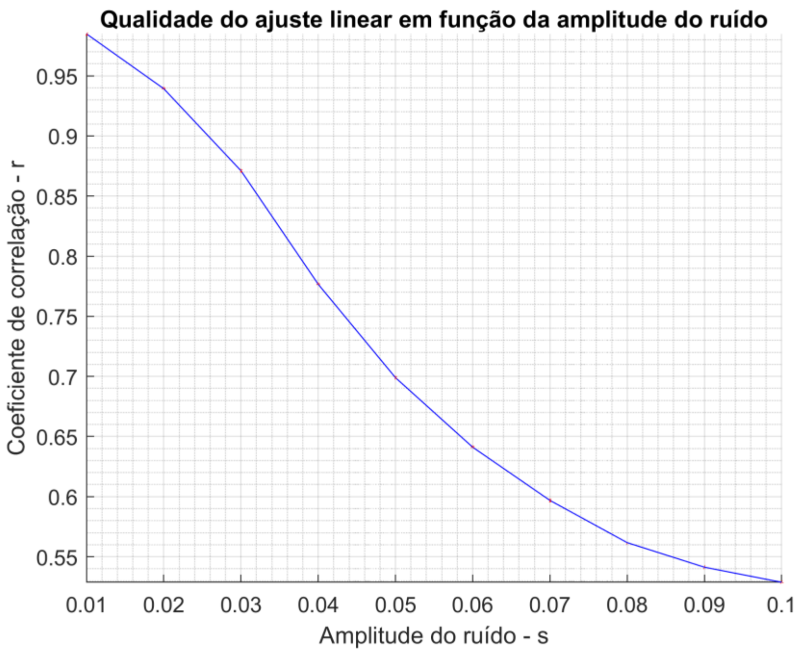

Figura 2: Relação entre a amplitude do ruído *s* e o coeficiente de correlação *r* do ajuste linear.

Podemos constatar pela figura 2 que a qualidade do ajuste cai drasticamente conforme aumentamos a amplitude do ruído nos dados, o que é de se esperar, dado que o conjunto dos pontos amostrados vai destoar cada vez mais de uma reta (após a transformação logarítmica, claro).

2. Análise: Inferindo a complexidade de uma função caixa preta

Neste problema temos uma função caixa preta de duas variáveis, cuja complexidade foi modelada como $\gamma n_1^{\alpha} n_2^{\beta}$, com γ, α e β a determinar. Para isto, medimos o tempo de execução dessa função para diversos valores de (n_1, n_2), aplicamos uma transformação logarítimica para linearizar o modelo, e por fim aplicamos o método de Regressão Linear múltipla.

Os valores de entradas utilizados foram os do conjunto $(n_1, n_2) \in \{10: 10: 100\} \times \{10: 10: 100\}$, e para cada medição de tempo foi tomada a média de 30 execuções da função, para atenuação do ruído. Todo o procedimento foi implementado através do *script* `ProblemaCaixaPreta.m`, inclusive o plot do gráfico tridimensional da figura 3.

Figura 3: Superfície ajustada do tempo de execução em função das variáveis n_1 e n_2. Os asteriscos em rosa são os pontos usados na regressão linear.

Pela figura 3 podemos ver uma boa concordância da superfície ajustada com os pontos experimentais. Os parâmetros γ, α e β encontrados foram compilados na tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros da Lei de Tempo de Execução da função caixa preta, com os valores encontrados pelo ajuste linear, e os esperados pela análise do algoritmo.

Parâmetro	Valor Ajustado	Valor Esperado
γ	$6.019272654778828 \cdot 10^{-9}$	-
α	1.981941173254849	2
β	0.943742700698183	1

Analisando o código da função caixa preta, podemos inferir que este deve possuir complexidade quadrática em n_1, devido aos dois laços iterativos aninhados dependendo dessa variável, e complexidade linear em n_2, devido ao único laço iterativo dependendo dessa variável. Dessa forma, temos uma complexidade $O(n_1^2 \cdot n_2)$. Com base nos valores de α e β ajustados, deveríamos ter uma complexidade $O(n_1^{1.98} \cdot n_2^{0.94})$, contudo, essa complexidade está englobada na expressão $O(n_1^2 \cdot n_2)$. Além disso, os valores de α e β estão razoavelmente próximos de 2 e 1, respectivamente, portanto, o resultado é razoável.