Relatório do Lab 6 de CCI-22

Trabalho 6 – Interpolação com *splines*

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

14/05/2018

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Comparação da Interpolação *spline* linear e cúbica

Para fins de comparar os métodos de interpolação por *splines* com trechos lineares e cúbicos, vamos estudar a sua aplicação à interpolação da função de Runge, e comparar os resultados com os métodos implementados no Lab anterior. Assim como no Lab anterior, a função de Runge foi interpolada (dessa vez com os métodos *splines* linear e cúbica) utilizando *n* pontos de interpolação, com *n* variando no conjunto {1, 2, 4, 8, 16}. Em seguida, plotou-se os gráficos da função de Runge e das interpolações juntos. Na figura 1, vemos a interpolação por *splines* lineares. Na figura 2, temos a interpolação pelas *splines* cúbicas. Todos os gráficos foram gerados a partir do *script* `ComparacaoLinearSpline.m`.

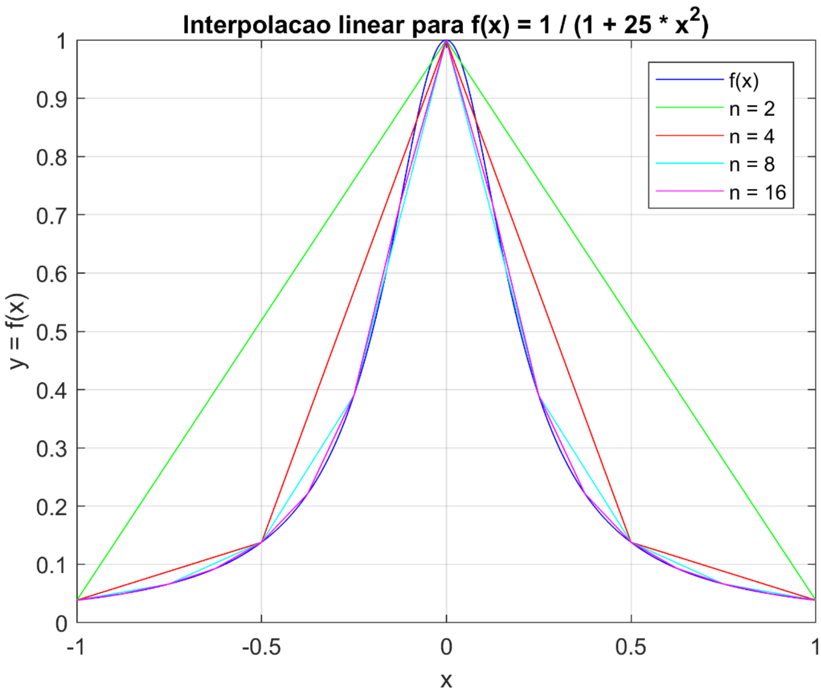

Figura 1: Interpolação da função de Runge usando *splines* lineares com 1, 2, 4, 8 e 16 nós de interpolação igualmente espaçados no intervalo de -1 a 1.

Vemos pela figura 1 que o erro da spline linear aparentemente diminui (segundo alguma métrica, talvez a soma dos módulos erros) conforme se aumenta a quantidade de nós de interpolação. Vejamos o desempenho da spline cúbica.

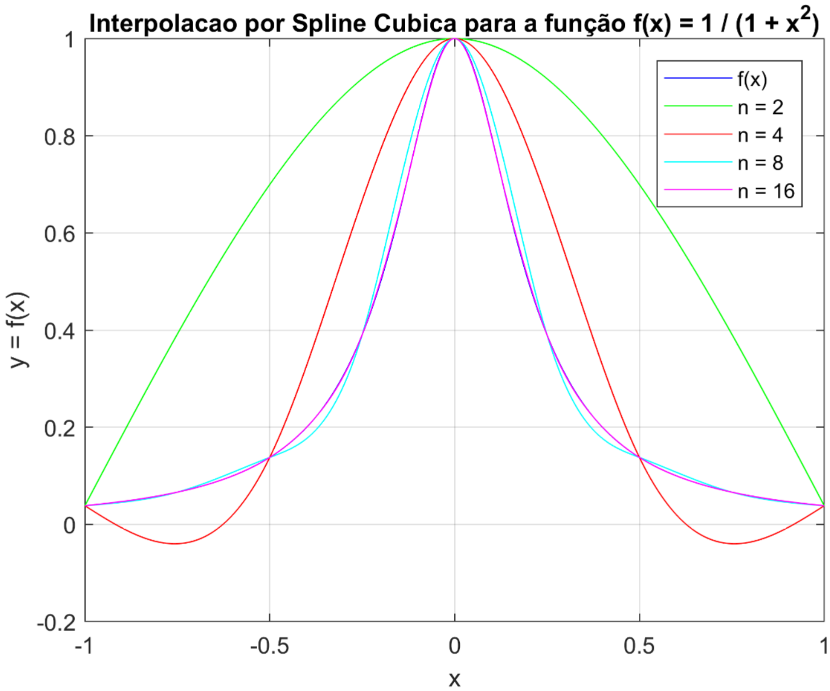

Figura 2: Interpolação da função de Runge usando *splines* cúbicas com 1, 2, 4, 8 e 16 nós de interpolação igualmente espaçados no intervalo de -1 a 1.

Para a spline cúbica (figura 2) temos um comportamento mais suave (afinal, a ideia da spline cúbica é manter suavidade) e que também aparenta melhorar com o aumento do número de nós. Para fins de comparação, vamos recordar os gráficos do fenômeno de Runge para os métodos polinomiais, na figura 3.

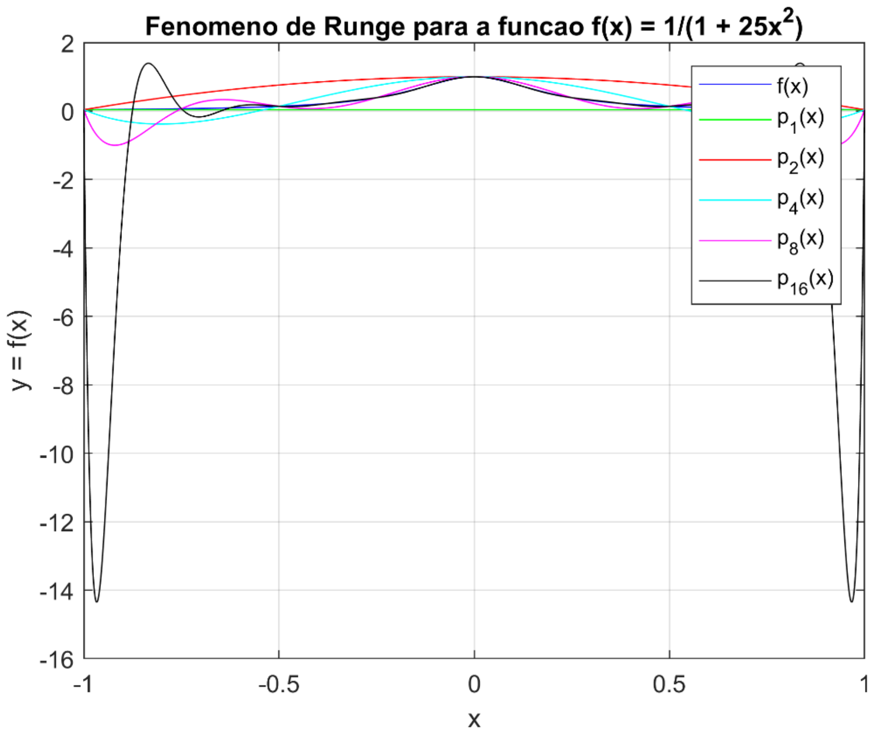

Figura 3: Fenômeno de Runge para interpolação polinomial.

Comparando as figuras 1, 2 e 3 podemos perceber claramente a vantagem das *splines* na interpolação da função de Runge, e temos ainda um *insight* do porquê elas são imunes ao fenômeno de Runge.

A chave está na estratégia de *dividir para conquistar*. Ao tentar aproximar a função original em intervalo menores, a esperança é que a complexidade do comportamento desta seja menor, de modo que mesmo uma interpolação simples como um polinômio de grau baixo seja eficiente. O segredo é explorar o fato de que as funções são *localmente "bem comportadas"*, isto é, se tornam mais simples conforme reduzimos o intervalo de estudo.

A estratégia de interpolação polinomial, por outro lado, sem fazer uso da estratégia de divisão, falha pois os polinômios essencialmente não são uniformemente contínuos, nem limitados em todo o domínio. Isso faz com que, ao aumentarmos o grau do polinômio num intervalo fixo, seu comportamento oscilatório comece a se manifestar cada vez mais, o que é mais evidente nas extremidades do intervalo de interpolação. Esse comportamento pode eventualmente ser evitado, caso se utilize distribuições heterogêneas dos nós de interpolação, como os *nós de Chebyshev*.

Agora façamos uma análise do erro da interpolação em função do número de nós, para as estratégias spline e também para a interpolação polinomial, nas figuras 4 e 5, respectivamente.

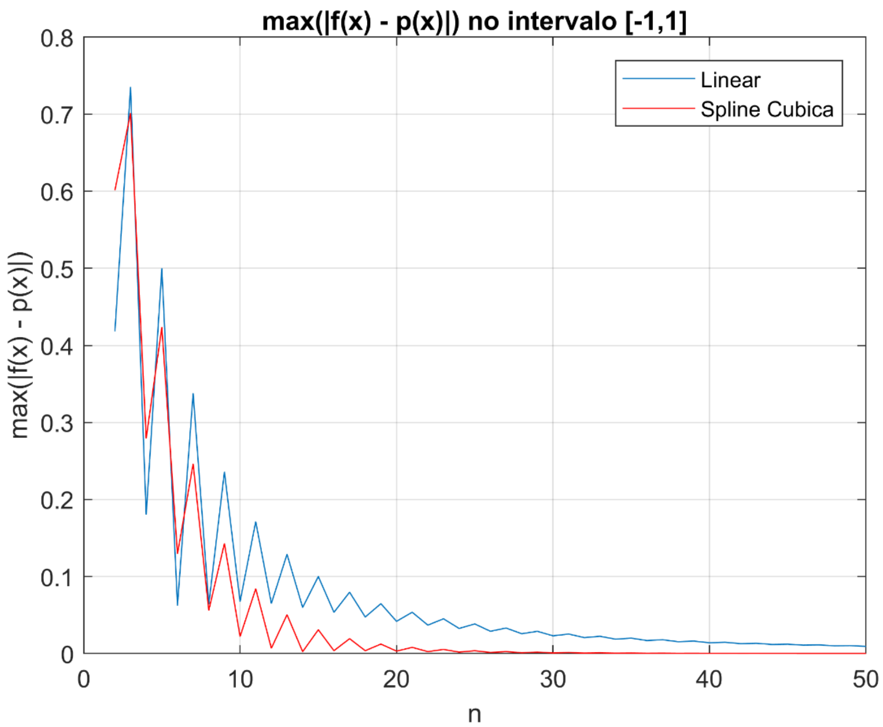

Figura 4: Evolução do erro da interpolação por splines lineares e cúbicos com o número de nós de interpolação.

Podemos constatar da figura 4 que a estratégia *spline* definitivamente contorna o problema do fenômeno de Runge, com o seu erro (na métrica do erro absoluto máximo) convergindo, se não para zero, para um valor razoavelmente baixo. É interessante observar também que há duas subsequências monótonas na sequência dos erros, relativas às interpolações com número ímpar de nós, e com número par de nós, sendo que a interpolação com quantidade par de nós é geralmente melhor que as interpolações com quantidades ímpares adjacentes. Isso se deve à simetria do intervalo de interpolação, e ao caráter *par* da função ($f(-x) = -f(x)$).

Muito diferente disso é o desempenho da interpolação por polinômio único, apresentado na figura 5.

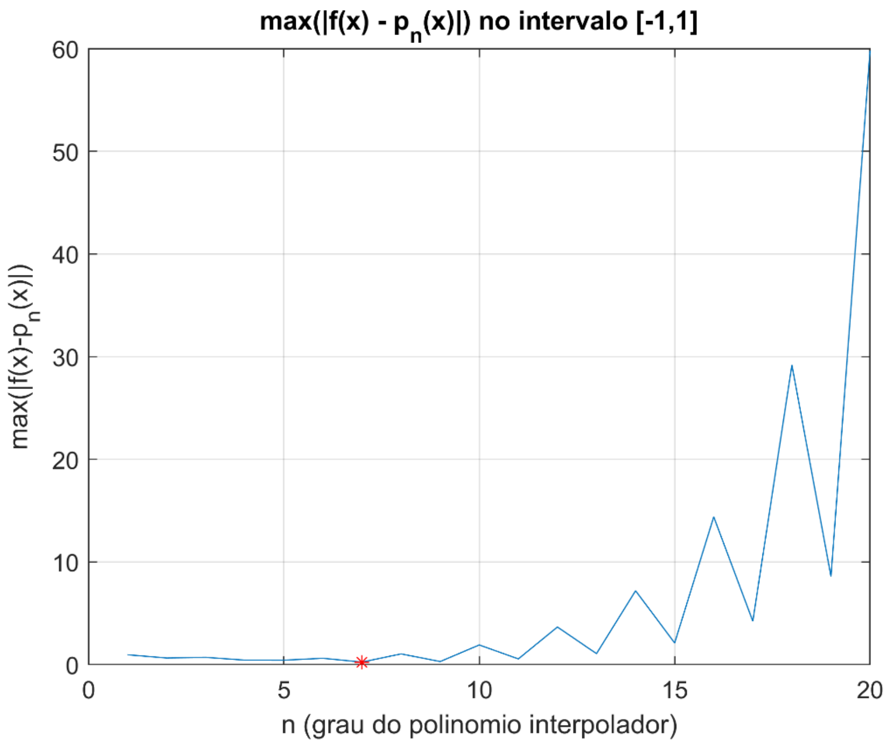

Figura 5: Evolução do erro da interpolação por polinômio único com o número de nós de interpolação.

A diferença mais evidente é que o erro da interpolação por polinômio único é de fato divergente. Ainda podemos observar o mesmo fenômeno de termos duas subsequências monotonicamente crescentes, sendo que o erro cometido pela interpolação com uma quantidade par de nós é geralmente maior que os erros com quantidades ímpares adjacentes. Novamente, podemos argumentar que esse comportamento ocorre devido à simetria do intervalo de interpolação, e da própria função de Runge, que é uma função par.