Relatório do Lab3 de CCI-22

Trabalho 03 – Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

28/03/2019

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Análise

Foram estudados os comportamentos dos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel para os seguintes sistemas lineares, representados em forma matricial:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Os sistemas acima foram analisados com os critérios das Linhas e de Sassenfeld, e resolvidos pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, através do *script* MATLAB `scriptanalise.m`, tendo os resultados compilados na tabela 1. O (x) ou (v) entre parênteses indica o resultado do critério das linhas (na coluna de convergência para Gauss-Jacobi) e de Sassenfeld (na coluna do Gauss-Seidel).

Tabela 1: Análise dos Métodos Iterativos

Sistema	Gauss-Jacobi		Gauss-Seidel	
	Convergência	#Iterações	Convergência	#Iterações
(1)	Não (x)	100	Não (x)	100
(2)	Sim (v)	20	Sim (v)	6
(3)	Sim (x)	46	Sim (x)	11
(4)	Sim (x)	4	Não (x)	100
(5)	Não (x)	100	Sim (x)	9
(6)	Sim (v)	10	Sim (v)	6

Observa-se que para alguns sistemas, apesar de não satisfazer os critérios, ainda houve convergência. Para o sistema (1), ambos os critérios não foram satisfeitos, e ambos os métodos divergiram. Para o sistema (2), ambos os critérios foram satisfeitos e houve convergência em ambos os métodos. Curiosamente, o sistema (2) é obtido a partir do (1) por meio de uma troca de linhas, e isso modifica totalmente o comportamento do sistema perante os métodos de solução. Isso ocorre pois o sistema (2) é diagonal dominante, o que o torna mais bem comportado perante métodos iterativos. De fato, a diagonal dominância de uma matriz contribui para satisfazer o critério das linhas, que por sua vez garante a convergência de ambos os métodos (pois linhas implica Sassenfeld).

Para o sistema (6), ambos os critérios foram satisfeitos e houve convergência para ambos os métodos, evidenciando a suficiência dos critérios para a convergência. Contudo, o sistema (3) mostra que estes critérios não são condições necessárias, tendo sido reprovado em ambos e convergido nos dois métodos.

Por fim, os sistemas (4) e (5) mostram que um método pode convergir enquanto o outro diverge, quando os sistemas não satisfazem aos critérios de convergência. Sabemos, no entanto, que se um sistema satisfaz o critério das linhas, então ele satisfaz Sassenfeld, mas essa implicação não pôde ser bem explorada pelos exemplos (temos sempre a satisfação ou insatisfação de ambos os critérios). Dito isso, apenas quando ambos os critérios não são satisfeitos é que podemos observar um fenômeno como este, em que temos que Gauss-Jacobi converge num sistema onde Gauss-Seidel diverge, e o oposto também.

Observamos ainda que em todos os casos em que ambos os métodos iterativos convergiram, o de Gauss-Seidel sempre foi mais rápido. A rapidez de convergência desse método está associada ao parâmetro β, que quanto menor for, mais rápido será a convergência do método. É esperado que o método de Gauss-Seidel convirja mais rápido, uma vez que a cada iteração ele utiliza informação mais atualizada.

Para uma análise mais profunda do comportamento desses sistemas quando submetidos aos dois métodos, foram plotados os vetores de resíduos dos métodos a cada iteração, para o método de Gauss-Jacobi na figura 1, e para o Gauss-Seidel na figura 2.

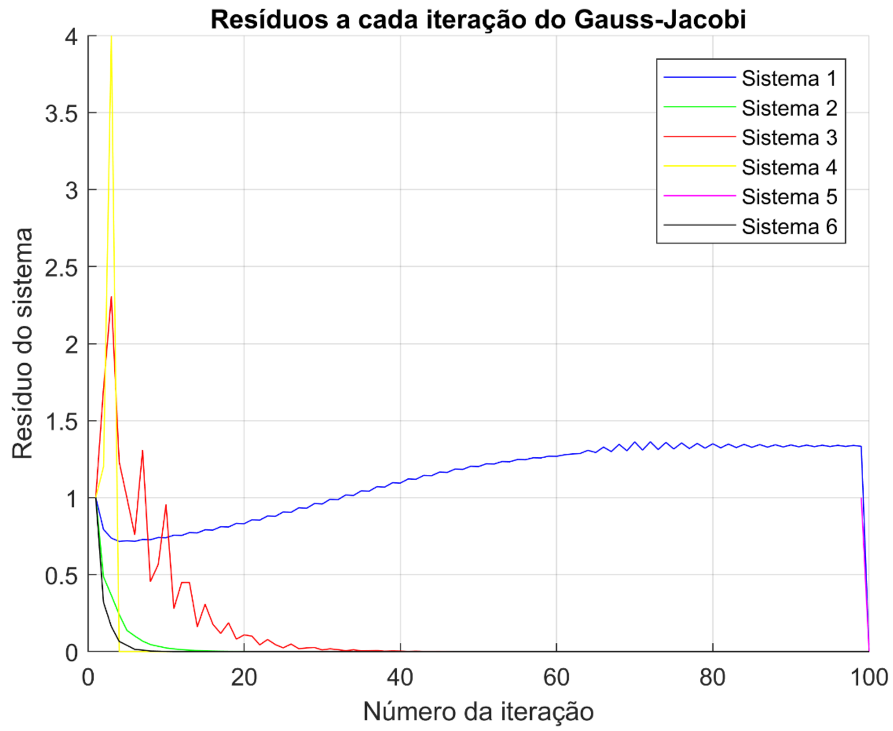

Figura 1: Gráfico dos resíduos dos sistemas a cada iteração do Gauss-Jacobi

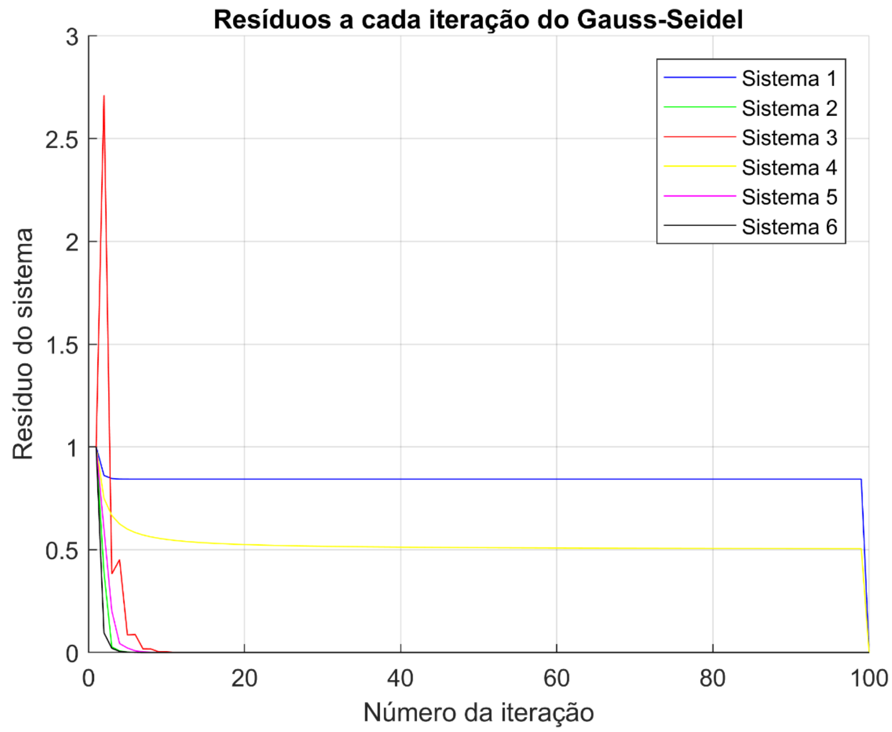

Figura 2: Gráfico dos resíduos dos sistemas a cada iteração do Gauss-Seidel

Da figura 1 podemos notar que sistema 1 (azul) de fato não convergiu, e o sistema 6 (roxo) comportou-se de tal maneira que sua curva não é sequer plotada até o final do método. O que ocorreu foi que os resíduos do sistema 6 ficaram oscilando entre 1 e infinito, impossibilitando o traçado do gráfico. Esse comportamento oscilatório é um caso patológico do algoritmo de Gauss-Jacobi, ocasionado pois a diagonal dominância da matriz nesse caso é crítica, isto é, cada elemento da diagonal principal soma precisamente o mesmo que os demais elementos de sua linha.

Na figura 2, podemos observar um comportamento mais regular de todos os sistemas, com destaque para a divergência dos sistemas 1 e 4, caracterizada por um comportamento assintótico do resíduo do sistema, que não converge para zero.