Relatório do Lab 11 de CCI-22

Trabalho 11 – Autovalores e Autovetores

Aluno:

Bruno Costa Alves Freire

Turma:

T 22.4

Professor:

Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Máximo

Data:

20/06/2018

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Departamento de Computação

1. Análise: Comparação entre os métodos das Potências, de Jacobi e QR

Foram consideradas as 6 matrizes quadradas:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 7 & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 7.5 & 7 \\ 7.5 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_4} = \begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 8 & 3.5 \\ 2.5 & 9 & 7 & 7.5 \\ 8 & 7 & 6 & 1 \\ 3.5 & 7.5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_6} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Os métodos da Potência e da Potência Inversa foram utilizados para determinar respectivamente os autopares relativos ao maior e ao menor autovalor em módulo de cada matriz. O método de Jacobi foi utilizado para as matrizes simétricas ($\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_6}$) para determinar todos os seus autovalores e autovetores. Por fim, o método QR foi aplicado para determinar somente os autovalores de todas as matrizes. Tudo isso foi feito por meio do *script* `eigencompare.m`, e os resultados foram compilados nas tabelas 1, 2 e 3. As tabelas 1, 2 e 3 contém os dados obtidos por meio dos métodos das potências (diretas e inversas), do método de Jacobi e do algoritmo QR, respectivamente.

Tabela 1: Autopares relativos ao maior e menor autovalores (em módulo) das matrizes $\mathbf{A_i}$, $i \in \{1, \cdots, 6\}$, determinados pelos métodos das potências.

Matriz	*Método das Potências*	*Método das Potências Inversas*
A₁	$\lambda_{max} = 7.0005$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.2183 \\ 0.4364 \\ 0.8728 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = 1.0001$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} 0.3336 \\ 0.6663 \\ -0.6669 \end{bmatrix}$
A₂	$\lambda_{max} = 18.5157$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.5660 \\ 0.5122 \\ 0.6460 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = -0.0310$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} 0.4533 \\ -0.6914 \\ 0.5626 \end{bmatrix}$
A₃	$\lambda_{max} = 18.8813$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.4974 \\ 0.6203 \\ 0.6064 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = 1.0142$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} -0.0401 \\ -0.6818 \\ 0.7304 \end{bmatrix}$
A₄	$\lambda_{max} = 21.2656$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.3758 \\ 0.6360 \\ 0.5170 \\ 0.4324 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = 1.1078$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} 0.5342 \\ -0.6081 \\ -0.1210 \\ 0.5747 \end{bmatrix}$
A₅	$\lambda_{max} = 20.9085$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.4347 \\ 0.6391 \\ 0.4613 \\ 0.4356 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = 0.9839$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} 0.4442 \\ -0.7428 \\ 0.2685 \\ 0.4229 \end{bmatrix}$
A₆	$\lambda_{max} = 19.2635$ $\boldsymbol{v_{max}} = \begin{bmatrix} 0.5171 \\ 0.2857 \\ 0.6534 \\ 0.4734 \end{bmatrix}$	$\lambda_{min} = -0.1570$ $\boldsymbol{v_{min}} = \begin{bmatrix} 0.1167 \\ -0.7155 \\ -0.2458 \\ 0.6435 \end{bmatrix}$

Tabela 2: Autovalores e autovetores das matrizes simétricas **A₃**, **A₄** e **A₆** determinados através do Método de Jacobi.

Resultados Método Jacobi	**A₃**	**A₄**	**A₆**
Autovalores	$\lambda_1 = -4.8956$ $\lambda_2 = 18.8813$ $\lambda_3 = 1.0142$	$\lambda_1 = -6.0448$ $\lambda_2 = 21.2656$ $\lambda_3 = 6.6715$ $\lambda_4 = 1.1078$	$\lambda_1 = -4.3876$ $\lambda_2 = -0.1570$ $\lambda_3 = 19.2635$ $\lambda_4 = 1.2811$
Autovetores	$[\mathbf{v_1} \quad \mathbf{v_2} \quad \mathbf{v_3}] = \begin{bmatrix} 0.8665 & 0.4976 & -0.0402 \\ -0.3878 & 0.6203 & -0.6818 \\ -0.3143 & 0.6064 & 0.7304 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{v_1} \quad \mathbf{v_2} \quad \mathbf{v_3} \quad \mathbf{v_4}] = \begin{bmatrix} 0.6360 & 0.3758 & 0.4110 & 0.5342 \\ 0.3456 & 0.6360 & -0.3260 & -0.6080 \\ -0.5942 & 0.5169 & 0.6043 & -0.1210 \\ -0.3507 & 0.4325 & -0.5997 & 0.5747 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{v_1} \quad \mathbf{v_2} \quad \mathbf{v_3} \quad \mathbf{v_4}] = \begin{bmatrix} 0.8471 & -0.1167 & 0.5170 & -0.0387 \\ -0.0467 & 0.7155 & 0.2857 & 0.6358 \\ -0.3923 & 0.2458 & 0.6534 & -0.5989 \\ -0.3554 & -0.6435 & 0.4734 & 0.4853 \end{bmatrix}$

Tabela 3: Espectros das matrizes $\mathbf{A_i}$, $i \in \{1,\cdots,6\}$, determinados através do algoritmo QR.

Matriz	*Autovalores via Algoritmo QR*
A1	$\sigma = \{7.0000, 2.0002, 0.9998\}$
A2	$\sigma = \{18.5164, -3.4854, -0.0310\}$
A3	$\sigma = \{18.8813, -4.8956, 1.0142\}$
A4	$\sigma = \{21.2656, 6.6715, -6.0448, 1.1078\}$
A5	$\sigma = \{20.9087, 6.5840, -6.4538, 0.9839\}$
A6	$\sigma = \{19.2635, -4.3876, 1.2811, -0.1570\}$

A primeira consideração que devemos fazer acerca dos resultados das tabelas 1, 2 e 3 é que cada método possui suas limitações. Os métodos das potências encontram apenas o maior e o menor autovalores em módulo, e seus autovetores. O método de Jacobi só se aplica às matrizes simétricas, e o algoritmo QR só encontra os autovalores das matrizes, sem os autovetores. Dessa forma, o escopo de comparação é limitado.

Comparando os resultados das matrizes simétricas, temos que os três métodos encontraram os mesmos valores (até a 4ª casa decimal) para os autovalores. Quanto aos autovetores, tivemos concordância em todas as entradas até a 3ª casa decimal, o que é de se esperar dado que a tolerância dos métodos era de 10^{-3}. Na matriz A_3, apenas uma discordância na 4ª casa decimal de uma entrada do maior autovetor. Em A_4, algumas discordâncias na 4ª casa, e na matriz A_6 tivemos uma troca de sinal no autovetor encontrado pelo método das potências inversas e pelo método de Jacobi.

Nas demais matrizes, comparando os métodos das potências e o algoritmo QR, tivemos discordâncias de ordem de 10^{-4} nos autovalores de A_1, uma discordância um pouco maior no maior autovalor de A_2, concordância total (até a 4ª casa) entre os métodos para os autovalores de A_3, A_4, e A_6. Para a matriz A_5, temos boa concordância entre os autovalores encontrados pelos métodos das potências inversas, no entanto, os demais autovalores diferem dos valores corretos (obtidos pela função `eig` do MATLAB) por cerca de 10^0, o que equivale a 20% de erro em relação aos valores corretos.

Inicialmente, o método implementado divergia ao tentar calcular o algoritmo QR para A_5. Após uma modificação para evitar divisões por zero, o método passou a convergir, contudo, apresentando este erro anormal para os autovalores intermediários. Atribui-se esse erro a algum tipo de instabilidade numérica.

2. Análise: Encontrando raízes de polinômios

Para encontrar as raízes de um dado polinômio, podemos considerar sua matriz companheira, e calcular seus autovalores utilizando algum método iterativo. Foi considerado o polinômio:

$$p(x) = 14x^6 + 119x^5 + 282x^4 + 127x^3 - 101x^2 - 72x - 9$$

Calculou-se suas raízes aplicando o algoritmo QR sobre sua matriz companheira, obtida através da função `compan` do MATLAB, que recebe um polinômio no formato da função `polyval`. Para que fosse obtida precisão comparável à da função `roots` do MATLAB, utilizou-se $\varepsilon = 10^{-15}$, e um número máximo de iterações de 10^{15}. A maior diferença em módulo para as raízes dadas pela função `roots` foi de $7.1054 \cdot 10^{-15}$, e comparando o valor da avaliação do polinômio em cada raiz, o maior valor em módulo para a avaliação do polinômio sobre as raízes determinadas via QR foi de $7 \cdot 10^{-12}$, enquanto para as raízes determinadas pela função `roots` o maior valor foi de $7 \cdot 10^{-11}$.

O procedimento de calcular as raízes e compará-las com a saída da função do MATLAB foi feito também no *script* `eigencompare.m`.