

CMC-12 - Relatório Lab 6 - Projeto de Servomotor de Posição com Malha de Corrente

Dupla: Ana Paula Lopes Schuch e Bruno Costa Alves Freire

14 de Agosto de 2020

1 Projeto do Controlador

1.1 Malha de Corrente

Vamos utilizar um compensador do tipo *lead* em série com um integrador, de função de transferência

$$C_c(s) = K \left(\frac{T_l s + 1}{\alpha T_l s + 1} \right) \cdot \frac{1}{s}.$$

Para o projeto, vamos inicialmente desprezar o efeito de atraso introduzido pela discretização, uma vez que o controlador será implementado por computador. Além disso, como estratégia de projeto, vamos fingir que o integrador se incorpora à planta e projetar a parte *lead* do controlador para atender aos requisitos de banda passante e margem de fase.

Teremos

$$G_f^*(s) = \frac{I}{I_c} \Big|_{V_b=0} = \frac{G_c C_c}{1 + G_c C_c}$$

- $\omega_b \geq 1000$ Hz:

$$\left| G_f^*(j\omega_b) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{G_f^*(0)}_{=1} \implies 2|K(T_l j\omega_b + 1)|^2 = |(-L\omega_b^2 + Rj\omega_b)(\alpha T_l j\omega_b + 1) + K(T_l j\omega_b + 1)|^2$$

Expandindo o módulo ao quadrado dos dois lados, chegaremos a um polinômio em ω_b :

$$2K^2(T_l^2\omega_b^2 + 1) = (K - L\omega_b^2 - R\alpha T_l\omega_b^2)^2 + (KT_l\omega_b - L\alpha T_l\omega_b^3 + R\omega_b)^2$$

Como o compensador *lead* não reduz a banda passante, podemos considerar $T_l = 0$ para encontrarmos o ganho K que nos permite atingir o requisito mínimo de banda passante, e teremos:

$$\begin{aligned} K^2 + 2KL\omega_b^2 - \omega_b^2(\omega_b^2 L^2 + R^2) &= 0 \\ (K + L\omega_b^2)^2 &= \omega_b^2(2\omega_b^2 L^2 + R^2) \\ K &= \omega_b \left(\sqrt{R^2 + 2\omega_b^2 L^2} - L\omega_b \right) \end{aligned}$$

Tomando $\omega_b = 1000$ Hz = 2000π rad/s, e substituindo os valores de R e L obtidos da planta, chegamos a $K \geq 1,0054 \cdot 10^4 \text{ F}^{-1}$

- $PM \geq 60^\circ$:

Agora, para atender ao requisito de margem de fase, vamos determinar ω_{CP} , ainda sem incorporar o *lead*:

$$|G_a^*(j\omega_{CP})| = 1, G_a^*(s) = G_c(s) \cdot \frac{K}{s} \implies \omega_{CP}^4 L^2 + \omega_{CP}^2 R^2 = K^2$$

Logo

$$\omega_{CP} = \sqrt{\frac{\sqrt{K^2 + (R^2/2L)^2} - R^2/2L}{L}} = 3,9753 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

Agora procedemos a calcular a necessidade de margem de fase:

$$PM = \angle G_a^*(j\omega_{CP}) + 180^\circ = 90^\circ - \angle(R\omega_{CP} + jL\omega_{CP}^2) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{L\omega_{CP}}{R}\right) = 28,3263^\circ$$

De modo que precisamos aumentar a margem de fase em pelo menos

$$\phi_{max} = 60^\circ - PM = 31,6737^\circ$$

Logo, devemos projetar o *lead* com

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} = 0,3114 \text{ e } T_l = \frac{1}{\omega_{CP}\sqrt{\alpha}} = 4,5078 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Agora vamos calcular as verdadeiras expressões de $G_f(s)$ e $G_a(s)$ e avaliar por simulação o atendimento aos requisitos.

$$G_f(s) = \frac{I}{I_c} \Big|_{V_b=0} = \frac{G_c A_c C_c}{1 + G_c A_c C_c} \text{ e } G_a(s) = G_c(s) A_c(s) C_c(s)$$

Utilizando uma aproximação de Padé de 2ª ordem para representar $A_c(s)$, temos enfim

$$G_a(s) = \frac{5.765 \cdot 10^7 s^3 - 1.371 \cdot 10^{13} s^2 + 1.076 \cdot 10^{18} s + 2.456 \cdot 10^{21}}{s^5 + 2.493 \cdot 10^5 s^4 + 2.144 \cdot 10^{10} s^3 + 1.816 \cdot 10^{14} s^2 + 2.931 \cdot 10^{17} s} \text{ e}$$

$$G_f(s) = \frac{5.765 \cdot 10^7 s^3 - 1.371 \cdot 10^{13} s^2 + 1.076 \cdot 10^{18} s + 2.456 \cdot 10^{21}}{s^5 + 2.493 \cdot 10^5 s^4 + 2.15 \cdot 10^{10} s^3 + 1.679 \cdot 10^{14} s^2 + 1.369 \cdot 10^{18} s + 2.456 \cdot 10^{21}}$$

Simulando a resposta ao degrau do sistema e traçando o diagrama de bode da malha aberta e da malha fechada, temos os gráficos das figuras 1, 2 e 3. Podemos constatar que dos três requisitos do projeto no domínio da frequência, apenas os requisitos de margem de ganho $GM \geq 11 \text{ dB}$ e de banda passante $\omega_b \geq 2000\pi \text{ rad/s}$ foram atendidos, pois obtivemos $PM = 43,6^\circ < 60^\circ$. Além disso, o sistema não apresenta erro em regime.

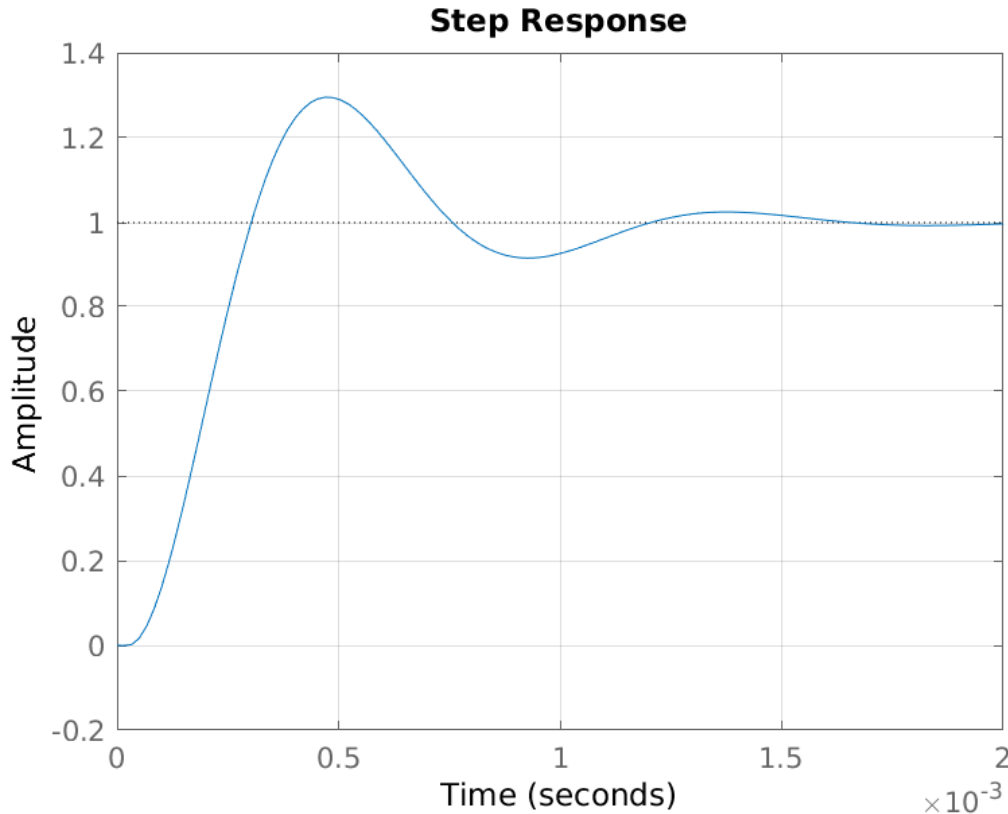


Figura 1: Resposta do sistema para degrau unitário.

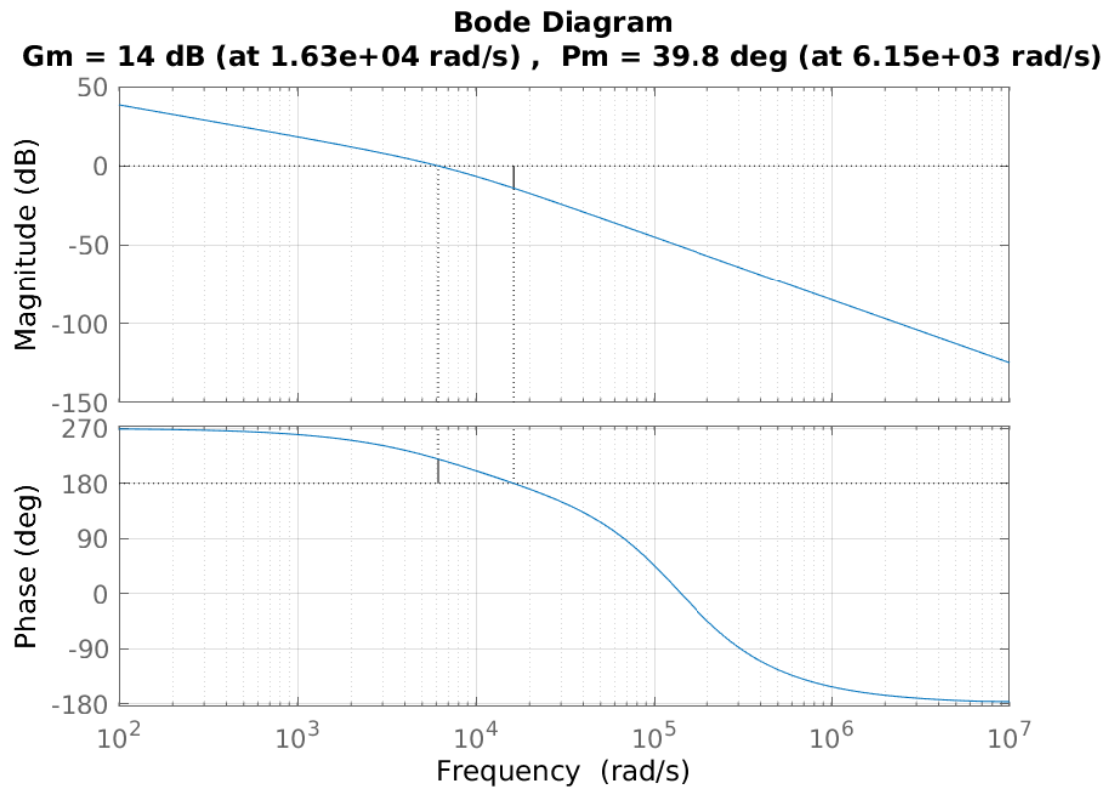


Figura 2: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha aberta, destacando as margens de estabilidade.

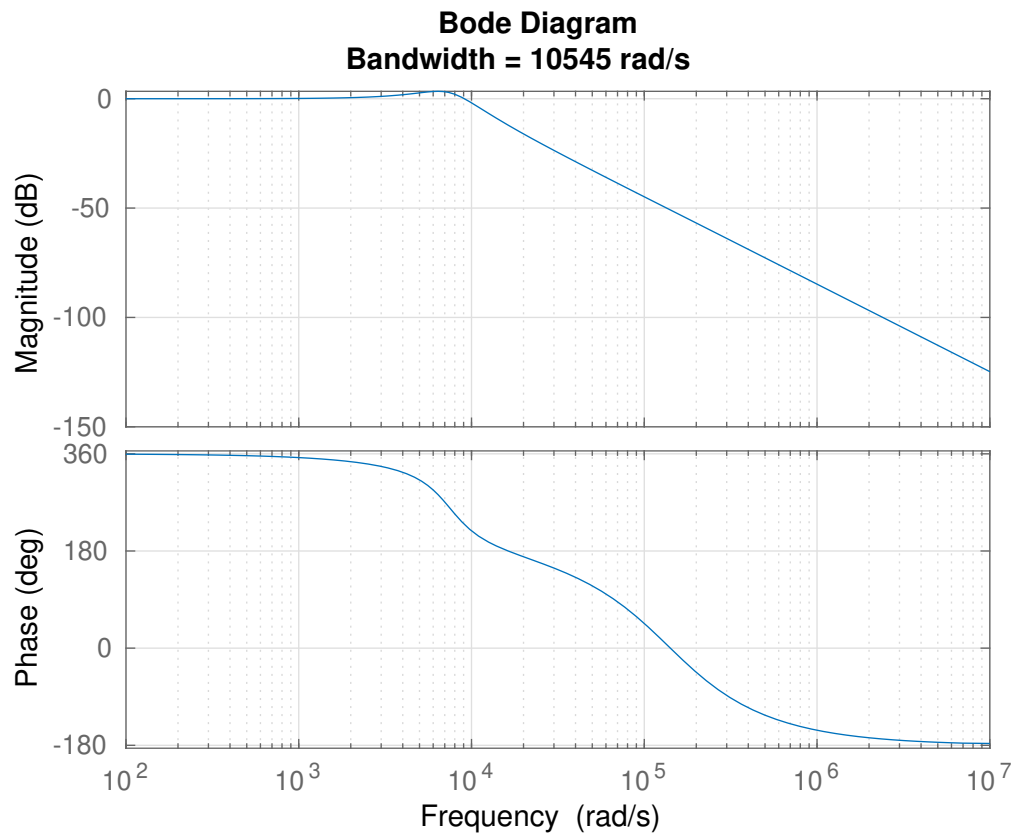


Figura 3: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha fechada, destacando a banda passante.

A seguir, utilizaremos os parâmetros do compensador projetados analiticamente como ponto de partida do algoritmo de otimização Nelder-Mead, com função de custo

$$J_c(K, \alpha, T_l) = (\omega_{b,req} - \omega_b(K, \alpha, T_l))^2 + (PM_{req} - PM(K, \alpha, T_l))^2$$

para obter os novos parâmetros do compensador, que buscará atender os requisitos no domínio da frequência para o sistema real, considerando os efeitos de atraso de discretização e o deslocamento da frequência de cruzamento.

Os novos parâmetros do compensador, encontrados pelo algoritmo de otimização, foram, respectivamente, $K = 4,1972 \cdot 10^3$, $\alpha = 0,2685$ e $T_l = 5,9984 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, e as novas funções de transferência em malha aberta e em malha fechada são

$$G_a(s) = \frac{2.792 \cdot 10^7 s^3 - 6.653 \cdot 10^{12} s^2 + 5.248 \cdot 10^{17} s + 8.935 \cdot 10^{20}}{s^5 + 2.484 \cdot 10^5 s^4 + 2.122 \cdot 10^{10} s^3 + 1.636 \cdot 10^{14} s^2 + 2.555 \cdot 10^{17} s} e$$

$$G_f(s) = \frac{2.792 \cdot 10^7 s^3 - 6.653 \cdot 10^{12} s^2 + 5.248 \cdot 10^{17} s + 8.935 \cdot 10^{20}}{s^5 + 2.484 \cdot 10^5 s^4 + 2.125 \cdot 10^{10} s^3 + 1.569 \cdot 10^{14} s^2 + 7.803 \cdot 10^{17} s + 8.935 \cdot 10^{20}}$$

O desempenho do novo compensador pode ser avaliado nas figuras 4, 5 e 6.

Podemos notar que agora o sistema atende a todos os requisitos do domínio da frequência, exibindo os valores mínimos requisitados de banda passante e margem de fase, e ainda atendendo com folga o requisito de margem de ganho.

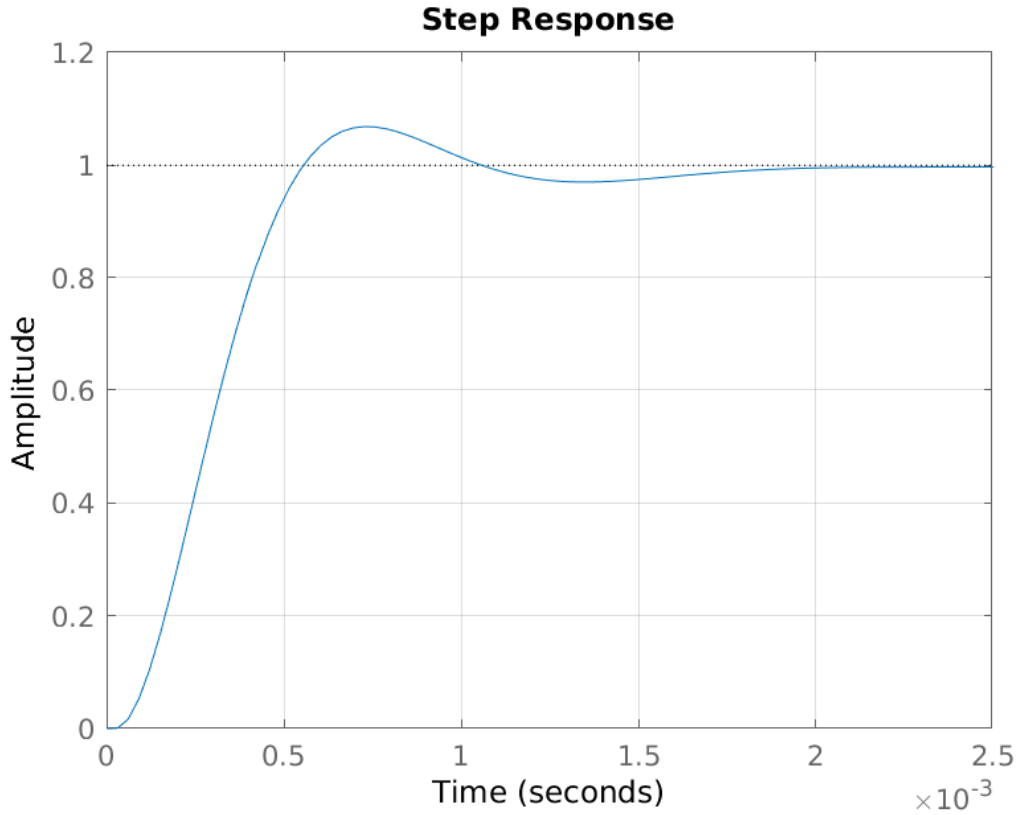


Figura 4: Resposta do sistema para degrau unitário.

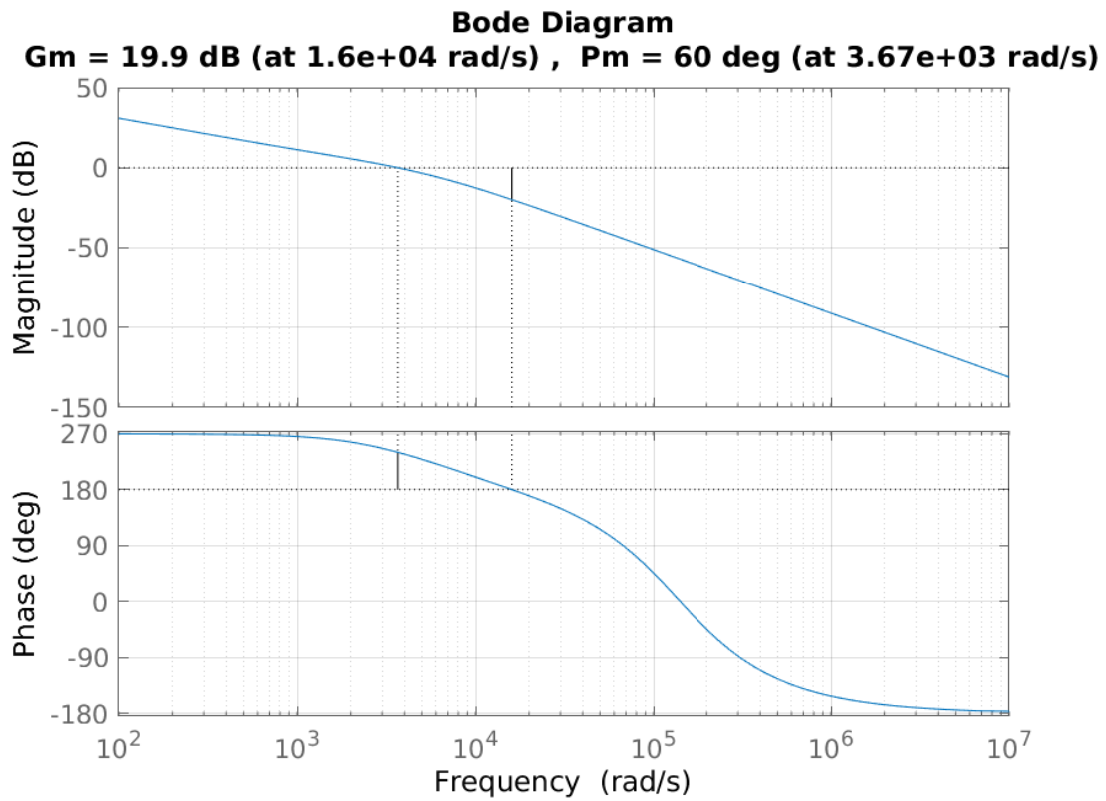


Figura 5: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha aberta, destacando as margens de estabilidade.

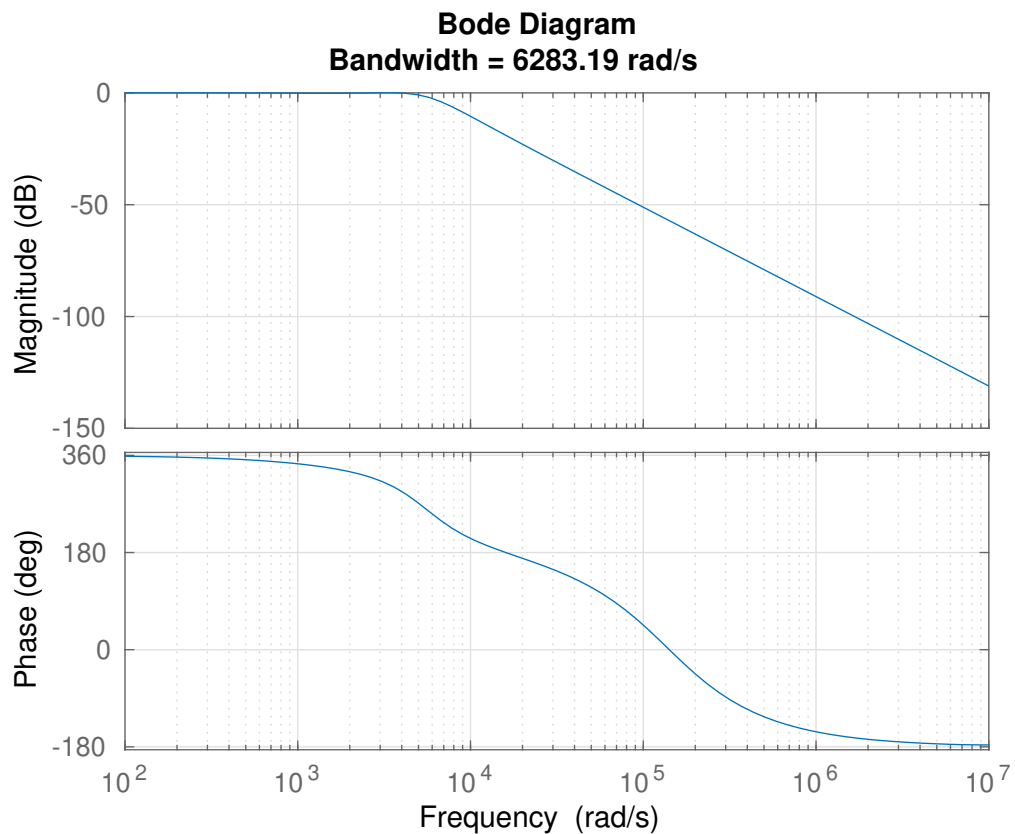


Figura 6: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha fechada, destacando a banda passante.

1.2 Malha de Posição

Queremos projetar o compensador de forma analítica. Vamos considerar a malha de corrente instantânea, ignorar o efeito do zero do PD, o filtro do termo derivativo e o atraso na discretização. Temos, então:

$$\begin{aligned} (\Theta_r - \Theta_l)C_p N\eta K_t \cdot \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \frac{1}{s} &= \Theta_l \Rightarrow \\ \Theta_r C_p N\eta K_t \cdot \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \frac{1}{s} &= \Theta_l \left(1 + C_p N\eta K_t \cdot \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \frac{1}{s} \right) \Rightarrow \\ \frac{\Theta_l}{\Theta_r} &= \frac{(K_p + K_d s)N\eta K_t}{J_{eq}s^2 + (B_{eq} + K_d N\eta K_t)s + K_p N\eta K_t} \end{aligned}$$

Desconsiderando o zero, obtemos um sistema de segunda ordem padrão. Temos então:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= \frac{B_{eq} + K_d N\eta K_t}{J_{eq}} \Rightarrow K_d = \frac{J_{eq} \cdot 2\xi\omega_n - B_{eq}}{N\eta K_t} \\ \omega_n^2 &= \frac{K_p N\eta K_t}{J_{eq}} \Rightarrow K_p = \frac{J_{eq}\omega_n^2}{N\eta K_t} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\xi = \xi_{req} = \frac{PM_{req}}{100} \text{ e } \omega_n = \omega_{n,req} = \frac{\omega_{b,req}}{\sqrt{1 - 2\xi_{req}^2 + \sqrt{4\xi_{req}^4 - 4\xi_{req}^2 + 2}}},$$

teremos os valores para os ganhos

$$\boxed{K_p = 3,9412}, \boxed{K_d = 0,0855} \text{ e } \boxed{a = 200\pi \text{ rad/s} = 628,3185 \text{ rad/s}}$$

Agora vamos determinar as verdadeiras funções de transferência em malha aberta e em malha fechada para avaliar o desempenho do controlador via simulação. Defina $G_c(s) = \frac{1}{Ls + R}$ e $G_p(s) = \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}}$. Do diagrama de blocos da figura 6 do roteiro do laboratório, podemos extrair:

$$\begin{aligned} \Theta_l &= \frac{1}{s} \cdot G_p \cdot N\eta K_t \cdot G_c \left[A_c C_c \left(A_p C_p (\Theta_r - \underbrace{\Theta_l}_{*}) - \frac{s}{G_p N\eta K_t} \Theta_l \right) - N K_t \cdot s \Theta_l \right] \\ \Theta_l &= \frac{N\eta K_t G_p G_c}{s} \left[A_c C_c A_p C_p \Theta_r - \underbrace{A_c C_c A_p C_p \Theta_l}_{*} - \frac{s \cdot A_c C_c}{G_p N\eta K_t} \Theta_l - N K_t \cdot s \Theta_l \right] \\ \Theta_l \left[1 + \frac{N\eta K_t G_p G_c \cdot A_c C_c}{s} \left(\frac{N K_t s}{A_c C_c} + \frac{s}{N\eta K_t G_p} + \underbrace{A_p C_p}_{*} \right) \right] &= \frac{N\eta K_t G_p G_c \cdot A_c C_c A_p C_p}{s} \Theta_r \\ \frac{\Theta_l}{\Theta_r} &= \frac{N\eta K_t G_p G_c A_c C_c \underbrace{A_p C_p}_{*}}{s + N^2 \eta K_t^2 G_p G_c s + G_c A_c C_c s + \underbrace{N\eta K_t G_p G_c A_c C_c A_p C_p}_{*}} \end{aligned}$$

Para obtermos $G_a(s)$, basta desconsiderarmos a realimentação mais externa da malha, o que equivale a desconsiderar o termo destacado com * na equação anterior. Dito isso, temos as cavalares expressões de $G_a(s)$ e $G_f(s)$:

$$\begin{aligned} G_a(s) &= (1.223e12s^8 - 3.008e17s^7 + 2.522e22s^6 - 1.372e26s^5 - 3.247e29s^4 + 3.429e33s^3 \\ &+ 1.111e37s^2 + 9.096e39s + 3.705e41)/(s^{12} + 2.653e05s^{11} + 2.556e10s^{10} + 5.45e14s^9 \\ &+ 5.946e18s^8 + 3.91e22s^7 + 1.641e26s^6 + 4.221e29s^5 + 6.182e32s^4 + 4.569e35s^3 \\ &+ 1.258e38s^2 + 8.983e37s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_f(s) = & (1.223e12s^8 - 3.008e17s^7 + 2.522e22s^6 - 1.372e26s^5 - 3.247e29s^4 + 3.429e33s^3 \\
& + 1.111e37s^2 + 9.096e39s + 3.705e41)/(s^{12} + 2.653e05s^{11} + 2.556e10s^{10} + 5.45e14s^9 \\
& + 5.946e18s^8 + 3.91e22s^7 + 1.642e26s^6 + 4.219e29s^5 + 6.179e32s^4 + 4.603e35s^3 \\
& + 1.369e38s^2 + 9.186e39s + 3.705e41)
\end{aligned}$$

Simulando a resposta ao degrau do sistema e traçando o diagrama de bode da malha aberta e da malha fechada, temos os gráficos das figuras 7, 8 e 9. Podemos constatar que dos três requisitos do projeto no domínio da frequência, apenas os requisitos de margem de ganho $GM \geq 11$ dB e de banda passante $\omega_b \geq 20\pi$ rad/s foram atendidos, pois obtivemos $PM = 51,1^\circ < 60^\circ$. Além disso, o sistema não apresenta erro em regime.

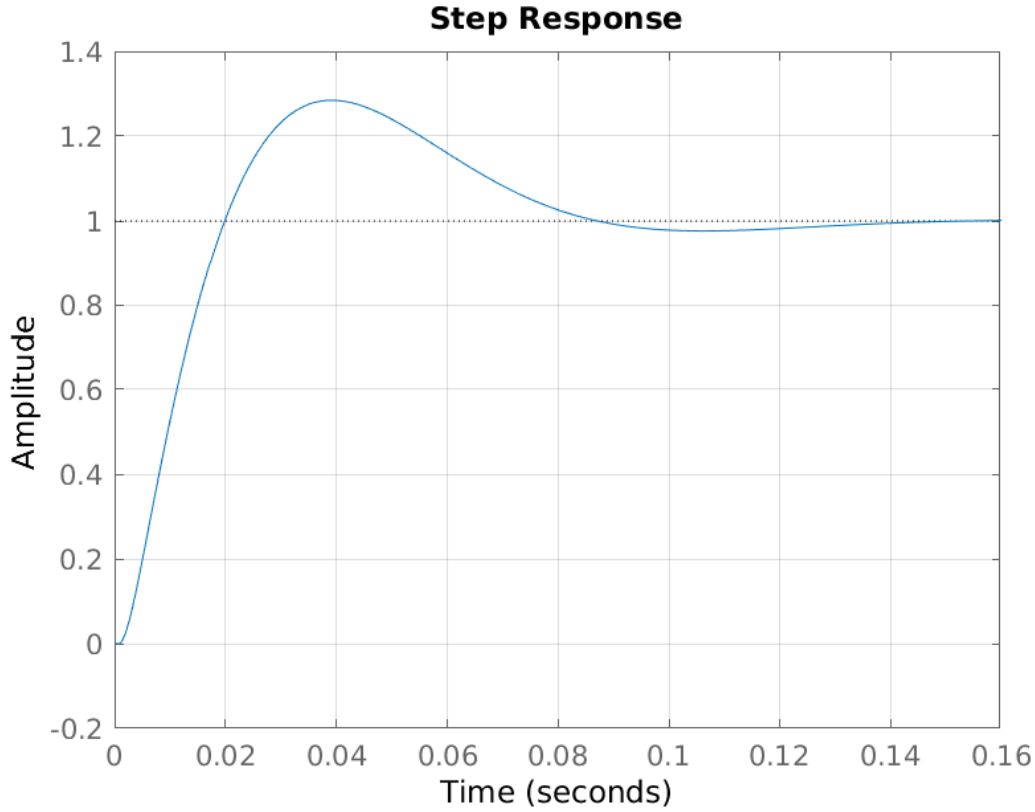


Figura 7: Resposta do sistema para degrau unitário (malha de posição).

Em seguida, vamos utilizar os parâmetros do controlador projetado analiticamente como ponto inicial do algoritmo Nelder-Mead, com função de custo análoga à utilizada anteriormente,

$$J_p(K_p, K_d) = (\omega_{b,req} - \omega_b(K_p, K_d))^2 + (PM_{req} - PM(K_p, K_d))^2$$

para refinar os ganhos afim de atender os requisitos para o sistema verdadeiro, o qual leva em conta todos os efeitos de atraso, deslocamento de frequência de cruzamento e pseudo-perturbação, representando a força contra-eletromotriz.

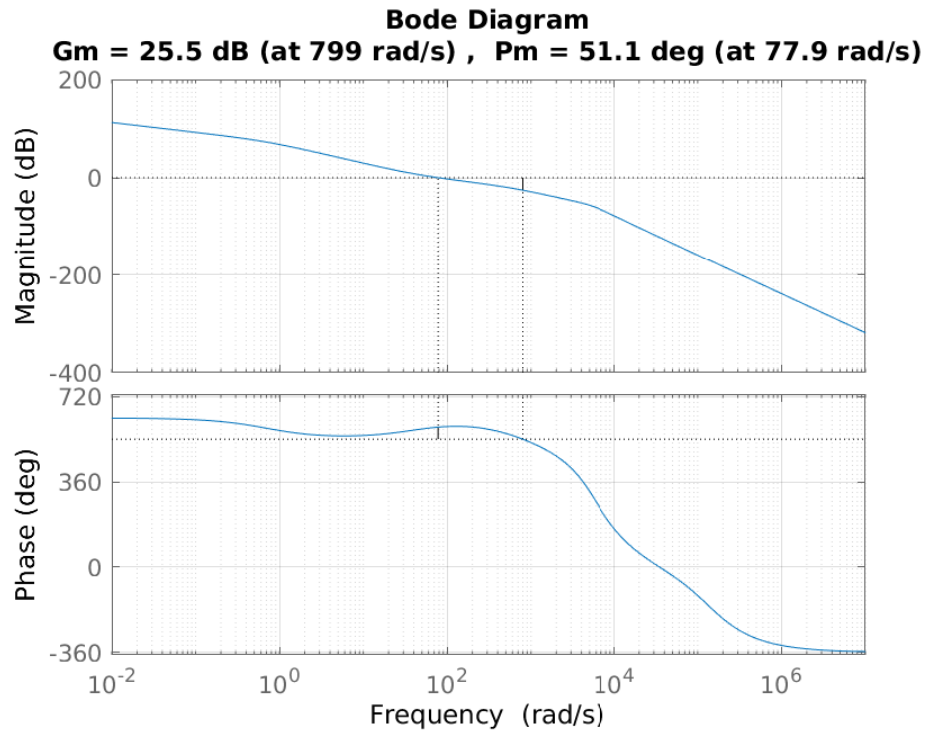


Figura 8: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha aberta, destacando as margens de estabilidade (malha de posição).

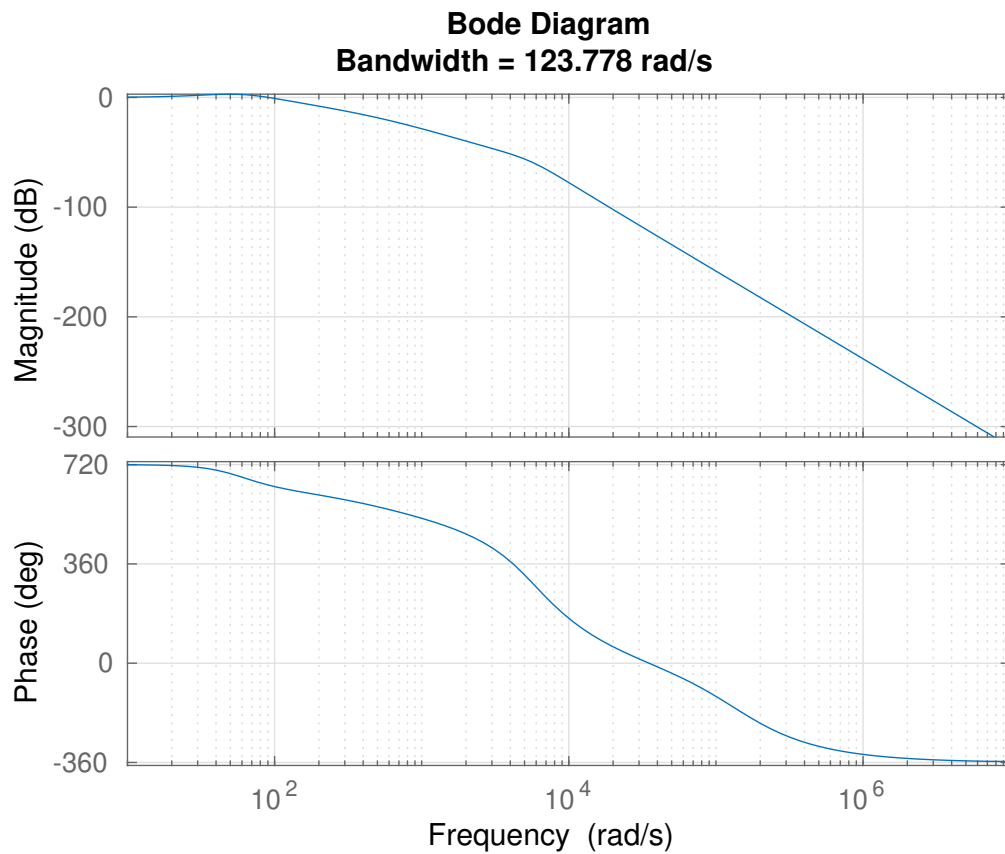


Figura 9: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha fechada, destacando a banda passante (malha de posição).

Os novos ganhos encontrados pela otimização foram $K_p = 1,0696$ e $K_d = 0,0510$, e as novas funções de transferência de malha aberta e malha fechada são:

$$\begin{aligned} G_a(s) = & (7.017e11s^8 - 1.726e17s^7 + 1.448e22s^6 - 7.91e25s^5 - 1.846e29s^4 + 1.972e33s^3 \\ & + 6.33e36s^2 + 5.078e39s + 1.006e41)/(s^{12} + 2.653e05s^{11} + 2.556e10s^{10} + 5.45e14s^9 \\ & + 5.946e18s^8 + 3.91e22s^7 + 1.641e26s^6 + 4.221e29s^5 + 6.182e32s^4 + 4.569e35s^3 \\ & + 1.258e38s^2 + 8.983e37s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_f(s) = & (7.017e11s^8 - 1.726e17s^7 + 1.448e22s^6 - 7.91e25s^5 - 1.846e29s^4 + 1.972e33s^3 \\ & + 6.33e36s^2 + 5.078e39s + 1.006e41)/(s^{12} + 2.653e05s^{11} + 2.556e10s^{10} + 5.45e14s^9 \\ & + 5.946e18s^8 + 3.91e22s^7 + 1.641e26s^6 + 4.22e29s^5 + 6.18e32s^4 + 4.589e35s^3 \\ & + 1.321e38s^2 + 5.168e39s + 1.006e41) \end{aligned}$$

Avaliando o sistema por simulação temos os gráficos das figuras 10, 11, 12, onde podemos constatar que o sistema agora atende aos requisitos de margem de fase, margem de ganho (com alguma folga), e de banda passante.

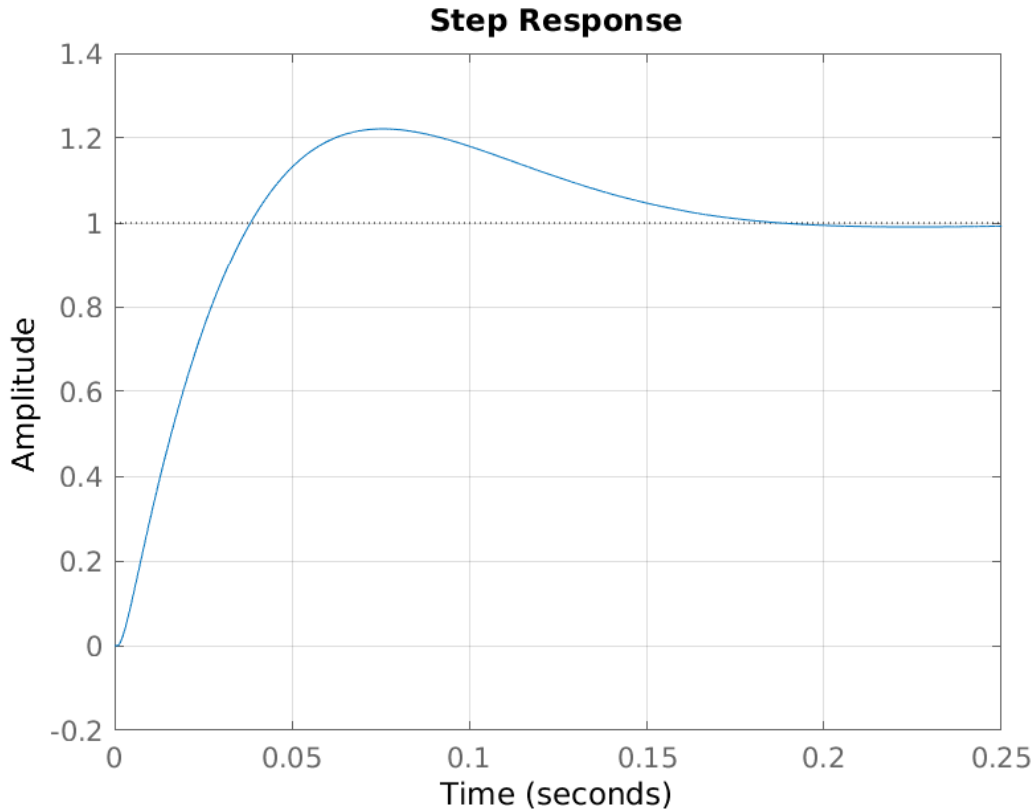


Figura 10: Resposta do sistema para degrau unitário (malha de posição).

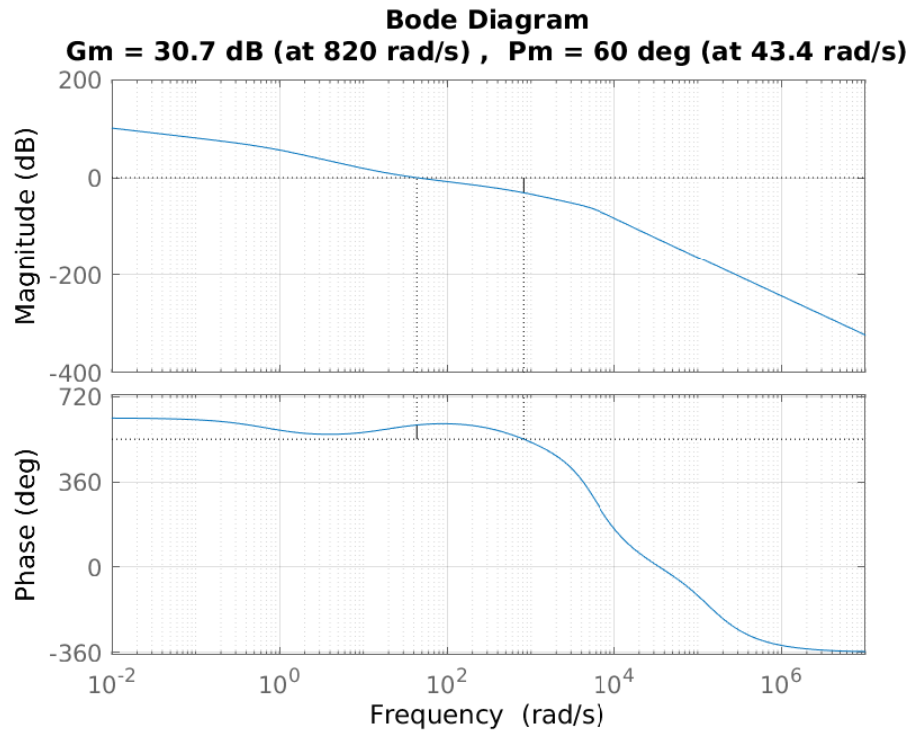


Figura 11: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha aberta, destacando as margens de estabilidade (malha de posição).

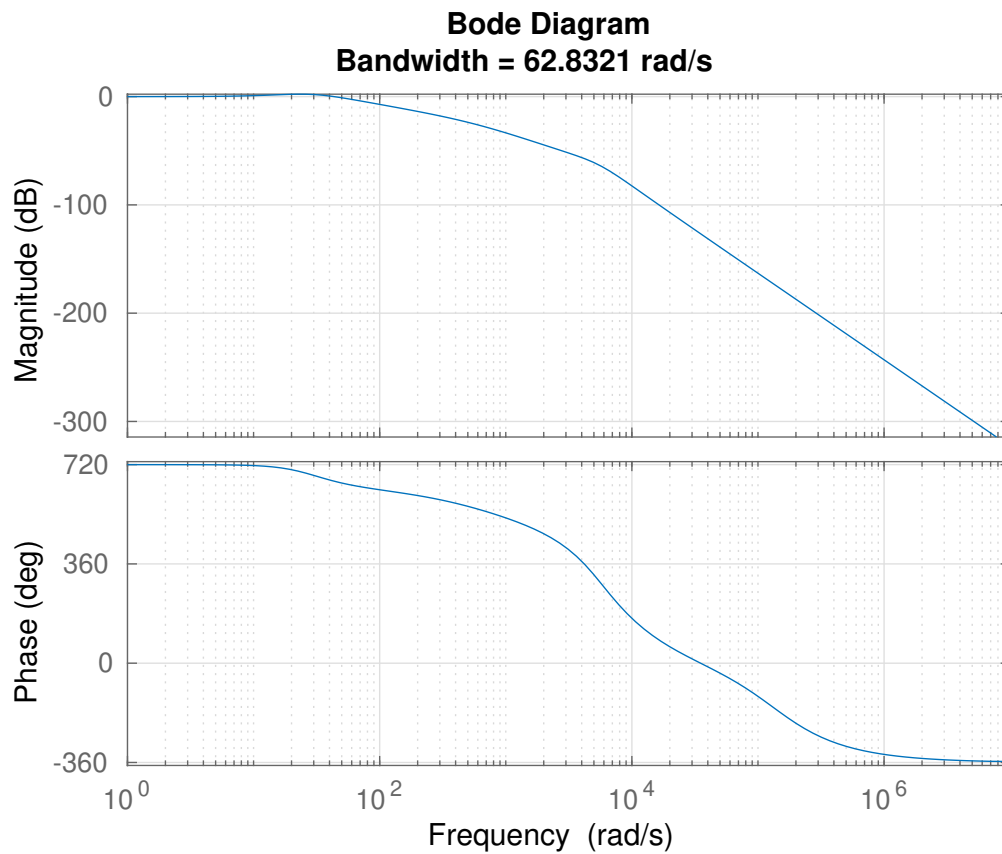


Figura 12: Diagrama de Bode da resposta em frequência de malha fechada, destacando a banda passante (malha de posição).

2 Implementação do Controlador

2.1 Implementação Digital

Para realizar a implementação digital dos compensadores nas malhas de corrente e de posição, precisamos discretizar os controladores contínuos projetados, e para isso vamos utilizar o método de Tustin.

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), C_c(s) = K \left(\frac{T_l s + 1}{\alpha T_l s + 1} \right) \cdot \frac{1}{s}, C_p(s) = K_p + K_d s \left(\frac{a}{s + a} \right) \Rightarrow$$

$$C_c(z) = \frac{K T_c}{2} \left[\frac{(T_c + 2T_l)z^2 + 2T_c z + (T_c - 2T_l)}{(T_c + 2\alpha T_l)z^2 - 4\alpha T_l z + (2\alpha T_l - T_c)} \right],$$

$$C_p(z) = \left[\frac{(2K_p + aK_p T_p + 2aK_d)z - (2K_p - aK_p T_p + 2aK_d)}{(aT_p + 2)z + (aT_p - 2)} \right]$$

Substituindo os valores dos ganhos e demais parâmetros projetados para os dois compensadores, temos

$$C_c(z) = \frac{0.3524z^2 + 0.0282z - 0.3242}{z^2 - 1.731z + 0.7313}$$

$$C_p(z) = \frac{25.43z - 24.92}{z - 0.5219}$$

2.2 Implementação do Modelo Simulink

Implementamos o modelo no Simulink e utilizamos o *script* `simularRespostaDegrau.m` para gerar os gráficos. Em relação às figuras 13 e 14, nota-se a quantização do *encoder* (quase imperceptível, já que $N_b = 10$ utilizado na simulação é elevado).

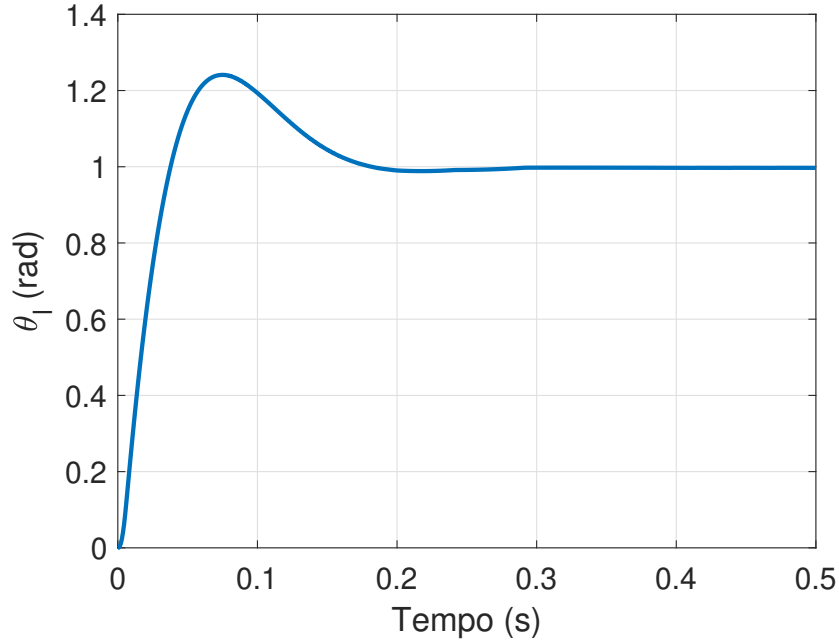


Figura 13: Posição angular na carga.

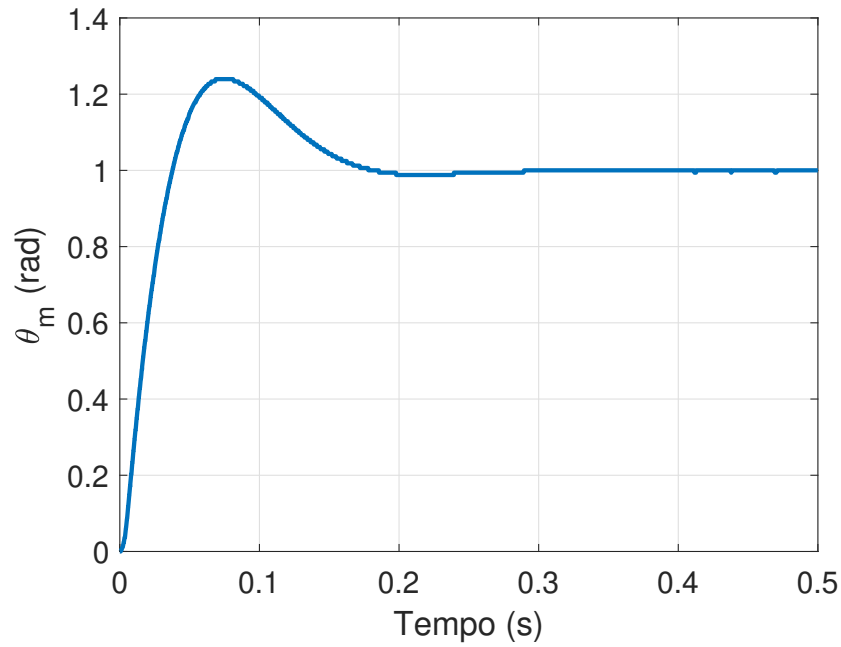


Figura 14: Posição angular medida pelo encoder (após quantização).

Note que a taxa de amostragem para discretização do controlador de corrente é 20 vezes maior que a do controlador de posição. A taxa de 1000 Hz (relativa à posição) já é elevada, de forma que é difícil enxergar a discretização. Em alguns gráficos é necessário dar bastante "zoom" para verificar.

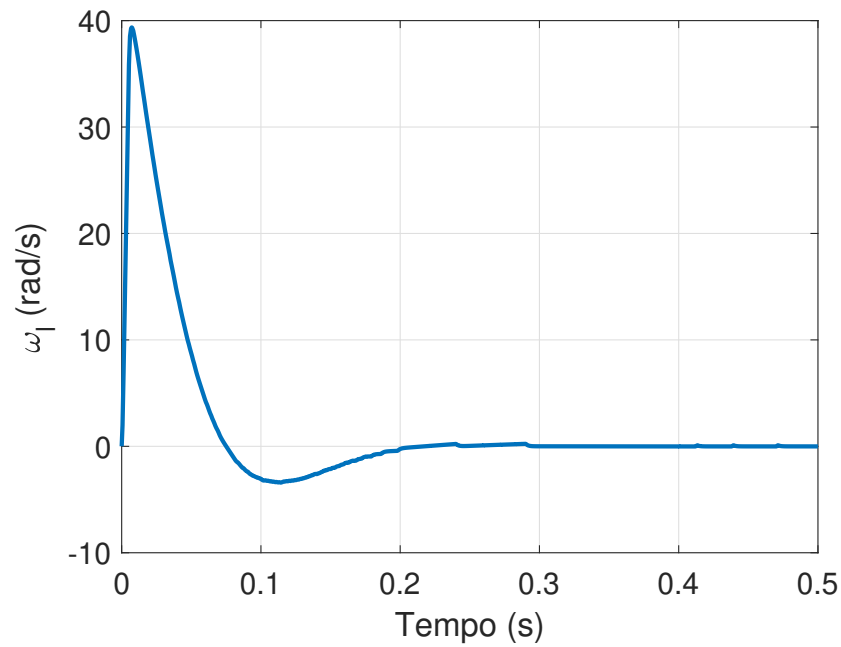


Figura 15: Velocidade angular na carga.

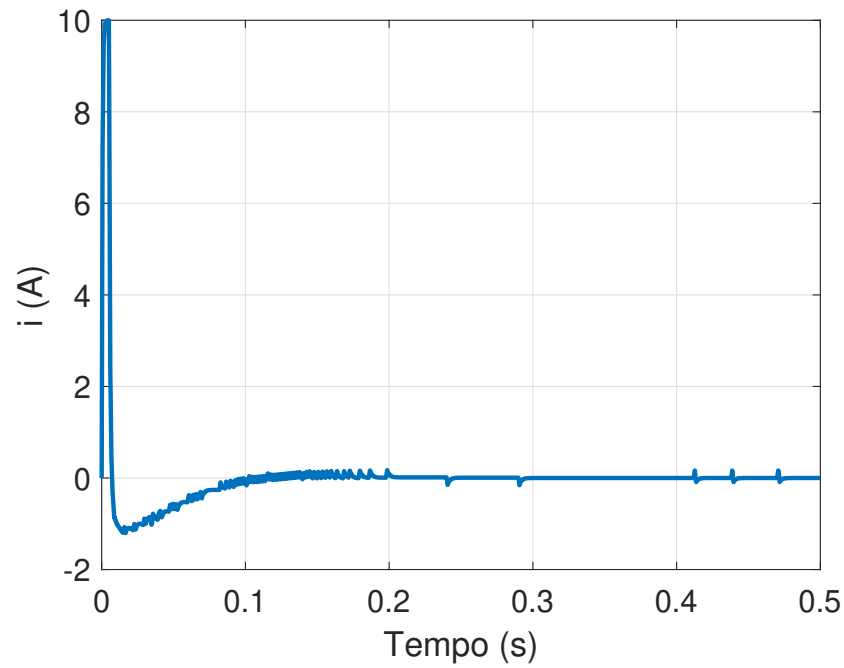


Figura 16: Corrente no circuito do motor

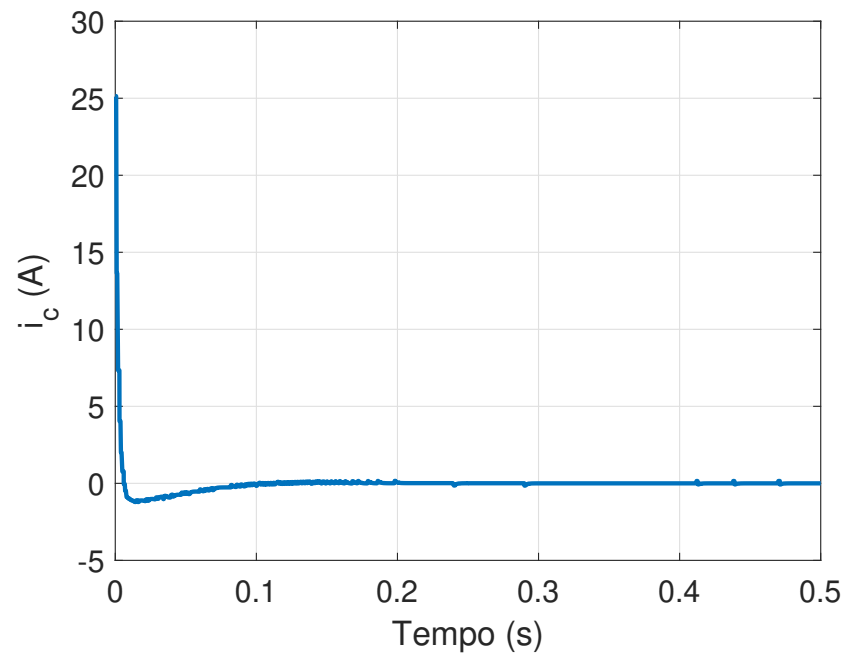


Figura 17: Corrente comandada pelo compensador de posição.

A saída V comandada pelo motor não pode ser maior do que 12V, de forma que a saturação vista na figura 18 está funcionando corretamente. O fato da tensão precisar ser saturada, pode fazer com que a referência seja atingida mais devagar do que o esperado no projeto.

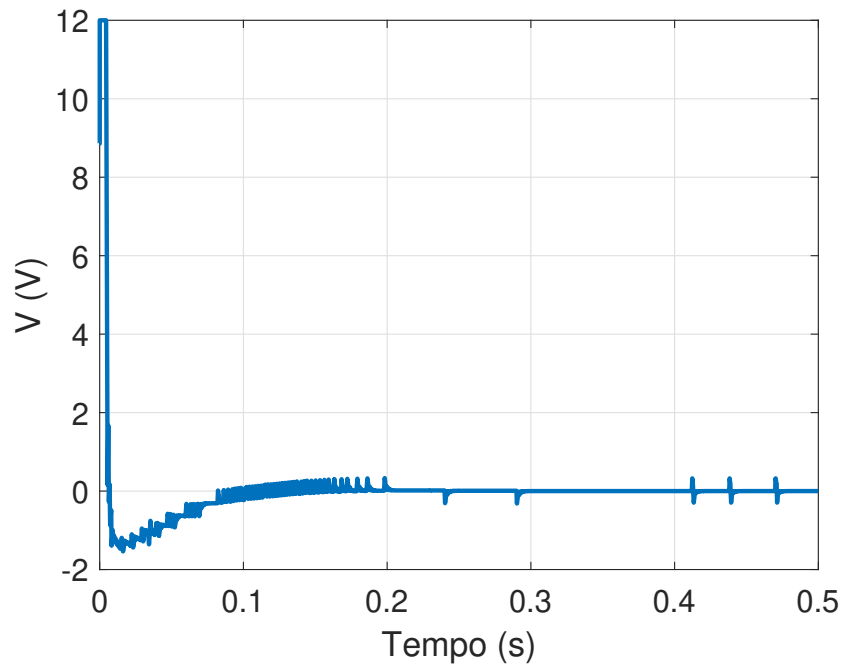


Figura 18: Tensão aplicada nos terminais do motor.

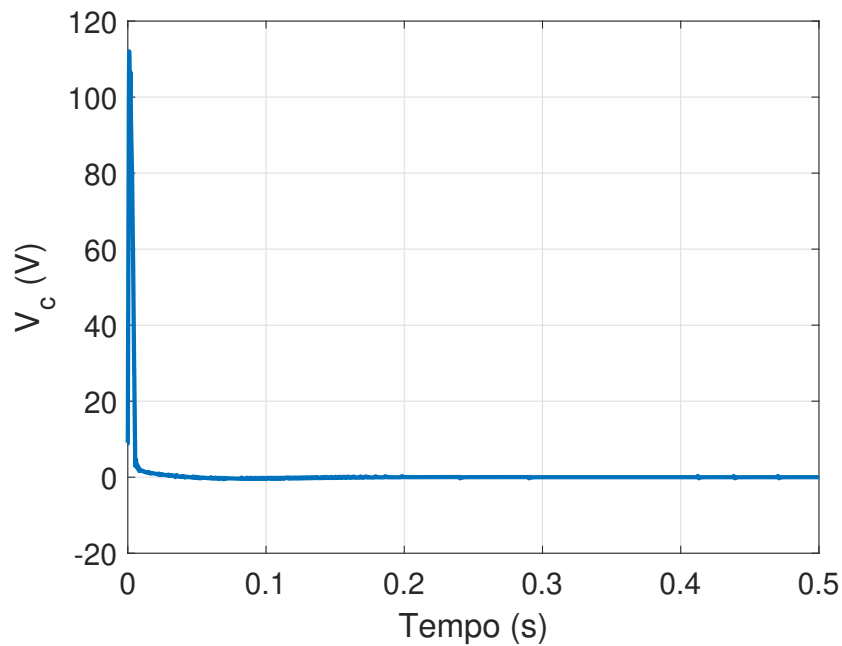


Figura 19: Tensão comandada pelo compensador de corrente.

3 Avaliação da Quantização do Encoder

Nas figuras 20 e 21, podemos ver a comparação entre a posição angular na carga e a posição medida pelo encoder. Percebemos que, conforme Q aumenta (isto é, o número de bits diminui), a posição angular medida pelo encoder fica bem diferente da posição angular na carga.

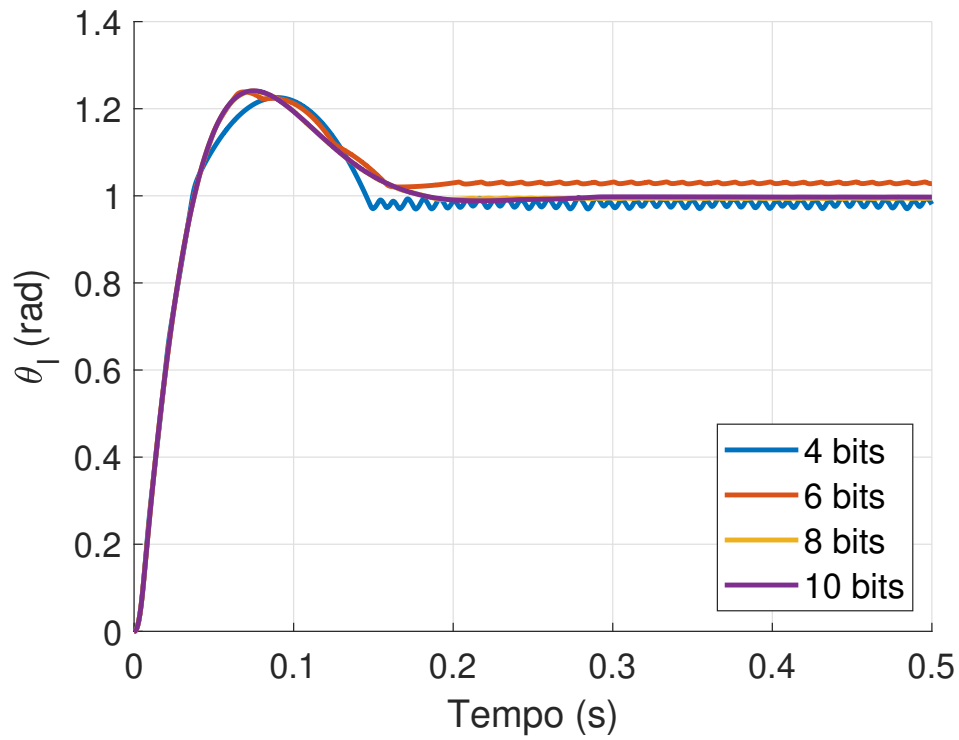


Figura 20: Posição angular na carga.

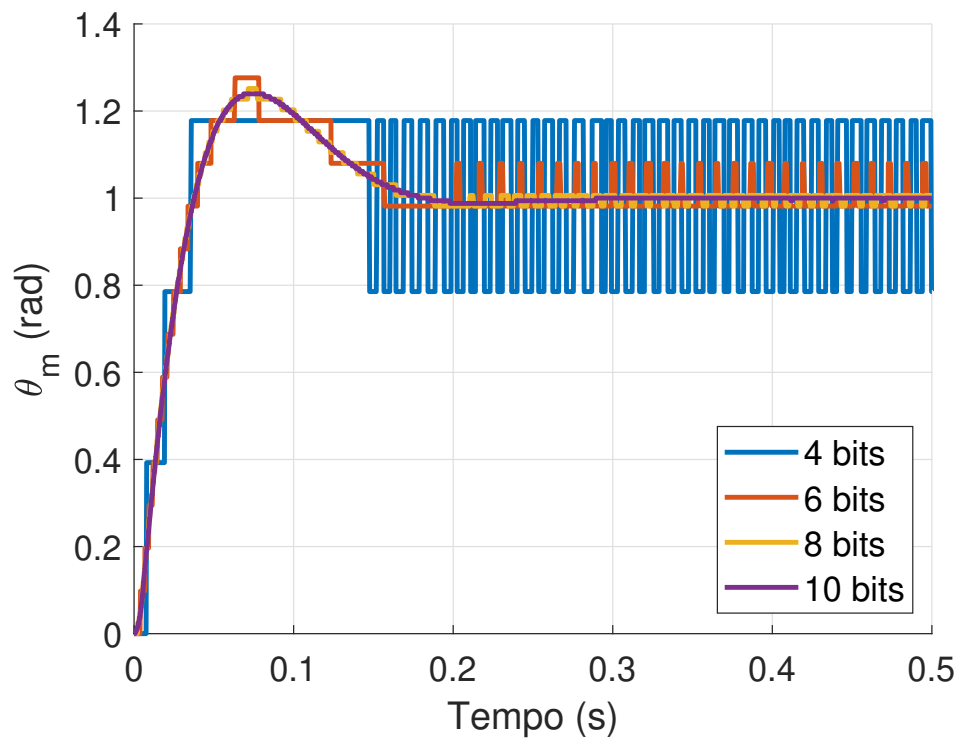


Figura 21: Posição angular medida pelo encoder.