

CMC-12 - Relatório Lab 3 - Projeto de Servomotor de Velocidade

Aluno: Bruno Costa Alves Freire

22 de Junho de 2020

1 Projeto dos Controladores

1.1 Controlador P + *feedforward*

Considerando o diagrama de blocos do controlador P + *feedforward* fornecido no roteiro do laboratório, podemos extrair as funções de transferência $G_R(s)$ e $G_D(s)$ a partir das equações:

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot K_t \cdot \frac{1}{Ls + R} \cdot (K_f(R_m) + K_p(R_m - \Omega_m) - K_t(\Omega_m)) \\ &= \frac{K_t}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)} \cdot ((K_f + K_p)R_m - (K_p + K_t)\Omega_m) \implies \\ \Omega_m &= \left(1 + \frac{K_t(K_p + K_t)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)}\right)^{-1} \frac{K_t(K_f + K_p)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)} R_m \\ &= \frac{K_t(K_f + K_p)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R) + K_t(K_p + K_t)} R_m \\ &= \frac{K_t(K_f + K_p)}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} R_m\end{aligned}$$

Donde teremos

$$G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)} = \frac{\Omega_m(s)}{R_m(s)} \cdot \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \boxed{\frac{K_t(K_f + K_p)}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)}}.$$

Para a função de transferência relativa à perturbação τ_e teremos:

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \left(\frac{T_e}{N\eta} - \frac{K_t(K_p + K_t)}{Ls + R}\Omega_m\right) \implies \\ \Omega_m &= \left(1 + \frac{K_t(K_p + K_t)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)}\right)^{-1} \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \frac{T_e}{N\eta} \\ &= \frac{Ls + R}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R) + K_t(K_p + K_t)} \cdot \frac{T_e}{N\eta} \\ &= \frac{Ls + R}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \cdot \frac{T_e}{N\eta}\end{aligned}$$

Donde teremos

$$G_D(s) = \frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} = \frac{1}{N} \frac{\Omega_m(s)}{T_e(s)} = \boxed{\frac{1}{N^2\eta} \cdot \frac{Ls + R}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)}}.$$

Agora vamos determinar os ganhos K_p e K_f de modo que o sistema tenha constante de tempo τ e erro em regime nulo para entrada degrau unitário. A princípio, vamos assumir que o efeito do indutor pode ser desprezado, i.e., $L \approx 0$, de modo que teremos:

$$\begin{aligned}
\Omega_l(s) &= \tilde{G}_R(s)R_l(s) + \tilde{G}_D(s)T_e(s) \\
&= \frac{K_t(K_f + K_p)}{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)}R_l + \frac{R}{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \cdot \frac{T_e}{N^2\eta}
\end{aligned}$$

A constante de tempo τ para o sistema de primeira ordem deve levar em conta apenas a referência de velocidade, portanto teremos $\tau = \frac{J_{eq}R}{(B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)}$, de onde podemos determinar K_p como sendo

$$K_p = \frac{J_{eq}R}{K_t\tau} - \frac{B_{eq}R}{K_t} - K_t$$

Quanto ao erro em regime, teremos:

$$\begin{aligned}
E(s) &= R_l(s) - \Omega_l(s) = (1 - \tilde{G}_R(s))R_l(s) - \tilde{G}_D(s)T_e(s) \\
&= \left(\frac{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2) - K_t(K_f + K_p)}{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \right) R_l(s) - \tilde{G}_D(s)T_e(s) \\
&= \left(\frac{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f)}{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \right) R_l(s) - \frac{R}{J_{eq}Rs + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \cdot \frac{T_e(s)}{N^2\eta} \Rightarrow \\
\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) &= \frac{B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} sR_l(s) - \frac{R}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_e(s)}{N^2\eta} \\
&= \frac{B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2}
\end{aligned}$$

Nesse caso, estamos desconsiderando o erro em regime proveniente da perturbação, o qual pode ser atenuado pelo ganho proporcional, mas não removido completamente. Retomando o cálculo do erro em regime, teremos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} = 0 \Rightarrow K_f = K_t + \frac{B_{eq}R}{K_t}$$

Note agora que, com essas escolhas para K_p e K_f , teremos erro em regime nulo mesmo sem desprezar o efeito do indutor (mas desprezando a perturbação):

$$\begin{aligned}
E(s) &= R_l(s) - \Omega_l(s) = (1 - G_R(s))R_l(s) - G_D(s)T_e(s) \\
&= \left(1 - \frac{K_t(K_f + K_p)}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \right) R_l(s) \\
&\quad - \frac{Ls + R}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)} \frac{T_e(s)}{N^2\eta} \\
\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) &= \left(1 - \frac{K_t(K_f + K_p)}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} \right) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} sR_l(s) - \frac{R}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_e(s)}{N^2\eta} \\
&= \frac{B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f}{B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2} = 0, \text{ devido à escolha de } K_f \text{ acima.}
\end{aligned}$$

1.1.1 Simulação

Com os ganhos K_p e K_f em mãos, podemos proceder a implementar o controlador. O controlador foi implementado no arquivo `projetarControladorPFeedforward.m`. A seguir, é feita uma simulação do controlador projetado para $\tau = 0,01$ s, para uma referência degrau $r_l(t) = 50$ rad/s e início em $t = 0$ s, com um distúrbio $\tau_e(t) = 0,2$ N·m e início em $t = 0.1$ s.

Temos a seguir os gráficos das saídas $\omega_m(t)$ (motor) e $\omega_l(t)$ (roda) (figura 1), além do comando de controle $V(t)$ (figura 2).

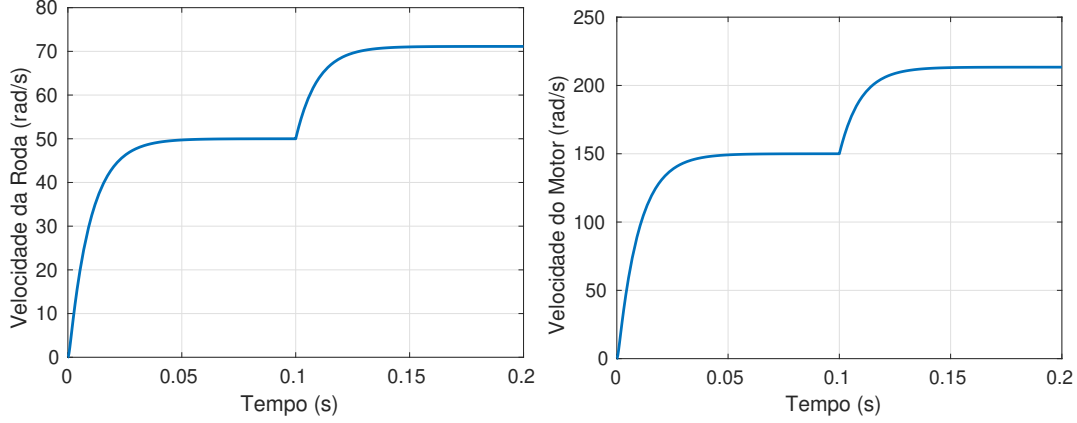


Figura 1: Velocidade angular da roda e do motor para referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador $P+feedforward$.

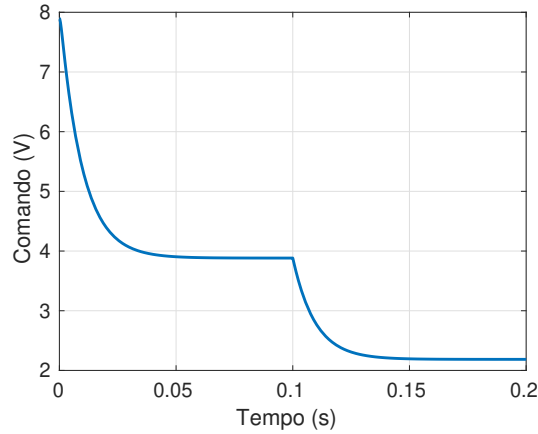


Figura 2: Comando de tensão para referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador $P+feedforward$.

Para checarmos se a relação entre as velocidades da roda e do motor condizem com o esperado, i.e., $\omega_m = N \cdot \omega_l$, com $N = 3$, temos a figura 3. Na figura 3 podemos verificar também que o erro em regime é nulo sem perturbação ($e_R = 0$), mas que o distúrbio introduz um erro em regime dado por $e_D = -\frac{R}{B_{eq}R + K_t K_p + K_t^2} \cdot \frac{\tau_{e,\infty}}{N^2 \eta}$. Os erros e_R e e_D foram calculados no desenvolvimento das equações para encontrar os ganhos, fazendo uso do teorema do valor final.

Qualitativamente, o aspecto da saída é típico de uma dinâmica de primeira ordem, tanto em relação à referência quanto ao distúrbio. Isso condiz com o esperado pois, apesar das funções de transferência G_R e G_D serem de 2ª ordem, um dos polos pode ser desprezado devido à dinâmica da corrente.

Velocidades de saída do sistema (roda e motor)

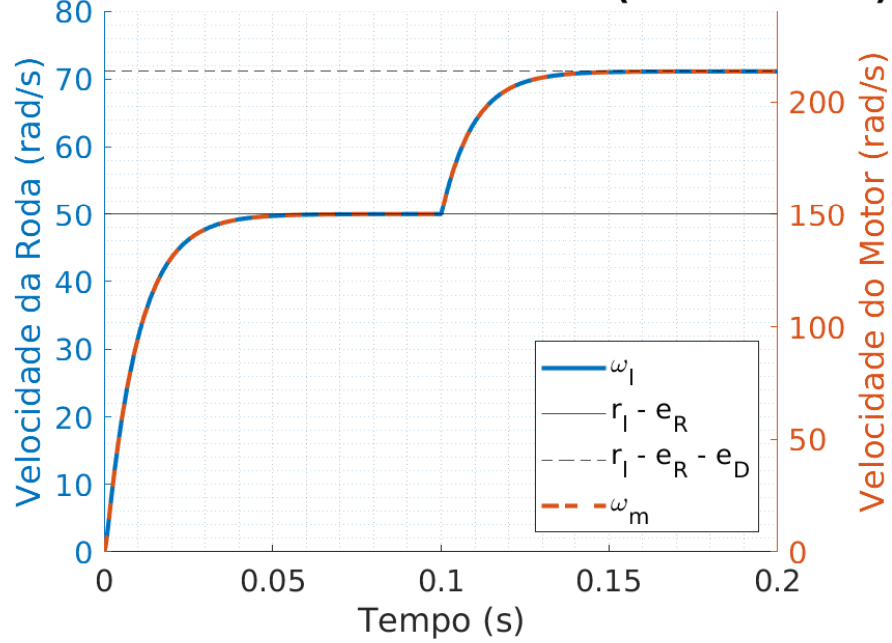


Figura 3: Comparação das velocidades de saída do sistema para uma referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador P+*feedforward*.

Para analisar a relação do comando de tensão, lembremos que, na malha P+*feedforward* temos $V(t) = (K_p + K_f)r_m(t) - K_p\omega_m(t)$. Essa relação pode ser constatada na figura 4.

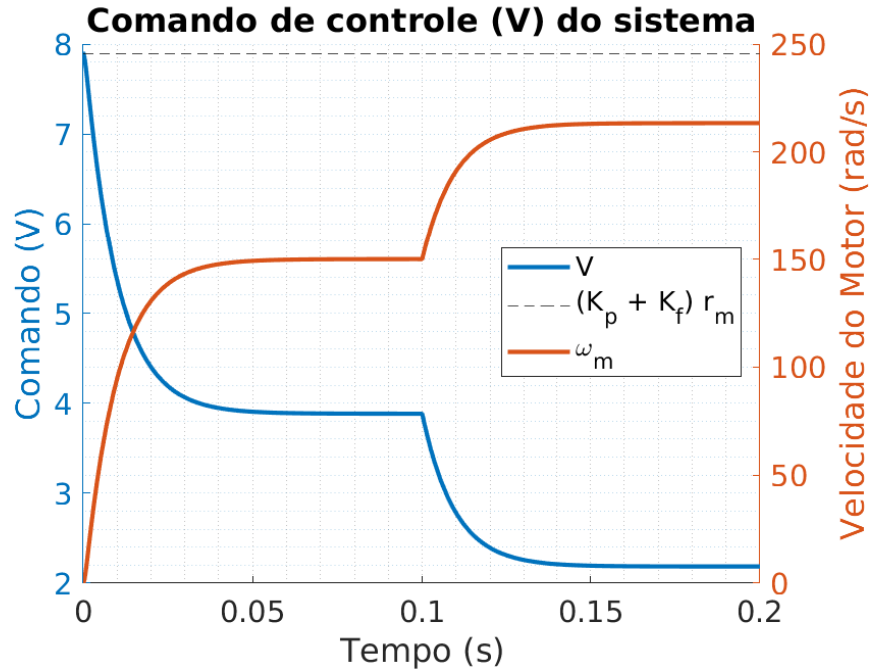


Figura 4: Comparação do comando de tensão do controlador P+*feedforward* com a saída do sistema para uma referência degrau e posterior distúrbio degrau.

1.2 Controlador PI com pré-filtro

Considerando o diagrama de blocos do controlador PI fornecido no roteiro do laboratório, podemos extrair as funções de transferência $G_R(s)$ e $G_D(s)$ a partir das equações:

$$\begin{aligned}
 \Omega_m &= \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot K_t \cdot \frac{1}{Ls + R} \cdot (C \cdot (FR_m - \Omega_m) - K_t(\Omega_m)) \\
 &= \frac{K_t}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)} \cdot (CFR_m - (C + K_t)\Omega_m) \implies \\
 \Omega_m &= \left(1 + \frac{K_t(C + K_t)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)}\right)^{-1} \frac{FCK_t}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)} R_m \\
 &= \frac{FCK_t}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R) + K_t(C + K_t)} R_m \\
 &= \frac{K_t K_i / s}{J_{eq}Ls^2 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s + (B_{eq}R + K_tC + K_t^2)} R_m \\
 &= \frac{K_t K_i}{J_{eq}Ls^3 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s^2 + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)s + K_tK_i} R_m
 \end{aligned}$$

Donde teremos

$$G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)} = \frac{\Omega_m(s)}{R_m(s)} \cdot \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} = \boxed{\frac{K_t K_i}{J_{eq}Ls^3 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s^2 + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)s + K_tK_i}}.$$

Para a função de transferência relativa à perturbação τ_e teremos:

$$\begin{aligned}
 \Omega_m &= \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \left(\frac{T_e}{N\eta} - \frac{K_t(C + K_t)}{Ls + R} \Omega_m \right) \implies \\
 \Omega_m &= \left(1 + \frac{K_t(C + K_t)}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R)}\right)^{-1} \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \cdot \frac{T_e}{N\eta} \\
 &= \frac{Ls + R}{(J_{eq}s + B_{eq})(Ls + R) + K_t(C + K_t)} \cdot \frac{T_e}{N\eta} \\
 &= \frac{Ls^2 + Rs}{J_{eq}Ls^3 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s^2 + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)s + K_tK_i} \cdot \frac{T_e}{N\eta}
 \end{aligned}$$

Donde teremos

$$G_D(s) = \frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} = \frac{1}{N} \frac{\Omega_m(s)}{T_e(s)} = \boxed{\frac{1}{N^2\eta} \cdot \frac{Ls^2 + Rs}{J_{eq}Ls^3 + (J_{eq}R + B_{eq}L)s^2 + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)s + K_tK_i}}.$$

Agora vamos determinar os ganhos K_p e K_i para que o sistema atenda os requisitos de tempo de subida de 0 a 100%, $t_r|_0^{100\%}$, e de sobressinal M_p . A princípio, vamos desprezar o efeito do indutor, i.e., $L \approx 0$, de modo que teremos, sem perturbação:

$$\begin{aligned}
 \Omega_l(s) &\simeq \tilde{G}_R(s)R_l(s) = \frac{K_t K_i}{J_{eq}Rs^2 + (B_{eq}R + K_tK_p + K_t^2)s + K_tK_i} R_l(s) \\
 &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} R_l(s), \text{ na forma de sistema de 2ª ordem padrão.}
 \end{aligned}$$

Sabemos que os requisitos $t_r|_0^{100\%}$ e M_p se relacionam aos coeficientes do sistema de 2ª ordem padrão pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\ t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \\ \omega_n = \frac{\pi - \arccos \xi}{t_r|_0^{100\%} \sqrt{1-\xi^2}} \end{array} \right.$$

Dessa forma nos resta apenas relacionar os ganhos K_p e K_i com os coeficientes ξ e ω_n :

$$\begin{cases} \omega_n^2 &= \frac{K_t K_i}{J_{eq} R} \\ 2\xi\omega_n &= \frac{B_{eq} R + K_t^2 + K_t K_p}{J_{eq} R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_i &= \frac{J_{eq} R}{K_t} \omega_n^2 \\ K_p &= \frac{2\xi\omega_n J_{eq} R - B_{eq} R - K_t^2}{K_t} \end{cases}$$

Agora, vamos mostrar que o sistema projetado não apresenta erro em regime para entrada degrau e nem para perturbação degrau, mesmo considerando a dinâmica da corrente, ou seja, $L \neq 0$.

$$\begin{aligned} E(s) &= R_l(s) - \Omega_l(s) = (1 - G_R(s))R_l(s) - G_D(s)T_e(s) \\ &= \left(1 - \frac{K_t K_i}{J_{eq} L s^3 + (J_{eq} R + B_{eq} L) s^2 + (B_{eq} R + K_t K_p + K_t^2) s + K_t K_i}\right) R_l(s) \\ &\quad - \frac{L s^2 + R s}{J_{eq} L s^3 + (J_{eq} R + B_{eq} L) s^2 + (B_{eq} R + K_t K_p + K_t^2) s + K_t K_i} \frac{T_e(s)}{N^2 \eta} \end{aligned}$$

Note que ambas as funções de transferência $G_R(s)$ e $G_D(s)$ possuem um zero na origem, de modo que ao calcular o erro em regime teremos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \underbrace{\left(1 - \frac{K_t K_i}{K_t K_i}\right)}_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} sR_l(s) \cdot \frac{1}{K_t K_i} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} sT_e(s) = 0$$

1.2.1 Simulação

Com os ganhos K_p e K_i em mãos, podemos proceder a implementar o controlador. O controlador foi implementado no arquivo `projetarControladorPI.m`. A seguir, é feita uma simulação do controlador projetado para $t_r|_0^{100\%} = 0,02$ s e $M_p = 0,046$, e as mesmas configurações de referência e distúrbio da seção anterior. Temos a seguir novamente os gráficos das saídas $\omega_m(t)$ (motor) e $\omega_l(t)$ (roda) (figura 5), além do comando de controle $V(t)$ (figura 6).

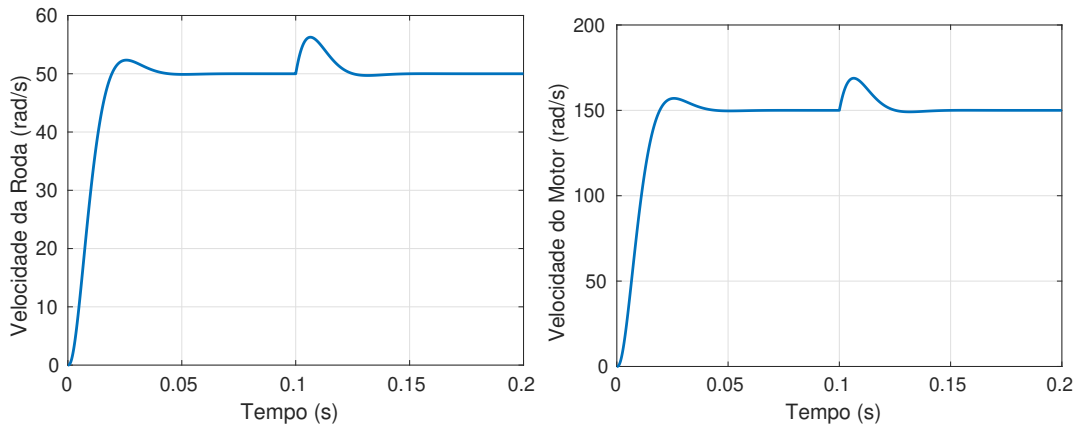


Figura 5: Velocidade angular da roda e do motor para referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador PI.

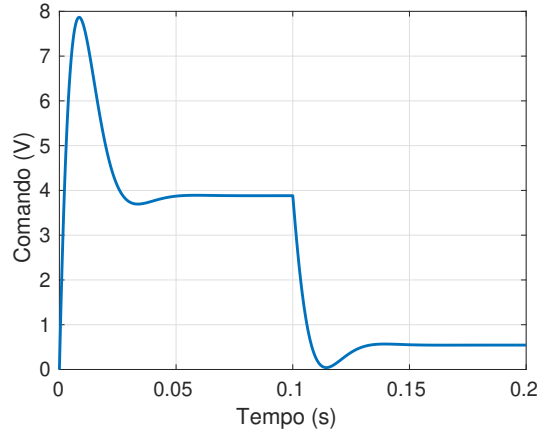


Figura 6: Comando de tensão para referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador PI.

Para verificarmos que o sistema atende os requisitos de tempo de subida e sobressinal, temos a figura 7. Na figura 7 podemos verificar também que o erro em regime é nulo tanto para a referência degrau quanto para a perturbação degrau.

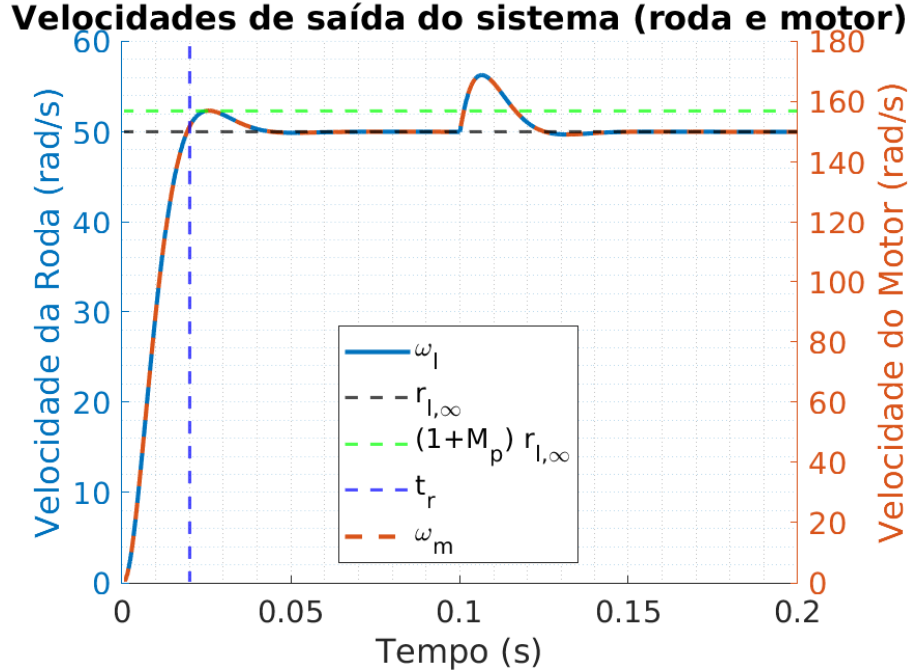


Figura 7: Análise das velocidades de saída do sistema para uma referência degrau e posterior distúrbio degrau para o controlador PI.

Agora para analisar o comando de tensão, lembremos que na malha do controlador PI, $V(s) = C(s)F(s)R_m(s) - C(s)\Omega_m(s)$. O termo do controlador PI responsável por eliminar o erro em regime é o K_i , pois ele é o responsável por introduzir um zero na origem em G_D , além de que, sem o mesmo, a função G_R seria nula, de modo que haveria erro em regime devido à própria referência. O ganho K_p por outro lado poderia ser removido sem comprometer o erro em regime.

Na figura 8 temos o comando $V(t)$ decomposto em uma parte devida a K_p e outra devida a K_i . Nessa figura é possível perceber que, após a perturbação ser ativada, o termo devido ao ganho integrativo se altera permanentemente, para compensar a perturbação, ao passo que o termo devido a K_p retorna ao nível anterior.

Dessa análise podemos concluir que a tensão comandada precisa cancelar o distúrbio τ_e , e o amortecimento próprio do sistema.

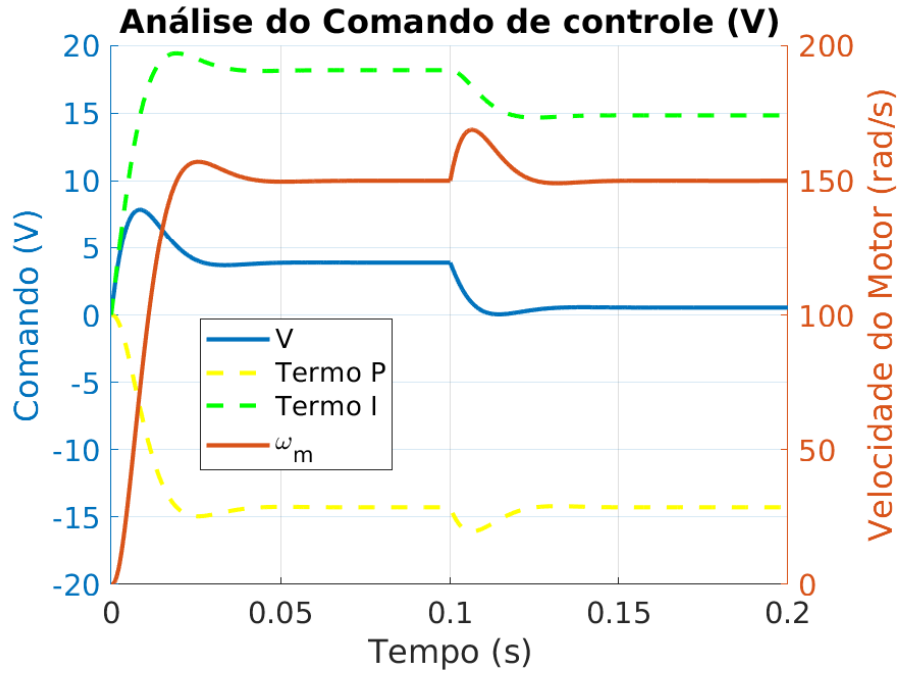


Figura 8: Comparação do comando de tensão do controlador PI com a saída do sistema para uma referência degrau e posterior distúrbio degrau.

1.3 Aproximação por polos dominantes

Para justificar as aproximações realizadas nas seções anteriores a respeito da indutância L , fazemos a análise do comportamento do sistema conforme variamos esse parâmetro.

Na figura 9 temos os polos da função de transferência para diferentes valores de L .

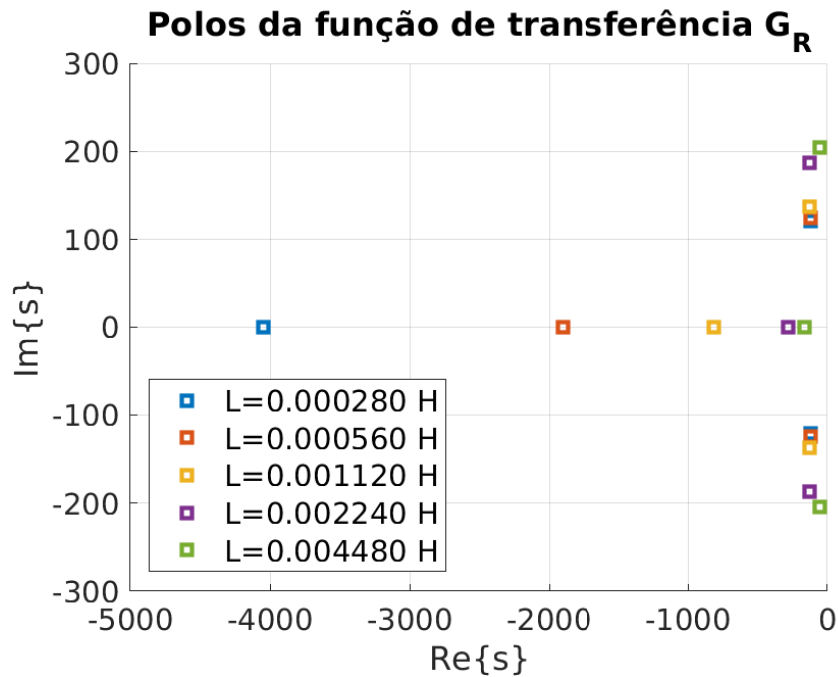


Figura 9: Localização dos polos da função de transferência do controlador PI para diferentes valores da indutância L .

Pela figura podemos ver que conforme L aumenta, os polos se aproximam do eixo imaginário, diminuindo a estabilidade do sistema e invalidando a aproximação por polos dominantes. Para valores mais baixos de L , um dos polos fica muito mais afastado no SPE, podendo assim ser desprezado.

Na figura 10 temos a resposta ao degrau do sistema com o controlador PI, para diferentes valores de L . Note que para valores baixos de L , a resposta ao degrau condiz com o esperado pela aproximação por polos dominantes, pois um dos polos está muito distante dentro do SPE, e os requisitos de tempo de subida e sobressinal são atendidos corretamente. Porém, quando L aumenta, o sistema começa a ficar instável, com oscilações mais rápidas e intensas, ilustrando o comportamento do sistema quando os polos se aproximam do eixo imaginário, e eventualmente deixando de atender ao requisitos do projeto.

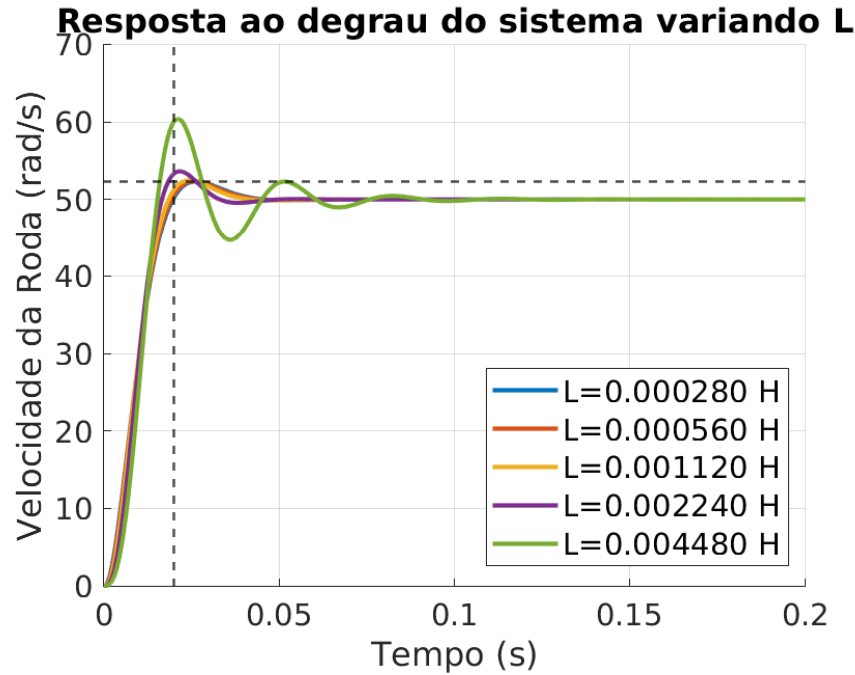


Figura 10: Análise da resposta ao degrau do controlador PI para diferentes valores da indutância L .

Note que a posição dos polos depende também dos valores dos ganhos do controlador. Analisamos agora a influência do requisito de tempo de subida, o qual determina parcialmente os ganhos projetados.

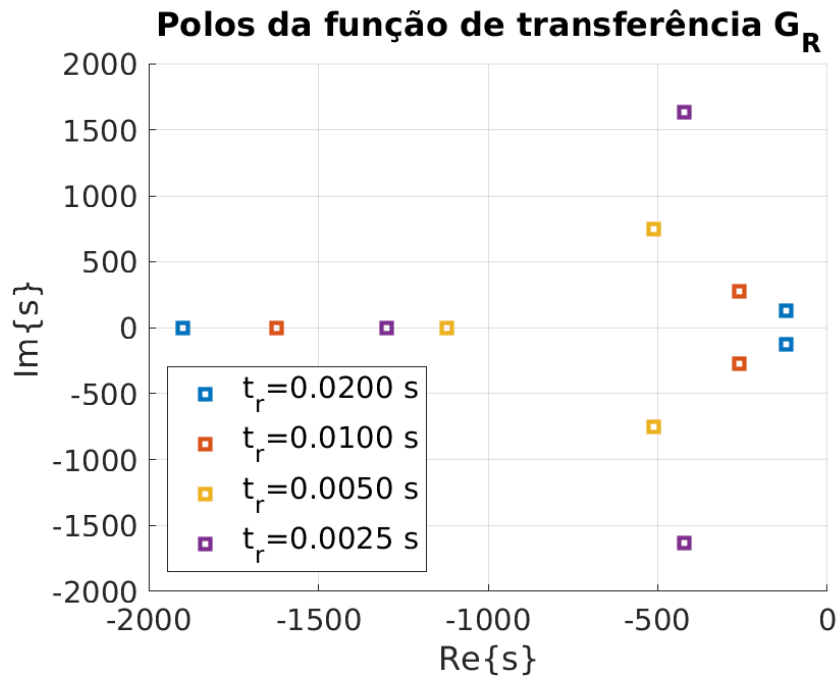


Figura 11: Localização dos polos da função de transferência do controlador PI para diferentes valores do requisito de tempo de subida.

Recorde que, das equações dos ganhos K_p e K_i , uma vez que apenas ω_n depende (inversamente) de $t_r|_0^{100\%}$, e ambos os ganhos dependem (diretamente) de ω_n , temos que ambos os ganhos dependem inversamente do tempo de subida.

Na figura 11 temos os polos da função de transferência para diferentes valores de $t_r|_0^{100\%}$. Conforme $t_r|_0^{100\%}$ diminui, os ganhos aumentam e podemos notar que os polos tendem a ficar menos afastados, invalidando a aproximação. Para $t_r|_0^{100\%}$ maior, os ganhos são menores e dessa forma podemos concluir que ganhos muito altos tendem a estimular dinâmicas de ordem mais alta que antes seriam desprezíveis.

Na figura 12 temos a resposta ao degrau do sistema com o controlador PI, para diferentes valores de $t_r|_0^{100\%}$. Note que para valores altos do tempo de subida o sistema se comporta conforme esperado e consegue atender ao requisito de sobressinal razoavelmente. Conforme o tempo de subida diminui, o sistema perde amortecimento e oscila mais, e já não consegue mais atender ao requisito de sobressinal.

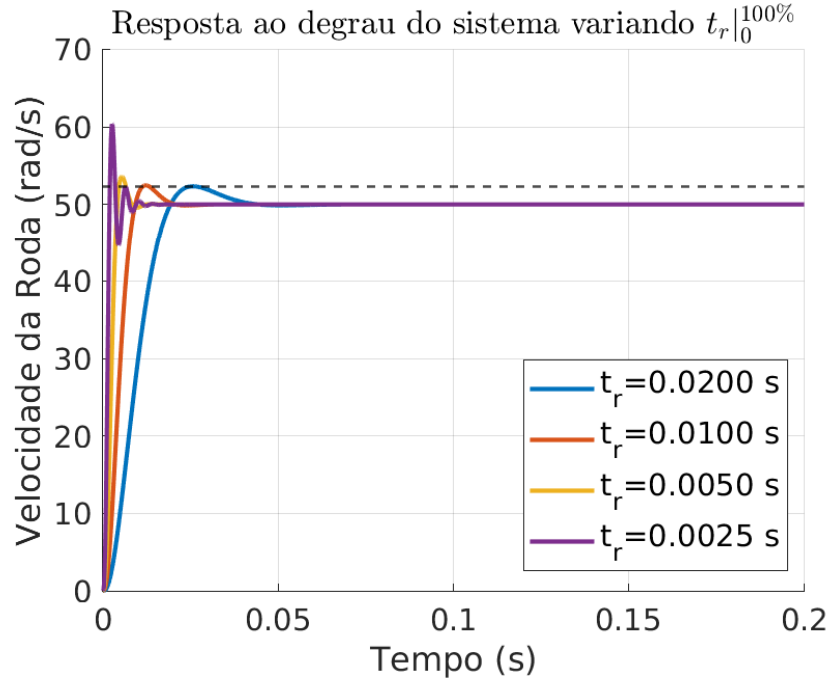


Figura 12: Análise da resposta ao degrau do controlador PI para diferentes valores do requisito de tempo de subida.

2 Implementação Digital

Nesta seção avaliamos o processo de discretização do controlador PI, projetado para atender aos mesmos requisitos de tempo de subida e sobressinal da seção anterior, e o simulamos para a mesma entrada degrau, sem perturbações. O foco desta análise é avaliar o desempenho do controlador em função da taxa de amostragem utilizada na discretização.

Nas figuras 13 e 14, temos os gráficos da velocidade da roda e da tensão comunicada ao motor pelo controlador discretizado, respectivamente. É bastante visível que uma baixa frequência de amostragem compromete muito o desempenho do sistema, não apenas inviabilizando o atendimento dos requisitos como também conferindo ao sistema um comportamento brusco. Mesmo assim, o sistema ainda aparenta não possuir erro em regime.

Conforme a frequência de amostragem aumenta, o sistema começa a apresentar o comportamento esperado, e a discretização se torna quase imperceptível na saída.

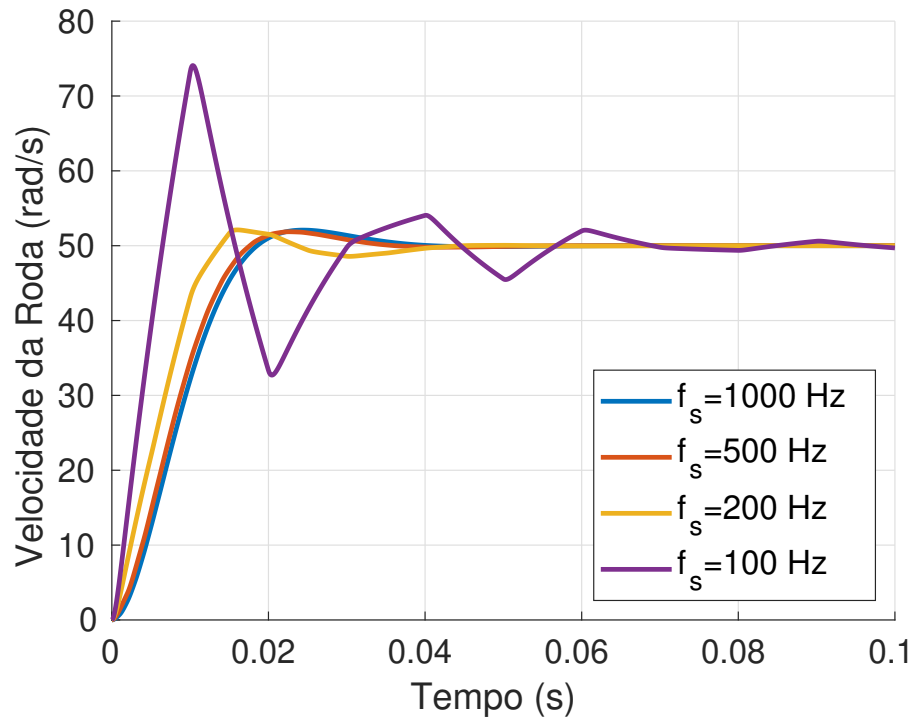


Figura 13: Saída do sistema com controlador PI discretizado.

A respeito do comando de controle, note que a baixa frequência de amostragem faz com que um comando seja mantido por muito tempo além do momento em que ele seria adequado, o que ocasiona o comportamento instável na saída (oscilações e sobressinal). Conforme a frequência aumenta, esse problema é reduzido e o desempenho do sistema melhora.

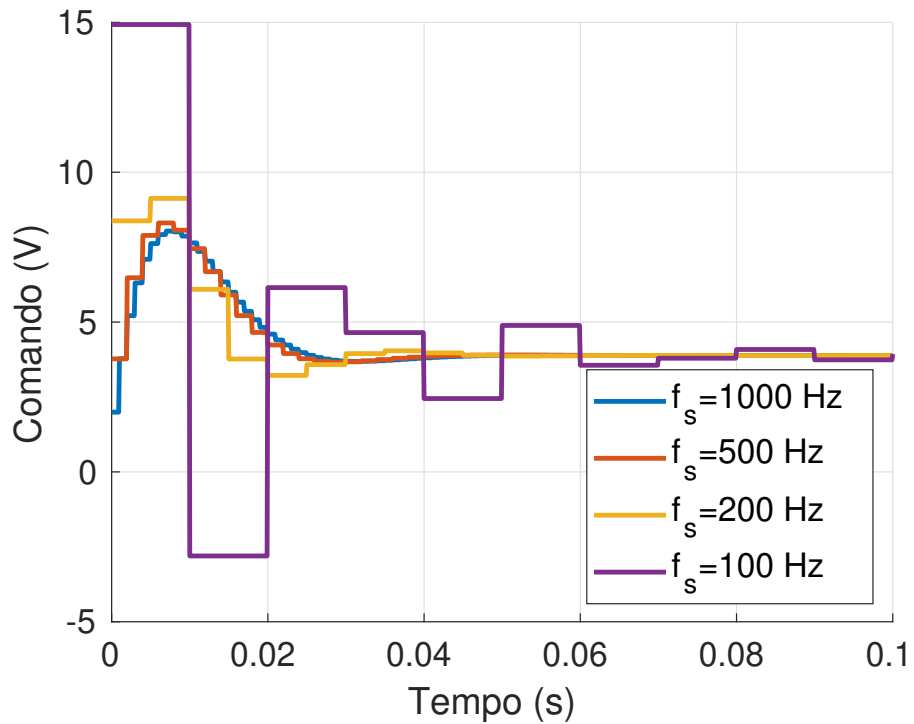


Figura 14: Comando de controle V do controlador PI discretizado.

3 Projeto de anti-*windup*

Nesta seção discutimos o problema de *windup*, que ocorre ao se aplicar um modelo linear sem levar em conta a *saturação do atuador*. Para resolver esse problema, podemos simplesmente implementar a saturação no controlador digital, tornando o controlador essencialmente não linear.

Para avaliar a efetividade da implementação anti-*windup*, simulamos o controlador com e sem esse mecanismo. Na figura 15 temos a comparação entre as saídas do controlador com e sem o mecanismo anti-*windup*, e na figura 16 temos a comparação dos comandos de tensão. Note que o sistema ficou ligeiramente mais lento, mas muito mais estável, reduzindo bastante o sobressinal e as oscilações.

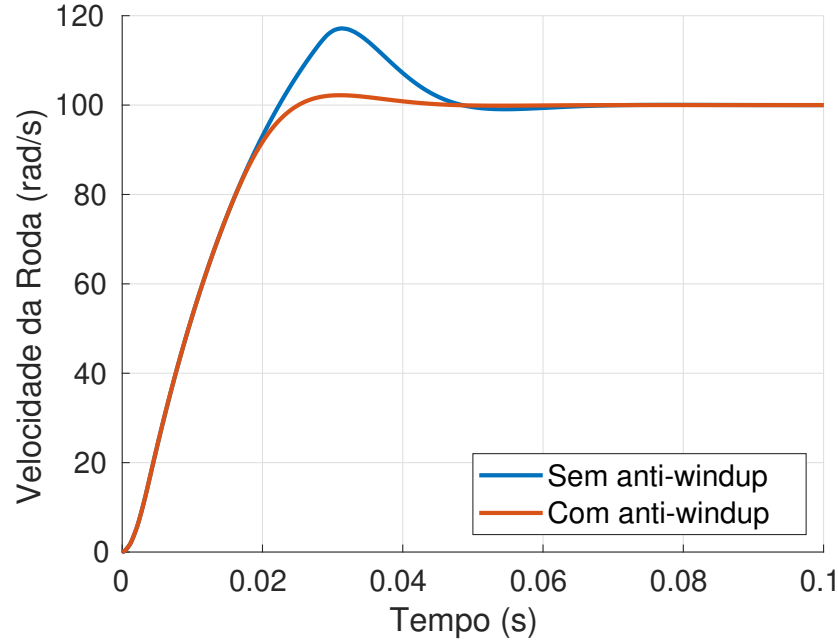


Figura 15: Saída do sistema com controlador PI discretizado.

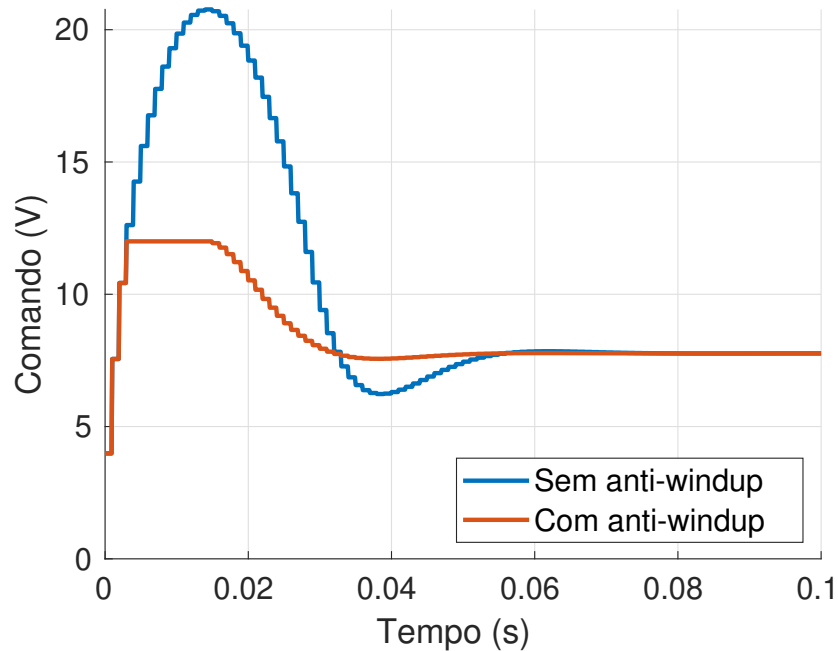


Figura 16: Comando de controle V do controlador PI discretizado.

No comando de tensão podemos notar a saturação implementada no anti-*windup*, o que resolve o problema de *windup* do comando de controle ocasionado pelo ganho integrativo.