Cap. 7.2 - Métodos de Runge-Kutta

Métodos Numéricos - EQE 358

José R. Torraca[1]

[1]EPQB/UFRJ,

joseneto@eq.ufrj.br

18 June 2025

Métodos de Runge-Kutta

Motivação para os Métodos de Runge-Kutta

- No método de Euler, usamos apenas a derivada no início do intervalo para estimar y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- Essa aproximação pode ser imprecisa se $f(t, y)$ variar muito no intervalo.

Métodos de Runge-Kutta

- **Ideia dos métodos de Runge-Kutta:** usar uma média ponderada de várias estimativas da derivada dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$.
- São métodos de **passo simples**, que calculam y_{n+1} apenas com base em t_n e y_n.
- Permite melhorar a precisão sem precisar calcular derivadas de ordem superior.

Métodos de Runge-Kutta

A forma geral do método explícito de Runge-Kutta é:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} w_j g_j$$

onde cada estágio g_j é obtido por:

$$g_j = f\left(t_n + c_j h,\ y_n + h \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} g_k\right)$$

Métodos de Runge-Kutta

- Cada g_j é uma estimativa da derivada $f(t, y)$ em um ponto do intervalo.
- São chamados de **estágios** porque são calculados sequencialmente.
- Exemplo no RK4:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_n, y_n) \\
g_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},\; y_n + \frac{h}{2} g_1\right) \\
g_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},\; y_n + \frac{h}{2} g_2\right) \\
g_4 &= f(t_n + h,\; y_n + h g_3)
\end{aligned}
$$

- Esses valores são combinados para estimar y_{n+1}:

$$
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)
$$

Tabela de Butcher – Interpretação

- Organiza os coeficientes do método de Runge-Kutta.
- Forma geral com ν estágios:

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_\nu & a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \\
\hline
 & w_1 & w_2 & \dots & w_\nu
\end{array}
$$

- c_j indica define o ponto de avaliação no tempo (deslocamento relativo ao passo h).
- a_{jk} define como os estágios anteriores g_k são usados.
- w_j define a combinação final das derivadas g_j.

Como Interpretar a Tabela de Butcher

Tabela de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_\nu & a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \\ \hline & w_1 & \cdots & w_\nu \end{array}$$

Como ela gera as equações:

- Cada linha da parte de cima define um estágio g_j:

$$g_j = f\left(t_n + \mathbf{c_j} h,\ y_n + h\sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{a_{jk}} g_k\right)$$

- A linha de baixo define a combinação final:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{\nu} \mathbf{w_j} g_j$$

Runge-Kutta de Primeira Ordem (Euler Explícito)

- O método de Euler Explícito é um caso particular do método de Runge-Kutta com $\nu = 1$.
- Sua fórmula é:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- Coeficientes de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Runge-Kutta de Primeira Ordem (Euler Implícito)

- Também é um caso particular de Runge-Kutta com $\nu = 1$.
- Sempre que existir um valor não-nulo sobre a diagonal da matriz, será um método **implícito**.
- A fórmula envolve y_{n+1} no lado direito:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

- Coeficientes de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Runge-Kutta de Segunda Ordem – Ponto Médio

- Estima a derivada no ponto médio do intervalo.
- Também conhecido como RK2 Modificado.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_n, y_n) \\
g_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hg_1) \\
y_{n+1} &= y_n + h \cdot g_2
\end{aligned}
$$

- Coeficientes de Butcher:

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

Runge-Kutta de Segunda Ordem – Heun

- Estima a derivada média entre o início e o fim do intervalo.
- Também conhecido como Euler Aprimorado (Heun).

$$\begin{aligned} g_1 &= f(t_n, y_n) \\ g_2 &= f(t_n + h, y_n + hg_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{2}(g_1 + g_2) \end{aligned}$$

- Coeficientes de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Runge-Kutta de Terceira Ordem

- Melhora a precisão com três avaliações da função f.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_n, y_n) \\
g_2 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hg_1\right) \\
g_3 &= f\left(t_n + h, y_n - hg_1 + 2hg_2\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(g_1 + 4g_2 + g_3)
\end{aligned}
$$

- Coeficientes de Butcher:

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 4/6 & 1/6
\end{array}
$$

Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4)

- Um dos métodos mais utilizados devido ao bom equilíbrio entre precisão e custo computacional.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_n, y_n) \\
g_2 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hg_1\right) \\
g_3 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hg_2\right) \\
g_4 &= f(t_n + h, y_n + hg_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)
\end{aligned}
$$

- Coeficientes de Butcher:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}
$$

Análise do Erro

Erro Local e Erro Global

- **Erro por passo (local)**: diferença entre a solução exata $y(t_{n+1})$ e a aproximação y_{n+1}.

$$e_{\text{passo}} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

- **Erro global**: diferença entre a solução exata e a numérica, acumulando os erros em todos os passos.

$$e_{\text{global}} = y(t_n) - y_n$$

Obs: Em um método de ordem p, o erro global $\mathcal{O}(h^p)$ geralmente é de uma ordem inferior ao erro local $\mathcal{O}(h^{p+1})$.

Ordem de Precisão dos Métodos de Runge-Kutta

Exemplos

- Euler: ordem 1 $\Rightarrow$ erro global $\mathcal{O}(h)$
- RK2 (Euler melhorado/Heun): ordem 2 $\Rightarrow$ erro global $\mathcal{O}(h^2)$
- RK4: ordem 4 $\Rightarrow$ erro global $\mathcal{O}(h^4)$

Obs: métodos de maior ordem permitem maior precisão com passos maiores.

Comparação de Métodos de Runge-Kutta

Método	Ordem	Erro Global
Euler (RK1)	1	$\mathcal{O}(h)$
RK2 (Heun)	2	$\mathcal{O}(h^2)$
RK3	3	$\mathcal{O}(h^3)$
RK4	4	$\mathcal{O}(h^4)$
RK5 (Butcher)	5	$\mathcal{O}(h^5)$

Observação: Métodos de ordem maior exigem mais avaliações de f, mas reduzem o número de passos necessários para cobrir o intervalo com a mesma precisão..

Problema: Tanque com Entrada Contínua e Saída Proporcional à Altura

Problema: Enchimento de um Tanque

Descrição:

- Tanque com entrada constante $Q_{in} = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$
- Saída por válvula: $Q_{out}(t) = 1{,}5\sqrt{h(t)}$
- Área da seção: $A = 1\,\mathrm{m}^2$

EDO Resultante:

$$\frac{dh}{dt} = 2 - 1{,}5\sqrt{h(t)} \quad \text{com} \quad h(0) = 0$$

Objetivo: Simular $h(t)$ até $t = 5$ h com passo $h = 1$ h, utilizando:

- Método de Euler Explícito (RK1)
- RK2 (Modificado)
- RK4

Método de Euler (Explícito)

$$h_{n+1} = h_n + \Delta t \cdot f(h_n) \quad \text{com} \quad f(h) = 2 - 1{,}5\sqrt{h}$$

- Passo: $\Delta t = 1\,\text{h}$
- Condição inicial: $h_0 = 0$
- Vamos calcular até h_3

Iteração 1 – Cálculo de h_1

$$h_0 = 0$$

$$f(h_0) = 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0} = 2 - 0 = 2$$

$$h_1 = h_0 + \Delta t \cdot f(h_0) = 0 + 1 \cdot 2 = \boxed{2}$$

Iteração 2 – Cálculo de h_2

$$h_1 = 2$$

$$f(h_1) = 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx -0{,}1213$$

$$h_2 = h_1 + \Delta t \cdot f(h_1) = 2 + 1 \cdot (-0{,}1213) = \boxed{1{,}8787}$$

Iteração 3 – Cálculo de h_3

$$h_2 \approx 1{,}8787$$

$$f(h_2) = 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}8787} \approx -0{,}0573$$

$$h_3 = h_2 + \Delta t \cdot f(h_2) \approx 1{,}8787 + (-0{,}0573) = \boxed{1{,}8214}$$

Resumo dos Valores – Euler (Explícito)

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	2
2	2	1,8787
3	3	1,8214

Método RK2 (Melhorado – Heun)

Fórmulas:

$$k_1 = f(h_n), \quad k_2 = f(h_n + \Delta t \cdot k_1)$$

$$h_{n+1} = h_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$

- Passo: $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$
- Condição inicial: $h_0 = 0$
- Vamos calcular até h_3

Iteração 1 – Cálculo de h_1

$$h_0 = 0$$

$$k_1 = f(0) = 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0} = 2$$

$$k_2 = f(0 + 1 \cdot 2) = f(2) = 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx -0{,}1213$$

$$h_1 = 0 + \frac{1}{2}(2 + (-0{,}1213)) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}8787 = \boxed{0{,}9393}$$

Iteração 2 – Cálculo de h_2

$$h_1 \approx 0{,}9393$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0{,}9393) \\ &\approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}9393} \\ &\approx 0{,}5462 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(0{,}9393 + 1 \cdot 0{,}5462) = f(1{,}4855) \\ &\approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}4855} \\ &\approx 0{,}1718 \end{aligned}$$

$$h_2 = 0{,}9393 + \frac{1}{2}(0{,}5462 + 0{,}1718) = 0{,}9393 + 0{,}359 = \boxed{1{,}2983}$$

Iteração 3 – Cálculo de h_3

$$h_2 \approx 1{,}2983$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(1{,}2983) \\ &\approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}2983} \\ &\approx 0{,}2904 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(1{,}2983 + 1 \cdot 0{,}2904) = f(1{,}5887) \\ &\approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}5887} \\ &\approx 0{,}1094 \end{aligned}$$

$$h_3 = 1{,}2983 + \frac{1}{2}(0{,}2904 + 0{,}1094) = 1{,}2983 + 0{,}1999 = \boxed{1{,}4982}$$

Resumo dos Valores – RK2 (Heun)

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	0,9393
2	2	1,2983
3	3	1,4982

Método RK4 (Clássico)

Fórmulas:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(h_n) \\
k_2 &= f\left(h_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) \\
k_3 &= f\left(h_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \\
k_4 &= f\left(h_n + \Delta t \cdot k_3\right) \\
h_{n+1} &= h_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

- Passo: $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$
- Condição inicial: $h_0 = 0$
- Vamos calcular até h_3

Iteração 1 – Cálculo de h_1

$$h_0 = 0$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(0) = 2 \\
k_2 &= f\left(0 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) = f(1) = 2 - 1{,}5\cdot\sqrt{1} = 0{,}5 \\
k_3 &= f\left(0 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\right) = f(0{,}25) = 2 - 1{,}5\cdot\sqrt{0{,}25} = 1{,}25 \\
k_4 &= f(0 + 1\cdot 1{,}25) = f(1{,}25) = 2 - 1{,}5\cdot\sqrt{1{,}25} \approx 0{,}3230
\end{aligned}
$$

$$h_1 = 0 + \frac{1}{6}(2 + 2\cdot 0{,}5 + 2\cdot 1{,}25 + 0{,}3230) = \boxed{0{,}9710}$$

Iteração 2 – Cálculo de h_2

$$h_1 \approx 0{,}9710$$

$$k_1 = f(0{,}9710) \approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}9710} \approx 0{,}5220$$
$$k_2 = f(0{,}9710 + 0{,}5 \cdot 0{,}5220) = f(1{,}2320) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}1100 = 0{,}3349$$
$$k_3 = f(0{,}9710 + 0{,}5 \cdot 0{,}3349) = f(1{,}1385) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}0663 = 0{,}4006$$
$$k_4 = f(0{,}9710 + 1 \cdot 0{,}4006) = f(1{,}3716) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}1703 = 0{,}2445$$

$$h_2 = 0{,}9710 + \frac{1}{6}(0{,}5220 + 2 \cdot 0{,}3349 + 2 \cdot 0{,}4006 + 0{,}2445) = \boxed{1{,}3748}$$

Iteração 3 – Cálculo de h_3

$$h_2 \approx 1{,}3748$$

$$k_1 = f(1{,}3748) \approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}3748} \approx 0{,}2401$$
$$k_2 = f(1{,}3748 + 0{,}5 \cdot 0{,}2401) = f(1{,}4948) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}2226 = 0{,}1661$$
$$k_3 = f(1{,}3748 + 0{,}5 \cdot 0{,}1661) = f(1{,}4578) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}2074 = 0{,}1890$$
$$k_4 = f(1{,}3748 + 1 \cdot 0{,}1890) = f(1{,}5638) \approx 2 - 1{,}5 \cdot 1{,}2490 = 0{,}1265$$

$$h_3 = 1{,}3748 + \frac{1}{6}(0{,}2401 + 2 \cdot 0{,}1661 + 2 \cdot 0{,}1890 + 0{,}1265) = \boxed{1{,}5668}$$

Resumo dos Valores – RK4

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	0,9710
2	2	1,3748
3	3	1,5668

Comparação Gráfica dos Métodos

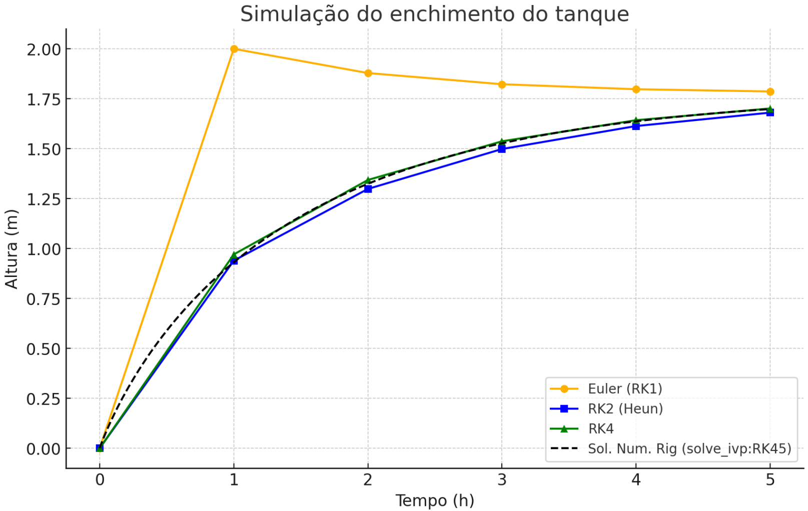

Figure 1: Evolução da altura $h(t)$ no tanque para cada método numérico em comparação com a solução de referência obtida com solve_ivp (RK45).

Comparação Gráfica dos Métodos

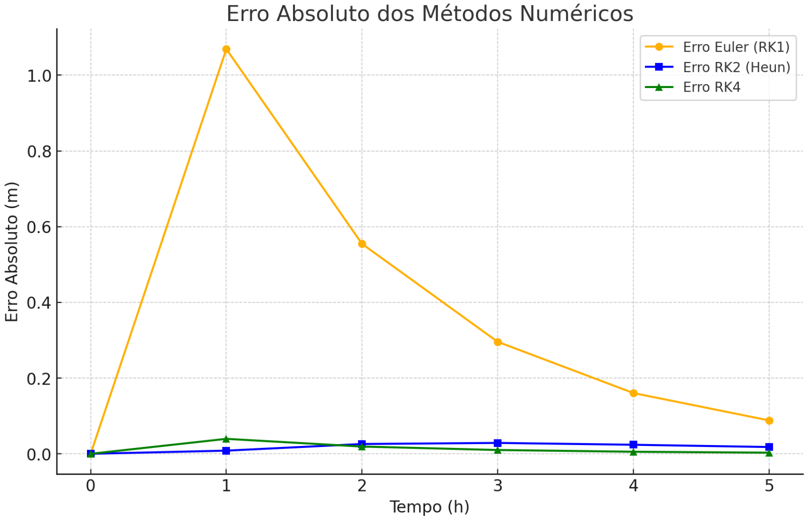

Figure 2: Erro absoluto de cada método numérico em comparação com a solução de referência obtida com solve_ivp (RK45).

Comparação Gráfica dos Métodos

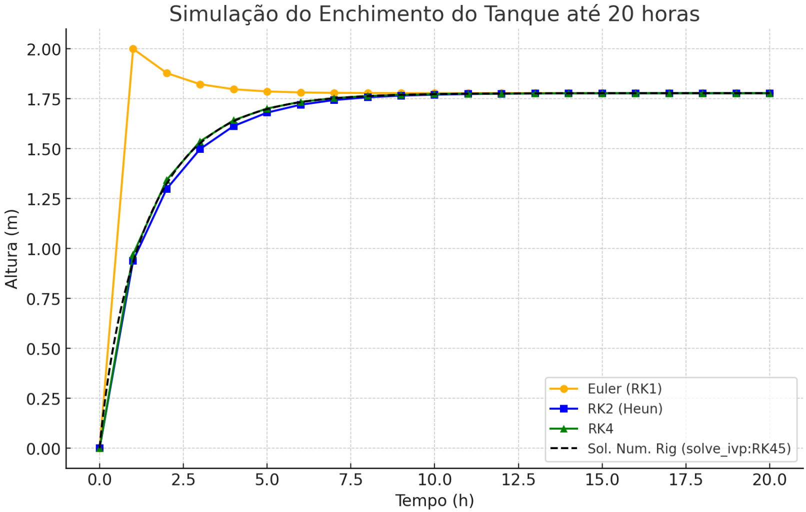

Figure 3: Evolução da altura $h(t)$ no tanque para cada método numérico no estado estacionário.

Conclusões sobre o Método de Euler

- **Método de Primeira Ordem:**
  - Usa apenas a inclinação inicial $f(h_n)$ para todo o intervalo Δt.
  - Ineficiente quando $f(h)$ varia rapidamente — comum no início do enchimento.
- **Passo Grande vs Curvatura:**
  - Com $\Delta t = 1$, o método "salta" demais e ignora a curvatura da solução.
  - Em sistemas não lineares (como $\sqrt{h}$), isso gera superestimação ou instabilidade.
- **Conclusão:**
  - Simples e barato, mas inadequado para transientes rápidos ou alta não linearidade.
  - Útil para estimativas iniciais, mas métodos de maior ordem são preferíveis para maior precisão.

Obrigado!