# Cap. 7.1 - Métodos de Euler

Métodos Numéricos - EQE 358

**José R. Torraca**[1]

[1]EPQB/UFRJ,

joseneto@eq.ufrj.br

16 June 2025

# Datas Importantes - sala E-126

- Aula 1 (Intro + Euler)): **11/6**, 18h–19h,
- Aula 2 (Euler): **16/6**, 20h–22h,
- Aula 3 (Runge-Kutta): **18/6**, 18h–19h,
- Aula 4 (ADAMS+BDF): **23/6**, 20h–22h,
- Aula 5: **25/6**, 18h–19h, aula de dúvidas (Caps. 6 e 7)
- P3 (Caps. 6 e 7): **30/6**, 20h–22h

# Introdução

# Introdução aos Métodos Numéricos para EDOs

- Vamos estudar métodos numéricos para resolver **Problemas de Valor Inicial (PVI)** para **Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)**.
- Em geral, não conseguimos obter soluções analíticas para todas as EDOs.
- Usamos métodos numéricos para obter aproximações sucessivas da solução.
- Iniciaremos com o método de **Euler Explícito**.

# Problema de Valor Inicial (PVI)

Consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

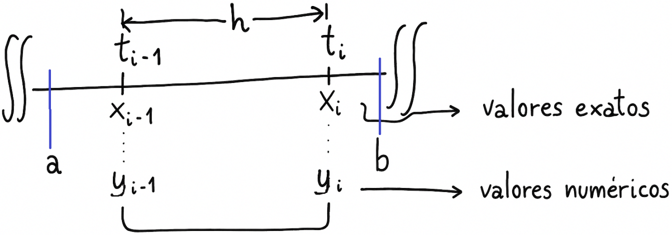
- A função $f(t, y)$ é conhecida.
- O valor inicial $y_0$ é dado.
- Queremos encontrar uma aproximação de $y(t)$ para $t \in [a, b]$.

# Discretização do Intervalo de Tempo

- Para resolver numericamente o PVI, dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de tamanho $h$.
- Isso gera uma sequência de pontos $t_0, t_1, \ldots, t_N$.
- Em cada ponto, calculamos uma aproximação $y_i$ da solução exata $y(t_i)$.
- O número total de passos é dado por:

$$N \approx \frac{b-a}{h}$$

# Discretização do Intervalo de Tempo




$$\Downarrow$$

$$\boxed{N \approx \frac{b-a}{h} \text{ passos.}}$$

# Classificação dos Métodos Numéricos para EDOs

- **1. Quanto ao uso de valores anteriores:**
  - **Passo simples:** usam apenas o valor no início do passo. Ex: Euler, Runge-Kutta.
  - **Passo múltiplo:** usam valores de passos anteriores. Ex: ADAMS, BDF.
- **2. Quanto à estrutura do método (discretização):**
  - **Explícitos:** $y_i = F(y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots)$
  - **Implícitos:** $y_i = F(y_i, y_{i-1}, \ldots)$
- **3. Quanto à ordem do método:**
  - Ex: $|x_i - y_i| \leq Ch^k$
  - Softwares: MATLAB (`ode45`), Python (`RK23`, `RK45`)
- **4. Quanto à escolha do passo $h$:**
  - **Fixo:** $t_{i+1} = t_i + h$
  - **Variável:** $t_{i+1} = t_i + h_i$ (h varia com i, mais robusto)

# Método de Euler Explícito

# Método de Euler Explícito

- A partir do ponto inicial $(t_0, y_0)$, avançamos em passos de tamanho $h$.
- Usamos a derivada para aproximar o próximo valor:

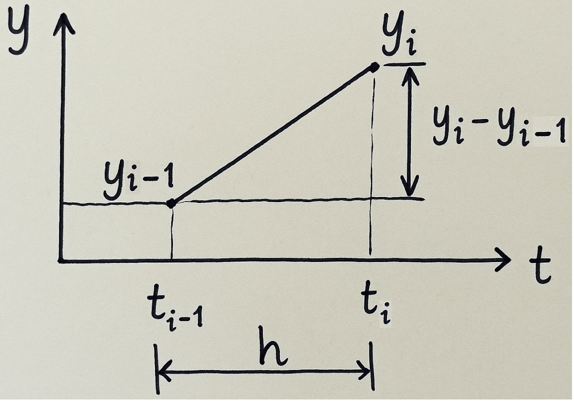
$$y(t+h) \approx y(t) + h \cdot y'(t)$$

Como $y'(t) = f(t, y(t))$, temos:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

# Interpretação Geométrica

- Em cada ponto $(t_n, y_n)$, usamos a inclinação dada por $f(t_n, y_n)$.
- A próxima aproximação é obtida seguindo essa inclinação por um passo $h$.



# Exemplo Numérico – Euler Explícito

Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

- A cada passo, usamos a fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

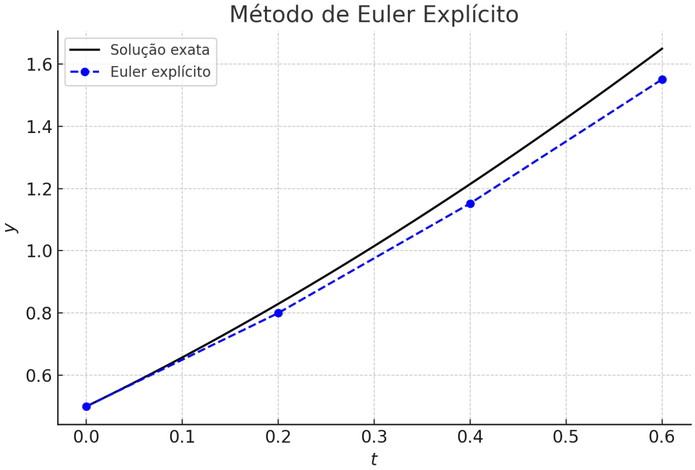
Para $h = 0{,}2$, calcular as três primeiras aproximações:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0.5 + 0.2 \cdot (0.5 - 0^2 + 1) = 0.8$$
$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0.8 + 0.2 \cdot (0.8 - 0.2^2 + 1) = 1.152$$
$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.152 + 0.2 \cdot (1.152 - 0.4^2 + 1) = 1.5504$$

# Comparação Gráfica

- Solução exata:

$$y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$$



# Análise do Erro

# Tipos de Erro

**Erro de truncamento local (ETL):**

- É o erro cometido em uma única etapa do método.
- Mede a diferença entre a solução exata e a aproximação após um passo, assumindo que o valor anterior seja exato.

**Erro global (EG):**

- É o erro acumulado ao longo de toda a integração.
- Depende da propagação do erro local e da estabilidade do método.

# Erro de Truncamento Local (ETL)

Expandimos a solução exata via Taylor em torno de $t_n$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad \xi \in (t_n, t_{n+1})$$

O método de Euler fornece:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Se $y_n = y(t_n)$, então:

$$y_{n+1} = y(t_n) + hy'(t_n)$$

Logo, o erro local é:

$$\text{ETL} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(\xi)$$

**Conclusão:** o erro local é de ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

# Erro Global (EG)

Seja $y(t)$ a solução exata e $y_n$ a aprox. num. após $n$ passos.

$$\mathrm{EG}_n = |y(t_n) - y_n|$$

**Análise:**

- O erro de truncamento local em um passo é:

$$\mathrm{ETL} = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \Rightarrow \mathcal{O}(h^2)$$

- Esse erro ocorre em cada passo, totalizando $N \approx \frac{b-a}{h}$ passos.
- O erro global é aproximadamente:

$$\mathrm{EG}_n \approx N \cdot \mathrm{ETL} = \frac{1}{h} \cdot h^2 = h$$

- **Conclusão:** o erro global é de ordem:

$$\mathrm{EG}_n = \mathcal{O}(h)$$

- O método de Euler é então um **método de primeira ordem**.

# Consequências Práticas da Análise de Erro

- Reduzir o passo $h$ melhora a precisão, mas aumenta o custo computacional.
- Como o erro global é proporcional a $h$, podemos fazer:

$$h \to \frac{h}{2} \Rightarrow \text{erro global} \approx \frac{1}{2}$$

- Métodos de ordem superior (como Runge-Kutta) têm erros muito menores com o mesmo $h$.

# Análise de Estabilidade

# Estabilidade Numérica

- Um método numérico é **estável** se os erros (de arredondamento, de inicialização etc.) não crescem de forma descontrolada.
- Especialmente importante quando resolvemos EDOs em longos intervalos de tempo.
- A estabilidade depende:
  - Do método numérico;
  - Do tamanho do passo $h$;
  - Da equação resolvida.

# Equação Teste: $y' = -\lambda y$

- Consideramos a equação linear:

$$y' = -\lambda y, \quad \lambda > 0, \quad y(0) = y_0$$

- Solução exata:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$$

- A solução exata decai exponencialmente para zero.
- Queremos que o método numérico também reproduza esse comportamento.

# Euler Explícito aplicado a $y' = -\lambda y$

Aplicando Euler explícito:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(-\lambda y_n) \\ &= y_n(1 - h\lambda) \end{aligned}$$

Iterando:

$$y_n = y_0(1 - h\lambda)^n$$

**Condição de estabilidade:**

$$|1 - h\lambda| \leq 1$$

- Se satisfeita, então $y_n \to 0$ conforme $n \to \infty$, como esperado.
- Essa é a **região de estabilidade** do método.

# Região de Estabilidade

- Para $y' = -\lambda y$, a variável de análise é:

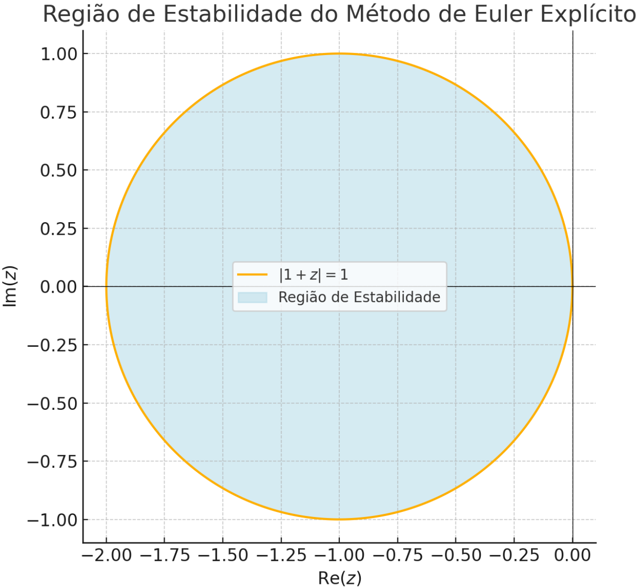
$$z = -h\lambda$$

- A condição de estabilidade fica:

$$|1 + z| \leq 1$$

- A região de estabilidade continua sendo o disco centrado em $-1$ com raio 1.

# Região de Estabilidade



# Consequências Práticas da Estabilidade

- Para $\lambda > 0$, temos:

$$|1 - h\lambda| \leq 1 \Rightarrow h \leq \frac{2}{\lambda}$$

- Isso impõe uma limitação para o passo $h$.
- Se $h$ for muito grande, o método diverge.
- O método de Euler é instável para problemas rígidos (stiff) com $\lambda \gg 1$.

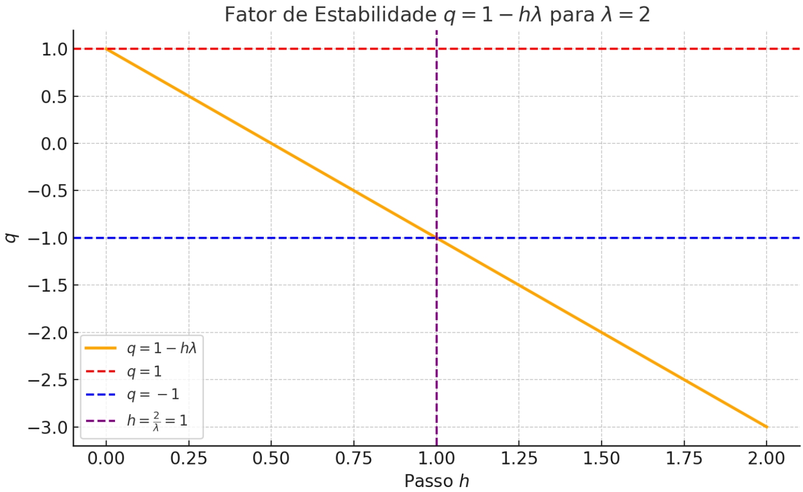
# Análise do Fator de Estabilidade $q = 1 - h\lambda$

Voltando à aplic. Euler explícito à equação $y' = -\lambda y$:

$$
\begin{aligned}
y_i &= (1 - h\lambda) y_{i-1} \\
&= q \cdot y_{i-1}, \quad \text{com } q = 1 - h\lambda
\end{aligned}
$$

- A estabilidade e o comportamento da solução dependem de $|q|$:
  - $|q| < 1$: estável (decrescente, não oscilatório)
  - $q < 0$: decrescente e oscilatório
  - $|q| > 1$: instável (crescimento e oscilação)
- Para garantir $|q| < 1$, é necessário $h < \frac{2}{\lambda}$ (caso real e positivo).

# Análise do Fator de Estabilidade $q = 1 - h\lambda$



# Método de Euler Implícito

# Método de Euler Implícito

- Mesma ideia do método explícito: resolver PVIs da forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad x(0) = x_0$$

- Discretização: $t_i = ih$
- Aproximação da solução: $y(t_i) \approx y_i$
- **Euler Implícito** usa a derivada no final do passo:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(t_i, y_i)$$

# Propriedades do Euler Implícito

- **Mais estável** que o método explícito, especialmente em problemas rígidos.
- É também um método de **primeira ordem**:

$$\text{Erro Global} \propto h$$

- Precisa resolver uma equação (geralmente) **não linear** em cada passo:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(t_i, y_i)$$

- Exige métodos iterativos:
  - Se $f$ for linear em $y$, pode-se isolar $y_i$.
  - Se $f$ for não linear, usar Newton-Raphson ou métodos semelhantes.

# Resolvendo a Equação Implícita: Newton-Raphson

- Para resolver:

$$G(y_i) = y_i - y_{i-1} - hf(t_i, y_i) = 0$$

- Newton-Raphson:

$$y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - \frac{G(y_i^{(k)})}{G'(y_i^{(k)})}$$

- Requer:
  - Uma aproximação inicial $y_i^{(0)}$ (pode ser o valor de Euler explícito).
  - A derivada de $G(y_i)$, ou seja:

$$G'(y_i) = 1 - h\frac{\partial f}{\partial y}$$

- Converge rapidamente se $h$ não for muito grande.

# Exemplo: $y' = -\lambda y$, $y(0) = y_0$

- Aplicando Euler Implícito:

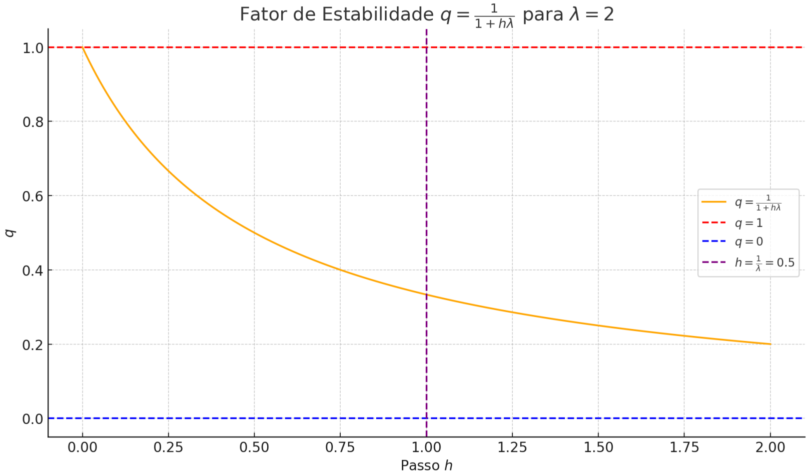
$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h(-\lambda y_i) \\ y_i(1 + h\lambda) &= y_{i-1} \end{aligned}$$

- Solução numérica:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{1 + h\lambda} y_{i-1} \\ &= q \cdot y_{i-1}, \quad q = \frac{1}{1 + h\lambda} \end{aligned}$$

- $0 < q < 1$ para qualquer $h > 0$
- Solução sempre decrescente, não oscilatória e estável
- Diferente do método explícito, **permite passos grandes mesmo com $\lambda \gg 1$**

# Fator de Estabilidade $q = \frac{1}{1+h\lambda}$ para $\lambda = 2$



# Euler Explícito vs Implícito

| Característica | Explícito | Implícito |
|---|---|---|
| Estabilidade | Limitada | Alta (A-estável) |
| Cálculo direto | Sim | Não (resolver eq. em cada passo) |
| Custo por passo | Baixo | Maior |
| Recomendado para | EDOs simples | Problemas rígidos |

*Trade-off: robustez versus simplicidade.*

# Método de Euler Trapezoidal

# Método de Euler Trapezoidal

- Método implícito que usa a média das derivadas no início e no fim do passo:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, y_i)\right]$$

- Mais preciso que Euler Implícito: é de **segunda ordem**.

$$\text{Erro global} \propto h^2$$

- Como $y_i$ aparece em ambos os lados, a equação é geralmente **não linear**.
- Solução por métodos iterativos (ex: Newton-Raphson).

# Aplicação: $y' = -\lambda y$

- Aplicando o método:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}[-\lambda y_{i-1} - \lambda y_i]$$

- Rearranjando:

$$y_i \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) = y_{i-1} \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)$$

- Solução numérica:

$$y_i = \frac{1 - \frac{h\lambda}{2}}{1 + \frac{h\lambda}{2}} \cdot y_{i-1} \quad \Rightarrow \quad y_i = q \cdot y_{i-1}$$

- Fator de estabilidade:

$$q = \frac{1 - \frac{h\lambda}{2}}{1 + \frac{h\lambda}{2}}$$

# Estabilidade e Precisão do Euler Trapezoidal

- Método sempre **estável** para $\lambda > 0$:

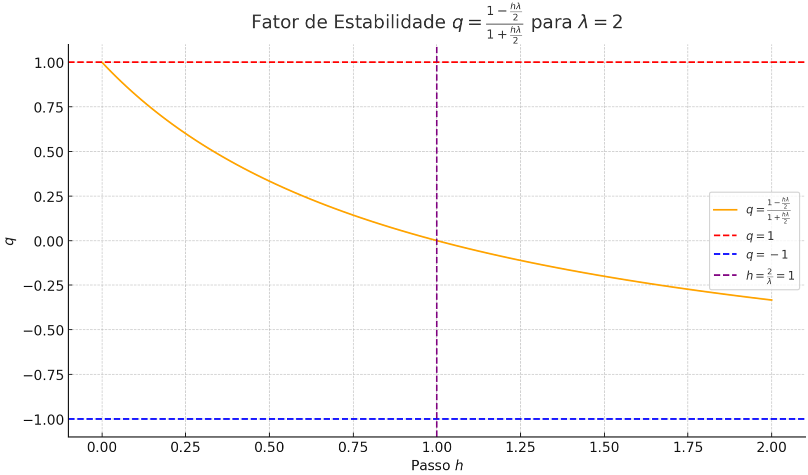
$$|q| < 1 \quad \text{para todo } h > 0$$

- Estável (descresc.) e não oscilatório se $0 < q < 1$
- Estável (decresc.) e oscilatório se $q < 0$
- Ordem de precisão:

$$\text{Erro global} = \mathcal{O}(h^2)$$

- Mais preciso que Euler Explícito e Implícito.
- Ideal para problemas rígidos com melhor acurácia.

# Fator de Estabilidade $q = \frac{1 - \frac{h\lambda}{2}}{1 + \frac{h\lambda}{2}}$ para $\lambda = 2$



# Método de Euler Aperfeiçoado (Heun)

# Método de Euler Aperfeiçoado (Heun)

- Também chamado de **método preditor-corretor**.
- Baseado em duas etapas:
  1. **Predição:** aplica Euler explícito

     $$y_i^* = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1})$$

  2. **Correção:** faz a média das inclinações

     $$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, y_i^*)\right]$$

- Método **explícito**, mais preciso que o Euler simples.
- **Ordem 2:** erro global $\propto h^2$

# Aplicando Heun: $y' = -\lambda y$

- Equação teste: $\frac{dy}{dt} = -\lambda y$
- Passos do método:
  1. Predição:
  $$y_i^* = y_{i-1}(1 - h\lambda)$$
  2. Correção:
  $$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[-\lambda y_{i-1} - \lambda y_i^*\right]$$
  3. Resultado (ver notas de aula):
  $$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1}\left(1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right) \\ &= q \cdot y_{i-1} \end{aligned}$$

# Estabilidade do Método de Heun

- Fator de amplificação:

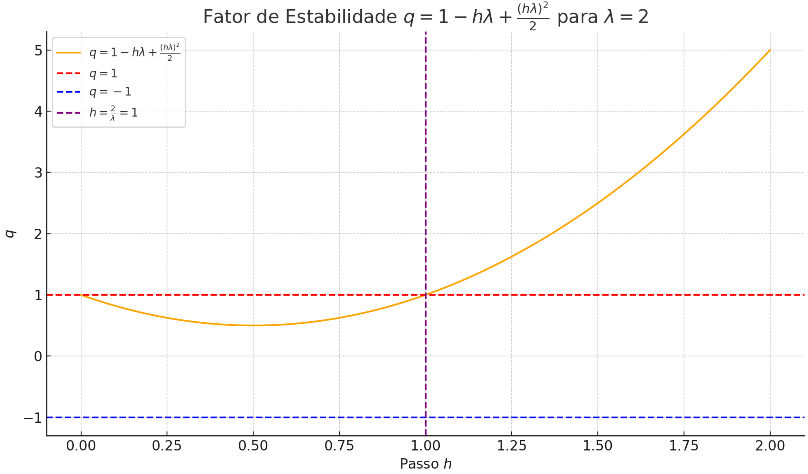
$$q = 1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

- Estabilidade exige: $|q| < 1$
- Seja $z = h\lambda$, temos:

$$q(z) = 1 - z + \frac{z^2}{2}$$

- Região de estabilidade: $0 < z < 2$
  - Estável e não oscilatório para $0 < z < 2$
  - Instável para $z > 2$ ou $z < 0$
  - $q(h) \geq 0$ para todo $h \in \mathbb{R} \rightarrow$ **sem oscilações**

# Fator de Estabilidade $q = 1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$ para $\lambda = 2$



# Exemplo: CSTR com Reação de Primeira Ordem

# Exemplo: CSTR com Reação de Primeira Ordem

**Sistema:** Reator contínuo (CSTR) com uma reação de degradação:

$$A \to \text{Produtos}$$

- Reação de ordem 1: $r = -kC(t)$
- Equação diferencial para a concentração:

$$\frac{dC}{dt} = -kC(t)$$

- Condição inicial: $C(0) = C_0$

**Objetivo:** Calcular a concentração $C(t)$ ao longo do tempo usando o método de Euler Explícito.

# Dados do Problema

- Constante de reação: $k = 0{,}1\,\text{min}^{-1}$
- Concentração inicial: $C_0 = 1{,}0\,\text{mol/L}$
- Intervalo de tempo: $t \in [0, 1]\,\text{min}$
- Passo de integração: $h = 0{,}2\,\text{min}$

**Vamos calcular:** $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0{,}2, \quad \ldots, \quad t_5 = 1{,}0$$

# Método de Euler Explícito

A equação:

$$\frac{dC}{dt} = -kC(t)$$
$$f(t, C) = -kC$$

A fórmula do método de Euler explícito:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + h \cdot f(t_n, C_n) \\ &= C_n - hkC_n \\ &= C_n(1 - hk) \end{aligned}$$

# Cálculo com Euler Explícito – Passo a Passo

- $h = 0{,}2,\ k = 0{,}1 \quad 1 - hk = 0{,}98$
- $C_0 = 1{,}0$

$$C_1 = 1{,}0 \cdot 0{,}98 = 0{,}98$$

$$C_2 = 0{,}98 \cdot 0{,}98 = 0{,}9604$$

$$C_3 = 0{,}9604 \cdot 0{,}98 = 0{,}9412$$

$$C_4 = 0{,}9412 \cdot 0{,}98 = 0{,}9224$$

$$C_5 = 0{,}9224 \cdot 0{,}98 = 0{,}9039$$

**Resultado:** Concentração aproximada em 1 min é $C_5 \approx 0{,}9039\,\text{mol/L}$

# Comparação com Solução Analítica

A solução exata da EDO:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$
$$C(1) = 1{,}0 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 1} \approx 0{,}9048$$

**Erro:**

$$\text{Erro relativo} = \frac{|0{,}9048 - 0{,}9039|}{0{,}9048} \approx 0{,}001 \text{ (ou } 0{,}1\%)$$

**Conclusão:** Euler explícito com passo pequeno fornece uma boa aproximação.

# Euler Implícito para o CSTR

**Relembrando o modelo:**

$$\frac{dC}{dt} = -kC(t), \quad C(0) = C_0$$

**Euler Implícito:**

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + h \cdot f(t_{n+1}, C_{n+1}) \\ &= C_n - hkC_{n+1} \end{aligned}$$

**Isolando $C_{n+1}$:**

$$\begin{aligned} C_{n+1}(1+hk) &= C_n \\ C_{n+1} &= \frac{C_n}{1+hk} \end{aligned}$$

# Dados do Problema

- $k = 0{,}1\,\text{min}^{-1}$
- $C_0 = 1{,}0\,\text{mol/L}$
- Passo: $h = 0{,}2\,\text{min}$

**Fator constante:**

$$\frac{1}{1+hk} = \frac{1}{1+0{,}2\cdot 0{,}1} = \frac{1}{1{,}02} \approx 0{,}9804$$

**Vamos calcular:** $C_1, C_2, \ldots, C_5$

# Cálculo com Euler Implícito – Passo a Passo

- $C_0 = 1{,}0$
- Fator: $q = 1/(1 + hk) \approx 0{,}9804$

$$C_1 = 1{,}0 \cdot 0{,}9804 = 0{,}9804$$

$$C_2 = 0{,}9804 \cdot 0{,}9804 = 0{,}9612$$

$$C_3 = 0{,}9612 \cdot 0{,}9804 = 0{,}9424$$

$$C_4 = 0{,}9424 \cdot 0{,}9804 = 0{,}9240$$

$$C_5 = 0{,}9240 \cdot 0{,}9804 = 0{,}9060$$

# Comparação com Solução Analítica

**Solução exata:**

$$
\begin{aligned}
C(1) &= C_0 e^{-k\cdot 1} \\
&= 1 \cdot e^{-0,1} \approx 0{,}9048
\end{aligned}
$$

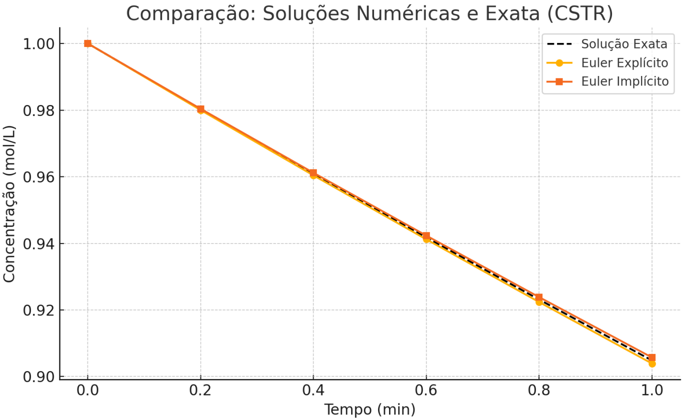
**Resultado de Euler Implícito:**

$$C_5 \approx 0{,}9060 \Rightarrow \text{Erro relativo} \approx 0{,}13\%$$

**Observação:**

- Levemente menos preciso que Euler Explícito neste caso.
- **Muito mais estável** para reações rápidas (grande $k$).
- Permite uso de passos maiores sem divergir.

# Comparação Gráfica: CSTR – Soluções Numérica e Exata



# Exemplo Não Linear – Reação Autocatalítica

# Exemplo Não Linear – Reação Autocatalítica

**Equação cinética:**

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2, \quad C(0) = C_0$$

**Características:**

- Equação diferencial não linear
- Solução exata:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + kC_0 t}$$

- Vamos aplicar o método de Euler Implícito

# Euler Implícito – Formulação Não Linear

**A equação:**

$$C_{n+1} = C_n + h \cdot (-kC_{n+1}^2)$$

**Reorganizando:**

$$C_{n+1} + hkC_{n+1}^2 = C_n \Rightarrow \underbrace{G(C_{n+1})}_{\text{não linear}} = C_{n+1} + hkC_{n+1}^2 - C_n = 0$$

**Solução:** usar o método de **Newton-Raphson**:

$$C^{(m+1)} = C^{(m)} - \frac{G(C^{(m)})}{G'(C^{(m)})}$$

onde:

$$G'(C) = 1 + 2hkC$$

# Exemplo Numérico – Newton-Raphson em Cada Passo

**Parâmetros:**

- $k = 1, \ C_0 = 1$
- Passo $h = 0{,}1$

**Passo 1: Encontrar $C_1$ tal que**

$$G(C_1) = C_1 + 0{,}1 \cdot C_1^2 - 1 = 0$$

**Iterações de Newton:**

- Começa com $C_1^{(0)} = 1$
- Calcula $G$ e $G'$ e atualiza:

$$C_1^{(1)} = 1 - \frac{1 + 0{,}1 - 1}{1 + 0{,}2} = \dots$$

- Continua até convergência

# Newton-Raphson: Exemplo Passo a Passo (até 3 iterações)

Resolver: $G(C_1) = C_1 + 0{,}1C_1^2 - 1 = 0$

**Iteração 0:** chute inicial $C_1^{(0)} = 1$

$$G = 0{,}1, \quad G' = 1{,}2, \quad C_1^{(1)} = 1 - \frac{0{,}1}{1{,}2} = 0{,}9167$$

**Iteração 1:**

$$G = 0{,}0007, \quad G' = 1{,}1833, \quad C_1^{(2)} = 0{,}9167 - \frac{0{,}0007}{1{,}1833} \approx 0{,}9161$$

**Iteração 2:**

$$G(C_1^{(2)}) \approx 0{,}0000 \Rightarrow \text{tolerância atingida}$$

**Resultado:** $\boxed{C_1 \approx 0{,}9161}$ (com erro $< 10^{-4}$)

# Euler Implícito – Cálculo de $C_1$, $C_2$, $C_3$ com Newton-Raphson

Resolver: $\quad C_{n+1} + hC_{n+1}^2 - C_n = 0, \quad$ com $h = 0{,}1,\ C_0 = 1$

**Iterações para $C_1$:**

$$C_1^{(0)} = 1$$

$$C_1^{(1)} = 1 - \frac{0{,}1}{1{,}2} = 0{,}9167$$

$$C_1^{(2)} = 0{,}9167 - \frac{0{,}0007}{1{,}1833} = 0{,}9161$$

$$C_1 \approx \boxed{0{,}9161}$$

# Euler Implícito – Cálculo de $C_1$, $C_2$, $C_3$ com Newton-Raphson

**Iterações para $C_2$:**

$$\begin{aligned}
C_2^{(0)} &= 0{,}9161 \\
C_2^{(1)} &= 0{,}9161 - \frac{0{,}0839}{1{,}1832} = 0{,}8451 \\
C_2^{(2)} &= 0{,}8451 - \frac{0{,}0004}{1{,}1690} = 0{,}8447 \\
C_2 &\approx \boxed{0{,}8447}
\end{aligned}$$

# Euler Implícito – Cálculo de $C_1$, $C_2$, $C_3$ com Newton-Raphson

**Iterações para $C_3$:**

$$
\begin{aligned}
C_3^{(0)} &= 0{,}8447 \\
C_3^{(1)} &= 0{,}8447 - \frac{0{,}0714}{1{,}1689} = 0{,}7833 \\
C_3^{(2)} &= 0{,}7833 - \frac{-0{,}0001}{1{,}1567} = 0{,}7834 \\
C_3 &\approx \boxed{0{,}7834}
\end{aligned}
$$

# Conclusão: Quando Usar Newton-Raphson

- Se a equação gerada pelo método implícito for não linear, como:

$$C_{n+1} = C_n - hkC_{n+1}^2$$

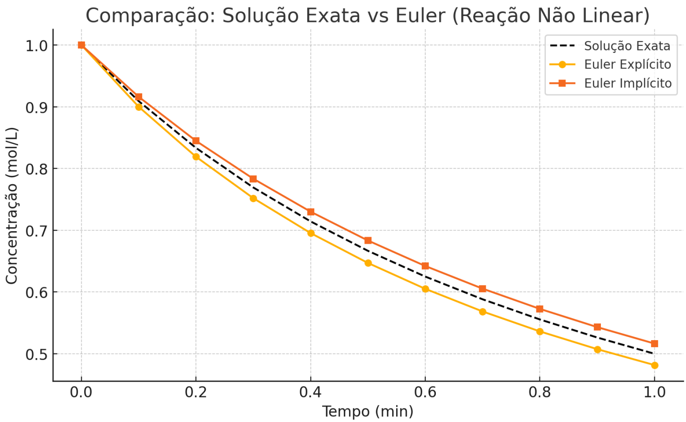
$\rightarrow$ precisamos de métodos numéricos para resolver em cada passo.

- Newton-Raphson é eficiente e converge rapidamente:

$$C^{(m+1)} = C^{(m)} - \frac{G(C^{(m)})}{G'(C^{(m)})}$$

- Necessário:
  - Boa escolha de chute inicial (ex: valor anterior)
  - Derivada de $G(C)$
- Em problemas reais, isso é frequente (ex: reações não lineares, equações de balanço energia/massa acopladas, etc.)

# Comparação Gráfica: CSTR – 2a ordem – Soluções Numérica e Exata



Obrigado!