

Cap. 6: Exercícios – Integração Numérica

Exercício 1 :

Considere a seguinte integral definida :

$$\int_0^3 \frac{\sin(x^2)}{x+1} dx$$

- (a) Aproxime a integral utilizando a **regra do trapézio composta com $n = 6$ subintervalos**.
- (b) Aproxime utilizando a **regra de Simpson 1/3 composta com $n = 6$** .
- (c) Compare seus resultados com uma aproximação feita por um método de alta precisão, como `scipy.integrate.quad` (Python).
- (d) Analise e discuta qual dos métodos numéricos parece mais adequado para essa função, considerando seu comportamento oscilante.

Exercício 2 :

Dada a função $f(x) = x^5 - 4x^3 + x - 1$, calcule a integral definida no intervalo $[-2, 2]$:

$$\int_{-2}^2 (x^5 - 4x^3 + x - 1) dx$$

- (a) Calcule a integral de forma analítica.
- (b) Estime a integral pela **regra do trapézio composta com $n = 4$** .
- (c) Estime usando a **regra de Simpson 1/3 composta com $n = 4$** .
- (d) Estime usando a **regra de Simpson 3/8 composta com $n = 6$** .
- (e) Para cada resultado numérico, calcule o **erro absoluto** e o **erro relativo** em relação ao valor analítico.
- (f) Discuta qual método se mostrou mais eficaz para essa função polinomial de grau ímpar.

Exercício 3 :

O calor específico c_p (em J/kg·K) de um material cerâmico foi medido em diferentes temperaturas conforme a tabela a seguir :

Temperatura (°C)	c_p (J/kg·K)
0	500
10	520
20	541
40	572
60	593
80	608
100	615

Deseja-se estimar a quantidade total de energia necessária para aquecer 1 kg do material de 0°C até 100°C. Essa energia é dada por :

$$Q = \int_0^{100} c_p(T) dT$$

- (a) Estime o valor da integral utilizando a **regra do trapézio composta**.
- (b) Justifique por que a **regra 1/3 de Simpson composta** não pode ser aplicada diretamente (de forma global) neste conjunto de dados.
- (c) Proponha uma estratégia alternativa à letra b) para aproximar a integral numericamente com boa precisão.

Exercício 4 :

Considere os seguintes dados obtidos experimentalmente sobre a velocidade de um carro :

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
0	0
1,5	6
2,3	10
3,2	13
4,0	14
5,5	15

- (a) Estime a distância percorrida entre $t = 0$ e $t = 5,5$ s utilizando a **regra do trapézio**.
- (b) Interpole os dados com um polinômio de grau 3 e integre numericamente essa função no mesmo intervalo.
- (c) Compare os dois métodos e discuta os prós e contras de aplicar interpolação antes da integração numérica.

Exercício 5 :

A força aplicada ao longo de uma trilha $x \in [0, \pi]$ é modelada por :

$$F(x) = 10 \sin(2x) + \varepsilon(x)$$

onde $\varepsilon(x)$ representa ruído experimental, variando aleatoriamente entre $\pm 0,2$ N.

- (a) Gere os dados da função $F(x)$ em intervalos de 0,5, com $x = 0, 0,5, 1, \dots, \pi$.
- (b) Estime o trabalho realizado $W = \int_0^\pi F(x) dx$ usando :
 - A **regra do trapézio composta**
 - A **regra de Simpson 1/3 composta**
- (c) Execute 5 simulações diferentes com novos ruídos aleatórios. Para cada método, calcule a média e o desvio padrão dos valores estimados de W .
- (d) Discuta como a presença de ruído afeta a escolha do método de integração.