



Cap. 7.4 - Problemas Rígidos

Métodos Numéricos - EQE 358

José R. Torraca¹

¹EPQB/UFRJ,

joseneto@eq.ufrj.br

23 June 2025

Conceito de Rigidez

O que são Problemas Rígidos?

- Surgem em EDOs onde há múltiplas escalas de tempo.
- Apresentam soluções com componentes que mudam rapidamente e outras lentamente.
- Exigem passos pequenos em métodos explícitos para manter estabilidade, mesmo que a solução varie lentamente.
- Um problema **rígido** ("stiff") não é uma propriedade exata da EDO, mas da relação entre método numérico e comportamento da solução.

Exemplo Clássico de Rigidez

Considere a EDO:

$$y' = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}, \quad y(0) = 0$$

- A solução exata é: $y(t) = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t}$
- Presença de dois tempos característicos: $1/1000$ (muito rápido) e 1 (lento).
- O método de Euler exige $h \ll 1/1000$ para ser estável!

Diagnóstico: O que causa a Rigidez?

- Autovalores negativos com módulos muito distintos num sistema linear.
- Situações com equilíbrio rápido e dinâmica lenta.
- EDOs oriundas de balanços de massa/energia com reações químicas rápidas.

Importante: A rigidez *não* é detectável pela forma da EDO, mas sim por seu comportamento computacional.

Por que métodos explícitos falham?

- Métodos explícitos como Euler e Runge-Kutta exigem passos pequenos para estabilidade.
- Para problemas rígidos, isso é ineficiente e pode falhar por **erro de arredondamento acumulado**.

Nota: No exemplo para $\lambda = -1000$, Euler é estável apenas se $h < 0.002$. Valores como $h = 0.001$ são aceitáveis, mas exigem muitos passos e acumulam erro.

Solução: Métodos Implícitos

- Métodos como Euler Implícito, Crank-Nicolson, ADAMS-Moulton e BDFs têm **regiões de estabilidade maiores**.
- Podem usar passos grandes com segurança.
- Custo: resolução de equações não lineares em cada passo.

Exemplo de um Problema Rígido

Exemplo: Aplicando Euler Implícito

Problema: $y' = -15y$, $y(0) = 1$ Solução analítica: $y(t) = e^{-15t}$

- Euler Explícito: $y_{n+1} = y_n - 15hy_n = y_n(1 - 15h)$
- Condição de estabilidade: $|1 - 15h| < 1 \Rightarrow h < 0.13$
- Euler Implícito: $y_{n+1} = y_n/(1 + 15h)$ **sempre estável**

Comparação Gráfica: Solução e Estabilidade

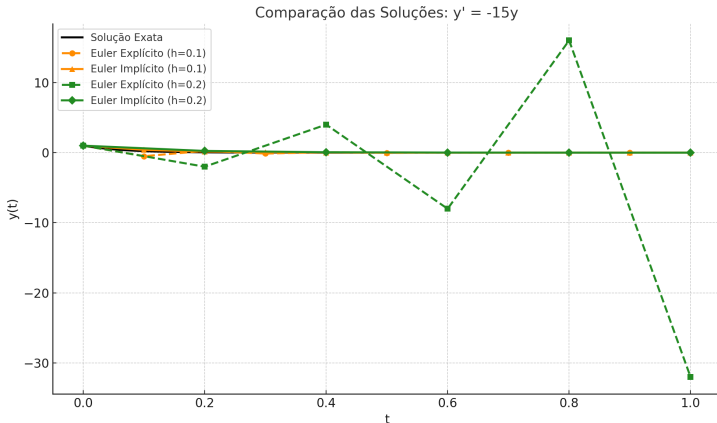


Figure 1: Comparação entre solução analítica, Euler explícito (instável para $h = 0.2$) e Euler implícito (estável para qualquer h).

Erro Absoluto: Explícito vs Implícito

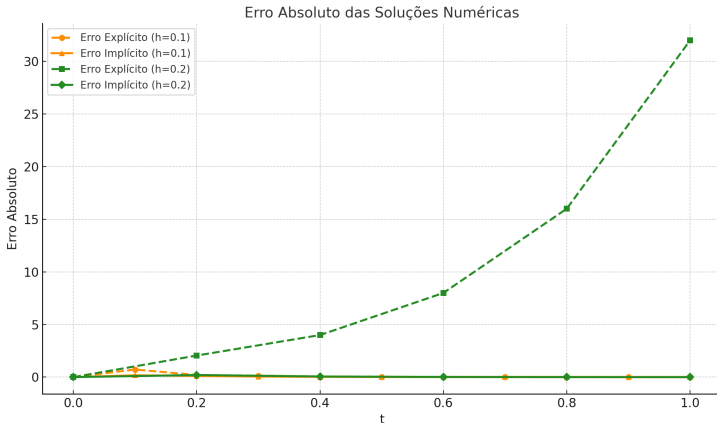


Figure 2: Erro absoluto entre solução analítica e soluções numéricas para diferentes valores de h .

Resumo: Como tratar Rigidez?

- Identificar rigidez: comportamento oscilatório/instável para h razoável.
- Usar métodos implícitos: BDF, AM, Euler Implícito, etc.
- Alternativas modernas: uso de integradores automáticos (ex: `solve_ivp(method='BDF')`)

Obrigado!