Cap. 7.3 - Métodos de Múltiplos Passos

Métodos Numéricos - EQE 358

José R. Torraca[1]

[1]EPQB/UFRJ,

joseneto@eq.ufrj.br

23 June 2025

Métodos de Múltiplos Passos

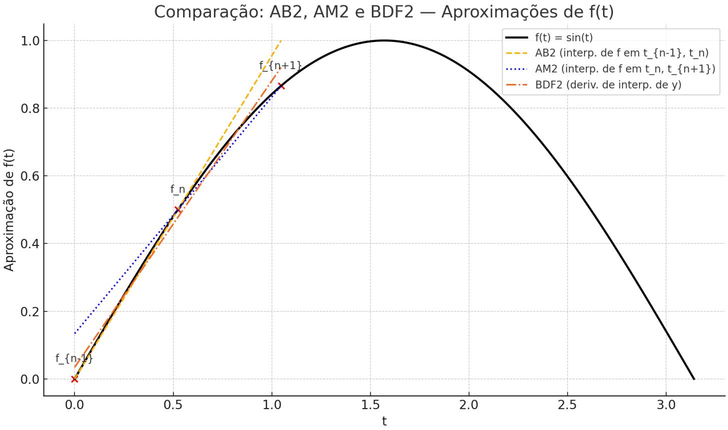
Métodos de Múltiplos Passos — Introdução

- Até agora, usamos métodos de **passo único** (ex. Euler e Runge-Kutta), que calculam y_{n+1} apenas com base em t_n e y_n.
- Já os **métodos de múltiplos passos** aproveitam informações de passos anteriores:

$$y_{n+1} = \text{função de } \{y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}\}$$

- Isso permite obter **maior precisão com menos avaliações de** $f(t, y)$ por passo.
- Porém, exigem um "aquecimento" inicial (por exemplo, usando RK4 nos primeiros passos).
- Os mais conhecidos são os métodos de Adams-Bashforth (explícitos), Adams-Moulton (implícitos) e retro-diferenciação (*Backward Differentiation Formula: BDF*).

Exemplos — AB2, AM2 e BDF2



- **AB2:** interpola $f(t)$ com valores passados (t_{n-1}, t_n). Explícito.
- **AM2:** interpola $f(t)$ com t_n e t_{n+1}. Implícito.
- **BDF2:** deriva polinômio que interpola $y(t)$. Implícito.

Métodos de Adams-Bashforth

Métodos de Adams-Bashforth (Explícitos)

- São métodos de múltiplos passos **explícitos**.
- Utilizam valores anteriores de $f(t, y)$ (isto é, as derivadas já conhecidas) para calcular y_{n+1}.
- Fórmula geral com k passos:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k-1} b_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

- Coeficientes b_j são escolhidos para maximizar a ordem do método.
- Vantagens:
  - Mais eficientes que Runge-Kutta para longas integrações.
  - Evitam resolver equações implícitas.
- Desvantagens:
  - Requer valores anteriores.
  - Menor estabilidade para problemas rígidos.

Adams-Bashforth – Tabela de Coeficientes

Fórmula geral:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=0}^{k-1} b_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

Coeficientes b_j para os primeiros métodos:

Ordem	Passos	Fórmula
1	1	$y_{n+1} = y_n + hf_n$
2	2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - 1f_{n-1})$
3	3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$
4	4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

Métodos de Adams-Bashforth (Explícitos)

Observações:

- Mais passos $\Rightarrow$ maior precisão, mas menor estabilidade.
- Os pesos b_j vêm da interpolação polinomial de Newton em $f(t)$.

Problema: Tanque com Entrada Contínua e Saída Proporcional à Altura

Exemplo: Adams-Bashforth de 2ª Ordem

Problema (Altura do tanque):

$$\frac{dh}{dt} = 2 - 1{,}5\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = 0$$

Passo: $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$

Fórmula do Adams-Bashforth, ordem 2 (AB2):

$$h_{n+1} = h_n + \frac{h}{2}\left(3f_n - f_{n-1}\right)$$

Etapa Inicial:

- Precisamos de h_0 e h_1
- Usamos RK4 para calcular $h_1 \approx 0{,}9710$

Calculando h_2:

$$f_0 = f(h_0) = 2$$

$$f_1 = f(0{,}9710) \approx 0{,}5220$$

$$\begin{aligned} h_2 &= 0{,}9710 + \frac{1}{2}(3 \cdot 0{,}5220 - 2) = 0{,}9710 + \frac{1}{2}(1{,}5660 - 2) \\ &= 0{,}9710 - 0{,}2170 = \boxed{0{,}7540} \end{aligned}$$

Iteração 2 – Cálculo de h_3

$$h_1 \approx 0{,}9710, \quad h_2 \approx 0{,}7540$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f(0{,}9710) \approx 0{,}5220 \\ f_2 &= f(0{,}7540) \approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}7540} \approx 0{,}6977 \end{aligned}$$

$$h_3 = 0{,}7540 + \frac{1}{2}(3 \cdot 0{,}6977 - 0{,}5220) = \boxed{1{,}5396}$$

Resumo dos Valores

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	0,9710 (via RK4)
2	2	0,7540
3	3	1,5396

Comparando com outros métodos:

- RK2 (Heun): $h_3 \approx 1{,}4982$
- RK4: $h_3 \approx 1{,}5383$
- **AB2:** $\boxed{h_3 \approx 1{,}5396}$
- RK45 (Scipy): $h_3 \approx 1{,}5268$

Observação: O método AB2 já atinge boa precisão com menos avaliações de f por passo — só precisa de 1 avaliação após a inicialização. No entanto, como se pode se observar pela tabela, ele converge com oscilações (não foi estritamente estável).

Métodos de Adams-Moulton

Métodos de Adams-Moulton (Implícitos)

- Assim como Adams-Bashforth, são métodos de múltiplos passos, mas agora **implícitos**.
- A fórmula geral depende de f_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t_{n+1-j}, y_{n+1-j})$$

- Como f_{n+1} depende de y_{n+1}, é necessário resolver uma equação implícita em cada passo (ex. Newton-Raphson).
- Mais estáveis que os métodos explícitos — bons para equações rígidas.

Adams-Moulton – Tabela de Coeficientes

Fórmula geral:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+1-j}$$

Coeficientes β_j para os primeiros métodos:

Ordem	Passos	Fórmula
1	1	$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$ (Euler Implícito)
2	2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$
3	3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$
4	4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$

Observação: Como f_{n+1} depende de y_{n+1}, todos esses métodos são **implícitos** e exigem iteração ou aproximação (por preditor).

Estratégia Preditora-Corretora

- Para evitar resolver equações implícitas diretamente, usamos uma abordagem em dois passos:

1. **Preditora – Adams-Bashforth (explícito):**

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_{n-j}$$

2. **Corretora – Adams-Moulton (implícito):**

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\beta_0 f_{n+1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j f_{n+1-j} \right)$$

- Onde $f_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$, usando o valor predito.
- Pode-se repetir a correção se desejar mais precisão.

Benefício: Ganha-se estabilidade de um método implícito com o custo de métodos explícitos.

Problema: Tanque com Entrada Contínua e Saída Proporcional à Altura

Adams-Moulton de 2ª Ordem – Iteração 1

EDO:

$$\frac{dh}{dt} = 2 - 1{,}5\sqrt{h}, \quad h(0) = 0, \quad \Delta t = 1$$

Fórmula AM2 (implícita):

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{2}\left[f(h_n) + f(h_{n+1})\right]$$

Iteração 1:

$$h_0 = 0, \quad f(h_0) = 2$$

Precisamos resolver:

$$h_1 = 0 + \frac{1}{2}\left[2 + (2 - 1{,}5\sqrt{h_1})\right] \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}\left[4 - 1{,}5\sqrt{h_1}\right]$$

Definindo $g(h_1) = h_1 - \frac{1}{2}(4 - 1{,}5\sqrt{h_1})$, usamos Newton-Raphson (`scipy.optimize.newton`) para resolver numericamente:

$$h_1 \approx \boxed{0{,}9403}$$

AM2 – Iteração 2

$$h_1 \approx 0{,}9403 \quad \Rightarrow \quad f(h_1) \approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}9403} \approx 0{,}5457$$

Queremos resolver:

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{2}\left[f(h_1) + f(h_2)\right] = 0{,}9403 + \frac{1}{2}\left[0{,}5457 + (2 - 1{,}5\sqrt{h_2})\right]$$

$$h_2 = 0{,}9403 + \frac{1}{2}\left[2{,}5457 - 1{,}5\sqrt{h_2}\right]$$

$$g(h_2) = h_2 - \left(0{,}9403 + \frac{1}{2}(2{,}5457 - 1{,}5\sqrt{h_2})\right)$$

Solução numérica:

$$h_2 \approx \boxed{1{,}3482}$$

AM2 – Iteração 3

$$h_2 \approx 1{,}3482 \quad \Rightarrow \quad f(h_2) \approx 2 - 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}3482} \approx 0{,}2694$$

Resolvemos:

$$h_3 = h_2 + \frac{1}{2}\left[f(h_2) + f(h_3)\right] = 1{,}3482 + \frac{1}{2}\left[0{,}2694 + (2 - 1{,}5\sqrt{h_3})\right]$$

$$h_3 = 1{,}3482 + \frac{1}{2}(2{,}2694 - 1{,}5\sqrt{h_3})$$

$$g(h_3) = h_3 - \left(1{,}3482 + \frac{1}{2}(2{,}2694 - 1{,}5\sqrt{h_3})\right)$$

Solução numérica:

$$h_3 \approx \boxed{1{,}5392}$$

Resumo dos Valores – Adams-Moulton 2ª Ordem (Implícito)

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	0,9403
2	2	1,3482
3	3	1,5392

Comparação para h_3:

- RK2 (Heun): 1,4982
- RK4: 1,5383
- AB2: 1,5396
- **AM2 (direto):** $\boxed{1{,}5392}$
- RK45 (Scipy): $h_3 \approx 1{,}5268$

Conclusão: O método AM2 (implícito) é mais preciso que RK2 e quase idêntico ao AB2, mas com maior estabilidade para problemas rígidos.

Métodos BDF (Backward Differentiation Formula)

Métodos BDF (retro-diff)

- São métodos de múltiplos passos **implícitos**, especialmente eficazes para equações **rígidas**.
- Derivam da aproximação da derivada usando um **polinômio interpolador** passado por pontos anteriores:

$$\frac{dy}{dt}(t_{n+1}) \approx \sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+1-j}$$

- Substituímos isso na equação diferencial:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+1-j} = h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

- Como y_{n+1} aparece em ambos os lados, o método é **implícito**.

Métodos BDF – Tabela de Coeficientes

Fórmula geral:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+1-j} = h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Coeficientes a_j dos primeiros métodos BDF:

Ordem	Expressão
1	$y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$
2	$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf_{n+1}$
3	$\frac{11}{6}y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} = hf_{n+1}$
4	$\frac{25}{12}y_{n+1} - 4y_n + 3y_{n-1} - \frac{4}{3}y_{n-2} + \frac{1}{4}y_{n-3} = hf_{n+1}$

Métodos BDF (retro-diff)

Características principais:

- Todos os BDFs são **implícitos** e requerem solução numérica equações não lineares a cada passo.
- São muito usados em integradores rígidos como o `solve_ivp(method='BDF')`.
- Estabilidade melhora com a ordem até um certo limite — acima de ordem 6, os BDFs se tornam instáveis.

Problema: Tanque com Entrada Contínua e Saída Proporcional à Altura

Método BDF2 – Iteração 2

Valores iniciais:

$$h_0 = 0, \quad h_1 \approx 0{,}9710 \quad \text{(via RK4)}$$

Fórmula BDF2:

$$\frac{3}{2}h_2 - 2h_1 + \frac{1}{2}h_0 = f(h_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}h_2 - 1{,}942 = f(h_2)$$

Substituindo $f(h_2) = 2 - 1{,}5\sqrt{h_2}$, obtemos a equação:

$$g(h_2) = \frac{3}{2}h_2 - 1{,}942 - (2 - 1{,}5\sqrt{h_2}) = 0$$

Resolvendo numericamente com Newton-Raphson (scipy):

$$h_2 \approx \boxed{1{,}3753}$$

Método BDF2 – Iteração 3

Valores anteriores:

$$h_1 \approx 0{,}9710, \quad h_2 \approx 1{,}3753$$

Fórmula BDF2:

$$\frac{3}{2}h_3 - 2h_2 + \frac{1}{2}h_1 = f(h_3)$$

$$\frac{3}{2}h_3 - 2{,}7506 + 0{,}4855 = f(h_3) \Rightarrow \frac{3}{2}h_3 - 2{,}2651 = 2 - 1{,}5\sqrt{h_3}$$

Equação a resolver:

$$g(h_3) = \frac{3}{2}h_3 - 2{,}2651 - (2 - 1{,}5\sqrt{h_3}) = 0$$

Solução numérica:

$$h_3 \approx \boxed{1{,}5663}$$

Resumo dos Valores – BDF2

n	t_n (h)	h_n (m)
0	0	0
1	1	0,9710 (via RK4)
2	2	1,3753
3	3	1,5663

Comparação para h_3:

- RK2: 1,4982
- RK4: 1,5383
- AB2: 1,5396
- AM2: 1,5392
- **BDF2:** $\boxed{1{,}5663}$
- RK45 (Scipy): $h_3 \approx 1{,}5268$

Conclusão: BDF2 é relativamente preciso e estável — ótimo para problemas rígidos ou com dinâmicas lentas.

Comparação Gráfica dos Métodos

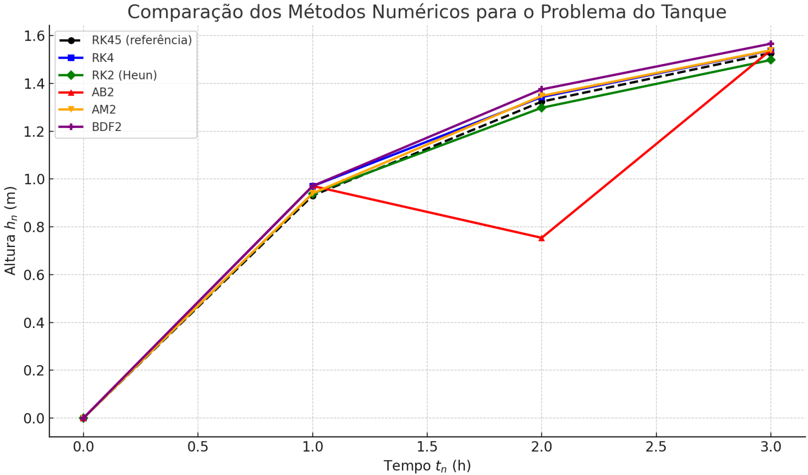


Figure 1: Evolução da altura $h(t)$ no tanque para cada método numérico em comparação com a solução de referência obtida com solve_ivp (RK45).

Comparação Gráfica dos Métodos

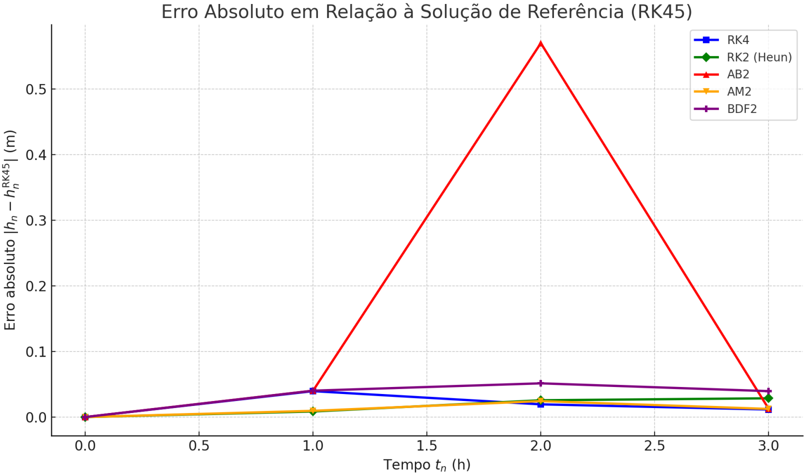


Figure 2: Erro absoluto de cada método numérico em comparação com a solução de referência obtida com solve_ivp (RK45).

Obrigado!