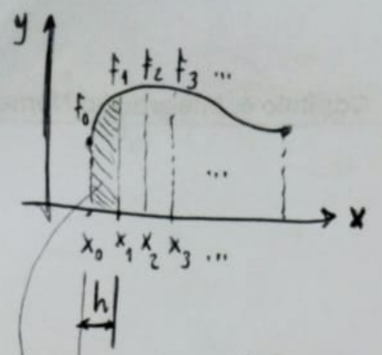
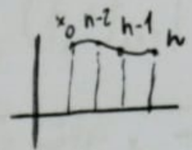




$x = x_0 + n \cdot h$

p/ 2 pontos $\rightarrow n = 1$
(n+1) (1 espaçamento)

Para o primeiro intervalo

$$\Delta I = h \int_0^{n=1} (f_0 + n\Delta f_0)\, dn$$

$$= h \left[n f_0 + \frac{n^2}{2} \Delta f_0 \right]_0^1 , \quad \Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$= h\left(f_0 + \frac{1}{2}(f_1 - f_0)\right)$$

$$\Delta I = h \left(\frac{f_0 + f_1}{2} \right)$$

Generalizando para todos os intervalos:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta I_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h_i (f_i + f_{i+1}) , \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

Considerando espaçamento igual, $h = cte$:

$$I = \frac{1}{2} h (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

última interseção

$$= \frac{1}{2} h \left(f_0 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} 2f_i\right] + f_n\right)$$

Erro de aproximação:

$$P_n(x) = f_0 + n\Delta f_0 + R^{n+1}$$

$$\Delta I_e = h \int_0^1 \frac{n(n-1)}{2} h^2 f''(\xi)\, dn = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

$$\Delta I_e = O(h^3) \quad \Rightarrow \text{erro local!}$$

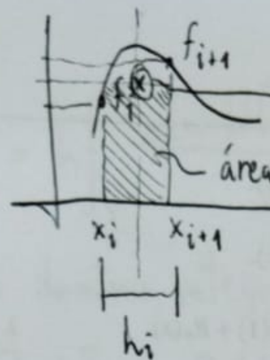
ordem aproximação

- Para todo domínio integração: $I_e = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta I_e = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi) =$

$$= n \cdot \left[-\frac{1}{12} h^3 f''(\xi) \right]$$

Como o nº intervalos: $n = \dfrac{(x_n - x_0)}{h}$

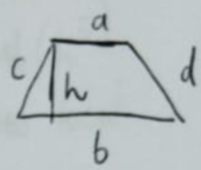
$$I_e = -\frac{1}{12} (x_n - x_0) h^2 f''(\xi) = O(h^2)$$



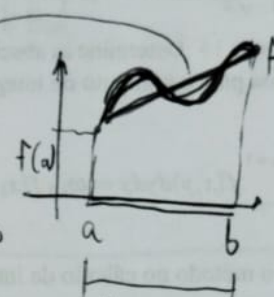
$$\Delta I = \frac{1}{2} h_i \left(f_i + f_{i+1}\right)$$

área do trapézio no ponto médio

$$A = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$



aproximação da função orig. por uma função linear

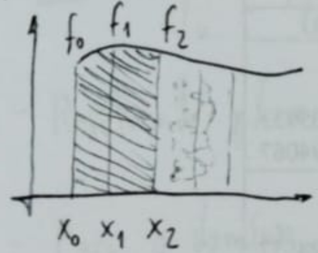


$$\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$\frac{b-a}{2}\left(f_a + f_b\right)$$

Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson:

polinômio $n=2$, $N=3$ $(n+1)$ pontos discretos



$x = x_0 + nh$

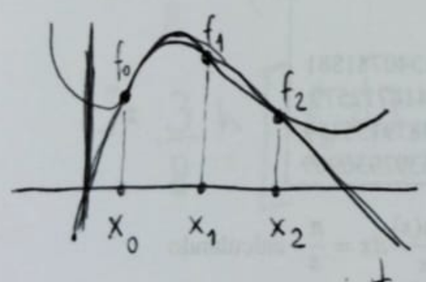
$n = 2$, $n+1 = 3$ pontos

sub-intervalos (espaçamentos)

$$\Delta I = h\int_0^2 \left[f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f_0\right] dn$$

Integrando e aplicando limites:

$$\Delta I = \frac{1}{3} h\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$



Para todo domínio (todos os intervalos)

ajuste parabólico

$$I = \frac{1}{3}h\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

Forma Geral: $I = \frac{h}{3}\left[f_0 + \left(2\sum_{j=1}^{n/2-1} f_{2j}\right) + \left(4\sum_{j=1}^{n/2} f_{2j-1}\right) + f_n\right]$

Erro Aproximação: $P_n(x) = f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f_0 + R^{n+1}$

$$\Delta I_e = h\int_0^2 \frac{n(n-1)(n-3)}{6} h^3 f'''(\xi)\, dn = \cancel{O(0)}$$

0

$$\Delta I_e = h\int_0^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} h^4 f^{iv}(\xi)\,dn = \frac{-1}{90} h^5 f^{iv}(\xi)$$

$= Ord(h^5)$

↳ erro local

Para todo domínio integração:

$$I_e = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta I_e = O(h^4) \rightarrow \text{Erro Global}$$

$\frac{1}{3}$ Simpson → precisa n^3 por n subdivisões

Regra $\frac{3}{8}$ Simpson:

Polinómio $n=3$ grau, utilizando 4 $(n+1)$ pontos discretos

$$\Delta I = h\int_0^3 \left[f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^3 f_0 \right] dn$$

- Resolvendo p/ o intervalo: $\Delta I = \frac{3}{8} h \left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right)$

ponto de interseção p/ 2º intervalo

- Para o domínio de integração:

$$I = \frac{3}{8} h \left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

$$I = \frac{3}{8} h \left[f_0 + \left(3 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3\cdot K}}^{n-1} f_j\right) + \left(2 \cdot \sum_{j=1}^{n/3-1} f_{3j}\right) + f_n \right], \; K \in \mathbb{N}^*$$

~ última interseção

↳ números naturais excluindo o 0

↳ são os pontos de interseção excluídos

↳ excluindo pontos de interseção de subintervalos ($f_3, f_6, f_9, \dots$)

Erro Aproximação:

$$P_n(x) = f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^3 f_0 + R^{n+1}$$

$$\Delta I_e = h\int_0^3 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} h^4 f^{iv}(\xi)\,dn = \frac{-3}{80} h^5 f^{iv}(\xi) \rightarrow \Delta I_e = O(h^5)$$

Para todo domínio de integração:

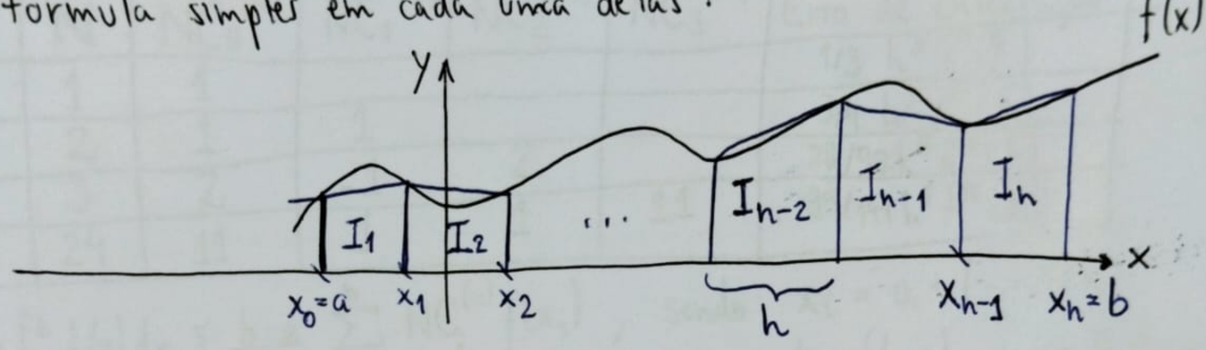
$$I_e = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta I_e = -\frac{3}{80}(x_n - x_0)\, h^4 f^{iv}(\xi) \rightarrow I_e = O(h^4)$$

→ mesma ordem de aprox. do Simpson $\frac{1}{3}$, porém permite um número ímpar de subintervalos

local e global

- Método do Trapézio - Fórmula Composta:

Intervalo de integração é dividido em n partes de tamanho h, e aplica-se a fórmula simples em cada uma delas:



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$I = \underbrace{\frac{h}{2}[y_0 + y_1]}_{I_1} + \underbrace{\frac{h}{2}[y_1 + y_2]}_{I_2} + \dots + \underbrace{\frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]}_{I_n}$$

Logo, $\boxed{I = \frac{h}{2}[y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \dots + 2 \cdot y_{n-1} + y_n]}$

↳ Fórmula composta da regra dos trapézios

Erro de truncamento: $E_T = -\frac{(x_n - x_0)^3}{12 n^2} \cdot f''(\xi) \quad , \quad x_0 \leq \xi \leq x_n$

Método de Newton-Cotes com Fórmulas abertas:

x_0 e x_n dentro do intervalo $[a,b]$, com $h = \frac{(b-a)}{(n+2)}$

n	N	$NC_0^{(n)}$	$NC_1^{(n)}$	$NC_2^{(n)}$	$NC_3^{(n)}$	Erro de Integração
0	1	1		—		$1/3\, h^3 f''(\xi)$
1	2	1	1		-	$3/4\, h^3 f''(\xi)$
2	3	2	-1	2		$28/90\, h^5 f^{IV}(\xi)$
3	24	11	1	1	11	$95/144\, h^5 f^{IV}(\xi)$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{n} NC_i^{(n)} f(x_i)$$, sendo: $x_i = a + (i+1)h$

$h = \frac{(b-a)}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$

Método de Simpson Composto:

(i) 1 parábola: $\int_a^b f(x)\,dx$, $h = \frac{b-a}{2}$,

x_0 x_1 x_2

a $\frac{a+b}{2}$ b

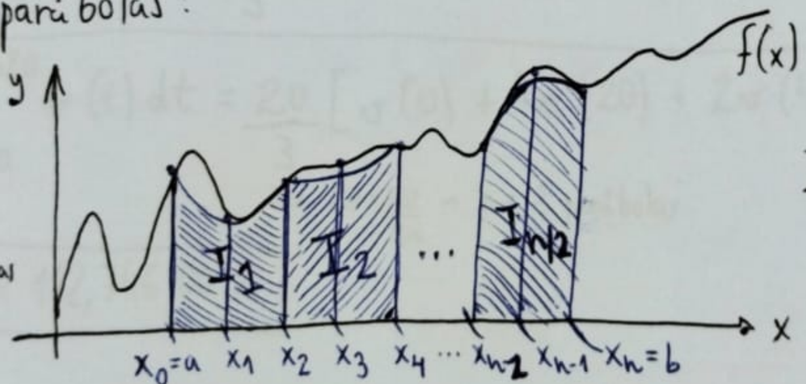
$$\boxed{I_{NUM.}^{(1)} = \frac{b-a}{6} \left\{ f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right\}} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

↳ Fórmula simples da 1ª regra Simpson

(ii) n parábolas:

$h = \frac{(b-a)}{2n}$

n: nº de parábolas



$I = I_1 + I_2 + \dots + I_{n/2}$

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[y_0 + 4\cdot y_1 + y_2]}_{I_1} + \underbrace{\frac{h}{3}[y_2 + 4\cdot y_3 + y_4]}_{I_2} + \dots + \underbrace{\frac{h}{3}[y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n]}_{I_{n/2}}$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\cdot [y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + 2\cdot y_4 + \dots + 2\cdot y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n]}$$

↳ Fórmula Composta da 1ª Regra de Simpson [Atenção!!! n = par!]

Erro de truncamento: $E_T = -\frac{(x_n - x_0)^5}{180 n^4} \cdot f^{(IV)}(\xi)$, $\xi \in [x_0, x_n]$

a : Cap. 6 - Prob. 3 :

$h = \frac{b-a}{2n}$

$\boxed{h = 10 \text{ seg.}} \rightarrow 10 = \frac{80}{2n} \rightarrow n = 4$ parábolas

$$v(80) = \int_0^{80} a(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left[a(0) + 4a(10) + 2a(20) + 4a(30) + 2a(40) + 4a(50) + 2a(60) + 4a(70) + a(80)\right]$$

$$v(80) = \frac{10}{3}\left[30.00 + 4\cdot(31.63) + 2\cdot(33.44) + 4\cdot(35.47) + 2\cdot(37.75) + 4\cdot(40.33) + 2\cdot(43.29) + 50.67\right]$$

$\boxed{v(80)} \boxed{= 3.087,03 \text{ m/s}}$ → direto pelo Simpson recursivo

Aplicando Simpson sucessivamente :

$\Delta v \Rightarrow v_K = v_{K-1} + \frac{h}{3}\left[a_{2K-2} + 4\cdot a_{2K-1} + a_{2K}\right]$, $h = 10s$, 3 pontos

- $v(0) = 0$ m/s
- $v(20) = v(0) + \frac{10}{3}\left[a(0) + 4a(10) + a(20)\right] = 633.20$ m/s
- $v(40) = v(20) + \frac{10}{3}\left[a(20) + 4a(30) + a(40)\right] = 1343.43$ m/s
- $v(60) = v(40) + \frac{10}{3}\left[a(40) + 4a(50) + a(60)\right] = 2151.30$ m/s
- $\boxed{v(80)} = v(60) + \frac{10}{3}\left[a(60) + 4a(70) + a(80)\right] = \boxed{3087.03 \text{ m/s}}$

$h = 20s$

$$S = \int_0^{80} v(t)\,dt = \frac{20}{3}\left[v(0) + 4v(20) + 2v(40) + 4v(60) + v(80)\right]$$

↳ $20 = \frac{80}{2n} \rightarrow n = 2$ parábolas

$\boxed{s(80) = 112,746.00 \text{ m}}$

Algoritmo do método de Simpson em subintervalos (Simpson Composto):

N_p: nº de parábolas , $a = x_0$, $b = x_{2n}$

$S_0 \leftarrow f(a) + f(b)$, $h \leftarrow \dfrac{b-a}{2 \cdot N_p}$, $S_{impar} \leftarrow \sum_{i=1}^{N_p} f(x_{2i-1})$,

$S_{par} \leftarrow \sum_{i=1}^{N_p - 1} f(x_{2i})$

$I_{NUM} \leftarrow \dfrac{h}{3} \left\{ S_0 + 4 \cdot S_{IMPAR} + 2 \cdot S_{PAR} \right\}$

$$\boxed{I_{NUM}^{(N_p)} = \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{N_p} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N_p - 1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right\}} ,$$

$x_i = a + i \cdot h$; $i = 0, \dots, 2n$

- δ = critério de convergência , - ε = menor valor do passo de integração, h_{min}

Processo Recursivo :

```
do
    Ivelho ← I
    N ← N + N   (2N)
    h ← h/2
    Spar ← Spar + Simpar
    Simpar ← Σ_{j=1}^{N} f[a + (2j-1)·h]
    I ← h/3 · (S0 + 4·Simpar + 2·Spar)
while |I - Ivelho| > δ e |h| > ε
```

Cálculo final da integração numérica : $\boxed{I \leftarrow \dfrac{16 \cdot I - I_{velho}}{15}}$ extrapolação de Richardson

$I_{EXATO} = I_{NUM_{N_1}} + E_{N_1} = I_{N_2} + E_{N_2}$, $E_{N_1} = \dfrac{I_{N_2} - I_{N_1}}{1 - (N_1/N_2)^m}$ → ordem erro

(N_1: Nsubinterv., E: erro)

$$\boxed{I = \frac{I_{N2} - (N_1/N_2)^m \, I_{N1}}{1 - (N_1/N_2)^m}}$$, extrapolação de Richardson

m: ordem erro

Ex: Simpson recursivo : $N_2 = 2N_1$, $m = 4$; $I = \dfrac{16\, I_{N2} - I_{N1}}{15}$

$h^4 f^{(IV)}(\xi)$

emplo - Simpson Recursivo:

$$\int_0^{1.2} e^x \, dx \quad , \quad 6 = \epsilon = 10^{-6} \quad , \quad \text{Start } N=2 \quad , \quad h = \frac{b-a}{2N}$$

$$S_0 = f(a) + f(b) = e^0 + e^{1.2} = 1 + 3.32012 = 4.32012$$

$$h = \frac{1.2-0}{2\cdot 2} = 0.3$$

$$S_{PAR} = \sum_{j=1}^{N-1} f(a + 2j \cdot h) = \sum_{j=1}^{1} f(0 + 2\cdot 1 \cdot 0.3) = f(0.6) = e^{0.6} = 1.82212$$

$$S_{IMPAR} = \sum_{j=1}^{N} f(a + (2j-1) \cdot h = \sum_{j=1}^{2} f(0 + (2j-1)\cdot 0.3) = f(2\cdot 0.3) + f(3 \cdot 0.3)$$

$$= e^{0.6} + e^{0.9}$$

$$= 3.809462$$

$$I = \frac{h}{3}[S_0 + 4 \cdot S_{IMPAR} + 2 \cdot S_{PAR}]$$

$$= \frac{0.3}{3}[4.32012 + 4 \cdot (3.809462) + 2 \cdot (1.82212)]$$

$I_{OLD} = 2.32022$ $\qquad$ I_{CURR} = nul

- $N = 4$ $\qquad h = \frac{1.2-0}{2 \cdot N} = \frac{1.2}{8} = 0.15$

$$S_{PAR} = \sum_{j=1}^{3} f(a + 2 \cdot j \, 0.15) = f(0.3) + f(0.6) + f(0.9) = 5.6315807$$

$$S_{IMPAR} = \sum_{j=1}^{4} f(a + (2 \cdot j - 1) \, 0.15) = f(0.15) + f(0.45) + f(0.75) + f(1.05) =$$

$$= 7.70479756$$

$$I = \frac{0.15}{3}[4.3201169 + 4 \cdot (7.70479756) + 2 \cdot (5.6315807) = 2.3201234$$

$$I_{CURR} = 2.3201234$$

$$|I_{CURR} - I_{OLD}| = 9.6789217 \cdot 10^{-5}$$

N	h	S_{IMPAR}	S_{PAR}	I_{VELHO}	I_{ATUAL}	$\lvert I_{ATUAL} - I_{VELHO} \rvert$
2	0.3	3.809462	1.82212	2.32022	-	-
4	0.15	7.704798	5.63158	2.32022	2.3201234	$9.68 \cdot 10^{-5}$
... 8	0.075	15.452955	13.33638	2.3201234	2.3201173	$6.10 \cdot 10^{-6}$
... 16	0.0375	30.927643	28.78933	2.3201173	2.32011695	$3.82 \cdot 10^{-7}$

Extrapolação de Richardson:

$$I_{extrap.} = \frac{(16 \cdot I_{ATUAL} - I_{VELHO})}{15} = \frac{(16 \cdot 2.32011695 - 2.3201173)}{15} = 2.32011692$$

Integral exata ; solução analítica:

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad , \quad \int_0^{1.2} e^x \, dx = e^{1.2} - e^0 = 3.320117 - 1 = 2.320117$$

$$E_{EXATO} = I_{EXATO} - I_{EXTRAP.} = 2.032 \cdot 10^{-10}$$

Resumo : Aulas passadas

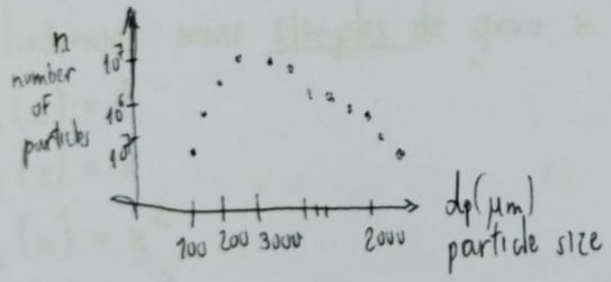
* NC fechado : $(x_0 = a, x_n = b)$, $h = \frac{b-a}{n}$
  Pontos igualm. espaçados , métodos simples como Simpson e Trapézio , $f(x)$ suave em $[a,b]$

* NC aberto : $x_0, x_n \in [a,b]$, $h = \frac{b-a}{n+2}$
  útil quando se desconhece os pontos finais.

* Versões compostas dividem $[a,b]$ em subintervalos , aplicando a regra simples múltiplas vezes , reduzindo erro e aumentando acurácia em domínios grandes.

* Trapézio Composto reduz o erro em $\frac{1}{n^2}$, $n =$ nº subdivisões
  Simpson Composto reduz o erro em $\frac{1}{n^4}$, $n =$ nº subdiv.

* Extrapolação Richardson :
  - Reduz erro combinando resultados de integrais com diferentes passos (erros de ordem mais alta)
  - ex. aplicado a Simpson composto , $I_{FINAL} =$ comb. $I(h)$ e $I\left(\frac{h}{2}\right)$, converge mais rápido a valores reais quando $h \to 0$.



$$N = \int_{dp_0}^{dp} n \, d\,dp$$

Métodos Quadratura : tipo Gauss

NC : $I = \int_a^b P_n(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$, n+1 pontos , Ex: Polin. 1º grau P_n n=1, 2 ptos

Gauss : $I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$, n pontos , Ex: Polin. 1º grau P_{n-1} n=2, 2 ptos

---

- Quadratura de Gauss :

ex : $\boxed{n=2}$ $\rightarrow I \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$

2 pontos

4 parâmetros a determinar : 2 pesos e 2 abscissas

Se $f(x) = P_0(x)$

$f(x) = P_1(x)$

$f(x) = P_2(x)$

$f(x) = P_3(x)$

$\rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx \equiv w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$

satisfazer as 4 eq. de maneira EXATA (tem sol. analít.)
(integrais)
condições

Polinómios mais <u>simples</u> de grau n :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = x^2 \\ P_3(x) = x^3 \end{cases}$$

- Normalização do intervalo de integração [a, b] para [0,1] :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

n=2 P_3

$$f(x) = x^K \rightarrow I_K = \int_0^1 x^K dx = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^K \ ; \ \underbrace{K = 0, 1, \ldots, 2n-1}_{2n \text{ condições}}$$

$$I_{EXATA} = \int_0^1 x^K dx = \left[\frac{x^{K+1}}{K+1}\right]_0^1 = \frac{1}{K+1} \quad \text{(sol. analítica)}$$

- $I_{NUM} = w_1 \cdot x_1^K + w_2 \cdot x_2^K$

$n=2$:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 x^0\,dx = 1 = w_1 \cdot x_1^0 + w_2 \cdot x_2^0 = w_1 + w_2 \\
I_1 &= \int_0^1 x^1\,dx = \frac{1}{2} = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \\
I_2 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 \\
I_3 &= \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} = w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3
\end{aligned}$$

Sistema de equações não-linear (4 eq., 4 var.)
$\downarrow$
Poderia aplicar Newton-Raphson p/ raízes

- Sempre $2n$ equações no sistema.
- Considerando que x_1 e x_2 são raízes de um polinômio de grau $n=2$:

$\boxed{P_2(x)} = (x-x_1)\cdot(x-x_2) = \boxed{x^2 - bx + c}$, onde $b = x_1 + x_2$, $C = x_1 \cdot x_2$

- determinar b e c:
- comb. linear das 3 primeiras equações: $I_2 - b \cdot I_1 + c I_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} b + 1 \cdot c =$

$$= \underbrace{w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2}_{I_2} - b \cdot \underbrace{(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{I_1} + c\,\underbrace{(w_1 + w_0)}_{I_0} =$$

$$= w_1 \underbrace{(x_1^2 - bx_1 + c)}_{P_2(x_1) = 0\,[(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)]} + w_2 \underbrace{(x_2^2 - bx_2 + c)}_{P_2(x_2) = 0\,[(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)]} = \boxed{\frac{1}{3} - \frac{b}{2} + c = 0} \quad i$$

- comb. linear das 3 últimas equações: $I_3 - b \cdot I_2 + c \cdot I_1 = \frac{1}{4} - b \cdot \frac{1}{3} + c \cdot \frac{1}{2} =$

$$\underbrace{w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3}_{I_3} - b \cdot \underbrace{(w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2)}_{I_2} + c\,\underbrace{(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{I_1}$$

$$w_1 x_1 \underbrace{(x_1^2 - bx_1 + c)}_{P_2(x_1) = 0} + w_2 x_2 \underbrace{(x_2^2 - bx_2 + c)}_{P_2(x_2) = 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0} \quad ii$$

$$\begin{array}{l} i \\ e \\ ii \end{array} \begin{cases} \frac{b}{2} - c = \frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} - \frac{c}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

, linear
Sistema matricial 2×2
$n=2$
$(n\times n)$

Resolvendo $b=1$, $c = \frac{1}{6}$

Encontramos o polinômio: $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$\boxed{\text{abscissas } x_1 \text{ e } x_2} \longrightarrow \boxed{\text{raízes} \left\{ x_1 = \frac{1-\sqrt{1-1/3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-1/3}}{2} \right\} \quad x_1 = 0{,}211325, \; x_2 = 0{,}788675}$

Para $\boxed{n \leq 3}$ tem sol. analítica, $n \geq 4$ tem que fazer método numérico p/ calcular raízes polinômios (met. Newton)

$\boxed{\text{pesos } w_1 \text{ e } w_2} \longrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$\boxed{w_1 = \frac{1}{2}, \quad w_2 = \frac{1}{2}}$

ex: $f(x) = e^x$ (lembrar que até grau $n=3$ é exato)

$I = \int_0^1 e^x \, dx \cong w_1 e^{x_1} + w_2 e^{x_2} = \frac{1}{2} \cdot e^{0{,}211325} + \frac{1}{2} \cdot e^{0.788675}$

· E se o intervalo não for de 0 a 1?

ex: $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow$ $\boxed{1^{\underline{o}}) \text{ Normalizar o intervalo}}$: $\int_0^{\pi} e^{-v} \cdot \operatorname{sen} v \, dv$

$x = \frac{v-a}{b-a} = \frac{v-0}{\pi-0} = \frac{v}{\pi}$

$dx = \frac{dv}{\pi}, \quad dv = \pi dx, \quad v = \pi x$

$I = \pi \underbrace{\int_0^1 \boxed{e^{-\pi x} \operatorname{sen}(\pi x)} dx}_{\cong w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2)}$

$I \cong \pi \left[\underset{\frac{1}{2}}{w_1} \cdot e^{-\pi \cdot x_1} \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot x_1) + \underset{\frac{1}{2}}{w_2} \cdot e^{-\pi \cdot x_2} \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot x_2) \right], \quad x_1 = 0.211325, \; x_2 = 0.788675$

$I \cong 0.579563$

Resultado analítico dessa integral é 0.521607

O erro é grande ($\text{erro}_{\text{absol.}} = -0.057956$), porque estamos usando só 2 pontos.

O sistema não-linear de $2n$ equações, foi transformado em 2 sistemas lineares
1º para calcular as abscissas, e 2º para calcular os pesos.

grau, $n=3$ do polinômio

Condição: $\begin{cases} I_K = \int_0^1 x^K dx, & K = 0,1,\dots,2n-1 \\ I_K \cong \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^K}_{\text{EXATO para } P_{n\leq 3}(x)} \end{cases}$

Quadratura até x^3 é exata

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} = (x-x_1)(x-x_2)$$

Integ. quadrat.: $\int_0^1 P_2(x)\,dx \cong \sum w_1 \cdot \underbrace{P_2(x_1)}_{0 = (x_1-x_1)} + w_2 \cdot \underbrace{P_2(x_2)}_{0\,(x_2-x_2)} = 0$

Integ. analit.: $\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

• Agora $\int_0^1 \underbrace{x \cdot P_2(x)}_{f(x):\, P_3(x)}\,dx = w_1 \cdot x_1 \cdot \underbrace{P_2(x_1)}_{=0} + w_2 \cdot x_2 \cdot \underbrace{P_2(x_2)}_{=0} = 0$

Analit.: $\int_0^1 \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{6}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = 0$

• Agora $\int_0^1 \underbrace{x^2 \cdot P_2(x)}_{f(x):\, P_4(x)}\,dx \cong w_1 \cdot x_1^2 \cdot \underbrace{P_2(x_1)}_{=0} + w_2 \cdot x_2^2 \cdot \underbrace{P_2(x_2)}_{=0} = 0$ quadrat. $P_{n\geq 4}$

erro $= \frac{1}{180}$

Analit.: $\int_0^1 \left(x^4 - x^3 + \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{18}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}$ Exato

---

• $\int_0^1 x^K \cdot P_2(x)\,dx = 0 \quad ; K = 0,1$

$\int_0^1 \underbrace{x^K P_n(x)\,dx}_{} = 0 \quad ; K = 0,1,2,\dots,n-1$

momentos do polinômio (momento grau 0 até n-1)
↳ se a integral der 0 → polinômio ortogonal

* Na quadratura de Gauss, as abscissas são raízes de um polinômio ortogonal

---

Nesse caso, $\int_0^1 1 \cdot x^K P_n(x)\,dx$, é um polin. ortogonal no intervalo $(0,1)$ em relação à função peso $w(x) = 1$. ⇒ Polinômio Legendre
ou
Polinômio Jacobi, com param. $\boxed{\alpha = \beta = 0}$

Gauss-Jacobi ou Gauss-Legendre $[-1,1]$

...inômio Jacobi: Peso $w(x) = (1-x)^{\alpha} \cdot x^{\beta}$

$$\alpha = \beta = 0 \rightarrow w(x) = 1$$

Então, quando $n > 3$, tem que calcular as raízes de forma numérica, e como eu sei que são raízes de um polinômio ortogonal (cap. 4), todas as raízes são reais e distintas, dentro do intervalo (0 a 1).

· Para calcular o erro, em função do intervalo h:

$I = \int_0^h f(x)\,dx$, é exata se $f(x)$ for um polinômio de grau $2n-1$. (n: pontos)

$$\boxed{n=2 \rightarrow \text{grau } 3}$$

• expansão de $f(x)$ em séries de Taylor, e truncar no termo de grau 3 (p_4 é exata a integração até este termo).

$$\text{erro}(x) = f(x) - P_3(x)$$

$$= \frac{f^{(IV)}(\mathcal{E}(x))}{4!}(x-x_1)(x-x_2)x^2$$, resto da expansão em séries de taylor

$$\text{erro} = \int_0^h \frac{f^{(IV)}(\mathcal{E}(v))}{4!}(v-v_1)(v-v_2)\cdot v^2\,dx \quad , \quad \mathcal{E} \in [0,h]$$

Normalizando o intervalo h: $x = \frac{v}{h}$, $dv = h \cdot dx$, $v = h \cdot x$

$$\text{erro} = h^5 \int_0^1 \frac{f^{(IV)}(\mathcal{E}(hx))}{4!}(x-x_1)(x-x_2)\,x\,dx$$

teorema do valor médio: $\text{erro} = h^5 \frac{f^{(IV)}(\mathcal{E})}{4!} \underbrace{\int_0^1 \underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}_{P_2(x)} x^2\,dx}_{1/180}$

$$\boxed{\text{erro} = \frac{h^5 f^{(IV)}(\mathcal{E})}{4! \cdot 180} = \frac{h^5}{4320} f^{(IV)}(\mathcal{E})}$$, erro da quadratura de Gauss com $n = 2$ pontos

Comparando com a integral pela quadratura de Newton-Cotes com 2 pontos fechada:

Fórmula dos trapézios: $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot (b-a)$ (com $x_1 = a$, $x_2 = b$)

e, $\int_0^h f(x)\,dx \cong \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h$

$$\text{erro} = \frac{-h^3}{12} f''(\mathcal{E})$$

Gauss com 2 pontos:

$$I = \int_0^h f(x)\,dx = h\int_0^1 f(hx)\,dx \cong \frac{[f(h\overset{0.211...}{x_1}) + f(h\overset{0.788...}{x_2})]}{2} \cdot h$$

$$\text{erro} = \frac{h^5}{4320} f^{(IV)}(\xi)$$

mesmo custo computacional

Mesma fórmula do NC, só muda a localização dos pontos nodais, mas o erro é muito menor.

No NC composto recursivo, era interessante fazer sucessivas integrações, com $h \leftarrow \frac{h}{2}$.

No Gauss, pode fazer isso também, mas é mais interessante aumentar n, nº de pontos

---

Generalização:

$I = \int_a^b w(x) f(x)\,dx$, a quadratura de Gauss resulta em pontos nodais que são raízes de um polinômio ortogonal dentro de um intervalo! polinômios ortogonais são determinados pelo seu intervalo e pela sua função peso. ↓ fixar polin. ortog.

Gauss-Jacobi, $w(x) = (1-x)^\alpha x^\beta$,

$I = [0,1]$

$$I = \int_0^1 \underbrace{(1-x)^\alpha x^\beta}_{\text{função peso} \neq 1} f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$f_K(x) = x^K$, α e β são dados

$$I_K = \int_0^1 \underbrace{(1-x)^\alpha \cdot x^\beta}_{w(x)} \cdot x^K\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^K, \quad K = 0,1,2,\dots,2n-1$$

integral exata

Procedimento idêntico, só mudou o peso dentro da integral, que é um valor numérico.

- Monta o polinômio, calcula raízes polinômio, calcula pesos resolvendo sistema linear (tudo igual)
- Existem outros polinômios ortogonais:

ex: Polinômio de ~~Hermite~~ ~~$h=[0,\infty]$~~
Polinômio de ~~Laguerre~~

Laguerre: $L_n(x)$, $w(x) = e^{-x}$, $h = [0, +\infty]$
Hermite: $H(x)$, $w(x) = e^{-x^2}$, $h = [-\infty, +\infty]$

Existem mais 2 extensões da quadratura de Gauss: (inclusão dos extremos no intervalo h)

- Gauss-Lobatto: $x_0 = a$; x_i, $i = 1,2,\dots,n$; $x_{n+1} = b$ (inclui os 2 extremos no intervalo)

- Gauss-Radau: 2 tipos
  - incluir só extremo inferior: $x_0 = a$; x_i, $i = 1,2,\dots,n$

  ou
  - incluir só extremo superior: $x_{n+1} = b$; x_i, $i = 1,2,\dots,n$

Gauss-Lobatto: $I \cong w_0 f(a) + \left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\right] + w_{n+1} \cdot f(b)$

variáveis a determinar: $\underbrace{2n : w_i \text{ e } x_i \text{ dentro do } \sum + w_0 + w_{n+1}}_{2n+2 \text{ parâmetros}}$

No Gauss-Lobatto, ganho +2 graus de acurácia.

No Gauss-Radau, ganho +1 grau de acurácia (porque tem $2n$ param.)