

Cap. 7: Exercícios

Exercício 1 :

Tanque de Mistura

Em um tanque agitado, uma solução salina entra a uma taxa constante. A concentração no tanque é modelada por :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q_{in}C_{in} - Q_{out}C}{V}, \quad C(0) = 0 \text{ mol/L}, \quad Q_{in} = Q_{out} = 10 \text{ L/min}, \quad C_{in} = 2 \text{ mol/L}, \\ V = 100 \text{ L}$$

- (a) Utilize o método de Euler Explícito com passo $h = 2$ min para calcular a concentração após 10 minutos.
- (b) Utilize o método de Euler Implícito com passo $h = 2$ min para calcular a concentração após 10 minutos.

(Dica : use o método de Newton-Raphson para resolver a equação não linear em cada passo.)

- (c) Uma métrica comum para avaliar o desempenho de métodos numéricos na solução de EDOs é o **IAE** (*Integral of Absolute Error*), que mede a área total sob a curva do erro absoluto entre a solução numérica aproximada e uma referência mais precisa.

O IAE é definido como :

$$IAE = \sum_{n=0}^N |C_{\text{método}}(t_n) - C_{\text{referência}}(t_n)| \cdot \Delta t$$

Considere os seguintes valores obtidos com uma solução de alta precisão (Python RK45) :

Tempo t_n (min)	$C_{\text{referência}}(t_n)$ (mol/L)
0	0,000000
2	0,389524
4	0,724132
6	0,976448
8	1,147740
10	1,256437

Utilize os resultados obtidos nas partes (a) e (b) para calcular o valor de **IAE** para esses métodos. Use $\Delta t = 2$ minutos entre os pontos.

- (d) **(Análise Gráfica)**

Plote em um único gráfico as soluções obtidas pelos métodos de Euler Explícito, Euler Implícito e a solução de referência. Com base no gráfico e nos valores de IAE, interprete qual método apresenta melhor desempenho.

Exercício 2 :

Resfriamento de um Produto em Tanque Agitado

Um tanque agitado resfria um produto químico através de um trocador de calor. A temperatura do produto segue a equação diferencial :

$$\frac{dT}{dt} = -U(T - T_{amb}), \quad T(0) = 90^\circ\text{C}, \quad T_{amb} = 20^\circ\text{C}, \quad U = 0,1 \text{ min}^{-1}$$

- (a) Utilize o método de Runge-Kutta clássico (4^a ordem) com passo $h = 1$ min para calcular a temperatura após 3 minutos.
- (b) (Solução Analítica) Considere a solução analítica da equação diferencial dada :

$$T(t) = 20^{\circ}\text{C} + 70^{\circ}\text{C} \cdot e^{-0,1t}$$

e calcule a temperatura exata nos mesmos tempos. Compare com os valores obtidos numericamente na parte (a). Qual foi o erro absoluto máximo ?

Exercício 3 :

Controle de Nível em Tanque com Vazão Variável

Um tanque recebe água continuamente, mas a vazão de saída depende do nível, seguindo :

$$\frac{dh}{dt} = Q_{in} - C_v \sqrt{h}, \quad h(0) = 0, \quad Q_{in} = 1 \text{ m}^3/\text{h}, \quad C_v = 0,8 \text{ m}^{3/2}/\text{h}$$

- (a) Aplique o método Runge-Kutta clássico de 3^a ordem com passo $h = 0,5$ e calcule o nível após 2 horas.
- (b) Compare a eficiência do método de Runge-Kutta de 3^a ordem com o método de Euler aprimorado (ou Heun) aplicado ao mesmo problema com o mesmo passo $\Delta t = 0,5$, calculando o nível em $t = 2h$.
- (c) Estime o erro absoluto de cada método em relação à solução estacionária analítica (nível final em regime permanente).
- (Dica : solução em regime permanente \rightarrow quando $dh/dt = 0$, ou seja, $h = (Q_{in}/C_v)^2$)
- (d) Discuta qual método oferece melhor custo-benefício em termos de precisão versus esforço computacional neste caso.

Exercício 4 :

Crescimento Microbiano

Uma colônia bacteriana em um bioreator segue o modelo logístico :

$$\frac{dX}{dt} = \mu X \left(1 - \frac{X}{X_{max}} \right), \quad X(0) = 0,1 \text{ g/L}, \quad \mu = 0,4 \text{ h}^{-1}, \quad X_{max} = 10 \text{ g/L}$$

- Resolva utilizando o método Runge-Kutta (2^a ordem - método do ponto médio) com $h = 0,5$ hora para estimar a concentração após 2 horas.