Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica
SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Relatório da Prática 3

Solução de Sistemas Lineares

Bruno Ciotta Fernandes - 12549874

Professor:

Marcelo A. Trindade

Junho de 2022

1 Objetivos

Resolver um problema de engenharia em que é necessária a solução de um sistema linear. Obter uma solução numérica para esse problema através da utilização de métodos computacionais e a visualização gráfica dos resultados obtidos.

2 Métodos e Resultados

Deseja-se calcular os deslocamentos de uma estrutura sujeita à aplicação de forças e/ou deslocamentos através da utilização de um sistema discreto de molas em série. O coeficiente de rigidez das molas é variável, representando a diminuição na área da seção transversal da estrutura. A fórmula que rege o valor desses coeficientes é conhecida, tal que:

$$k_n = k_{min} + \Delta k e^{-bn} \tag{1}$$

em que $k_{min} = 10\ kN/m$, $\Delta K = (50 + 0,5 \cdot 74)\ kN/m$ e $b = 0,2$. Substituindo em 1, obtemos:

$$k_n = 10 + 87\ e^{-0,2n}$$

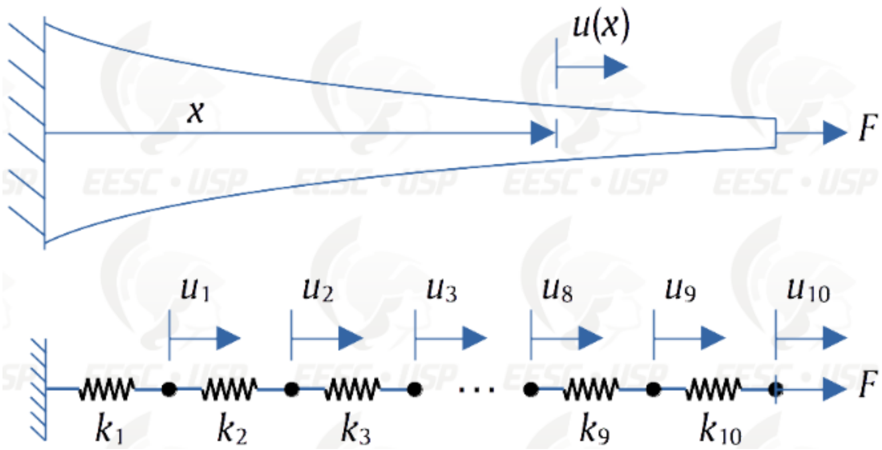


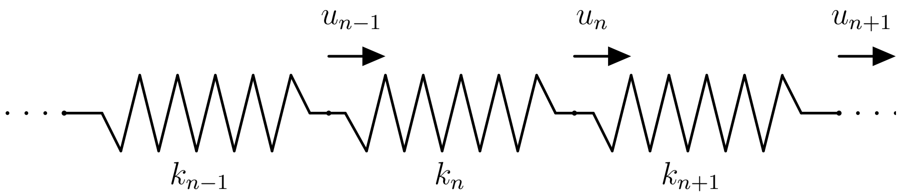
Figura 1: Representação do problema

Numericamente, os seguintes valores de k_n foram obtidos (em kN/m):

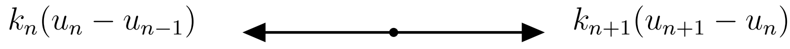
$$k_n = \begin{bmatrix} 81,230 \\ 68,318 \\ 57,747 \\ 49,092 \\ 42,006 \\ 36,204 \\ 31,454 \\ 27,565 \\ 24,381 \\ 21,774 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, pede-se a construção da matriz K de rigidez do sistema, de forma que $Ku = F$, em que $u = \{u_1, ..., u_{10}\}$ é a matriz dos deslocamentos de cada um dos 10 pontos. Para isso, é necessária a análise das forças atuantes nos pontos do sistema em função do deslocamento u.

Tomando uma sequência genérica de três molas, teremos:



Analisando as forças que atuam no ponto n:



A força F_n será a resultante das forças que atuam no ponto n, tal que:

$$F_n = k_n(u_n - u_{n-1}) - k_{n+1}(u_{n+1} - u_n)$$

$$F_n = u_{n-1}(-k_n) + u_n(k_{n-1} + k_n) + u_{n+1}(-k_{n-1})$$

Analogamente, para as extremidades da estrutura, teremos que:

$$F_1 = u_1(k_1 + k_2) + u_2(-k_2)$$

$$F_{10} = u_9(-k_{10}) + u_{10}(k_{10})$$

Observa-se que as forças atuantes nas extremidades do sistema (pontos 1 e 10) dependerão de dois deslocamentos, enquanto que as demais dependerão de três. Com essas equações, é possível construir a matriz de rigidez do sistema.

$$\begin{bmatrix}
k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7 & -k_7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7+k_8 & -k_8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8+k_9 & -k_9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9+k_{10} & -k_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10} & k_{10}
\end{bmatrix}$$

De forma mais compacta, têm-se:

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -k_n & k_{n_1}+k_n & -k_{n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{10} & k_{10} \end{bmatrix}$$

A partir dessa matriz, é possível saber o comportamento do sistema quando sujeito a forças ou deslocamentos em seus pontos. Primeiramente deseja-se determinar a matriz u quando duas forças são aplicadas simultaneamente no sistema, uma de 100 N na extremidade livre (u_{10}) e outra de -50 N na metade do comprimento (u_5).

Para isso, é necessário substituir esses valores na matriz de forças F, tal que $F_{10} = 0,1\ kN$ e $F_5 = -0,05\ kN$. Desse modo, é possível obter u resolvendo o sistema $Ku = F$, em que:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que foi obtido um sistema 10×10, que seria de resolução manual demorada, porém é possível resolvê-lo com ajuda de métodos computacionais. Optou-se pela utilização de ferramentas de resolução de sistemas lineares do programa *Octave*, de forma que após a implementação das matrizes no programa, é possível obter u fazendo `u=K\F`.

Obteve-se os seguintes deslocamentos para o carregamento aplicado (u em mm):

$$u = \begin{bmatrix} 0,61554 \\ 1,3474 \\ 2,2133 \\ 3,2318 \\ 4,4221 \\ 7,1842 \\ 10,363 \\ 13,991 \\ 18,093 \\ 22,685 \end{bmatrix}$$

Também deseja-se a determinação dos deslocamentos dos outros pontos da estrutura quando um deslocamento de 3 cm é imposto na extremidade livre u_{10}. Observa-se que nesse caso o sistema a ser resolvido é 9×9, de forma que é possível reduzir a matriz de rigidez para uma matriz 9×9. Para isso, é necessário remover a última linha e coluna da matriz K: a linha 10 pode ser removida diretamente sem prejuízo, já que u_{10} já está determinado previamente; para remover a última coluna, no entanto, deve-se manipular a linha 9 de modo a eliminar seu último elemento.

A seguinte equação é representada pela linha 9 da matriz K:

$$u_8(-k_9) + u_9(k_9 + k_{10}) + u_{10}(-k_{10}) = 0$$

rearranjando, pode-se escrever essa equação como:

$$u_8(-k_9) + u_9(k_9 + k_{10}) = u_{10}(k_{10})$$

de modo que o elemento $u_{10}k_{10}$ se torna o nono elemento da matriz F, e o único elemento que não era nulo da última coluna de K passa a ser zero, possibilitando assim, a formação de um sistema $Ku = F$ que é 9×9, em que:

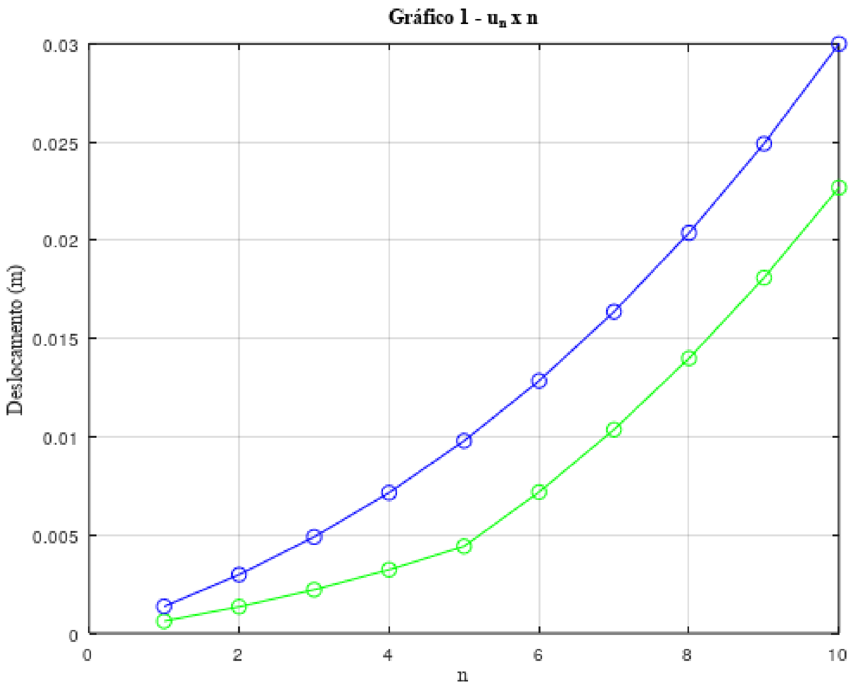
$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7 & -k_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7+k_8 & -k_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8+k_9 & -k_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9+k_{10} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{10}u_{10} \end{bmatrix}$$

Implementando o sistema no *Octave* e fazendo `u=K\F` novamente, obteve-se o seguinte resultado para os deslocamentos (em mm):

$$u = \begin{bmatrix} 1,3624 \\ 2,9824 \\ 4,8989 \\ 7,1532 \\ 9,7879 \\ 12,845 \\ 16,363 \\ 20,378 \\ 24,917 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Por fim, pedia-se a comparação gráfica entre os resultados obtidos com as duas situações propostas. Para isso, foi plotado o gráfico de $u_n \times n$ para os dois casos:



No Gráfico 1, a curva em verde corresponde ao carregamento de forças e a curva em azul à imposição de deslocamento na extremidade livre. É possível observar que há uma certa descontinuidade na curva verde no ponto $n = 5$, devido à força de $-50\ N$ que foi aplicada nesse ponto, enquanto que a curva em azul apresenta um comportamento mais contínuo em todo o gráfico. Também observa-se que em todos os pontos o deslocamento foi maior na segunda situação proposta do que na primeira.

3 Script de Octave utilizado

O seguinte script foi utilizado para a obtenção dos resultados:

```
function [] = prat3

  %=== Definindo as variaveis do problema ===
  b=0.2;
  k_min=10;
  dk=50+0.5*74;

  %=== Preenchendo a matriz de rigidez ===
  k_n=@(n) (10+dk*exp(-0.2*n));
  k=zeros(10);
  k(1,1)=k_n(1)+k_n(2);
  k(1,2)=-k_n(2);
  for i=2:9
      k(i,i-1)=-k_n(i);
      k(i,i)=k_n(i)+k_n(i+1);
      k(i,i+1)=-k_n(i+1);
  endfor
  k(10,9)=-k_n(10);
  k(10,10)=k_n(10);
  k

  %=== Definindo as matrizes F e u ===
  F=zeros(10,1);
  u=zeros(10,1);

  %=== Primeiro problema ===
  F(10,1)=0.1;
  F(5,1)=-0.05;
  u=k\F

  figure(1)
  n=[1:10];
  plot(n, u, '-go')
  title('Gr fico 1 - u_n x n', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  ylabel('Deslocamento (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  xlabel('n', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  grid on;
  hold on;

  %=== Segundo problema ===
  F_2=zeros(9,1);
  u_2=zeros(9,1);
  k_2=k([1:9], [1:9]) %Reduzindo a matriz de rigidez para 9x9
  F_2(9,1)=k_n(10)*0.03;
  u_2=k_2\F_2
  u_2(10, 1) = 0.03; %Completando a matriz u com o decimo elemento

  plot(n, u_2, '-bo')
  end
```

Listing 1: Código utilizado para a obtenção dos resultados

4 Conclusão

A prática permitiu a análise de um problema de engenharia que envolvia a resolução de um sistema linear com várias equações, cuja solução manual seria trabalhosa; dessa forma, a abordagem de uma solução aproximada com o auxílio de métodos computacionais se mostrou muito vantajosa e eficiente.

Após a implementação da matriz de rigidez no *Octave*, a determinação dos deslocamentos nas situações propostas pôde ser feita com muito mais agilidade do que se o problema fosse abordado de forma mais tradicional, sem o auxílio de ferramentas como essa. Além disso, a visualização gráfica das respostas também foi obtida facilmente.

Portanto, as ferramentas computacionais são muito vantajosas nas análises e resoluções de problemas de engenharia, trazendo mais agilidade ao processo e permitindo a obtenção de boas aproximações numéricas.