Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica
SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Relatório da Prática 1

Zeros de Funções

Bruno Ciotta Fernandes - 12549874

Professor:

Marcelo A. Trindade

Setembro de 2021

1 Objetivos

Resolver um problema de engenharia em que é necessário encontrar o zero de uma função de solução não trivial. Utilizar ferramentas computacionais a fim de encontrar uma aproximação numérica para a solução do problema, além de visualizar graficamente as equações.

2 Determinação da Equação de Equilíbrio

Tem-se a seguinte montagem de uma suspensão automotiva oblíqua:

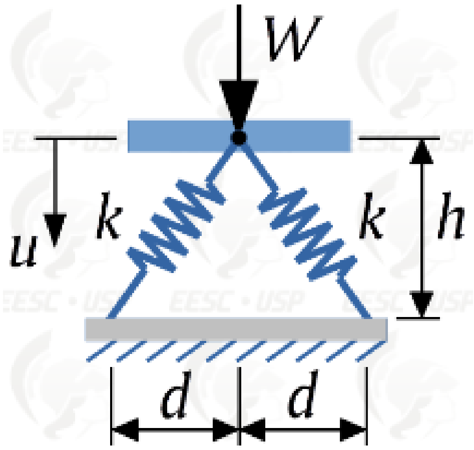


Figura 1: Montagem esquemática do problema

São fornecidos os seguintes dados: $d = 20\ cm$, $L_0 = 50\ cm$, $k = 10\ kN/m$, $g = 9,81\ m/s^2$ e $M = 180 + 74 = 254\ kg$. A medida de h_0 não é dada diretamente, no entanto, é possível encontrar seu valor utilizando o Teorema de Pitágoras, tal que $h_0 = \sqrt{L_0^2 - d^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} = 45,83\ cm$.

Temos que as forças atuando na direção vertical são o peso W e a força elástica F_el resultante da deformação das molas, sendo que há duas molas na suspensão, de modo que a força aparecerá multiplicada por dois. Já que as molas não estão paralelas à vertical, é necessário considerar apenas a componente vertical da força, o que é equivalente a multiplicar F_{el} pelo seno de θ, sendo θ o ângulo formado estre o "chão"e a mola.

$$\sum F_y = W + 2F_{el} \sin\theta \tag{1}$$

Sabe-se, pela Lei de Hooke, que a força resultante da deformação de uma mola será do tipo:

$$F_{el} = -k\Delta L$$

em que k é a constante da mola, que vale 10 kN/m no problema analisado. Observa-se que o deslocamento estático u não está na mesma direção da deformação da mola, no entanto, é possível - utilizando geometria - obter a deformação ΔL em função do deslocamento u utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$\Delta L = \sqrt{d^2 + (h-u)^2} - L_0$$

Já que o triângulo formado por h, L e d é pitagórico, o valor do seno de θ pode ser obtido pela divisão do cateto oposto(h) pela hipotenusa (L), porém, observa-se que h e L variam com o deslocamento u, dessa forma, é possível encontrar $\sin\theta$ em função de u:

$$\sin\theta = \frac{h(u)}{L(u)} = \frac{(h-u)}{\sqrt{d^2 + (h-u)^2}}$$

Sabe-se que o valor do peso W será o produto da massa M pela aceleração g da gravidade, tal que:

$$W = Mg = 254 \cdot 9,81 = 2491,74\ N$$

Portanto, substituindo os termos de F_{el} e $\sin\theta$ em função de u na equação 1, obtem-se uma expressão para força resultante F_r na vertical em função do deslocamento u:

$$F_r(u) = Mg + 2k(\sqrt{d^2 + (h-u)^2} - L_0)\frac{(h-u)}{\sqrt{d^2 + (h-u)^2}} \tag{2}$$

Já que deseja-se primeiramente encontrar os deslocamentos estáticos em que o sistema entra em equilíbrio, será necessário encontrar os valores de u em que $F_r(u) = 0$. Será utilizado o programa Octave como ferramenta computacional para auxiliar na resolução do problema.

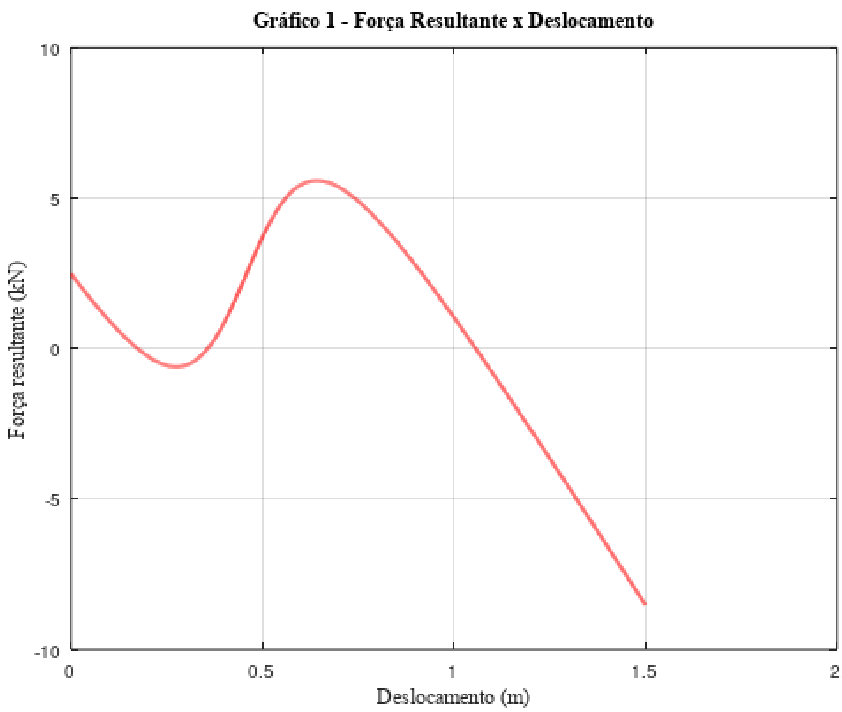
3 Determinação dos zeros com auxílio do Octave

Os zeros da função $F_r(u)$, deduzida anteriormente, podem ser encontrados utilizando ferramentas do Octave. A estratégia adotada foi primeiramente plotar o gráfico $F_r \times u$ para visualizar a "localização"das raízes, para que fosse possível obter o valor exato com a utilização do comando `fzero`, que necessita de um chute inicial (obtido com a visualização do gráfico).

```
%Definindo as variaveis que serao utilizadas
d=0.2;
L0=0.5;
h=sqrt(L0^2-d^2);
M=180+89;
W=M*9.81;
k=10000;
%Plotando o grafico
u=[0:0.001:1.5]; %Intervalo em que o grafico sera plotado
Fr=(W+((2*k*(sqrt((d^2)+(h-u).^2)-L0).*(h-u))./(sqrt((d^2)+(h-u).^2))))/1000; %Definiao da funcao Fr(u)
plot(u,Fr, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title('Gr fico 1 - For a Resultante x Deslocamento', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('Deslocamento (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('For a resultante (kN)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
figure(1);
%Encontrando os zeros da funcao
u_eq=[fzero('apl1',-500), fzero('apl1', 0.4)]
```

Listing 1: Código utilizado para encontrar os zeros da função

Foi obtido o seguinte gráfico com o código acima:



Observa-se que existem 3 raízes no intervalo observado, no entanto, a terceira raiz não é possível fisicamente, já que o u supera o valor de h. Foram usados dois chutes iniciais para obter os dois zeros de função possíveis, a função retornou os seguintes valores:

$$u_{eq1} = 0,1886\ m \qquad u_{eq2} = 0,3468\ m$$

4 Análise do k efetivo

O k efetivo é a constante de uma suposta mola que produziria uma força equivalente às duas molas oblíquas combinadas, portanto têm-se que a força exercida pela nova mola deve igualar a força vertical produzida pelas duas anteriores:

$$F_{ef} = 2F_{el}\sin\theta$$

$$K_{ef}u = 2k\Delta L$$

$$k_{ef} = \frac{2k\Delta L\sin\theta}{u}$$

Substituindo para obter o k_{ef} em função de u, obtêm-se:

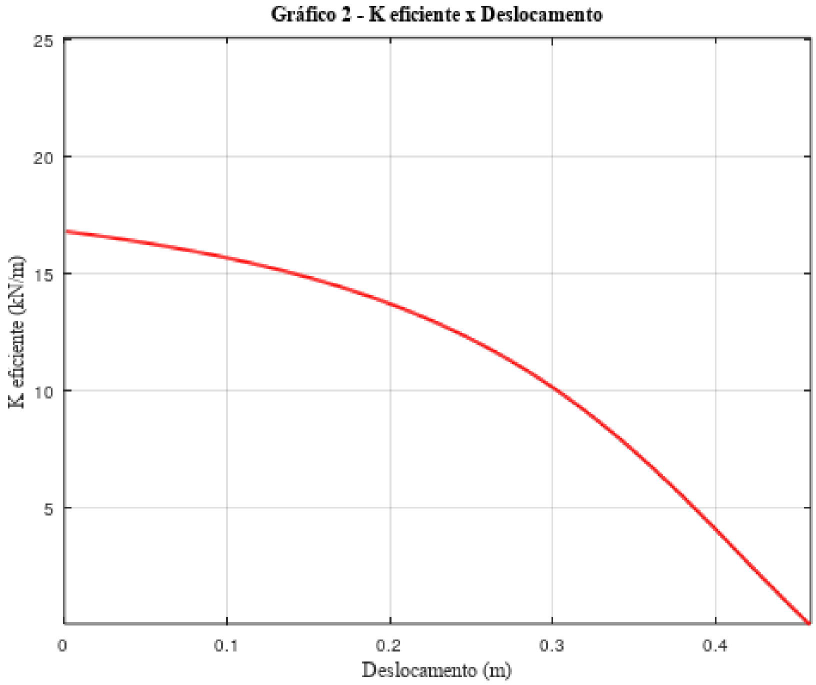
$$k_{ef} = 2k\frac{(\sqrt{d^2+(h-u)^2} - L_0)}{u}\frac{(h-u)}{\sqrt{d^2+(h-u)^2}} \tag{3}$$

Observa-se que o k_{ef} não é constante, mas varia em função da deformação u. Essa expressão foi implementada no Octave, para que fosse possível plotar o gráfico de $k_{ef} \times u$.

```
u=[0:0.001:0.5]; %Intervalo em que o grafico sera plotado
k_ef=-(2*k*((sqrt((d^2)+(h-u).^2)-L0).*(h-u))./(u.*(sqrt((d^2)+(h-u)
  .^2)))); %Definicao da funcao de k_ef(u)
figure(2);
plot(u,k_ef/1000, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
axis([0 h]);
title('Gr fico 2 - K eficiente x Deslocamento', 'FontName', 'Times'
  , 'FontSize', 12)
xlabel('Deslocamento (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('K eficiente (kN/m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
```

Listing 2: Código utilizado para analisar o k efetivo

Foi obtido o seguinte gráfico com o programa:



Observa-se que o k_{ef} decai a zero com o aumento da deformação u, até que chega a zero quando $u = h_0$, o que é coerente, já que se isso fosse possível fisicamente as molas estariam na horizontal, não havendo então força vertical.

Utilizando os valores de u encontrados anteriormente, é possível encontrar os k_{ef} nos pontos de equilíbrio, sendo eles:

$$k_{ef1} = 13,991 kN/m \qquad k_{ef2} = 7,6093 kN/m$$

Os coeficientes obtidos são respectivamente maior e menor que o coeficiente real, porém, calculando as equações de equilíbrio com esses k, é possível obter uma situação próxima à de equilíbrio, sendo a força resultante relativamente baixa. Esse erro se deve, provavelmente, ao modo como computadores realizam cálculos numéricos e aos arredondamentos ocorridos no processo.

5 Códigos utilizados

Abaixo, os scripts inteiros utilizados na resolução do problema:

```
function [] = kef
  %Definindo as variaveis que serao utilizadas
  d=0.2;
  L0=0.5;
  h=sqrt(L0^2-d^2);
  M=180+74;
  W=M*9.81;
  k=10000;

  %===== 1 - Encontrando u de equilibrio =====

    %Plotando o grafico
  u=[0:0.001:1.5]; %Intervalo em que o grafico ser  plotado
  Fr=(W+((2*k*(sqrt((d^2)+(h-u).^2)-L0).*(h-u))./(sqrt((d^2)+(h-u).^2))))/1000; %Definicao da funcao Fr(u)
  plot(u,Fr, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
  grid on;
  title('Gr fico 1 - For a Resultante x Deslocamento', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  xlabel('Deslocamento (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  ylabel('For a resultante (kN)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  figure(1);

    %Encontrando os zeros da funcao
  u_eq=[fzero('apl1',-500), fzero('apl1', 0.4)]


  %===== 2 - Analisando k efetivo =====

    %Plotando o grafico
  u=[0:0.001:0.5]; %Intervalo em que o grafico sera plotado
  k_ef=-(2*k*((sqrt((d^2)+(h-u).^2)-L0).*(h-u))./(u.*(sqrt((d^2)+(h-u).^2)))); %Definicao da funcao de k_ef(u)
  figure(2);
  plot(u,k_ef/1000, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
  grid on;
  axis([0 h]);
  title('Gr fico 2 - K eficiente x Deslocamento', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  xlabel('Deslocamento (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
  ylabel('K eficiente (kN/m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)

    %Analisando os k_ef no eqilibrio
  k_ef_eq = -(2*k*((sqrt((d^2)+(h-u_eq).^2)-L0).*(h-u_eq))./(u_eq.*(sqrt((d^2)+(h-u_eq).^2))))
end
```

Listing 3: Arquivo principal

```
function f=apl1(u)
  d=0.2;
  L0=0.5;
  h=sqrt(L0^2-d^2);
  M=180+89;
  W=M*9.81;
  k=10000;
  f=(W+((2*k*(sqrt((d^2)+(h-u).^2)-L0).*(h-u))./(sqrt((d^2)+(h-u).^2))))/1000;
end
```

Listing 4: Arquivo auxiliar usado para encontrar os zeros da função

6 Conclusão

A prática introduziu o uso de ferramentas computacionais para a resolução de problemas de engenharia, mostrando que mesmo que não se encontre uma solução exata, é possível encontrar uma aproximação numérica suficiente através de métodos computacionais.

A resolução do problema físico apresentado seria muito dificultosa se feita sem o auxílio de um computador, no entanto, a utilização de softwares como o Matlab e o Octave possibilita uma resolução mais simples, além de permitir uma análise mais elaborada do problema através da plotagem de gráficos.