



Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica  
SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Relatório da Prática 4  
Aproximação numérica de EDOs de 1<sup>a</sup>  
ordem

BRUNO CIOTTA FERNANDES - 12549874

Professor:

MARCELO A. TRINDADE

Junho de 2022

# 1 Objetivos

Resolver um problema de engenharia em que é necessária a solução de uma equação diferencial de resolução não trivial. Obter uma aproximação numérica para esse problema através da utilização de métodos computacionais, além da visualização gráfica dos resultados obtidos.

## 2 Métodos e Resultados

Deseja-se analisar o movimento de um corpo cuja trajetória executada é conhecida em coordenadas polares, determinando parâmetros de seu movimento a partir de condições impostas.

A trajetória executada pelo corpo é dada pela equação:

$$r(\theta) = 20(3 - 2 \cos \theta) \text{ cm} \quad (1)$$

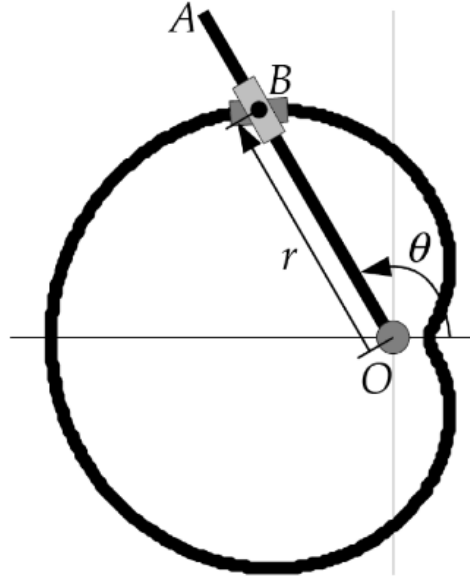


Figura 1: Representação do problema

Primeiramente, pede-se a determinação da velocidade angular  $\dot{\theta}$  que deve ser imposta para que o corpo realize seu movimento com uma velocidade

$$v(t) = 0,05(100 + 74)(100 - t) \text{ mm/s} \quad (2)$$

Da cinemática, sabe-se que  $v = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$ , o que implica que:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Já que  $v$  e  $r$  são conhecidos, é possível obter uma equação para a velocidade angular a partir dessa relação.

Derivando  $r(\theta)$  em relação ao tempo, teremos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ \dot{r} &= 400 \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

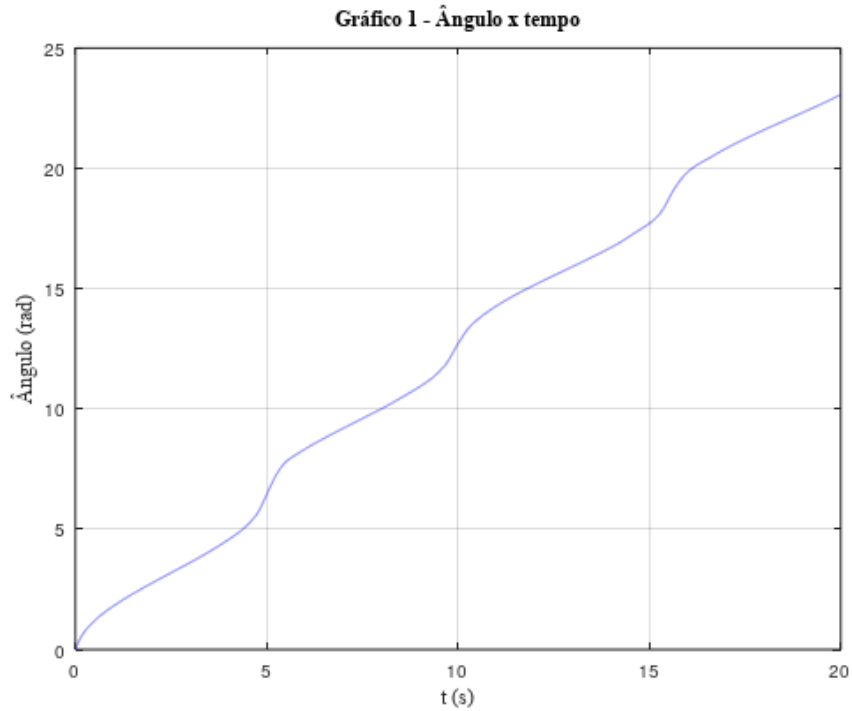
Substituindo 2 e 4 em 3, chega-se em uma equação diferencial para  $\dot{\theta}$ :

$$[(0,05)(100 + 74)(100 - t)]^2 = [400 \sin \theta \dot{\theta}]^2 + [600 - 400 \cos \theta]^2 \dot{\theta}$$

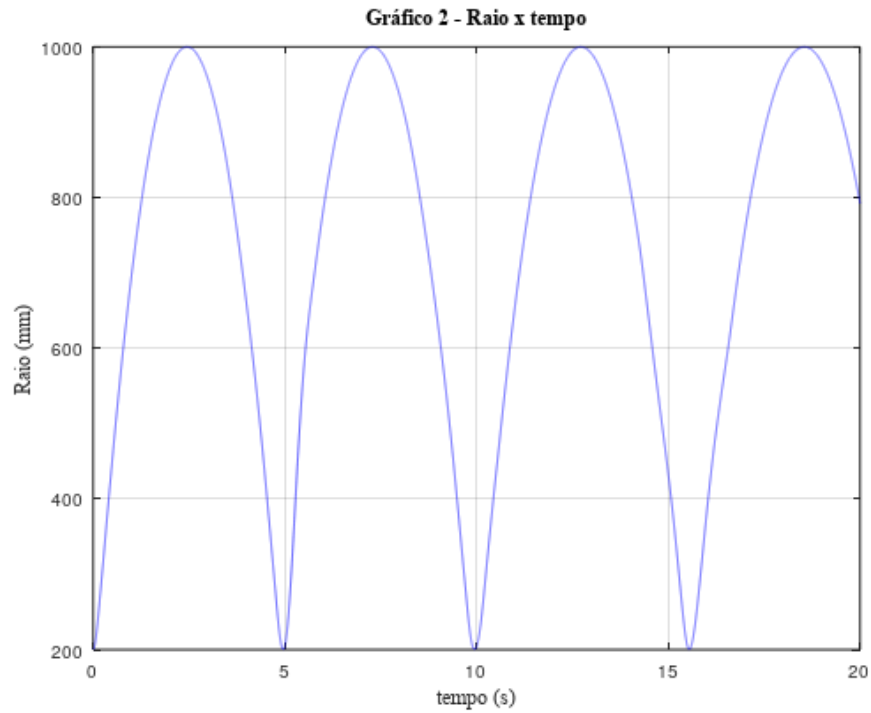
$$\dot{\theta} = \frac{(0,05)(100 + 74)(100 - t)}{\sqrt{[(400 \sin \theta)^2 + (600 - 400 \cos \theta)^2]^2}} \quad (5)$$

Observa-se que essa é uma equação diferencial ordinária (EDO) de solução não trivial, porém, é possível utilizar ferramentas computacionais e métodos numéricos para obter uma solução aproximada para o problema. Optou-se pelo uso do software *Octave*, em que é possível utilizar o comando `ode45` ou outro similar para a obtenção de uma solução aproximada da EDO. O integrador escolhido utiliza métodos de aproximação numérica de solução de EDOs de 1ª ordem e já vem pré-implementado no *Octave*.

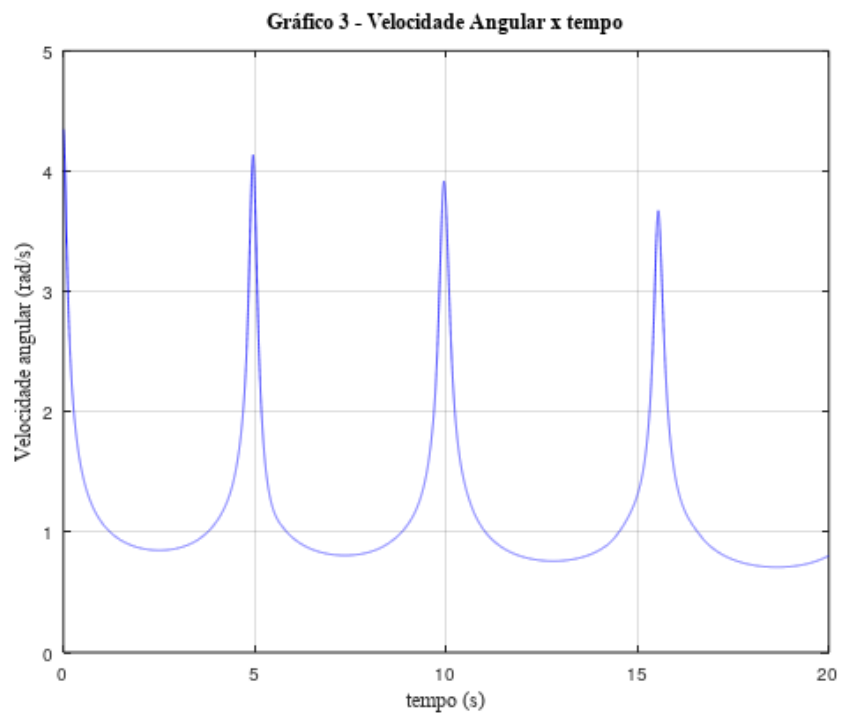
A equação obtida foi implementada no software, para que fosse possível a utilização do `ode45`, o comando devolveu vetores que representam a solução  $\theta$  em função do tempo  $t$ . Com esses dados, o seguinte gráfico foi plotado:



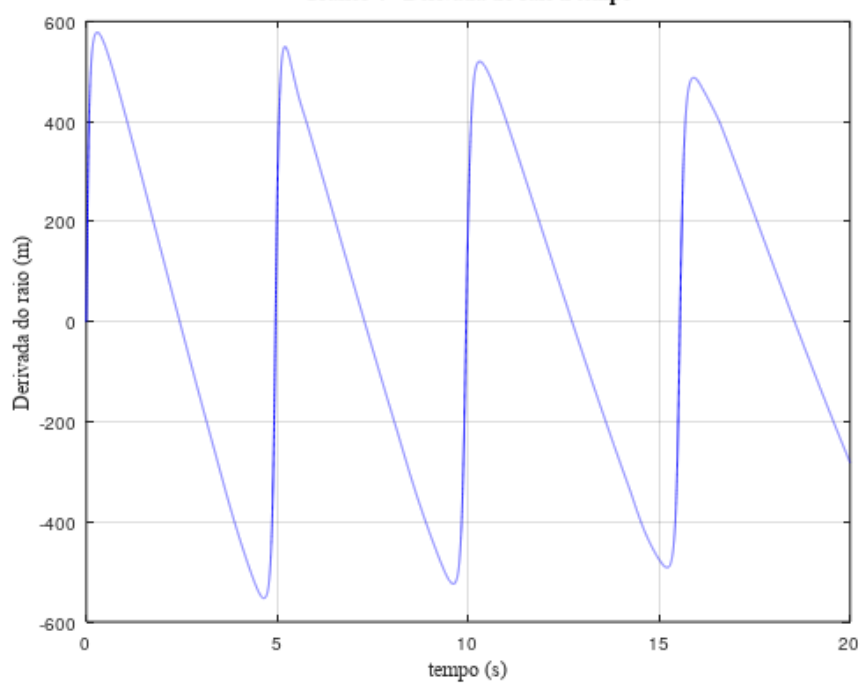
Pede-se também a evolução do deslocamento radial  $r(t)$ , que pode ser obtido passando os valores de  $\theta$ , obtidos anteriormente com a solução da EDO, para a função  $r(\theta)$ , ou seja,  $r(\theta(t))$ . Obteve-se o seguinte gráfico:



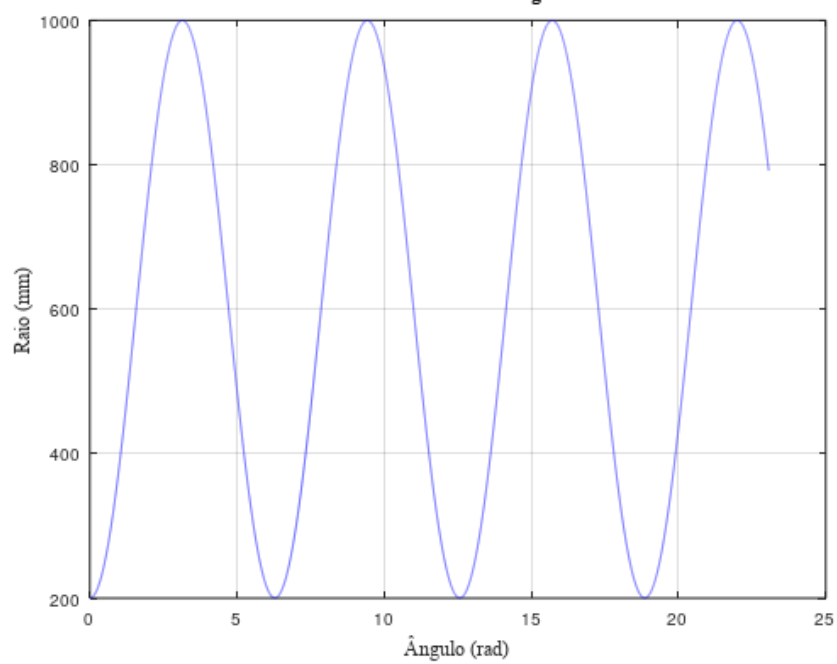
Os gráficos de  $\dot{\theta} \times t$ ,  $\dot{r} \times t$  e  $r \times \theta$  também foram pedidos, todos foram obtidos de forma análoga ao gráfico de  $r(t)$ , com os resultados numéricos obtidos anteriormente. Os seguintes gráficos foram plotados com esses resultados:



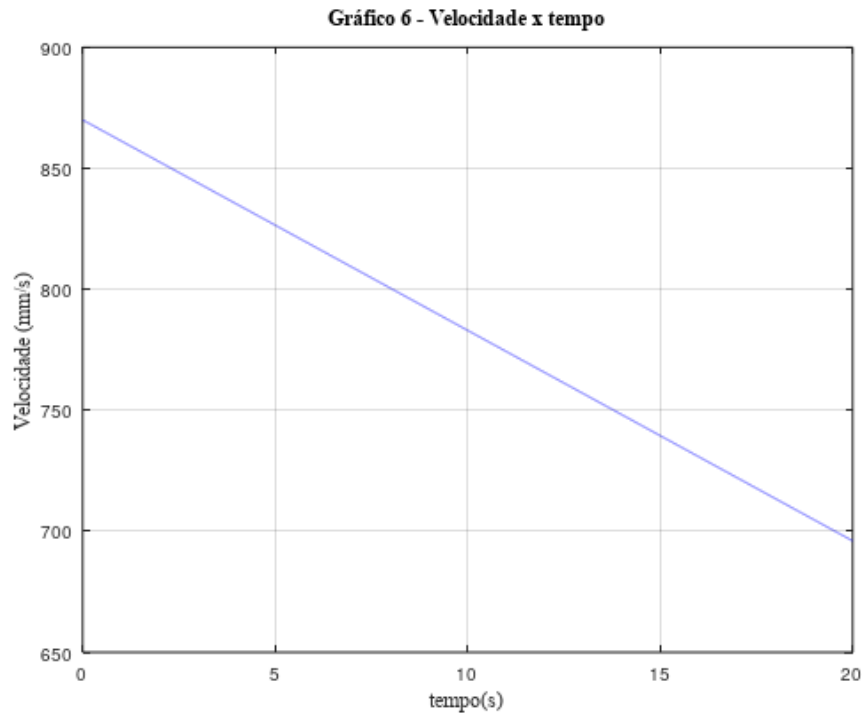
**Gráfico 4 - Derivada do raio x tempo**



**Gráfico 5 - Raio x Ângulo**



O gráfico de  $v \times t$  também foi solicitado, este pôde ser obtido facilmente, já que a função  $v(t)$  é conhecida.



Por fim, era pedida a determinação do tempo necessário para que o corpo completasse 3 voltas completas. A estratégia adotada foi a utilização do vetor  $\theta(t)$ , obtido anteriormente com a solução da EDO, de forma que é necessário encontrar o valor de  $t$  em que o ângulo é igual a  $6\pi \text{ rad}$ . Para isso, o comando `find` do *Octave* foi utilizado, esse comando busca em um vetor os elementos que satisfazem uma dada condição, retornando seus índices. Logo, buscou-se em  $\theta(t)$  os elementos que eram menores que  $6\pi$ , tal que o último elemento do vetor retornado será a posição buscada. Encontrada a posição, usou-se ela para encontrar quanto valia o tempo  $t$  nessa posição, obteve-se o seguinte resultado:

$$t = 15,542 \text{ s}$$

### 3 Script de Octave utilizado

O seguinte script foi utilizado para a obtenção dos resultados:

```
1 function [] = prat4
2
3     N=74;
4     ti=0;
5     tf=20;
6     dt=0.001;
7
8     %=== Definicao das expressoes ===
9     r_o=@(o) (200*(3-2.*cos(o)));
10    v_t=@(t) (0.05*(100+N).*(100-t));
11    dodt=@(t,o) ((v_t(t))./(sqrt((400*sin(o)).^2+(r_o(o)).^2)));
12    drdt=@(o, t) (400.*sin(o).*dodt(t,o));
13    [t,o_t]=ode45(dodt,[ti:dt:tf],[0]);
14
15    %=== Tempo necessario para 3 voltas ===
16    index=find(o_t<6*pi)(end)
17    t(index)
18
19    %=== Plot dos Graficos ===
20    figure(1)
21    plot(t,o_t,'b-');
22    title('Grafico 1 - Angulo x tempo', 'FontName', 'Times', 'FontSize',
23          12)
24    ylabel('Angulo (rad)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
25    xlabel('t (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
26    grid on;
27
28    figure(2)
29    plot(t,r_o(o_t), 'b-');
30    title('Grafico 2 - Raio x tempo', 'FontName', 'Times', 'FontSize',
31          12)
32    ylabel('Raio (mm)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
33    xlabel('tempo (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
34    grid on;
35
36    figure(3)
37    plot(t, dodt(t, o_t), 'b-');
38    title('Grafico 3 - Velocidade Angular x tempo', 'FontName', 'Times',
39          'FontSize', 12)
40    ylabel('Velocidade angular (rad/s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize',
41          12)
42    xlabel('tempo (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
43    grid on;
44
45    figure(4)
46    plot(t, drdt(o_t, t), 'b-');
47    title('Grafico 4 - Derivada do raio x tempo', 'FontName', 'Times', '
48          FontSize', 12)
49    ylabel('Derivada do raio (m)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
50    xlabel('tempo (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
51    grid on;
52
53    figure(5)
54    plot(o_t, r_o(o_t), 'b-');
```



```

50 title('Grafico 5 - Raio x Angulo', 'FontName', 'Times', 'FontSize',
    12)
51 ylabel('Raio (mm)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
52 xlabel('Angulo (rad)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
53 grid on;
54
55 figure(6)
56 plot(t, v_t(t), 'b-');
57 title('Grafico 6 - Velocidade x tempo', 'FontName', 'Times', '
    FontSize', 12)
58 ylabel('Velocidade (mm/s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
59 xlabel('tempo(s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
60 grid on;
61
62 end

```

Listing 1: Código utilizado para a obtenção dos resultados

## 4 Conclusão

A prática permitiu a análise de um problema de engenharia que envolvia a resolução de uma equação diferencial ordinária de solução não trivial, de forma que se fez necessária a utilização de ferramentas computacionais para a obtenção de uma aproximação numérica da solução da EDO.

Após a obtenção da equação diferencial através de uma análise cinemática do problema, e da implementação das equações no *Octave*, a solução da EDO foi obtida facilmente com funções do software, de forma que a resolução do problema pôde ser feita com muita agilidade.

Com a solução numérica obtida para o ângulo em função do tempo, a obtenção dos gráficos das outras funções pedidas também foi rápida, outra vantagem da utilização da ferramenta.

Para a parte final da prática, em que era necessário encontrar o valor do tempo necessário para o corpo completar 3 voltas, haviam várias possibilidades de resolução, foi escolhida uma forma de implementação simples, em que o resultado desejado foi obtido com a utilização de um único comando do software.

Portanto, fica claro que a utilização de métodos numéricos e ferramentas computacionais em problemas de cinemática traz muita agilidade à resolução, além de permitir a obtenção de aproximações de problemas em que não há solução analítica.