



# Exploración Numérica: Interpolación, Optimización y Análisis de Trayectorias

Gianluca Musmarra y Bruno de Cruz

Marzo 2024

## 1. Resumen

En este experimento se ha explorado el rendimiento de una variedad de métodos de interpolación, empleando diversas técnicas. Estas investigaciones han abordado tanto la elección del método de interpolación como la selección estratégica de puntos para construir las interpolaciones resultantes, logrando reducir el error de las aproximaciones de forma significativa.

Con el fin de visualizar las posibles aplicaciones de los métodos desarrollados, se ha desarrollado un escenario ficticio que ilustra su utilidad en situaciones prácticas. Este escenario proporciona una comprensión teórica de cómo los métodos de interpolación podrían aplicarse en contextos reales.

## 2. Introducción

En numerosas ocasiones, surge la necesidad de trabajar con datos cuya función subyacente es desconocida o de aproximar una función compleja, por ejemplo, aquellas que son computacionalmente desafiantes.

Cuando nos enfrentamos a una función cuyo cálculo es complejo o disponemos únicamente de un conjunto de datos  $[(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)]$  es común asumir que los valores de  $y$ , al variar  $x$ , están relacionados por función continua tal que  $F(x)=y$ .

Podemos construir una aproximación de la función tomando un conjunto limitado de

puntos de la funcion original para luego poder estimar el resto de valores de la funcion. Obteniendo el conjunto de datos  $[(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)]$  buscaremos aproximar la funcion a traves de un polinomio. Esta eleccion se fundamenta en el *teorema de aproximación de Weierstrass*, el cual establece que, para cualquier función continua  $F(x)$  definida en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  podemos encontrar un polinomio de grado  $n$ ,  $P(x)$  que cumpla  $F(x_k) = P(x_k) = y_k \forall k = [0, 1, \dots, n]$ .

Aunque esta aproximación puede no dar exactamente el mismo resultado que la funcion original en el resto de puntos, en ciertas circunstancias, la eficiencia ganada puede superar al error introducido, dependiendo de la complejidad del problema y del metodo de interpolacion utilizado.

## 2.1. Aproximacion de funciones

Durante el desarrollo del informe, se someterán a evaluación diversas técnicas tanto en el ámbito de la interpolación como en la selección de puntos para la construcción de los polinomios. El objetivo será buscar aproximaciones que permitan representar a las siguientes funciones con la mayor precisión posible:

$$F_a(x) = 0,3^{\|x\|} \cdot \sin(4x) - \tanh(2x) + 2$$

$x$  en el rango  $[-4, 4]$

$$F_b(\mathbf{x}) = 0.75 \exp\left(\frac{-(10x_1-2)^2}{4} - \frac{(9x_2-2)^2}{4}\right) + 0.65 \exp\left(\frac{-(9x_1+1)^2}{9} - \frac{(10x_2+1)^2}{2}\right) \\ + 0.55 \exp\left(\frac{-(9x_1-6)^2}{4} - \frac{(9x_2-3)^2}{4}\right) - 0.01 \exp\left(\frac{-(9x_1-7)^2}{4} - \frac{(9x_2-3)^2}{4}\right)$$

$x_1, x_2$  en el rango  $[-1, 1]$

## 2.2. Análisis de Trayectorias

En el marco del otro experimento, se ha emprendido la tarea de obtener la interpolación de diversos puntos, adquiridos intermitentemente a través de un sistema de posicionamiento global (GPS), que describen el movimiento de un vehículo. A partir de esta información, se formulará una interpolación de la trayectoria del primer vehículo y se contrastará con su trayectoria real. Posteriormente, se empleará la información de otro vehículo para nuevamente interpolar su trayectoria y encontrar un punto de intersección con el recorrido del vehículo anterior. Estos puntos serán registrados en archivos en formato .CSV y representan una función de la forma  $f : (t) \rightarrow (x, y)$  Este enfoque busca determinar con precisión los puntos de intersección entre las trayectorias de los vehículos mediante la combinación de técnicas de interpolación y análisis de datos.

## 3. Metodos utilizados

En el proceso de aproximacion de ambas funciones como para la aplicacion en el escenario planteado fue imprescindible recurrir a una variedad de metodos ya establecidos. Es importante mencionar que cuando interpolamos una funcion, en la mayoria de casos,

cometeremos un error al evaluarla en los puntos no interpolados, para que se cumpla la igualdad, debemos sumar el error cometido en cada aproximacion,  $F(x_o) = P(x_o) + E(x_o)$  si conocemos la funcion en cuestion, el error cometido sera  $\pm |F(x_o) - P(x_o)|$ . Cuando no se dispone de información sobre la función, se hace necesario recurrir a métodos auxiliares para generar una estimación del error. Sin embargo, los detalles de estos métodos no serán abordados en este informe.

### 3.1. Interpolacion con polinomio de Lagrange

Dado una serie de puntos pertenecientes al dominio de una funcion  $F(x)$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  existe un unico polinomio de hasta grado  $n+1$  que cumple

$$F(x_k) = P(x_k) \quad \forall k = [0, 1, \dots, n]$$

El metodo de interpolacion de Lagrange consiste en utilizar ese unico polinomio para aproximar la funcion, definiendo

$$P(x) = \sum_{k=1}^n F(x_k) L(n_k)$$

siendo las bases de Lagrange

$$L(n_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Observar que  $L_{n,k}(x_i) = 0$  cuando  $i \neq k$   $L_{n,k}(x_i) = 1$  cuando  $i = k$ , cumpliendo este  $F(x_k) = P(x_k) = y_k \quad \forall k$  en el rango  $[0, 1, \dots, n]$ .

### 3.2. Interpolacion a trozos

Debido a la posibilidad de que la utilización de un único polinomio provoque oscilaciones significativas en algunas regiones, se recurre comúnmente a técnicas de interpolación a trozos. Esta metodología implica la división del intervalo principal en subintervalos, seguida de la aplicación de una interpolación por partes en cada uno de ellos.

La interpolacion lineal es un caso particular de la interpolación general de newton. Dada la serie de puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dividideremos en  $n-1$  sub intervalos, conectando los puntos consecutivos con lineas rectas. Es importante tener precaucion al utilizar este metodo, ya que puede producir una funcion no suave en el intervalo  $[x_1, x_n]$ , sin embargo, para los propósitos de este informe, esta característica no es relevante.

Similarmente podemos llevar esta idea a  $\mathbb{R}^2$ , la interpolacion bilineal amplia la interpolacion lineal para aproximar funciones de dos variables. En este metodo, se realiza una interpolacion lineal primero en una direccion y luego en otra. Aunque cada paso individual es lineal, la combinacion de ambos produce un efecto cuadratico en la interpolacion final, lo que permite una mejor aproximacion de la superficie subyacente. Para construir las aproximaciones

de  $F(x)$  necesitaremos 4 puntos,  $a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_1, y_2), a_3 = (x_2, y_1), a_4 = (x_2, y_2)$ , donde

$$F(x) \approx \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (f(a_1)(x_2 - x)(y_2 - y) + f(a_3)(x - x_1)(y_2 - y) + f(a_2)(x_2 - x)(y - y_1) + f(a_4)(x - x_1)(y - y_1))$$

Los splines cubicos son una tecnica de interpolacion que aproxima mediante el uso de polinomios cubicos cada segmento del intervalo original. Para garantizar una transición suave entre los segmentos, se imponen condiciones adicionales, como la continuidad de la primera y segunda derivada en los puntos de unión de los segmentos. Esto significa que no solo los valores de la función coinciden en los puntos de unión, sino también sus derivadas primera y segunda, lo que garantiza una transición suave y continua entre los segmentos.

Podemos llevar esta misma idea a  $\mathbb{R}^2$ , la interpolacion bicubica es una extension del concepto de interpolacion cubica para aproximar funciones en un espacio bidimensional. Similarmente, las ventajas obtenidas con la interpolacion cubica se ven reflejadas en este metodo.

Similarmente, La interpolación quíntica en varias variables es una técnica utilizada para aproximar funciones en un espacio de varias dimensiones utilizando polinomios de quinto grado.

### 3.3. Polinomios de Chebyshev

Al momento de elegir los puntos para interpolar una funcion en un determinado rango, los polinomios de Chebyshev suelen ser un metodo candidato debido a su capacidad de minimizar el error maximo de aproximacion de funciones en el intervalo dado, principalmente en los bordes del intervalo. Estos son definidos de forma recursiva,

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

n representando el grado del polinomio. Es importante mencionar que este metodo genera polinomios en el intervalo  $[-1, 1]$ , por lo que es necesario escalar adecuadamente los puntos para ajustarlos a otros intervalos. Similarmente, Este concepto se puede llevar a funciones de dos variables, a traves de los polinomios de Chebyshev bivariados, estos son definidos de forma recursiva,

$$T_{mn}(x, y) = T_m(x) \cdot T_n(y)$$

donde  $m$  y  $n$  son los grados de los polinomios de Chebyshev en las variables  $x$  e  $y$ .

### 3.4. Método de Newton-Raphson en dos Dimensiones

El método de Newton-Raphson es una técnica ampliamente utilizada para encontrar raíces de funciones no lineales. Su formulación original está diseñada para una dimensión y se basa en la idea de aproximar la raíz de una función mediante iteraciones sucesivas. Sin embargo, cuando nos enfrentamos a problemas en dos dimensiones, donde buscamos la intersección entre dos funciones, necesitamos adaptar el método para trabajar en un

espacio bidimensional.

Supongamos que tenemos dos funciones  $f : (t) \rightarrow (x, y)$  y  $g : (t') \rightarrow (x, y)$  que deseamos intersectar para encontrar los puntos donde se cruzan. Para ello, podemos aplicar una extensión del método de Newton-Raphson que nos permita encontrar estos puntos de intersección. Para ello, empleamos la parametrización de  $t$  para definir funciones a partir de este parámetro. Por ejemplo,  $f(t)$  se puede descomponer en  $(x_1(t), y_1(t))$ , mientras que  $g(t')$  sería igual a  $(x_2(t'), y_2(t'))$ .

La formulación bidimensional del método de Newton-Raphson se fundamenta en la idea de linealizar las funciones  $f$  y  $g$  alrededor de una estimación inicial  $(t_n, t'_n)$ , y posteriormente resolver el sistema lineal resultante para obtener una mejor aproximación de la intersección. Estos instantes marcarían el momento en el cual las dos funciones se intersectan; no necesariamente deben ser en el mismo instante. La fórmula de iteración se expresa como:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_n \\ t'_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_1(t_n) & -x'_2(t'_n) \\ y'_1(t_n) & -y'_2(t'_n) \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} x_1(t_n) - x_2(t'_n) \\ y_1(t_n) - y_2(t'_n) \end{pmatrix}$$

Este proceso se repite iterativamente hasta que se alcanza una convergencia adecuada o se alcanza un número máximo de iteraciones predefinido. Las coordenadas  $(t_{n+1}, t'_{n+1})$  evaluadas en sus respectivas funciones proporcionan una mejor aproximación de la intersección de las dos funciones correspondientes.

## 4. Experimentos numericos

Todas las implementaciones fueron computadas utilizando el lenguaje de programacion Python.

### 4.1. Implementacion de aproximaciones de funcion

Para analizar el comportamiento de las aproximaciones, se han cambiado los criterios en la eleccion de puntos interpolados utilizando los mismos metodos de interpolacion. En primer lugar se han aproximado todas las funciones utilizando puntos equiespaciados, en segundo lugar se ha acudido a los polinomios de Chebyshev para la eleccion de los puntos interpoladores.

Se ha implementado la interpolacion de lagrange sobre  $F_a(x)$ . Se ha utilizado la funcion *lagrange* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer argumento una serie de 10 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  y como segundo argumento  $F_a(x)$  evaluada en sus respectivos puntos. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{lga}(x)$ .

Se ha implementado la interpolacion lineal sobre  $F_a(x)$ . Se ha utilizado la funcion *interp1d* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer argumento una serie de 10 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  y como segundo argumento  $F_a(x)$  evaluada en sus respectivos puntos. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{lla}(x)$ .

Se ha implementado la interpolacion bilineal sobre  $F_b(\mathbf{x})$ . Se ha utilizado la funcion *interp2d* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer y segundo argumento una serie de 49 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{49})$ , como tercer argumento  $F_b(\mathbf{b})$  evaluada en sus respectivos puntos, y como cuarto argumento la cadena 'linear'. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{lvb}(X)$ .

Se ha implementado la interpolacion mediante splines cubicos sobre  $F_a(x)$ . Se ha utilizado la funcion *CubicSpline* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer argumento una serie de 10 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  y como segundo argumento  $F_a(x)$  evaluada en sus respectivos puntos. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{sca}(x)$ .

Se ha implementado la interpolacion bicubica sobre  $F_b(\mathbf{x})$ . Se ha utilizado la funcion *interp2d* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer y segundo argumento una serie de 49 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{49})$ , como tercer argumento  $F_b(\mathbf{x})$  evaluada en sus respectivos puntos, y como cuarto argumento la cadena 'cubic'. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{lub}(X)$ .

Se ha implementado la interpolacion quintica sobre  $F_b(\mathbf{x})$ . Se ha utilizado la funcion *interp2d* de la libreria *scipy.interpolate*, introduciendo como primer y segundo argumento una serie de 49 puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{49})$ , como tercer argumento  $F_b(\mathbf{x})$  evaluada en sus respectivos puntos, y como cuarto argumento la cadena 'quintic'. Para los analisis posteriores llamaremos a este polinomio  $P_{luq}(X)$ .

Para la generacion de los polinomios de Chebyshev se ha utilizado la funcion *chebpts1* de la libreria *numpy.polynomial.chebyshev*. Para la generacion de los polinomios de Chebyshev bivariados se ha utilizado la funcion *create-chebyshev-samples* de libreria *chaospy*.

Es importante tener en cuenta que en el caso de  $F_b(\mathbf{x})$ , al interpolar una funcion de dos variables, interpola mediante una grilla de todas las combinaciones posibles entre los puntos de  $x_1$  y  $x_2$  ingresados, es decir, se interpolaron las aproximaciones con  $49^2$  puntos totales.

## 4.2. Análisis de trayectorias de diversos cuerpos

Se reciben tres archivos en formato .CSV, cada uno de los cuales representa distintas trayectorias. Uno de estos archivos contiene los datos recopilados por el sistema de posicionamiento global (GPS) de un vehículo específico. El segundo archivo, denominado "Ground Truth" (verdad absoluta), presenta la misma trayectoria que el primero, pero con una cantidad considerablemente mayor de datos, lo que proporciona una representación más precisa del recorrido. El tercer archivo, por su parte, exhibe la trayectoria de otro vehículo con el cual se intersecta la trayectoria del primer vehículo.

Los puntos se encuentran estructurados de acuerdo al siguiente formato: el conjunto de datos consta de  $\mathcal{N}$  filas y 2 columnas, lo que resulta en una representación de los datos como una matriz de dimensiones  $(\mathcal{N}, 2)$ . Los puntos derivados del primer vehículo se presentan en una disposición de  $(10, 2)$ , mientras que los puntos reales correspondientes a dicho vehículo adoptan una disposición de  $(100, 2)$ . En cuanto al segundo vehículo, los datos se encuentran organizados en una matriz con una configuración de  $(4, 2)$ .

Además de los puntos obtenidos de los archivos .CSV, hemos empleado la función *np.linspace* de la biblioteca *numpy* para generar una cantidad uniforme de puntos que se utilizarán para trazar gráficamente entre la primera interpolación y su función real. Posteriormente, para representar gráficamente la intersección, hemos empleado los puntos creados con *linspace*, lo cual nos ha permitido generar múltiples puntos equiespaciados para trazar la interpolación de las funciones dentro del rango especificado.

En lo que respecta a la interpolación de las funciones, hemos elegido utilizar el método de splines cúbicos mediante la función *CubicSpline* de la biblioteca *numpy*. Para calcular el error entre las mediciones del primer vehículo y la realidad, hemos evaluado la interpolación en un rango de puntos equiespaciados y obtuvimos el error absoluto de la norma, evitando aquellos puntos donde coinciden y centrándonos en el error a lo largo de la función. Para determinar la intersección de las trayectorias, hemos recurrido al método de *Newton-Raphson* haciendo algunas modificaciones ya explicadas en la sección 3.4.

## 5. Resultados y análisis

### 5.1. Error relativo cometido en las aproximaciones

Se han evaluado las diferentes funciones de interpolación en diferentes puntos a través de los intervalos dados y se estudió el error relativo cometido entre las aproximaciones y los valores obtenidos por las funciones originales.

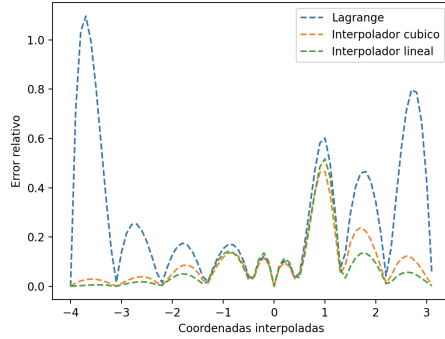


Figura 1: Error relativo de aproximar  $F_a(x)$  con puntos equiespaciados

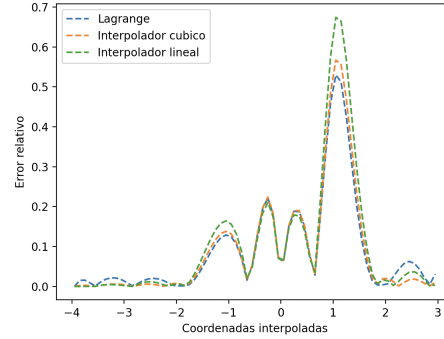


Figura 2: Error relativo de aproximar  $F_a(x)$  con polinomios de Chebyshev.

En la figura 1 podemos observar como las aproximaciones obtenidas por  $P_{la}(x)$  fueron las menos acertadas, presentando notables desviaciones principalmente en los bordes del intervalo, tanto  $P_{sca}(x)$  como  $P_{lla}(x)$  fueron las aproximaciones mas precisas, ambas difiriendo principalmente en el medio del intervalo.

En la figura 2 podemos ver como tanto  $P_{lga}(x)$ ,  $P_{sca}(x)$  y  $P_{lla}(x)$  mostraron una precision en la aproximacion similar a lo largo de todo el intervalo, difiriendo del valor original principalmente en el medio del intervalo.

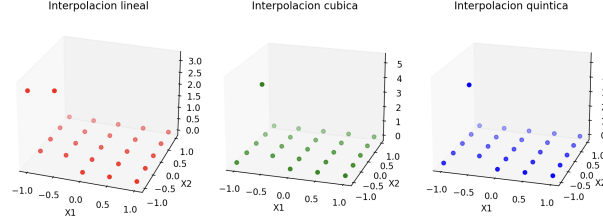


Figura 3: Error relativo de aproximar  $F_b(x)$  con puntos equiespaciados

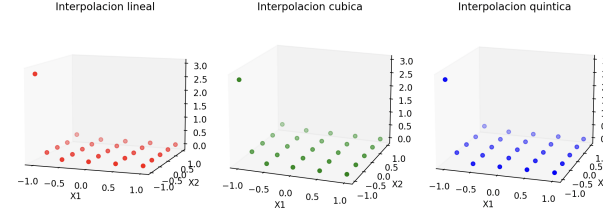


Figura 4: Error relativo de aproximar  $F_b(x)$  con polinomios de Chebyshev

En la figura 3 y 4 podemos observar como tanto  $P_{lib}(x)$ ,  $P_{lla}(x)$  y  $P_{llq}(x)$  un comportamiento similar, teniendo un error relativo bastante bajo, pero con algunos casos de error alto, principalmente cerca de los bordes del intervalo, aunque en la cuarta figura la desviacion fue menor.

## 5.2. Interpolación de Trayectorias de Vehículos para Identificar Intersecciones

En la fase inicial del experimento, se persiguió el propósito fundamental de aproximar la función interpolada a la función real subyacente. Esta meta se llevó a cabo mediante la interpolación de las funciones y el cálculo subsiguiente del error absoluto a lo largo de la misma. Los resultados de este proceso se exhiben en los gráficos presentados a continuación. El error promedio obtenido, aproximadamente de 0,61, redondeado con precisión a dos decimales.

En el segundo experimento, el objetivo consistió en buscar la intersección entre una nueva trayectoria y la trayectoria interpolada en el punto anterior. La intersección obtenida se ubicó en las coordenadas (8,10,3,53). Posteriormente, se determinaron los valores



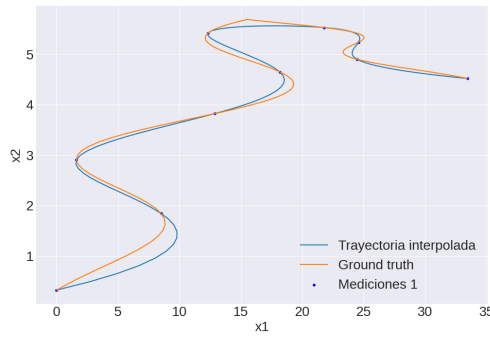


Figura 5: Interpolación de Trayectoria 1 con Ground Truth (La función Real)

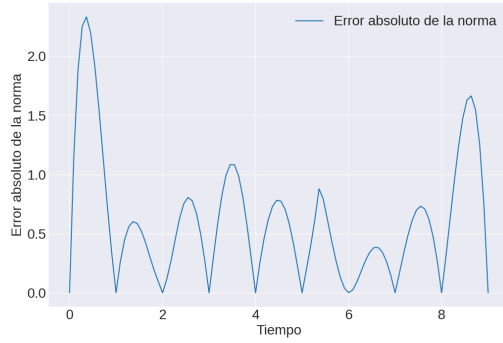


Figura 6: Error absoluto de la norma a lo largo de la funcion

de  $t$  y  $t'$ , los cuales resultaron ser  $(2,66, 0,67)$ , con todos los resultados aproximados a dos decimales. El error aproximado de la norma de la intersección de la segunda trayectoria con la trayectoria verdadera es de  $0,091$ , aproximado a tres decimales, en los puntos  $(7,98, 3,57)$ , aproximado a dos decimales y los intestes de tiempo fueron  $(2,71, 0,65)$ .

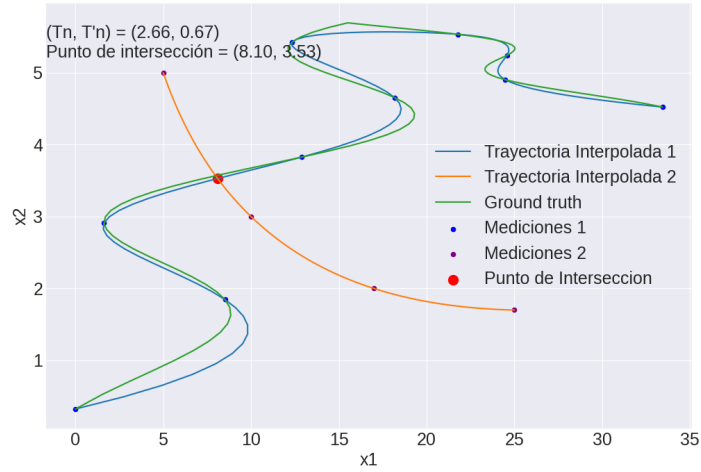


Figura 7: Interseccion entre Trayectorias interpoladas

## 6. Conclusiones

### 6.1. Eficencia de las aproximaciones

En cuanto a las aproximaciones de  $F_a(x)$ , al interpolar las funciones con puntos equiespaciados, se puede observar como las aproximaciones, principalmente utilizando el metodo de lagrange, mostraron un error relativo respecto al valor original significativo,

mostrando grandes desviaciones principalmente cerca de los bordes del intervalo. Este error bajo significativamente al utilizar los polinomios de Chebyshev, podemos observar como, aunque la lineal haya perdido un poco de precision en los puntos del medio del intervalo, el comportamiento general de las tres aproximaciones mostro una semejanza mas importante a la funcion original, reduciendo drasticamente el error cometido en los bordes del intervalo. Se vio reflejado la capacidad mencionada previamente de los polinomios de chebyshev para reducir el error cometido principalmente en los bordes del intervalo, un error muy comun al aproximar funciones.

Un desempeño similar se observa en las aproximaciones de  $f_b(\mathbf{x})$  al interpolar la función con puntos equiespaciados. En general, se aprecia un error relativo bastante bajo respecto a la función original, sin embargo, las tres aproximaciones mostraron picos de desviación bastante elevados, siendo la interpolación cúbica y quintica las que más se desviaron. Con la implementación de los polinomios de Chebyshev bivariados, el desempeño general de la aproximación mostró un comportamiento similar al caso anterior. Tanto los picos de desviación de la interpolación cúbica como la quintica se redujeron aproximadamente en un factor de 2, mientras que la interpolación lineal mostró una reducción en los picos previamente vistos. Nuevamente, se puede concluir que la implementación de estos polinomios reduce significativamente el error cometido.

## 6.2. Calculo de interseccion de trayectorias

Tras realizar los experimentos y analizar los resultados obtenidos, se pueden extraer varias conclusiones significativas. En primer lugar, se observa que la interpolación aplicada logró aproximarse adecuadamente a la función real, como se evidencia en la comparación del error absoluto promedio. Este hecho sugiere la efectividad del método empleado para representar la función original. Además, el hallazgo de la intersección entre la nueva trayectoria y la trayectoria interpolada en el segundo experimento respalda la precisión de la interpolación realizada. Este resultado confirma la utilidad y la validez de la técnica utilizada para modelar y predecir el comportamiento de los datos. En conjunto, estos hallazgos subrayan la importancia de las técnicas de interpolación como herramientas fundamentales en el análisis y la predicción de fenómenos basados en datos, ofreciendo así perspectivas prometedoras para su aplicación en una variedad de campos científicos y tecnológicos.

## 7. Referencias:

Para más información sobre análisis numérico, consulta el libro de Burden, Faires y Burden [1].

## Referencias

- [1] Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2015). *Numerical Analysis*. Cengage Learning.
- [2] Código en GitHub: <https://github.com/BrunoDC-dev/Metodos-numericos/tree/main/TP1>