CAN: LAB1

Esercizio 1.
Abbiamo dimostrato che la matrice A di dimensione $(N-1)\times(N-1)$ definita come segue

$$A = \text{tridiag}(-1\,,\, 2+h^2\sigma_i\,,\, -1)\,, \tag{1}$$

dove si suppone che $\sigma_i \geq 0, i = 1,\ldots,N-1$, risulta sdp oltre che tridiagonale. Adattare efficientemente l'algoritmo di Thomas sotto riportato per calcolarne la fattorizzazione LDL^T.
Algoritmo di Thomas per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale e fattorizzabile LU:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_n & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

Algoritmo

$u_1 = d_1;$
for $i = 2,\ldots,n$
  $\ell_i = c_i/u_{i-1}\,;$
  $u_i = d_i - \ell_i b_{i-1}\,;$
end for

Esercizio 2.
Assumendo che A sia la matrice sopra definita, risolvere convenientemente (sia dal punto di vista dell'occupazione di memoria che dei calcoli) il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando la precedente fattorizzazione.

Esercizio 3.
Approssimare la soluzione del seguente problema ai limiti modello

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma(x)u(x) = f(x), \qquad x \in (a\,,\,b)\,, \qquad \sigma(x) \geq 0 \\ u(a) = g_a\,,\; u(b) = g_b \end{cases} \tag{2}$$

utilizzando il metodo delle differenze finite (con passo di discretizzazione h costante). Utilizzare a tale scopo quanto fatto negli esercizi precedenti. Verificare inoltre che l'errore $e_h = \max_i |u(x_i) - u_i|$ è un $O(h^2)$.

Esercizio 4.
Verificare che entrambe le seguenti formule alle differenze finite permettono di approssimare $u'(x)$ al secondo ordine:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}\,, \qquad u'(x) \approx \frac{-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)}{2h}\,.$$

Esercizio 5.
Verificare che la norma dell'inversa della matrice $A_m \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (condizione sinistra di Neumann) che si ottiene inizializzandola a zero e quindi ponendo $A_m(2:N, 2:N) = A/h^2$, con A definita in (1), e

$$A_m(1, 1:3) = [-3\,, 4\,, -1]/(2h)\,, \quad A_m(2,1) = -1/h^2$$

rimane limitata indipendentemente da h.

Esercizio 6.
Approssimare la soluzione della variante del problema definito in (2) nella quale la condizione di Dirichlet $u(0) = g_0$ viene sostituita dalla condizione di Neumann $u'(a) = g'_a$. Utilizzare a tale scopo l'approssimazione decentrata in avanti della derivata prima introdotta nell'Esercizio 5.