LABORATORIO 5

Esercizio 1.
Sia A una matrice sdp pentadiagonale, memorizzabile in tre vettori $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}\,$, con

$$a_i = A(i,i),\ b_i = A(i,i-1),\ c_i = A(i,i-2)\,.$$

Sia LDL^T la sua fattorizzazione con L bidiagonale inferiore a diagonale unitaria e D diagonale. Scrivere una function che esegue i seguenti punti:

- riscrive sui vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ la parte significativa della L e su $\mathbf{a}$ quella di D (utilizzare l'algoritmo sotto);
- risolve efficientemente il sistema lineare $L\mathbf{z} = \mathbf{T}\,$, quindi il sistema $D\mathbf{y} = \mathbf{z}$ e infine $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}\,$.

Input: $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$: vettori di $n \geq 4$ componenti contenenti le parti significative della A;

$$
\begin{array}{l}
j = 1;\\
b(j+1) = b(j+1)/a(j);\\
c(j+2) = c(j+2)/a(j);\\
j = 2;\\
w = b(j) * a(j-1)\,;\\
a(j) = a(j) - b(j) * w\,;\\
b(j+1) = (b(j+1) - c(j+1) * w)/a(j)\,;\\
c(j+2) = c(j+2)/a(j)\,;\\
\textit{for } j = 3, \ldots, n-2\\
\quad v = c(j) * a(j-2)\,;\ \ w = b(j) * a(j-1)\,;\\
\quad a(j) = a(j) - c(j) * v - b(j) * w\,;\\
\quad b(j+1) = (b(j+1) - c(j+1) * w)/a(j)\,;\\
\quad c(j+2) = c(j+2)/a(j)\,;\\
\textit{end for}\\
j = n-1;\\
v = c(j) * a(j-2)\,;\ \ w = b(j) * a(j-1)\,;\\
a(j) = a(j) - c(j) * v - b(j) * w\,;\\
b(j+1) = (b(j+1) - c(j+1) * w)/a(j)\,;\\
j = n;\\
v = c(j) * a(j-2)\,;\ \ w = b(j) * a(j-1)\,;\\
a(j) = a(j) - c(j) * v - b(j) * w\,;
\end{array}
$$

Output: $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$: vettori di n componenti contenenti le parti significative della D e della L;

Esercizio 2.
Scrivere una function che risolve numericamente il seguente problema ai limiti modello:

$$-u''(x) + \sigma u(x) = f(x)\,, \quad x \in (a, b)\,, \quad + b.c., \quad \sigma > 0\,,$$

mediante il metodo degli elementi finiti quadratico con passo costante. Come condizioni ai limiti, prevedere di poter utilizzare in ciascun estremo una condizione di Dirichlet, di Neumann o di Robin. A tale scopo:

- utilizzare un rilevamento del dato al bordo di tipo polinomiale, in modo da considerare poi condizioni omogenee agli estremi;
- utilizzare la tecnica di assemblaggio della matrice di stiffness (ricordare che è pentadiagonale simmetrica) e del vettore di carico *element–by–element;*
- usare la function predefinita in Matlab *integral* per approssimare gli elementi del vettore di carico;
- utilizzare la function sviluppata al punto precedente per risolvere il sistema lineare cui si perviene.

Tenere inoltre presente che

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{I}_0 = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.
Modificare lo script Matlab sviluppato nel Laboratorio 4 per testare le function sviluppate per gli Esercizi 1 e 2. Aggiungere anche il seguente test a quelli proposti in precedenza:

$$-u''(x) + u(x) = 0\,, \quad x \in (0\,,\,1)\,, \quad 2u(0) - 5u'(0) = -3;\; u'(1) = exp(1).$$