LABORATORIO 3

Esercizio 1.
In uno stesso file con estensione .m inserire due function delle quali la seconda sia una sottoprocedura della prima e contenga l'implementazione Matlab del metodo di Thomas per la risoluzione di un sistema tridiagonale (prevedere in uscita una variabile di tipo stringa che segnala se l'algoritmo ha avuto buon esito o no). Nella prima function (quella visibile dall'esterno) implementare la risoluzione numerica di un problema ai limiti non lineare per il problema di Dirichlet

$$u''(x) = F(x, u(x), u'(x))\,, \quad x \in (a,b)\,, \quad u(a) = g_a\,, \quad u(b) = g_b\,,$$

mediante il metodo DFC con passo costante. A tale scopo utilizzare il metodo di Newton combinato al criterio di arresto ibrido:

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_\infty \le tol \cdot (1 + \|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty)\,, \quad \text{con } tol = 10^{-10}\,.$$

In caso di fallimento di Thomas, prevedere di risolvere il sistema lineare con il comando backslash.

Esercizio 2.
Scrivere uno script Matlab che testi le function sviluppate per l'Esercizio 1 per approssimare numericamente la soluzione dei seguenti tre problemi test:

$$\begin{aligned}
1)u'' &= 50u' + \arctan(u) + u - \arctan(\tfrac{x}{x+1}) - \tfrac{x^3+2x^2+51x+52}{(x+1)^3}\,,\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0.5\,,\\
2)u'' &= -2\sin u + \tfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} + 2\sin\tfrac{1}{x^2+1}\,,\ u(0) = 1\,,\ u(1) = 0.5\,,\\
3)u'' &= \tfrac{1}{2}\,(x+1+u)^3\,,\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,,
\end{aligned}$$

le cui soluzioni esatte sono le seguenti

$$1)\,u(x) = \frac{x}{x+1}\,, \quad 2)\,u(x) = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad 3)\,u(x) = \frac{2}{2-x} - x - 1\,.$$

Prevedere di poter far girare lo script con $N = (b-a)/h$ assegnato dall'utente o anche di ripeterne l'esecuzione per N uguale a 16, 32, 64, 128, 256. In entrambi i casi graficare la soluzione esatta (per $N = 256$ nel secondo caso) e la corrispondente soluzione numerica riportando nel grafico anche le seguenti informazioni:

- errore massimo sulla mesh;
- numero di iterazioni di Newton eseguite;
- numero di fallimenti di Thomas.

Nel secondo caso, per ogni valore considerato di N, riportare su un file di report il corrispondente errore (esaminare a tale scopo i comandi fopen, fclose e fprintf).