LABORATORIO 2

Esercizio 1.
Generalizzare la function Matlab costruita per implementare il metodo C-FD per il problema modello al caso del seguente problema modello generalizzato,

$$-(\mu(x)u'(x))' + \sigma(x)u(x) = f(x),\ x \in (0\,,\,1) \quad u(0) = g_0\,, \quad u(1) = g_1\,,$$

con $\mu > 0$ e $\sigma \geq 0$. Utilizzare a tale scopo la mesh ausiliaria per valutare μ. Servirsi dell'algoritmo di Thomas simmetrico per fattorizzare LDL^t la matrice del sistema lineare cui si perviene (tridiagonale simmetrica).

A matrice $n \times n$ tridiagonale simmetrica avente il vettore $\mathbf{d}$ sulla diagonale principale e $\mathbf{b}$ sulla sopradiagonale.

Algoritmo di Thomas simmetrico

Input: $\mathbf{d}\,,\mathbf{b}$
$u_1 = d_1;$
for $i = 2, \ldots, n$
$\ell_i = b_{i-1}/u_{i-1}\,;$
$u_i = d_i - \ell_i b_{i-1}\,;$
end for
Output: $\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\ell}$

Esercizio 2.
Scrivere uno script Matlab che calcola e disegna il grafico della soluzione esatta e dell'approssimazione alle differenze finite del problema di diffusione-trasporto seguente:

$$-\mu u''(x) + \gamma u'(x) = 0,\ x \in (0\,,\,1) \quad u(0) = 0\,, \quad u(1) = 1\,,$$

presupponendo che entrambi i coefficienti μ e γ siano positivi. Consentire all'utente di scegliere fra lo schema C–FD e lo schema upwind. Nel grafico inserire una legenda dove si riporta il numero di intervalli utilizzati e il tipo di schema. Riportare sotto l'asse x il valore della norma infinito dell'errore in formato esponenziale.

Esercizio 3.
Scrivere una function che implementa il metodo C–FD per il problema ADR di Dirichlet. Utilizzare l'algoritmo di Thomas per il calcolo della fattorizzazione LU della matrice del sistema lineare cui si perviene, prevedendo di arrestarlo quando l'algoritmo genera una divisione per zero.

Algoritmo di Thomas

Input: $\mathbf{d}\,,\mathbf{b},\mathbf{c}$
$u_1 = d_1;$
for $i = 2, \ldots, n$
  $\ell_i = c_i/u_{i-1}\,;$
  $u_i = d_i - \ell_i b_{i-1}\,;$
end for
Output: $\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\ell}$

Esercizio 4.
Scrivere uno script Matlab che testi la function sviluppata per l'Esercizio 2 per approssimare numericamente la soluzione dei seguenti due problemi test:

$$1)\begin{cases} -u'' + e^x u' + u = \sin x(1 - 2e^{-x}) + \cos x(e^x + e^{-x} - 1) \\ u(0) = 1\,,\ u(\pi) = -e^{-\pi} \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -u'' + (x+1)^2 u' + \frac{1}{(x+1)^2} u = 1 + \frac{2+x}{(x+1)^3} \\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0.5 \end{cases}$$

le cui soluzioni esatte sono

$$1)\, u(x) = \sin x + e^{-x}\cos x\,, \qquad 2)\, u(x) = \frac{x}{x+1}\,.$$